T.C.
KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

ORİNYASYENLERDEN GOTTLOB FREGE'YE KARDİNAL SAYILAR VE ARİTMETİĞİN KÜME KAVRAMIYLA TEMELLENDİRİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖKMEN AKÇA

ANABİLİM DALI: FELSEFE
PROGRAM : FELSEFE

DANIŞMAN: DOÇ.DR. AYSEL DOĞAN

KOCAELİ – 2012

T.C.
KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

ORİNYASYENLERDEN GOTTLOB FREGE'YE KARDİNAL SAYILAR VE ARİTMETİĞİN KÜME KAVRAMIYLA TEMELLENDİRİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tezi Hazırlayan: GÖKMEN AKÇA
Tezin Kabul Edildiği Enstitü Yönetim Kurulu Tarihi ve No: 04.07.2012 – 2012/13

Prof. Dr. Sinan ÖZBEK	Doç. Dr. Aysel DOĞAN	Yrd. Doç. Dr. Deniz KANIT

KOCAELİ - 2012

ÖNSÖZ

İki nokta arasını doldurmakta her zaman zorlanan biri olarak ben, noktasız başlayan bu cümlede elbette beni noktalar arasına sıkıştırmadan her zaman destekleyen aileme teşekkür etmek isterim. Bu bir türlü bitmek bilmeyen çalışma onlara ithaf edilmiştir. Ayrıca tez danışmanım Doç. Dr. Aysel Doğan'a ilham verici övgüleri için, Prof. Dr. Sinan Özbek ve Yrd. Doç. Dr. Deniz Kanıt'a jüri üyeliğini kabul ettikleri için teşşekkürü bir borç bilirim.

Kocaeli, 2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Orinyasyenlerin sayı kavrayışından Gottlob Frege'nin aritmetik felsefesine tek bir şey hiç değişmedi: kardinal sayıların ordinal sayılara önceliği. Bu çalışmanın konusu yalnızca budur.

ABSTRACT

From Aurignacians to Gottlob Frege only one thing has not changed: the priority of cardinal numbers to ordinal ones. This is the only subject of this study.

GİRİŞ

Aritmetiğin nesneleri gerçek varlıklar mıdır? Bu sorunun yanıtı ister evet olsun ister hayır, her bir cevap için farklı felsefi bir yol izlenebilir. Aritmetiği gerçek nesne olarak kabul eden filozoflar arasındaki tartışma en az realizm-antirealizm tartışması kadar geniştir. Söz konusu aritmetik olduğunda bu tartışmalar ayrıca bir yöntem tartışmasına dönüşür. Çünkü eğer onlar gerçek varlıklarsa onların bilgisini edinmek için nesnel bir yöntem de bulunabilir olmalıdır. Fakat en azından sezgisel kesinliği her zaman övülmüş olan aritmetiğin nesnel bir yöntemi bugüne kadar sağlanamamıştır ve böyle oldukları iddia edilenlerinse her zaman kusurlu oldukları gösterilmiştir.

Gottlob Frege mekanik bir yöntem üzerine değil doğrudan aritmetiğin nesnelerinin ne olduğu üzerine düşünerek matematikçiler arasında farklı bir konumda yer alır ve onun bu tutumu onun aynı zamanda bir filozof olarak görülmesini sağlar. Frege aritmetiğin temelini kesin bir şekilde kurmak ister. Bunun için öncelikle kendisinden önce daha çok filozoflarca dile getirilen tartışmaları ele alır ve her birini yanıtlamaya çalışır. Böylece Frege kökeni Antik Yunan'a dayanan realizm-antirealizm tartışmasının içine dalar ve tercihini realizmden yana yapar. Ona göre Aritmetiğin nesneleri gerçek birer nesnelerdir fakat onlar ne zihinde ne de duyusal şeylerdedir. Aritmetiğin nesnesi dilin mantıksal yapısı çözümlendiğinde kendisini belli eder. Böylece o mantıksal bir temeli olması nedeniyle nesnel bir varlık olarak belirir. Frege bu araştırmayı yaparken mantığa ait olduğunu düşündüğü küme kavramını ele alır ve bir sayı belirten bir tümcedeki özne ve yüklemin birbiriyle eşitlik ilişkisinde yer aldığını ve bu eşitlik ilişkisinin her iki tarafındaki kavramların kardinal sayı belirten birer küme olarak düşünülebileceğini söyler.

Frege aritmetiğin temel sorusunun kardinal sayıların tanımlanmasının mı yoksa tanımlanmadan bırakılmasının mı gerektiğine dair olduğunu düşünür. Bu çalışma bu soru dikkate alınarak kardinal sayıların ilkel toplumlardan Antik Yunan'a ve en sonunda Gottlob Frege ile aritmetiğin temellendirilmesinde nasıl bir role sahip olduğunu araştırmayı amaçlar. Böylece ordinal sayılardan bahsetmek de kaçınılmaz bir hale dönüşmüştür.

Kardinal ve ordinal sayılar arasındaki karmaşık ilişki her bir bölümde kendini hissettirdiğinden, Wittgenstein'ın öğüdüne uyularak oldukça dikkatli bir incelemeyle mümkün olduğunca az ve çelişkisiz şeyler söylenmeye çalışıldı. Fakat sayıları tarihin karanlık çağlarından itibaren ele alan bu çalışmada, karanlığın sadece tarihe özgü olmadığı, matematik felsefesi söz konusu olduğunda atılan her adımda düşünceye eşlik ettiği de görüldü. Böylece çelişkiler ve paradokslar çalışmanın konusunu esir alırcasına kendilerini öne çıkardılar. Euclides-dışı geometriler, Gödel Kanıtlamaları, temel kavramların tanımlanması sorunu, Russell Paradoksu gibi matematik felsefesini çekiştirip duran haylaz çocuklara bu çalışmayla birlikte bir de Sayma Paradoksu eklenmiş oldu ve Sayma Paradoksu, ordinal sayıların kardinal sayılar üzerindeki bir güç sınamasına dönüştü. Bu paradoksun kavramsallaştırılmasında, Avrupa'nın en eski sakinlerinden Orinyasyenlerin kemiklere attıkları çentiklerin, 0 gibi temel bir sayıya bile sahip olmadan ve hatta 1'i sayıdan bile saymadıkları halde matematiği bir Yunan bilimi olarak bütün matematikçilere kabul ettiren ilk filozofların da oldukça önemli katkısı oldu.

İlk bölümde sayıların tarihsel bağlamda kökleri, çeşitli kültürlerde, davranışlara ve özellikle dile yansıyan kökleri incelendi. Böylece kardinal ve ordinal sayıların, birebir eşleştirmenin ve saymanın en ilkel anlamlarının keşfedilmesi amaçlandı.

İkinci bölümde bu türlü sayıların Antik Yunan *arithmos* kavramıyla ilişkili olup olmadığı araştırıldı. Elbette ilk filozofların matematiğe bakışı felsefeden ayrı olamazdı. Bu yüzden ilk ilkeler öğretisinin felsefeden geometriye ve aritmetiğe nasıl aktarıldığı da ele alındı. Pythagoras'ın bu noktada matematiği hem teorik hem de felsefi bir düzlemde ele alarak kendinden sonrakilere hem yeni şeyler söyleme hem de eleştirilerle matematiği farklı mecralara çekme şansı tanıması onun matematik felsefesini başlangıç olarak almayı gerektirdi. Platon ve Aristoteles'in sayıları sırasıyla kardinal ve ordinal teoriler şeklinde ortaya koydukları görüldü. Onların böylece Frege'ye kadar gelen bütün ordinal ve kardinal sayı kavrayışını öncelediklerine karar verildi. Öte yandan aritmetiğin özellikle ordinal kavrayışa uygun olarak aksiyomatikleştirilmesi Euclides'in geometriyi aksiyomatikleştirmesi bağlamında ele alındı. Bunun için ilk ilkelerin Aristoteles ve Euclides ortak bir bakış açısından nasıl ortaya konduğu incelendi.

Üçüncü bölüm, daha önce de söylendiği gibi Sayma Paradoksunun kendini zorla gösterdiği kısmen bir ana teze dönüştü. Sayma Paradoksu aracılığıyla saymayı, birimleri ve sıralılığı temel alan ordinal sayı teorilerinin bir başlangıç sorununa sahip olduğu iddia edildi. Son olarak bu iddia saymayı ve birimleri sayı kavramının oluşturulmasında temel alan Kant aritmetiği üzerinde sınandı.

Son bölümde Frege'nin Aritmetiğin Temelleri adlı eseri merkeze alınarak Frege'nin sayı teorisi detaylıca incelendi.

1. SAYILARIN KÖKENİ ÜZERİNE

1.1. Sayıların Keşfi

Matematiğin yerleşik hayatla birlikte başladığı sıkça tekrarlanan bir görüştür.[1] Bu görüşe göre denilebilir ki göçebe bir yaşamın hüküm sürdüğü çok eski çağlarda insan toplulukları matematiğe kargalardan daha çok ihtiyaç duymuyordu. Onların ne sayma gibi bir alışkanlığı, ne sayılar için kullandıkları simgeleri, ne de kusursuz olmak isteyen geometrik şekilleri vardı. Öte yandan Avrupa'nın en eski sakinlerinden olan Orinyasyenlerin (Aurignacian) yaklaşık 30-40 bin yıl önce henüz avcı-toplayıcı olarak yaşamlarını sürdürürken kemiklerin üzerine birbirine paralel çentikler attıkları ve bu çentiklerle muhtemelen avladıkları hayvan sayısını veya geçen gün sayısını kaydettikleri de bilinmekte.[2] Bu durumda, eğer matematik yerleşik hayatın bir ürünüyse, yarı-göçebe Orinyasyenlerin matematiğin temel göstergelerinden biri olan saymayı andıran bu davranışlarını nasıl açıklamak gerekir? Bu soruyu yanıtlamak için öncelikle matematiğin ilk kırıntılarına kadar geri gitmek doğru olacaktır.

James Gow, matematik için sayma edimini başlangıç olarak alan, teorilerin önerdiğini ve olgularla da desteklendiğini söylediği şöyle bir tarihsel süreç tanımlar:

> İlkel insanlar, genelleme yapmayı öğrendiklerinde, saymayı da öğrenmeye başladılar. Başlangıçta sadece iki veya üç nesneden oluşan gruplarla sayabilirken daha sonra bunu beşe çıkardılar. Bu sınıra eriştiklerinde sayma aracı olarak parmaklarını kullanmayı akıl ettiler ve bu andan itibaren beşlik, onluk ve hatta yirmilik sistemi uygulamaya başladılar. Zamanla parmak-sayma hareketleri beş ve daha büyük birimler için isimler belirlenmesine neden oldu ve muhtemelen bu isimlerle ve parmakların kullanımıyla birlikte bütün sayıların hesaplanmasında ustalığa ulaşıldı.[3]

---

[1] Bkz. Morris Kline, *Mathematical Thought From Ancient To Modern Times, Volume 1*, (New York: Oxford University Press, 1990), s. 3, John Zerzan, *Gelecekteki İlkel*, çev. Cemal Atila, (İstanbul: Kaos Yayınları, 2009), s. 83-108, John Tabak, *Algebra,* (New York: Fact On File Inc., 2004), s. xi

[2] Stanislas Dehaene, *The Number Sense*, (New York: Oxford University Press, 1997), s. 95

[3] James Gow, *A Short History Of Greek Mathematics*, (London: Cambridge University Press, 2010), s. 20

Gow'un özetlediği bu süreç saymanın ve -saymanın kendisine temel olduğu kabul edildiğinde- matematiğin başlangıcına dair en genel tarihsel kabulü ifade etmektedir. Gerçekten de insan topluluklarının çok uzun bir süreç içinde, yavaş yavaş ve kademeli olarak saymayı, sayısal semboller kullanmayı öğrendiklerine dair pek çok bulgu mevcuttur.[4] Bunlara ilave olarak ilk üç sayının etimolojik kökenine dair bir irdeleme bu süreci daha çarpıcı bir biçimde ortaya koyar. Stanislas Dehaene, *Number Sense* adlı yapıtında şu bilgilere yer verir:

> "2" ve "ikinci" kelimeleri genellikle "öteki" anlamını taşır, bu durum fiil olan "ikinci" ve sıfat olan "ikinci" için de geçerlidir. "Üç" kelimesinin Hint-Avrupa kökeni onun ilk kullanımının bir çokluk ifade ettiğini gösterir ve o "çok" ve "geri kalan her şey"le eş anlamlıdır. Fransızcada "tres" (çok), İtalyancada "troppo" (çok fazla), İngilizcede "through" veya Latin ön ek "trans"ta olduğu gibi. Sonuç olarak Hint-Avrupalıların muhtemel bilgisinin sadece "1," "1 ve öteki" (2), ve "çok" (3 ve sonrası) olduğu söylenebilir.[5]

Dehaene'in bu örnekleri diğer dil aileleri için de çoğaltılabilir[6] ve insanların çok uzun bir süre matematikle hangi seviyede ilgilendiklerini göstermesi bakımından önemlidir. Denilebilir ki, atalarımız için üç ve dört arasında bir ayrım yapmak kargalardan daha çok istekli oldukları bir durum değildi. Onlar için iki nesneden sonra sadece üçüncü bir nesne değil başka her şey de geliyordu. Bu durum Hint-Avrupa dilini konuşan geç-paleolitik çağın insanları kadar onların bir kısmının muhtemel ataları[7] olan Orinyasyenler için de geçerliydi. Bu bilgiler ışığında Orinyasyenlerin en fazla Hint-Avrupalılar gibi "1", "1 ve öteki" (2) ve "çok"un (3 ve sonrası) bilincinde olduğu söylenebilir. Fakat bu durum Orinyasyenlerin kemiklere attıkları çentikleri daha da anlaşılmaz bir hale getirmektedir. Eğer sayma eylemi ancak sayılarla mümkünse, muhtemelen daha "üç" sayısına bile sahip olmayan

---

[4] Bkz. Graham Flegg, *Numbers: Their History And Meaning*, (Canada: General Publishing Company, 1983)
[5] Stanislas Dehaene, *The Number Sense*, s. 92
[6] Bkz. Georges Ifrah, *Universal History Of Numbers*, (New York, John Wiley And Sons, 2000). Levi Leonard Conant, *The Number Concept: Its Origin And Development*, (Middlesex: The Echo Library, 2007)
[7] Janos Makkay, *Before Indo-European And Uralics,* Nostratic Centennial Conference: the Pecs Papers. Pecs, 2004. s. 143-164.

Orinyasyenler'in avladıkları hayvanları veya Ay'ın evrelerini çok daha fazla sayıdaki çentiklerle eşleştirebilmeleri nasıl mümkün olabilir? Yoksa onlar sayılara sahip olmaksızın da sayabiliyorlar mıydı? Bu soruların yanıtı için bir ipucu Jean Piaget'de bulunabilir. Piaget sayı kavramının gelişiminin temelinde ilkel bir yetinin olabileceğini söyler. Piaget, sayıların, dolayısıyla sayma yetisinin nesneleri bire-bir eşleştirme yetisi sayesinde kazanıldığını düşünür ve ona göre "birebir eşleştirme ikel bir işlemdir. Bütün eski toplumlarda bu işlem ekonomik değiş tokuşun temelinde yer alır ve küçük çocuklarda onun köklerini somut işlem evresinden önce bulmak mümkündür."[8]

Piaget'nin bu varsayımını empirik olarak temellendirmek mümkün görünmese de, Orinyasyenler'in saymayı andıran davranışlarını açıklayabilmek için önemli bir katkı sağlar. Böylece Orinyasyenlerin henüz sayılara sahip olmadan da birebir eşleştirme aracılığıyla saymayı gerçekleştirdikleri söylenebilir. Fakat Piaget'nin birebir eşleştirme teorisi daha sonrasını açıklamakta yetersiz kalır. Eğer birebir eşleştirme yetisi sayma yetisiyle *doğrudan* bağlantılıysa bir kere saymaya başlandıktan sonra neden bu işlemin uzun bir süre 3 sayısını aşamadığı ve ilkel toplumların neden 3'ten sonraki sayılar için belirli isimler kullanmadığı yanıtsızdır. Öte yandan daha tatmin edici bir yaklaşım Tobias Dantzig'in, duyusal nesnelerin algılanışına eşlik eden sayısal bir kavrayışı öne süren teorisiyle elde edilebilir. Dantzig'in anahtar kavramı *sayı duyusu*dur.

1.2. Sayı Duyusu

Tobias Dantzig insanın en karanlık çağlarında bile sahip olduğunu söylediği bir duyudan bahseder. Bir duyu ki, ona sahip olmak matematik için yeterli değil ama gerekli bir koşuldur. Dantzig bu duyuyu şöyle tanımlar:

> İnsan, gelişiminin ilk evrelerinde bile, benim daha iyi bir adlandırma isteğiyle Sayı Duyusu olarak anacağım, bir yetiye sahipti. Bu yeti onun doğrudan bir bilgiye sahip olmaksızın, bir nesne küçük bir kümeye eklendiğinde veya

---
[8] Jean Piaget, *Genetic Epistemology*, (New York: Norton Library, 1971), s. 5

ondan çıkarıldığında o kümede bir şeylerin değişmiş olduğunu anlamasını sağlıyordu.”[9]

Dantzig’in tanımındaki can alıcı nokta sayı duyusunun ancak *küçük bir küme*deki değişimi kavrama bakımından etkili olduğudur. Öyle ki sayı duyusu için bu kavranabilir küçük küme bugünün insanları için bile genellikle 3 veya 4 nesneyi geçmez.[10] Böylece sayı duyusu neden ilkel insanların 3’ten fazla nesneyi ve hatta 3 nesneyi bile bir çokluk olarak düşündüğünü açıklayan anahtar bir kavrama dönüşür. Geriye kalan tek soru ise sayı duyusunun makul bir teori olarak kabul edilip edilemeyeceğidir.

Dantzig’in ortaya attığı bu yeni duyuya dair herhangi bir şüphe ilk önce onun tüm çağlara yayılan kapsayıcı özelliğine yöneltilebilir. Fakat en fazla 30-40 bin yıl öncesini ele alan bir araştırma böylesi bir şüphenin gölgesinden kaçınabilir. Sayı duyusunun kendisine dair bir şüphe ise böyle bir şüpheyi dile getiren herkes tarafından çürütülebilir. Çünkü sayı duyusunun Dantzig tarafından ad olarak atandığı yeti, yani küçük kümelerdeki sayısal değişimi fark etme yetisi, duyusal veya zihinsel yeterliliği olan her insanın kendini test ederek kanıtlayabileceği bir yetidir. Elbette Piaget’yle birlikte bu yetinin doğuştan olup olmadığı, eğer değilse hangi yaş aralığında kazanıldığı, dahası bu sürecin dış dünyadaki düzenliliğin gözlem, soyutlama ve içselleştirme aracılığıyla bebeğin zihninde gerçekleşen bir yapılandırma[11] olup olmadığı tartışılabilir. Fakat bu, böyle bir yetinin olup olmadığına değil, sadece bu yetiye nasıl sahip olunduğuna dair bir görüş ayrılığıdır.

Dantzig ve Piaget arasındaki temel görüş ayrılığı şöyle özetlenebilir. Piaget bir nesne kümesinin bebek tarafından ilk başta bir *büyüklük* olarak algılandığını ve bu kümedeki değişimlerin de yine bu büyüklükteki değişimler olarak algılandığını öne sürer. Bebek ancak bir öğrenme sürecinin ardından nesne kümesini niceliksel olarak kavrar. Dantzig, Piaget’den farklı olarak böyle bir nesne kümesinin her zaman öğrenmeden bağımsız olarak *niceliksel* bir biçimde kavrandığını öne sürer ve Piaget’nin yapılandırmacı bilişsel teorisine aykırı olarak küçük nesne kümelerindeki

---

[9] Tobias Dantzig, *Number, The Language Of Science*, (New York: Pi Press, 2005), s. 1
[10] Dantzig, *Number, The Language Of Science*, s. 4
[11] Dehaene, *The Number Sense*, s.42

artma veya azalma gibi değişimleri fark etme yetisini tümüyle sayısal bir yeti olarak görür. Dahası Dantzig bu yetiyi ifade eden sayı duyusunun sadece insanlara özgü bir duyu olmadığını da vurgular ve şöyle der “Pek çok kuş, örneğin, böyle bir sayı duyusuna sahiptir. Eğer yuvada dört yumurta varsa bir tanesi rahtlıkla alınabilir. Fakat eğer iki tanesi alınırsa kuş genellikle yuvayı terk eder. Kuş iki ve üç arasında bir ayrım yapabilir.”[12] Yine de bu son bilgi kuşların veya sayı duyusuna sahip başka hayvanların sayma yetisine de sahip olabilecekleri anlamına gelmez.

Dantzig temel bir kavrama yetisi olan sayı duyusuyla çok daha karmaşık zihinsel bir süreç olarak gördüğü sayma yetisinin birbirine karıştırılmaması gerektiğini belirtir. Çünkü sayı duyusu insanın en karanlık çağında bile sahip olduğu ve aslında hiçbir belirgin derece farkı olmadan pek çok hayvanla (örneğin pek çok kuş ve böcek çeşidiyle) paylaştığı bir yetiyken sayma yetisi sadece insanlara özgüdür. Dantzig ayrıca tıpkı Piaget gibi birebir eşleştirme yetisini de sayma yetisinden ayırır, fakat Piaget’den farklı olarak birebir eşleştirme yetisini sayı duyusunun bir tezahürü olarak görür. Böylece sayma birebir eşleştirme yetisine veya sayı duyusuna göre sonradan kazanılmış yapay bir yetenektir.

> Bir toplantı salonuna girdiğimizde iki kümeyle karşılaşırız: sandalyeler ve dinleyiciler. *Saymaya başvurmadan* iki kümenin birbirine eşit olup olmadığını, değilse hangisinin büyük olduğunu anlayabiliriz. Eğer bütün sandalyeler dolu ve kimse ayakta değilse, *saymaya başvurmadan* biliriz ki bu iki küme birbirine eşittir. Eğer bütün sandalyeler dolu olduğu halde birileri ayakta kalmışsa, yine *saymaya başvurmadan* biliriz ki sandalye sayısından daha çok kişi mevcuttur.[13]

Dantzig’in verdiği bu örnek Bertrand Russell’ın sayılar olmadan da saymanın olabileceğini ifade etmek için örnek verdiği karı-koca eşleştirmesiyle aynı amacı taşır. Russell “sayıların tanımı verilirken saymadan yararlanılamayacağı”nı çünkü sayma edimi sırasında paradoksal bir biçimde sayıların kullanıldığını söyler.[14] Bu yüzden Russell’a göre iki kümenin (örneğin Dantzig’in verdiği örnekteki sandalyeler

[12] Dantzig, *Number, The Language Of Science*, s. 1
[13] Dantzig, a.g.e., s. 6
[14] Bertrand Russell, *Introduction To Mathematical Philosopy*, (New York: Dover Publications Inc., 1993), s. 15

ve dinleyiciler gibi iki kümenin) eşit sayıda olup olmadığına karar vermek için saymanın dışında bir yönteme ihtiyaç vardır. Russell bu yöntemi karı-koca eşleştirmesini örnek vererek tanımlar.

> Eğer çokeşlilik söz konusu değilse, açıktır ki belirli bir anda yaşayan koca sayısı evli kadın sayısıyla tam olarak aynıdır. Buna kendimizi inandırmak için nüfus sayımına veya evli kadın ve evli erkek sayısını bilmeye gerek duymayız. İki kümenin de aynı sayıda olması gerektiğini biliriz, çünkü her erkek bir kadınla ve her kadın bir erkekle evlidir. Onların arasındaki bu ilişki "bire-bir" ilişki olarak çağrılır."[15]

Artık denilebilir ki Orinyasyenler, kemiklere attıkları çentikler avladıkları hayvan sayısını gösterse de hiçbir zaman tam olarak kaç hayvan avladıklarının sayısal bilgisine sahip değildiler. Aynı şekilde geçen zamanı anlamak ve belki küçük planlar veya tahminler yapmak için ayın evrelerini kaydetmiş olsalar da onlar kendi kaydettikleri bu şeylerin sayısal değerini hiçbir zaman bilmediler. Çünkü Dantzig ve Russell'ın dediği gibi birebir eşleştirme için sayısal kavramlara veya saymaya ihtiyaç yoktur. Öte yandan tersini söylemek mümkündür.

Dantzig ilkel insanların sayı tekniğinin eşleştirmeyle sınırlı olduğunu ve bu yüzden onların sahip oldukları hayvanları veya silahları ağaçlara attıkları çentiklerle veya çakıl taşlarıyla kaydettiklerini söyler. Bu iddia etimolojik olarak da desteklenebilir niteliktedir. Nitekim İngilizce *hesap* (calculate) kelimesinin kökü *çakıl taşı* anlamına gelen Latince *calculus* kelimesidir.[16] Ayrıca sayım yapmak, etiketlemek anlamına gelen İngilizce *tally* kelimesinin kökü kesmek, *çentik atmak* anlamına gelen *talea* kelimesidir.[17] Dantzig yine de çakıl taşlarıyla veya çentiklerle yapılan bu kayıt becerisinin sadece iki küme arasında bir karşılaştırma yapma becerisi olduğunu ve bu benzerlik kurma durumundan sayı kavramlarının elde edilmesinin ancak bir model küme oluşturulmasıyla mümkün olabileceğini söyler. Dantzig'in sözleriyle:

[15] Russell, *Introduction To Mathematical Philosopy*, s. 15
[16] Georges Ifrah, *From One To Zero*, (New York: Penguin Books, 1988), s. 88
[17] Dantzig, *Number, The Language Of Science*, s. 7

> İlkel insanlar çevrelerinde bu tür modeller bulmuşlardı: kuşların kanatları muhtemelen iki sayısını simgeliyordu, yonca yaprağı üçü, hayvanların bacakları dördü ve kendi ellerindeki parmaklar beşi. Sayı kelimelerinin bu türlü kökeni pek çok ilkel dilde bulunabilir. Elbette bir kere *sayı kelimesi* yaratılıp benimsendiğinde artık yerini aldığı parmak veya kanat gibi orijinal temsil nesnesi kadar iyi bir modele dönüşmüştür.[18]

Örneklendirmek gerekirse, bugün *rakam* anlamında kullanılan *digit* kelimesi Latince *parmak* anlamındadır.[19] Kimi Afrika kabilelerinde ise sağ elin serçe parmağı 1 sayısı ile aynı kelimedir.[20] Dantzig de bunlara benzer iki örnek verir: ilki Sanskritçe *pantcha* (beş) ve Persçe *pentcha* (el), ikincisi Rusça *piat* (beş) ve *piast* (el).[21]

Dantzig sayılar ve onlara kendi isimlerini veren nesneler arasında yapılan zaruri bir ayrımın giderek aralarındaki bağı bile unutturacak boyuttaki bir telaffuz farklılığına dönüştüğünü ve dilde ustalaşıldıkça sayı adlarının parmak, el, çakıl taşı veya çentik gibi görsel köklerinden tümüyle arındığını söyler. Böylece somut model yerini soyut bir modele bırakmıştır. Bundan böyle birebir eşleştirmenin somut nesnelerden oluşan kümeler arasında değil, bu türlü kümeler ve sayılar arasında yapılmaya başlandığı söylenebilir. Fakat bu işlemin artık bir sayma olduğu da söylenebilir mi? Bu sorunun yanıtını verebilmek için sayılar arasındaki bir ayrımı dikkate almak gerekir. Bu ayrım *kardinal* ve *ordinal* sayılar ayrımıdır.

1.3. Kardinal ve Ordinal Sayılar

En genel anlamıyla kardinal (nicel) sayılar herhangi bir kümenin büyüklüğünü soran "kaç tane?" sorusunun yanıtıdır. Bu özellikleriyle kardinal sayılar farklı kümeler arasındaki nicel benzerlik ilişkisini de gösterir. Russell'ın karı-koca örneğinde birbiriyle evlilik ilişkisine sahip kadınlar ve erkekler kardinal sayıları birbirine eş olan kadınlar ve erkekler kümesinde yer alırlar. Aynı durum Dantzig'in sandalye ve dinleyici eşleştirmesi için de geçerlidir. Her iki örnekte de nesneleri birbiriyle birebir eşleştirilebilen kümelerin saymaya başvurmadan eşit sayıda nesne

---

[18] Dantzig, a.g.e., s. 7

[19] Michiel de Vaan, *Etymological Dictionary Of Latin And The Other Italic Languages*, (Boston: Brill, 2008), s. 170

[20] Conant, *The Number Concept: Its Origin And Development*, s. 9

[21] Dantzig, *Number, The Language Of Science*, s. 10

içerdiği ve onların gerçekte kaç nesne içerdiğinin sayısal bilgisinden bağımsız olarak aynı kardinal sayıya sahip oldukları söylenebilir. Kısacası içerdikleri bütün elemanlar birbiriyle birebir eşleştirilebilen tüm kümeler aynı kardinal sayıya sahiptirler. Ordinal (sıral) sayılar ise herhangi bir kümeye dair "kaçıncı?" sorusunu yanıtlar. Dolayısıyla bir ordinal sayı herhangi bir kümedeki belirli bir yeri, daha doğru bir deyişle bir sırayı belirtir. Denilebilir ki, ordinal sayı bir kümeye dair sayısal bir ispatı içerir. Daha açık bir deyişle ordinal sayı kardinal sayılarda olduğu gibi bir eşitliğin mantıksal kesinliğini içermediğinden o kendisinden önceki sayıların kendisine kadar sıralanmasını talep eder.

Bir toplantı salonuna girildiğinde kısa bir gözlemle salondaki sandalye sayısının dinleyici sayısıyla aynı olduğu, yani bu iki kümenin aynı kardinal sayıya sahip olduğu anlaşılabilir. Fakat salonun tam ortasında oturan dinleyicinin kaçıncı sandalyeye oturduğunu anlamak için baştan başlayarak saymak gerekir. Eğer bu dinleyici salondaki bir başka dinleyiciyle yer değiştirirse onun sırası da değişir ve bu yeni bir hesaplama demektir. Fakat salondaki tüm dinleyiciler ayağa kalkıp salonun değişik yerlerine dağınık bir biçimde yayılsalar bile, salonun dışına kimsenin çıkmadığı biliniyorsa onların sandalyelerle olan birebir eşleşme ilişkisi değişmez.

Elbette bu örnek duyusal gönderimi nedeniyle eksik bulunabilir. Daha iyi bir örnek doğrudan sayı kümeleriyle de verilebilir. Örneğin tüm elemanları 10^{10} sayısından küçük doğal sayılar olmak koşuluyla ilki birler basamağında sadece 2, ikincisi birler basamağında sadece 3 bulunan doğal sayılardan oluşan iki küme varsayılsın. Açıktır ki bu iki küme sayısal büyüklük olarak "10^{10} sayısından küçük doğal sayıları içermek" ve "birler basamağında sadece aynı rakam bulunan sayıları içermek" koşullarıyla zorunlu olarak belirlenmiştir ve her iki küme de bu türlü olası on farklı kümenin birer örneğidir. Böylece bu iki küme kardinal sayıları bakımından genel bir zorlayıcı *tanım*a sahiptir ve böylece onların sayısal büyüklükleri arasındaki ilişki tanımda içerilen zorunluluk nedeniyle A = A veya 2 = 2 gibi bir totoloji olarak düşünülmelidir. Öte yandan ne genel tanımda ne de herhangi belirli bir kümeyi açıkça gösteren özel tanımda sıra belirten ordinal bir zorunluluk söz konusu değildir. Elbette genel küme tanımına sıra belirten örneğin "elemanları küçükten büyüğe sıralanmış sayılar olan" veya "elemanları basamak sayısı büyükten küçüğe doğru sıralanmış sayılar olan" gibi bir ifade eklenebilir ve böylece her bir sayının tanım gereği kümedeki yerinin zorunlu olarak belirlenmiş olması sağlanabilir. Fakat bu yeni genel küme tanımı önceki genel küme tanımının bir örneği olmaktan ileriye gitmez. Çünkü her ne kadar her bir sayı farklı tanımlara göre ait olduğu kümede ancak 10^9 farklı sırada yer alabilse de ikinci genel küme tanımı ilk genel küme tanımına sonsuz sayıda farklı ifade eklenerek belirlenebilir. Böylece denilebilir ki, sayılardan oluşan bir kümenin kardinal sayısı genel bir tanımla zorunlu olarak belirlenirken bu kümedeki herhangi bir sayının yerini belirten ordinal sayı ancak daha özel bir tanımla belirlenebilir. Bu özel tanım ise saymanın koşuludur. Çünkü örneğin "tüm elemanları 10^{10} sayısından küçük doğal sayılar olmak koşuluyla birler basamağında 2 bulunan ve büyükten küçüğe doğru sıralanmış sayılardan oluşan bir küme" tanımıyla belirlenen bir küme sadece sayısal büyüklük olarak değil elemanlarının hangi sırada sayılması gerektiği noktasında da belirlenmiştir. Böylece tanıma bir sayma koşulu eklenmiştir. Özetle ister toplantı salonu örneğindeki gibi somut, ister ikinci örnekteki gibi soyut nesnelerden oluşan bir küme olsun, küme içindeki belirli bir nesnenin yeri sayma aracılığıyla belirlenir. Kümenin sayısal büyüklüğü ise saymadan bağımsızdır.

Dantzig birebir eşleştirmede somut modelden soyut modele geçildiğinde bu yeni modelin henüz saymayı ima etmediğini söyler. Çünkü bu yeni soyut model kardinal bir niteliktedir ve kardinal sayılar daha önce söylendiği gibi sayma içermez. Denilebilir ki, *el* kelimesinin Dantzig'in tanımladığı süreç içinde soyut *beş* kelimesine dönüşmesi onun sıra belirten bir ordinal sayıya dönüştüğü anlamına gelmez. Çünkü *el* kelimesinin kendisi de beşinci parmağı ifade etmez. Aksine o mevcut durumda bir *küme* ifade eder. Böylece onun yerine geçen *beş*in de bir küme ifade ettiği söylenmelidir. Dantzig'e göre saymayı içeren ordinal sistem edinilen ilk birkaç sayı kelimesinin hafızada artan bir sırada işlenmesiyle kazanılmıştır. Böylece büyüklük belirten kardinal sayılardan sıra belirten ordinal sayılar ve bu sayede ardışıklık kavramı elde edilmiştir.[22]

> Kardinal sayılardan ordinal sayılara geçmeyi öğrendik, çünkü bu ikisi bize aynı görünüyordu. Bir kümenin çokluğuna, yani kardinal sayısına, karar

[22] Dantzig, a.g.e., s. 8

> verebilmek için atık onu eşleştirebileceğimiz bir model aramak zorunda değildik, çünkü saymak yeterliydi. İki sayı görünümünü birleştirmeyi öğrenmemizin nedeni matematikteki ilerlememizdi. Pratik olarak kardinal sayılarla ilgilenmek aritmetiği yaratmak için yeterli değildi. Çünkü aritmetik işlemler bir sayıdan bir başka sayıya geçmeyi sağlayan açık varsayımlara dayanıyordu ve bu ordinal sayıların temeliydi.[23]

Aritmetiğin ordinal sisteme uygun olarak ardışıklık üzerine kurulduğunun kimse tarafından reddedilmeyeceği açıktır. Çünkü ordinal sistem daha önce sayma koşuluyla ifade edildiği gibi sayılar arasında belirli bir ilişki kurulmasını içerir. *Ardışıklık*, bu türlü bir ilişki olarak 0 ve 1 kavramlarıyla birlikte aritmetiğin geri kalan bütün nesnelerinin aksiyomatik bir sistem içinde belirli bir sırada birbirinden türetilmesini sağlayan önemli bir kavramdır. Öte yandan aritmetiğin temellendirilmesi söz konusu olduğunda bu temel üç kavramın nasıl tanımlanması gerektiği noktasında önemli görüş ayrılıkları vardır. Bunun yanı sıra kardinal sayılar ve ordinal sayılar arasında bir öncelik belirlemek antropolojik, psikolojik veya aritmetiğin temel nesnelerinin tanımlanması bakımdan pek çok tartışmaya neden olur. Matematikçi John Bell antropolojik verilerin yoruma açık olması nedeniyle bir öncelik belirlemede dikkate alınmayabileceğini ima eden bir görüş belirtir:

> Aslına bakılırsa sayma sanatının ilkel dini ritüellerle ilişkili olarak ortaya çıktığı ve sayıların saymaya dayalı veya *ordinal* görünüşünün nicel veya *kardinal* görünüşünü öncelediği söylenir. Fakat kökeni ne olursa olsun, sayma işlemi sayılara bir sıra dayatır ve bu sıranın sayılar kullanılarak sayılan benzer büyüklükteki kümelerle uygunluk gösterdiği erken çağlarda anlaşılmış olmalıdır.[24]

Dantzig ise antropolojik verilerin kesin bir biçimde olmasa da kardinal sayıların önceliğine dair bir yoruma izin verdiğini söyler. Elbette bu yorumun psikolojideki karşılığı da yine kardinal sayıların öğrenme bakımından önceliğini gerektirir. Öğrenme söz konusu olduğunda aksi bir görüş Charles J. Brainerd tarafından

---

[23] Dantzig, a.g.e., s. 8

[24] John Bell, *The Art of the Intelligible: An Elementary Survey of Mathematics in its Conceptual Development*, http://publish.uwo.ca/~jbell/#Publications (Kluwer: 1999), s.1

savunulmuştur. Brainerd çocukların sayıları öğrenme sürecini dikkate alan ordinal teorisini şöyle ifade eder:

> Teorinin (ordinal teorinin) gerçekte söylediği şey, çoğu çocuğun henüz aritmetikte yeterince ilerlemeden önce ordinal sayı kavramına dair hatırı sayılır bir ilerleme kaydedeceği ve yine çoğu çocuğun kardinal sayı kavramında bir ilerleme kaydetmeden önce aritmetikte belirgin bir ilerleme göstereceğidir.[25]

Bütün bu tartışmalar felsefe düzlemine çekilip kardinal ve ordinal sayılar aritmetiğin temellendirilmesi bakımından ele alındığında daha çetin bir hal alır ve her iki görüş de birbirine karşı eşit güçte savunulabilir bir niteliğe bürünür. Bu yeni tartışmanın çekirdeğinin aritmetiğin temellendirmesinde iki farklı sayı anlayışından hareket eden Frege ve Dedekind ile ikili bir yapıda şekillendiği söylenebilir. Alain Badio'nun sözleriyle: "Dedekind (Cantor gibi) özünde ordinal olan bir sayı kavramı geliştirmişti... Frege'nin kavramı ise özünde kardinaldi."[26]

1.4. Sayma ve Sonrası

Dantzig sayı duyusu olarak tanımladığı saf matematiksel bir duyu aracılığıyla matematiksel yeteneği a priori düzeyde ele almış olsa da, aritmetiğin sayma öğrenilmeden mümkün olmayacağını kabul eder. Sayma daha karmaşık bir sürecin sonrasında öğrenildiğinden her şeyden önce insana özgüdür.

> Basit sayı duyusu, kuşların sahip olduğundan daha büyük olmadığı bilinmekle birlikte, içinden sayı kavramının çıktığı çekirdeği oluşturur. Sadece bu doğrudan sayı kavrayışına sahip olundukça insanların kuşlardan daha ileri bir hesaplamaya sahip olmayacaklarına dair hiçbir şüphe yoktur. Fakat pek çok ciddi durumla birlikte insan oldukça kısıtlı sayısal kavrama yeteneğine geleceğini büyük çapta etkileyecek olan bir beceri ekledi. Bu beceri saymadır ve sayma bizim evreni sayılarla ifade edebilecek kadar başarılı olduğumuz bir ilerlemedir.[27]

[25] Charles J. Brainerd, *The Origins Of The Number Concept*, (New York: Wiley, 1979), s. 168
[26] Alain Badio, *Number And Numbers*, (Cambridge: Polity Press, 2008), s. 31
[27] Dantzig, *Number, The Language Of Science*, s. 15

Dantzig saymayı matematik için bir koşul olarak belirler: Sayma ilkel insanın karakteristik özelliğine uygun olan somutu ve böylece çokluğun homojen kavramını matematiği mümkün kılan homojen soyut sayılarla birleştiren şeydir.[28] Böylece birebir eşleştirme yöntemini esas alan çeşitli teknikler kullanarak kayıtlar yapan ve henüz hiçbir sayı sembolüne sahip olmayan Orinyasyenlerin değil onlardan çok daha sonra yaşamış ve saymayı keşfetmiş toplumların ilk kez matematiği uygulamaya başladıkları söylenebilir. Bu görüş kimi arkeolojik verilerle de desteklenir. Örneğin sistematik olarak yazılı rakam kullanımına dair en eski kayıtlar en fazla 6.000 yıl geriye[29] gitmektedir. Bu veri oldukça önemlidir. Çünkü *matematiğin işaretler olmadan mümkün olmayacağı* teziyle birlikte düşünüldüğünde bu bilgi matematik ve yerleşik hayat arasında öngörülen ilişkiyi güçlendirir. Daha önce de söylendiği gibi, denilebilir ki insan toplulukları göçebe bir yaşamın hüküm sürdüğü çok eski çağlarda matematiğe kargalardan daha çok ihtiyaç duymuyorlardı. Onların ne sayma gibi bir alışkanlığı ne de sayıları vardı. Peki gerçekten semboller olmadan matematik mümkün değil midir? Stanislas Dehaene bu soruya cevap niteliği taşıyan bir iddiaya sahiptir: Dehaene, "semboller olmadan 8 ile 9 arasında bir ayrım yapılamayabileceği"ni[30] öne sürer. Çünkü daha önce de söylendiği gibi sayı duyusu insanlar için de tıpkı ona sahip olan pek çok hayvanda olduğu gibi ancak belirli bir sayıdaki nesneleri sayısal olarak kavrayabilme olanağı sunar ve bu sınır pek çok insan için 3 veya 4'ten daha fazla değildir. Dolayısıyla ister görme ister dokunma duyusuyla olsun, semboller kullanılmadan daha büyük sayıları kavramak veya bu sayılar arasında eşleştirmeden farklı matematiksel ilişkiler kurmak mümkün değildir.

Antropolojik veriler Sümerlerin yaklaşık 6000 yıl önce ilk kez sayı sembollerini kullanmaya başladıklarını işaret eder. Bu değişimin temelinde, kuvvetle muhtemeldir ki, en başta söylendiği gibi yerleşik hayata geçiş bulunur. Henüz sayıların adları bile konulmadan önce birebir eşleştirmeye uygun sayıların kardinal yapısı aracılığıyla saymaya başvurmadan nesnelerin paylaşımı veya değiş tokuşu mümkün olmuş olabilirdi. Ordinal sayılar ve sayma ise mülkiyetin güvenli bir

[28] Dantzig, a.g.e. s, 6
[29] Dantzig, a.g.e. s.21
[30] Dehaene, *The Number Senese*, s, 91

biçimde biriktirilmesini sağlama alan bir yöntem olarak kullanılmıştır denebilir. Böylece sonsuz biriktirmenin de yolu açılmış olmalı. Çünkü saymanın sonu yoktur.

Ancak yerleşik hayatla[yerleşik anlamda mülkiyetin ve onun komünal olarak veya belirli güç dengelerinin gerilimiyle sistemli paylaşımının ortaya çıkmasıyla]dır ki, toprak ve üzerindekilerinin organize bir biçimde yönetilmesinin araçlarından biri olarak matematiğin [geometri ve aritmetiğin] uygulama anlamında daha detaylı kullanılması gündeme gelmiştir. Denilebilir ki, matematik teorik kurulumundan da önce, toplumsal yaşamın şartlarına göre şekillenen pratik uygulamalarla ve bu uygulamaların politik anlamıyla insanların yaşamında yer almıştır. John Zerzan, pek çok antropolojik çalışmanın ve onların politik yorumlarının özeti olarak şunları söylüyor: "Tarımın diğer sonuçlarından biri de sayının icadı oldu; oysa sayı, ekinlerin, hayvanların ve tarımın belirleyici özelliklerinden biri olan toprağın, mülkiyet konusu olmadığı dönemlerde tamamen gereksizdi."[31]

Gerçekten de eğer yüz tane koyunu olan bir çiftçi, saymayı ve dolayısıyla semboller kullanmayı öğrenmek yerine sadece sahip olduğu iddia edilen sayı duyusuna veya koyunlarıyla birebir eşleştirme yapmasını sağlayan çakıl taşlarına güvenmekle yetinseydi, her gün bir koyununu ve bir çakıl taşını çalan bir hırsızı suçüstü yakalayamadığı sürece, koyunlarının azaldığını uzun bir süre anlamakta zorlanacaktı. Çünkü, daha önce de söylendiği gibi sayı duyusu ancak çok az sayıda nesne kümeleri söz konusu olduğunda işe yarayabilirdi. Belirli bir sayıdan daha çok koyunu olan bir çiftçi ise bu mülkiyetini korumak için saymadan ve koyun sayısını tam olarak gösteren sembollerden yararlanmak zorundaydı. Mülkiyetin tarımla birlikte ve saymanın da mülkiyetle birlikte ortaya çıktığı sadece bir iddia olarak da ortaya atılabilir ama şurası kesindir ki: sayma, bir kere ortaya çıktığında artık sayılar elde edilmiş demektir. Bunun anlamı sayıların artık dilde de karşılığının olması gerektiğidir. Eğer bir topluluğun kullandığı dilde sayılara yer yoksa, o topluluğun henüz saymaya başlamadığı söylenmelidir. Böylece bizi kullandıkları sembollerden kayıtlar tutarak haberdar eden Sümerlerin ve Mısırlıların saymayı, semboller kullanmayı ve hatta duyusal bir anlamda olmak üzere basit matematiksel işlemler yapmayı bildikleri söylenebilir.

[31] Zerzan, *Gelecekteki İlkel*, s. 24

Özetlemek gerekirse: İnsanın pek çok hayvanla paylaştığı bir sayı duyusunun olduğu, fakat hiçbir hayvanla paylaşmadığı ve burada yerleşik hayatın bir sonucu olarak ifade edilen matematiksel uygulamalara (örneğin parmakla sayma, işaretlerle gösterme, soyutlama yoluyla matematik nesneler oluşturma gibi…) sahip olduğu söylendi. Bu değişim matematikte yerleşik hayatın etkisiyle gerçekleşen ilk devrimdir. Fakat yine de bütün bunlar bu çalışmada ele alınacak olan matematiğin teorik tartışmaları bakımından sadece bir giriş niteliğindedir. Çünkü bahsedilen bu devrim sadece başka bir devrimin çekirdeğini oluşturmaktadır. Ve bu çekirdek, baharda rüzgarın savurduğu tohumlar gibi, gerçekte hala bir göçebedir.

2. İLK İLKELER VE YÖNTEM

2.1. İlk İlkeler ve Felsefe

İlk ilke veya ilk neden olarak düşünülen ilk varlıklara, pek çoğunda tanrı veya tanrılar olmak üzere, bütün kültürlerde rastlamak mümkündür. Mitoloji ve dinler bu türlü ilk ilkeler veya nedenlerle doludur. Çünkü ilk varlığı bilmek veya en azından sezgisel olarak kavramak başka her şeyi bilmenin ilk koşulu olarak düşünülür. Fakat bu kavrayış genellikle görmezden gelinen önemli bir güçlüğe neden olur: *ilk varlığın, nedenin veya ilkenin sebepsizliği.* Örneğin Upanişadlar'da "Duyular nesnelerden, nesneler zihinden, zihin akıldan, akıl egodan, ego görünmeyen tohumdan, bu görünmeyen tohum da sebepsiz sebep olan Tanrı Brahman'dan doğmuştur."[32] denir. Pek çok kültürde karşımıza çıkan bu varlıkların oluşsal sıralaması çok gerilerde bir yerde bıçakla kesilir. Kendisinden öncesi olmayan ve kendisi sebepsiz olan, her şeyin kendisinden çıktığı veya kendisi aracılığıyla varlık bulduğu bir ilk varlık, dururcasına sonsuz bir zamanı imleyen bir boşluk gibi en başa yerleştirilir.

Bir başka kültürde mutlak bir varlığı ve sonsuz bir verimliliği belirtircesine bir boşluk veya hiçlik ilk ilke olarak ilan edilir. Hesiodos tanrılar, toprak, ırmaklar, kabarıp gürleyen sonsuz deniz, parlayan yıldızlar, yukarıdaki geniş gök kubbesi ve varlık sıralamasında kendi yerini almış olan her nesneyi kastederek sorar: "Söyleyin bana Museler ve siz konakları Olympos'ta olanlar, en baştan başlayarak söyleyin, bunlardan hangisi ilk önce meydana geldi?"[33] Ve Hesiodos ilk ilkesini açıklar: Boşluk anlamındaki *Kaos*.

Mitolojinin henüz felsefi bir anlama bürünmemiş olsa da *kendisi sebepsiz olan sebep* fikriyle ontolojinin sonsuz geri gidiş problemine pratik bir çözüm bulduğu açıktır. Yöntem şudur: İlk ilke veya neden olabilecek nitelikte basit ama kapsayıcı bir varsayımda bulunmak ve geri kalan her şeyi bu varsayım aracılığıyla açıklamak. Kimi kültürlerde bu varsayımların çift veya daha fazla sayıda olduğu görülse de yöntem tümüyle aynıdır. Bu yüzden felsefenin de bu bilinen en kullanışlı yöntemle işe başlaması bir mucize olmasa gerek. Fakat felsefenin mitolojiden farklı olarak ilkesel bir yöntem kullandığını, hem sorularının hem yanıtlarının belirli ilkeler

[32] *Upanişadlar*, (İstanbul: Dergah Yayınları, 1997), s.26
[33] Hesiod, *Theogony, Works and Days, Testimonia*, (London: Harward University Press, 2006), s.11

varsayılarak oluşturulduğunu eklemek gerek. Örneğin "varlığın kökeni nedir?" gibi bir soru Antik Yunan düşüncesinin temel varsayımlarından biri olan "var olan her şeyin bir nedeni vardır"[34] ilkesiyle sorulduğunda anlamlıdır. Ancak bu ilkeyledir ki varlıklar adım adım oluşlarla ve nedenlerle birbirine bağlanır ve her şey dönüp dolaşıp kendisi nedensiz bir ilk nedene/nedenlere veya ilkeye/ilkelere bağlanır.

Felsefeyle birlikte ilk ilkelerin veya nedenlerin duyusal varlıkların algıda görünme biçimine[35] uygun olarak araştırılmaya başlandığı söylenebilir. Başka bir deyişle duyusal olan yine duyusal bir ilkeyle temellendirilir. Fakat bu araştırmayla birlikte daha en başta yeni ve en az sonsuz geri gidiş kadar önemli bir sorunla karşılaşılmıştır. Çünkü nesnelerin de tek tek kendi içlerinde ilke veya öğe olarak adlandırılabilecek parçalardan oluştuğu ve bu parçalara bölünmenin felsefeye yeni bir sonsuz tuzak hazırladığı görülmüştür. Sonsuz sadece bütün varlıkların kökeni için zamanda geri gidildiğinde ontolojik bir probleme neden olmaz. Herhangi bir anda herhangi bir nesnede de sonsuzluk bakımından ontolojik bir problem söz konusudur. Bir duyusal nesnenin sonsuz bölünebilir olup olmadığı bir diğer ilke sorunu olarak düşünülür. Öyleyse mitolojiden farklı olarak artık duyusal olanı da hesaba katan felsefenin, ilk ilkeleri veya nedenleri hem sonsuz geri gidiş hem de sonsuz bölünebilme problemlerine çözümler bularak göstermesi gerekir.

Parmenides tarafından bir ilkeye dönüştürülen "hiçbir şey yoktan olamaz hiçbir varlık da bütünüyle yok olamaz"[36] inancı ilk filozofların tümü için geçerli bir ilke olarak karşımıza çıkar. Aristoteles bu ilkenin ilk filozoflar üzerindeki etkisini şöyle açıklar: "Her oluşan şeyin ya var olandan ya da var olmayandan oluşması zorunlu ise ve var olmayanlardan oluşmak olanaksız ise (doğa üzerine yazan bütün düşünürler bu görüşte), zorunlu olarak geriye kalanı kabul ediyorlar demektir."[37] Böylece bu ilke kendisi hep değişmeden kalan bir varlığın, yani tözün de gerekçesidir. Öyleyse her şeyden önce kesintisiz bir varlık kabulü söz konusudur. Bir varlık ki, sonsuz geri gidiş problemine özünde hep aynı kalarak direnir ve kendisinden sonraki her şeyi bir oluş içine sokar. Denilebilir ki, ilk filozoflar sonsuz

---

[34] Arda Denkel, *İlkçağ'da Doğa Felsefeleri*, (İstanbul: Doruk Yayınları, 2003), s.20
[35] Denkel, *İlkçağ'da Doğa Felsefeleri*, s.18
[36] Denkel, a.g.e., s.20
[37] Aristoteles, *Fizik*, çev. Saffet Babür, (İstanbul: YKY, 2001), s.23

geri gidiş problemini duyusal olandan yola çıkarak çözmeyi denemişler ve çözümü duyusal tözler belirlemekte bulmuşlardır. Aristoteles'in sözleriyle:

> İlk filozofların çoğu, her şeyin ilkeleri olarak yalnızca maddi yapıdaki ilkeleri göz önüne almaktaydılar. Onlara göre her şeyin kendisinden meydana geldiği, kendisinden doğup sonuçta yine kendisine döndüğü (burada töz varlığını korumakta, yalnız özel biçimlerinde değişmektedir) bir şey vardır. Öğe olan, şeylerin ilkesi olan budur.[38]

Öte yandan doğa filozoflarının *arkhe* yani ilk ilke belirlerken su veya sıvı, hava veya ruh/nefes, ateş veya hareket gibi hem bir madde hem de bir nitelik seçtikleri, hatta atomcuların bile artık bölünemez bir parça olması nedeniyle duyusal maddeyle pek de niteliksel olarak benzeşmeyen atomlar belirledikleri düşünüldüğünde, onların madde ve nitelik arasında belirgin ayrımlar yapmadıkları da anlaşılır. Fakat özellikle atomcuların sonsuz bölünebilme sorununu dikkate alarak belirledikleri ilkeler duyusal kavrayışı oldukça zorlayan bir yapıdadır. Dahası, bu öğelerin Anaksagoras'ta olduğu gibi sonsuz sayıda veya çeşitte kabul edilmesi sonsuzluğun da duyusal bir niteliğe büründürülmesi anlamına gelir ki, Aristoteles bunu kabul edilemez bulur:

> Sonsuz olarak sonsuz bilinemezse, o sayıca ya da büyüklükçe bilinemeyecek bir nicelik, biçim açısından bilinemeyen bir nitelik olur. Öte yandan ilkeler sayıca ve türce sonsuz olsa bu ilkelerden kaynaklanan nesneleri bilmek olanaksız olur: çünkü biz bileşik bir nesnenin hangi ilkelerden ve kaç ilkeden oluştuğunu bildiğimiz zaman o nesneyi bildiğimizi düşünürüz.[39]

Aristoteles böylece Anaksagoras'ın sonsuz sayıdaki ana madde tezini reddeder ve ilk ilkelerin sonsuz oluşunun epistemolojik bir soruna dönüşeceğini savunur. Çünkü ona göre "bilgelik ilkeleri ve nedenleri bilmektir."[40] ve eğer ilk ilkeler veya nedenler bilinemez olursa başka hiçbir şey bilinemez.

---

[38] Aristoteles, *Metafizik,* çev. Ahmet Arslan, (İstanbul: Sosyal Yayınları, 1996), s.90
[39] Aristoteles, *Fizik*, s.23
[40] Aristoteles, *Metafizik*, s.81

Doğa filozoflarının madde ve nitelik ayrımını bulanıklaştırarak belirledikleri ilk ilkeler yine de maddi ilkelerdir. Öte yandan maddenin sürekli bir oluş içinde olması veya algılanması nedeniyle gerçek bir varlık ve dolayısıyla bilginin konusu olamayacağını düşünen Parmenides ve Platon gibi filozoflar nitelikleri öne çıkararak ilk varlığı veya ilk ilke ve nedenleri niteliklerde aramışlardır. Aristoteles Pyhagorasçıların da farklı nedenlerle de olsa böyle yaparak doğa filozoflarından farklı bir konumda yer aldıklarını söyler. Çünkü onlar da ilkelerini duyusal-olmayan şeylerden çıkarmışlardır.[41] Yine de Aristoteles onların tüm tartışma ve araştırmalarının doğa hakkında olduğunu ekler.

Özetlemek gerekirse, ilk ilkeler kavrayışı ister mitolojide ister felsefede olsun temel bir sorudan kaynaklanır: Kendisi sebepsiz olan ve başka her şeyin sebebi olan bir varlık/varlıklar var mıdır? İlk ilkeleri aramayı emreden bu soru matematik ve sayılar söz konusu olduğunda yine aynı tutumu sergilemeyi gerektirir. Sayıların ilkesi/ilkeleri nedir? Varlık problemini ele alan filozofların bu soruyla da yakından ilgilenmiş olması tesadüf değildir. Aksine ilk ilkeler araştırması zorunlu olarak matematiğe ve sayılara da sıçramıştır denebilir.

2.2. Pythagoras: İlk İlkeler ve Matematik

Matematiğin keşif mi yoksa bir icat mı olduğu sorusunu onun teorik olarak ortaya çıktığı çağdan, yani Thales veya Pythagoras gibi ilk matematikçi filozofların ve nihayetinde onu aksiyomatik yöntemle tanıştıran Euclides'in çağından itibaren ele almak gerekir. Bu çağ, en azından metaforik olarak, matematiğin yerleşik hayata geçtiği çağdır. Morris Kline'ın sözleriyle:

> Matematik organize, bağımsız ve gerekçelendirilmiş bir disiplin olarak milattan önce 600 ile 300 yılları arasındaki klasik Yunan çağından önce ortaya çıkmamıştı. Yine de matematiğin başlangıcı veya temeli sayılabilecek çalışmalar yapan daha eski medeniyetler de vardı. Bu medeniyetlerin çoğu bir, iki ve çokluk ayrımından daha öteye gitmemişti ve çok azı daha büyük sayılarla işlemler yapabiliyordu.[42]

[41] Aristoteles, a.g.e., s.122

[42] Kline, *Mathematical Thought From Ancient To Modern Times, Volume 1*, s. 3

Yerleşik hayat insan için ne ifade ediyorsa matematik için de aynı şeyi ifade eder. Matematiğin kenti, kurulan bütün kentler gibi, güvenli, elverişli, genişlemeye müsait, başka kentlerle bağlantıları olan, verimli bir zemine kurulmalıydı. Bu zemin, üzerine matematik kentinin inşa edileceği ilk ilkelerdir. Antik Yunan filozofları, kendilerini etkileyen ve aslında onlara matematiği öğreten Mısırlılardan bu tür ilkeler devralmamışlardı. Onların teorik çalışmalarından önce bugünkü anlamıyla herhangi bir matematiksel ilke, teorem veya ispat ortaya konmuş değildir. Bu yüzden Thomas Heath'in belirttiği gibi Pythagoras'ı ilk matematikçi olarak kabul etmek oldukça makul görünür: "Pythagoras sayı teorisine yönelik ilk adımı atmıştır ve geometrinin teorik bir bilim olması için uğraşmıştır: o geometriyi liberal eğitimin bir konusu yapan ilk kişidir."[43]

Mısırlılardan öğrendiği disiplini matematik olarak adlandırıp teorik bir disiplin olarak geliştiren Pythagoras "matematiğin ilkelerinin her şeyin ilkeleri olduğunu" [44] düşünüyordu. O, sayılarla nesneler arasında bir ayrım yapmak yerine onları birbirini açıklamak için kullanmayı yeğliyordu. Pythagoras şöyle diyordu: "sayı niceliktir, nicelik biçim ve biçim nitelik."[45] Pythagoras'ın bu sözü onun matematik anlayışını çok iyi özetliyordu. Çünkü o nesneleri geometrik biçimlerle, geometrik biçimleri sayılarla, sayıları yine nesnelerle veya geometrik biçimlerle ifade ederek aslında varlık ve sayılar arasındaki özdeşliği göstermek istiyordu. Aristoteles Pythagoras'ın ve takipçilerinin sayılar ve varlık arasında kurdukları ilişkiyi şöyle ifade ediyor:

> Bu ilkeler (matematiksel ilkeler) arasında sayıların, doğaları gereği ilk (şeyler) olmalarından, var olan veya varlığa gelen şeylerle, sayılar arasında birçok ve onlarla Ateş, Toprak ve Su arasında olduğundan daha fazla sayıda benzerlikler bulunduğunu gördüklerini düşünmelerinden, ayrıca müziksel skalaların değişim ve oranlarının sayılarla ifade edilebilir olduğunu gördüklerinden; böylece tüm diğer şeylerin doğaları bakımından sayılara benzer görünmesi, sayıların ise kendilerine doğanın bütününde ilk şeyler

---

[43] Thomas Heath, A *History Of Greek Mathematics, Volume 1*, New York: Oxford At The Clarendon Press, 1921), s. 2
[44] Aristoteles, *Metafizik*, s.100
[45] James Gow, *A Short History of Greek Mathematics*, s.68

> olarak görünmelerinden dolayı Pythagorasçılar sayının öğelerinin, her şeyin öğeleri olduğunu ve bütün göğün bir ahenk ve sayı olduğunu düşünmüşlerdir.[46]

Aristoteles bununla birlikte Pythagorasçıların kusurunu "sayıyı duyusaldan ayrı olarak var olabilen bir şey olarak almamak"[47] olarak görüyor. Dahası Aristoteles'e göre onlar sayılar ve varlık arasında tersine bir ilişki kurarak "sonsuzluk ve Bir olan'ın (yani sonlu olanın) kendilerinin, yüklemi oldukları şeylerin tözleri olduğunu"[48] düşünüyorlar. Aritoteles bu nedenle onların her şeyin tözünün sayılar olduğunu düşündüklerini söylüyor. Böylece Pythagorasçıların da madde ve nitelik arasındaki ayrımı ortadan kaldırarak ve tözü sonsuz sayıda kabul ederek, en azından Aristoteles'e göre, Anaksagoras'la aynı epistemolojik hataya düştükleri söylenebilir. Çünkü ilkelerin sonsuz olması daha önce de belirtildiği gibi hem ilkelerin hem de kendileri bu ilkelerden türetilen diğer şeylerin bilinemez olması anlamına gelir.

Pythagoras'ın sayılar kadar önemsediği ve aslında sayılardan bağımsız düşünmediği geometrik biçimler onun sayılar ve nesneler arasındaki Aristoteles'in vurguladığı sorunun kaynağı olarak düşünülebilir. Çünkü Pythagoras niceliğin biçim olduğunu söyleyerek geometrik biçimlerin sayısal olarak ifade edilebileceğini, bu biçimlerinse nesneyi nesne yapan nitelikler olduğunu söyler. Böylece sayılar ve nesne arasındaki ilişki geometrik biçimler aracılığıyla kurulur. Gow, Pyhagoras'ın aritmetik ve geometri arasında karşılıklı bir ilişki kurduğunu söyler:

> Pythagoras'ın sayıları varlığa gelmenin temel ilkesi olarak düşündüğü açıktır. Öyle ki o, aritmetiği bütün terimlerini tanımlamak ve doğa yasalarına dair bütün açıklamalarını ifade etmek için kullanıyordu. Fakat onun aritmetiği adım adım ilerleyen geometrik bir görünüme sahipti ve o her zaman aritmetiksel formülleri geometriyle, geometrik formülleri aritmetikle araştırıyordu.[49]

[46] Aristoteles, *Metafizik*, s.100
[47] Aristoteles, a.g.e., s.560
[48] Aristoteles, a.g.e., s.106
[49] Gow, *A Short History of Greek Mathematics*, s.68

Sayılar ve geometrik biçimler arasında kurulan bu ilişki, yani birini diğeriyle ifade etme, Pythagoras'ın sayılarla duyusal olan arasında ayrım yapmadığı tespitiyle birlikte düşünüldüğünde, Pythagoras'ın ve takipçilerinin henüz matematiği teorik bir bilim olarak ele almadığı gibi bir sonuç çıkarmak yine de acelecilik olur. Örneğin Eudemos Pythagoras'ın geometriyi saf soyut ilkelere dayanan bir hale getirdiğini ve onun teoremlerinin maddi olmayan entelektüel bir noktadan hareket ettiğini söyler.[50] Pythagoras'ın aritmetikle ilgili olarak da aynı yöntemi benimsemiş olacağı açıktır. Fakat buradaki *soyut* kelimesi Pythagorasçı anlamda değerlendirildiğinde Aristoteles'e yeniden hak vermemek de elde değildir. Çünkü Pythagoras ne sayılarla ne de geometrik biçimlerle kendinde şeyler olarak ilgilenmez ve onları hiçbir biçimde nesnelerden ayrı düşünmez. Bu yüzden onun soyutluk kavrayışı muhtemelen duyusal kavrayıştan ayrı değildi ve bu yüzden hem aritmetik hem de geometri her zaman duyusal özellikleriyle onun araştırmalarının konusu oldu. Öte yandan Proklos Pythagoras'ın matematik bilimine dair bazı ayrımlar yaptığını söyler:

> Pythagorasçılar matematik bilimini dört bölüme ayırıyordu. Onun bir bölümü kesintili nicelikle ilgili "kaç tane?" (poson: how many) sorusuna, bir diğer bölümü sürekli olan nicelikle ilgili "ne kadar?" (pelikon: how much) sorusuna yanıt arıyor, ve her iki bölüm de kendi aralarında iki kısma ayrılıyordu. Sonuç olarak aritmetik ve müzik kesintili nicelikleri, geometri ve astronomi sırasıyla sabit ve hareketli olan kesintisiz nicelikleri konu ediniyordu.[51]

2.3. Platon: Aritmetik ve Hesap Ayrımı, İdeal Sayıların Kardinal Niteliği

Pythagorasçıların matematik biliminde öngördüğü ayrımlar onların sayılar ve duyusal nesneler arasındaki ayrımı reddetmeleri nedeniyle belirsizleşir. Çünkü sayıları duyusal nesnelerle özdeşleştirmekle duyusal nesneleri geometrik biçimlerle özdeşleştirmek arasında bir fark yoktur ve böylece sayılar ve geometrik biçimler arasındaki ayrım da ortadan kalkar. Öyleyse "kaç tane?" ve "ne kadar?" soruları görünüşte farklı yanıtlar bulsa da özsel olarak aynı şeyi kavramamızı sağlar: duyusal nesneyi. Böylece bir nesnenin kendisiyle niceliği veya büyüklüğü arasında kurulan

---

[50] George Johnston Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclides*, (Dublin: University Press, 1877), s.179

[51] Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclides*, s.180

bir özdeşlik ilişkisi sayılar ve geometrik biçimler arasında da kurulur. Ve hem aritmetik hem de geometri aynı şeyi konu edinir. Örneğin kare biçimli bir nesnenin karelik niteliği geometrik olduğu kadar duyusaldır da. Fakat onun geometrik niteliği aynı zamanda ardışık tek sayıların toplamı olarak ifade edilebildiğinden aritmetikseldir. Öyleyse onun duyusal, geometrik ve aritmetik nitelikleri birbiriyle ifade edilebilmesi nedeniyle duyusal bir gönderime sahiptir ve aslında duyusal olandan başka bir şey de değildir.

Platon muhtemelen Pythagoras'ın bu sınıflandırmasını çok iyi biliyordu ve matematiğe dair kendi sınıflandırması için temel almıştı. Fakat onun matematiksel olanla duyusal olan arasında mutlak bir ayrım yaparak Pythagorasçılardan çok farklı bir noktada olduğu açıktır. Çünkü Platon duyusal varlığın sürekli bir oluş içinde olması nedeniyle bilginin konusu olamayacağını düşünüyordu. Öte yandan Platon "varlıkların özünde hiç değişmeden süregiden bir taraf"[52] daha olduğunu da söylüyor ve ancak bu sayede varlıkların adlandırılmasının mümkün olduğunu ekliyordu. Sokrates'in *güzel*in sürekli bir değişime mi tabi olduğunu yoksa kendi kendisiyle benzer mi kaldığını araştırırken Kratylos'a sorduğu soru Platon'un duyusal bilgiye duyduğu şüpheyi açıkça gösterir:

> **Sokrates:** Öyleyse, bu bizatihi şeye bir bakalım –bir yüz veya aynı cinsten herhangi bir obje güzel mi, değil mi, akıp gidişe tabi mi değil mi, bunu bilmek için değil; fakat güzel'in kendisinin, bizatihi güzel'in ne olduğunu bilmek için. …bu bizatihi güzel'in daima kendi kendisinin benzeri olarak kaldığını söylemez miyiz?
>
> **Kratylos:** Zorunlu olarak öyle söyleriz.
>
> **Sokrates:** O, eğer durmadan geçip gidiyorsa, önce bir türlü iken, hemen sonra başka bir nitelik alacak demektir ki, bu durumda onu doğru olarak adlandırmak nasıl mümkün olur? Biz daha ağzımızı açarken, o hemen başkalaşıp elimizden sıyrılmaz, aynı halde olmaktan çıkıvermez mi?[53]

---

[52] Platon, *Kratylos*, çev. Cenap Karakaya, (İstanbul: Sosyal Yayınları, 2000), s.12
[53] Platon, *Kratylos*, s.126

Öyleyse güzel nedir sorusunun yanıtı tek tek duyusal olan şeylerde aranamaz. Duyusal güzellikler Platon'un *Şölen* diyalogunda Sokrates'e söylettiği gibi ancak *kendinde güzel*in kavranması için basamaklar oluşturabilir. Tek tek bedenler güzel olabilir ama bu güzelliğin kendisi olamaz. Yaşamak, bir can taşımak daha güzel olabilir ama bu da sadece kendinde güzel'i kavramak için bir araçtır. Her iki güzelliğin üzerinde ise bilimlerdeki güzellik yer alır. Fakat bu da yeterli değildir. Bütün bu güzellikleri sırasıyla kavrayan biri sonunda güzelliğin özüyle karşı karşıya gelir:

> Bu güzellik artık hep var, doğumsuz, ölümsüz, artmaz, eksilmez bir güzelliktir; bir bakıma güzel, bir bakıma çirkin, bugün güzel, yarın çirkin, şuna göre güzel, buna göre çirkin, bir yerde güzel, bir yerde çirkin, kiminin gözünde güzel, kiminin gözünde çirkin bir güzellik değildir. Bir güzellik ki, kendini bir yüzle, elle ayakla, bedene bağlı hiçbir şeyle göstermeyecek, ne bir söz alacak, ne bir bilgi, bir canlıda, belli bir varlıkta bulunmayacak, ne canlıda, ne yerde, ne gökte, hiçbir yerde, kendi var, kendinden var, kendisi ile hep bir örnek. Bütün güzellikler ondan pay alır; kendisi onların parlayıp sönmeleriyle ne artar, ne eksilir, ne de bir değişikliğe uğrar.[54]

Kendinde varlığı bilmek, onun pek çok benzerini tanıyıp geçmeyi gerektiren bir süreç olarak tanımlanırken bilimlere gerçek varlığın bilgisine erişmede oldukça yakın bir konum kazandırılır. Çünkü bilimler akılla kavramayı gerektirirler. Onlar sadece duyusal bir nesneyi algılamakla veya bu tür bir nesnenin adını hatta kavramını bilmekle yetinmezler. Bilimler akılla kavrama sayesindedir ki nesneler hakkında doğru kanaatlere sahiptirler. Platon 7. Mektup'ta bilimlerin ayrıcalığını şöyle ifade eder: "Bir varlığın bilgisini elde etmek isteyenler için bilinmesi gereken üç şey vardır: bilim dördüncü şeydir; beşinci olarak da, tanınanı, gerçekte var olanı saymamız gerektir. Birincisi ad, ikincisi kavram, üçüncüsü imge, dördüncüsü de bilimdir."[55] Fakat bilimler arasında da ayrım yapılabilir. "Ruhu değişen varlıktan

[54] Platon, *Şölen*, çev. Azra Erhat-Sabahattin Eyuboğlu, (İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları, 2002), s.62
[55] Platon, *Mektuplar*, çev. İrfan Şahinbaş, (İstanbul: M.E.B., 1997), s.55

gerçek varlığa çeviren bilim hangisidir?”[56] diye sorar Sokrates ve yanıtlar: “Şu herkesin bildiği bayağı şey: Bir, iki, üç bilgisi. Sayı ve hesap. Her bilim, her sanat ona başvurmak zorunda değil midir?”[57] Fakat sayıları ve onların ticarette, müzikte veya hesapta kullanılma biçimi tıpkı tek tek nesnelerde güzelliğin tezahürü gibidir. Oysa Platon, sayıları Pythagoras gibi nesnelere içkin, nesnelerle özdeş kabul etmeyecektir. Öyleyse sayıların bilimi, aritmetik, hesapla nasıl bir tutulabilir? Sokrates’in iki elinin olması veya Sokrates ve Herakleitos’un iki kişi olmasıyla her iki durumda ortak nitelik olarak görünen 2 sayısı nasıl olur da aynı bilimin konusu olabilir? Böyle bir iddia bir devlet adamıyla bir çobanın farklı şeyleri yönetmek için aynı tür bilgiyi kullandıklarını söylemekten farksız değil midir?[58] Bütün bu sorular Platon’un aritmetik ve hesap arasında bir ayrım yapması için yeterlidir. Platon daha gençlik dönemi diyaloglarından biri olan Gorgias’ta aritmetiği şöyle tanımlamıştır: Aritmetik “tek ve çift çift sayılarla ve onların her birinde kaç tane birim olduğuyla”[59] ilgili bir söz sanatıdır. Platon aritmetiğin bu dolaysız tanımını aynı pasajın ilerleyen satırlarında hesabın aritmetikten farkını belirterek daha açık bir hale getirir: “Hesap aritmetik gibidir, çünkü o da aynı şeylerle, yani tek ve çift sayılarla ilgilenir; hesabın aritmetikten ayrıldığı nokta tek ve çift sayıları yalnızca kendi içlerinde değil birbirleriyle olan bağıntılarına göre incelemesidir.”[60]

Platon’un bu ayrımı Pythagoras’ta olmayan ve aritmetiğin konusunu duyusal olandan ayırmayı hedefleyen bir ayrımdır. Çünkü hesap tek ve çift sayıları birbiriyle olan ilişkilerine göre ele alırken onları ticaretin veya müziğin bir koyun sürüsü veya nota ölçüsü gibi duyusal karşılıklarıyla birlikte ele alır, onları sıralar, sayar veya birbirine ekleyip çıkarır. Oysa aritmetik sayıları bu türlü ele almaz. O öncelikle sayıları birbirine tümüyle eş birimlerle ele alır. Öyle ki, buradaki birimler duyusal ve dolayısıyla kusurlu birimler değildir. Oysa filozof olmayan aritmetikçiler “iki ordu”dan veya “iki öküz”den söz ederken kendi içlerinde eş birimlerden oluşmuş birilikleri kastederler ve dahası onlar bu iki farklı birliğin dahi aynı birimlerden

[56] Platon, *Devlet*, çev. Sabahattin Eyuboğlu-M. Ali Cimcoz, (İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları, 2005), s.189
[57] Platon, *Devlet*, s.190
[58] Platon, *Devlet Adamı*, çev. Aylin Kırgızoğlu, (İstanbul: Karınca Kitabevi) s.31
[59] Plato, *Gorgias*, (Forgotten Books, 2008), s.9
[60] Platon, *Gorgias,* çev. Mehmet Rifat-Sema Rifat, (İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları, 2006), s.10)

oluştuğunu düşünürler.[61] Öyleyse şu soru sorulmalıdır: “Birbirine tam eş ve parçalara ayrılmaz birimler nerede bulunur?”[62] Platon kendi sorusunu şöyle yanıtlar: “Bunlar yalnız düşünceyle kavranan ve başka hiçbir türlü ele alınamayan sayılardır.”[63]

Jacob Klein en azından Platon’a kadar sayının yani *arithmos*’un “belli sayıdaki bazı şeyleri sayma veya numaralandırma” anlamında kullanıldığını ve bu sayma sırasında kimi zaman benzer –örneğin sadece elmaların sayıldığı bir durumda- kimi zaman birbirinden tümüyle farklı –örneğin elma, koyun ve insanlardan oluşan bir kümenin sayıldığı durumda- duyusal nesnelerden birimler olarak yararlanıldığını hatırlatır ve şu sonucu çıkarır: “Arithmos her bir durumda belirli nesnelerin belirli bir sayısını gösterir.”[64] Öyleyse 5 sayısı, 5 nesneden oluşan bir birliği ifade eder, 7 sayısı 7 nesneden oluşan bir birliği ifade eder. 5 sayısı 5 elma, 7 sayısı 3 koyun ve 4 köpek olabilir; ve aynı şekilde 5+7 işleminin sonucu olan 12 sayısı böylece 5 elma, 3 koyun ve 4 köpekten başka bir şey değildir. Bu açıkça Pythagoras’ın aritmetiğidir. Öyleyse arithmos bu anlamıyla hesabın konusudur. Aritmetik ise yalnız düşüncede olan sayılarla ilgilenmelidir. Aritmetiğin konusu olan 5 veya 7 duyusal birimlerden değil, kendileri sayı bile olmayan matematiksel birimlerden oluşmalıdır ki böylece onlar “anılarının balmumu levhasında kazılı olduğunu ve yanlış düşünceye elverişli olmadıklarını iddia ettiğimiz, beş ile yedinin kendileridir.”[65] Öyleyse denilebilir ki, “aritmetik formları (eidos), hesap ise maddi (hylic) birimleri (monad) ele alır.”[66] Fakat arithmos’un eidos olması bazı güçlüklere neden olur.

Her şeyden önce sayının yani arithmos’un bir çokluk olduğu ve 1’in Antik Yunan’da bir sayı yani bir arithmos olmadığı, aksine onları meydana getiren bir birim olduğu hatırlanmalı[67] ve bu ilke Platon’un kendinde sayılarına uygulanmalı. Böylece her bir kendinde sayının bir 1’ler kümesi olduğu kabul edilmeli. Bu durumda 5 ve 7 sırasıyla 5 birimden ve 7 birimden oluşmalı. Fakat onlar böyle birimlerden oluşmakla saymanın konusu olmaz mı? Sayma ki, Platon’a göre “hangi

61 Platon, *Philebos,* çev. Aylin Kırgızoğlu, (İstanbul: Karınca Kitabevi) s.101
62 Platon, *Devlet*, s.193
63 Platon, a.g.e., s.193
64 Jacob Klein, *Greek Mathematical Thought And The Origin Of Algebra*, (New York: Dover Publications, 1992), s.46
65 Platon, *Diyaloglar 2, Theaitetos*, çev. Macit Gökberk, (İstanbul: Remzi Kitabevi, 1999), s.250
66 Klein, *Greek Mathematical Thought And The Origin Of Algebra*, s.16
67 John P. Mayberry, *The Foundations Of Mathematics In The Theory Of Sets*, (Cambridge: Cambridge University Press, 2000), s.71

sayının meydana çıkacağını araştırmaktan başka bir şey değildir."[68] Öyleyse Platon'un aritmetik ve hesap arasındaki ayrımının yanı sıra Devlet ve Philebos diyaloglarında dile getirdiği *iki türlü aritmetik vardır* ifadesi tam da bu sorunla ilgilidir. Çünkü filozof aritmetiği hesapta olduğu gibi duyusal nesnelerle birlikte ele almadığı gibi onu duyusal olmasa da sayılabilir olan birimlerle de ele almaz. Çünkü arithmos eidos olacaksa parçalardan oluşmaz. Fakat bu tam da Platon'un çözmeden bıraktığı pay alama sorunudur. Platon'un Parmenides diyalogunda Sokrates şöyle der: "İdeaların kendileri doğada ilk örnekler olarak bulunurlar, öteki şeyler bunlar gibi görünürler ve bunlara benzerler; öteki şeylerin oluşmaları için idealardan pay almaları da bunlara benzemekten başka bir şey değildir."[69] Fakat idealar gerçek birer varlık olarak hem kendilerinde hem de kendilerine benzeyen başka her şeyde nasıl bulunurlar? Aynı soru sayılar için de sorulabilir. Bu sorunun ontolojik yanıtı bir paradoksu andırsa da belirli sayıdaki kümelerin aynı sayıdan pay aldıkları fikri tam da kardinal sayıların tanımını içerir. Denilebilir ki, Platon'un sayı ideası kardinal niteliktedir. Çünkü o filozoflar için öngördüğü aritmetikle sayıların birimler toplamı olduğu fikrini de geride bırakır. Sayıların birimler toplamı olduğu söylendiğinde açıktır ki bu bir saymayı ima eder ve bu durumda sayı ordinal bir niteliğe bürünür.

Şimdi, Platon'a göre hem aritmetiğin hem de hesabın aynı şeyle, tek ve çift sayılarla ilgilendiği ama aralarında önemli bir fark olduğu söylendi. Şöyle ki, hesap onların sayısal değerini kendi içinde değil birbirleriyle olan ilişkisiyle ele alır. Böylece sayma, sıralama veya temel işlemler hesabın konusu olur. Dolayısıyla hesabın sayının sadece ordinal anlamıyla ilgilendiği açıktır. Örneğin 5+7=12 eşitliği 5 ve 7 nesnenin bir arada sayılmasıyla 12 nesnenin elde edilmesi gibi düşünülebilir. Bu işlem sırasında nesnelerin tek tek ne olduğu da önemli değildir. 5 koyun ve 7 köpek birbirine eklenerek sonucun 12 hayvan olduğu söylenebilir. Aynı şekilde iki köpek ve üç koyundan oluşan 5 hayvan ile 4 kalem ve 3 filozoftan oluşan 7 nesne toplanabilir ve sonucun 12 nesne olduğu söylenebilir. Öte yandan hesap sayıyı yani arithmos'u birbirine eş duyusal birimlerin bir toplamı olarak ele aldığında onu yine

[68] Platon, *Diyaloglar 2, Theaitetos*, s.253
[69] Platon, *Parmenides*, çev. Saffet Babür, (Ankara: İmge Yayınevi, 2001), s.41

de kardinal anlamıyla konu edinmez. Çünkü birimlerin toplamı olarak ifade edilen bir sayı kendi içinde sayılmayı ima eder.

Aynı şey aritmetiğin duyusal olmayan birimleri söz konusu olduğunda da geçerlidir. Çünkü aritmetiğin bir kısmı hesaba benzer olarak sayıyı birimler toplamı olarak ele alır fakat ondan farkı olarak onun birimleri duyusal değil saf matematikseldir. Öyleyse bu türlü bir aritmetiğin de sadece ordinal bir nitelikte olduğu söylenebilir. Son olarak, çelişkiye ve pay alma sorununa rağmen filozofların aritmetiğine göre sayılar başka her şeyin kendilerinden pay aldığı idealar olarak düşünüldüğünde onlar ne duyusal şeylerdir ne de birimlerden oluşmuş birliklerdir. Onlar hesabın ve aritmetikçilerin bütün sayılarının kendilerinden pay aldığı tözler veya kavramlardır. Bu bakımdan onlar filozofun aritmetiğine ait kardinal sayılardır. Bu son özelliğiyle Platoncu arithmos Gottlob Frege'nin de aritmetiğin temeline yerleştirdiği modern kardinal sayılara Antik Yunan'da en çok yaklaşandır.

Daha önce de söylendiği gibi Platon'un ideal sayılarıyla ilgili en önemli sorun genel felsefesinde olduğu gibi pay alma sorunudur. Parmenides diyalogunda Sokrates'in başka her şeyin kendilerinden pay aldığını söyleyerek savunduğu ideaları Parmenides bir örtüye benzeterek kritik bir soru sorar: "O halde örtü her bir kişinin üzerinde bütün olarak mı vardır, yoksa her birinin üzerinde örtünün bir parçası mı vardır?"[70] Parmenides bu soruyla Sokrates'i köşeye sıkıştırmayı ve onun 1'in hem bir idea olarak parçalanamaz kendinde bir varlık hem de her bir insanda bulunarak bir çokluk olduğunu itiraf etmesini amaçlar. Çünkü ne parça ne de bütün olarak bir pay alma söz konusu değilse nesneler idealardan nasıl pay alabilir?

Bu noktada Parmenides'e şöyle bir cevap vermek mümkündür: Eğer idealar duyusal varlığın dışında, uzay-zaman dışında varlıklarsa, duyusal nesneler onlardan pay aldığında onlar yine zaman ve mekanda yer almazlar. Zamanda ve mekanda yer almadıkları için de onlar hem *bir* hem *çok* olmazlar. Çünkü bir nesnenin bir ideadan pay alması, ideanın var olma biçimini etkilemez. İdealar duyusal nesneler gibi zaman ve mekan koşuluyla varlık sahibi olsalardı onların elbette hem kendilerinde hem başka şeylerde bulunmaları bir parçalanma gibi algılanabilirdi. Fakat mekanda bulunmayan bir idea nasıl parçalanabilir? Daha açık bir soruyla, zamandan ve

[70] Platon, *Parmenides*, s. 38

mekandan bağımsız varsayılan bir ideanın yeri nasıl sorulabilir? Böyle bir nesne için açıktır ki varlık koşulu bir yer içermez. Böylece bir nesnenin ondan pay alması söz konusu olduğunda, ideanın, bir nesnenin kendi varlık koşulu olan mekanına sızacağı ve böylelikle kendi mekanını terk etmek zorunda kalacağı, aksi halde iki mekanda birden bulunması gerekeceği ve bunun da bir bölünme olacağı nasıl söylenebilir? Sonuç olarak denilebilir ki, Platon'un ideal sayıları Frege'nin "bir yerde olma" zorunluluğu duymayan[71] kardinal sayılarına benzetilirse bu pay alma sorununu da başarıyla alt edebilir.

2.4. Aristoteles: Birimler Toplamı Olarak Sayılar, Ordinal Sayılara Dönüş

Hem Pythagoras hem Platon sayıları tözler olarak ele almış fakat Pythagoras onları duyusal nesnelerle özdeş ve bir biçimde onların nedenleri olarak Platon ise kendinde tözler olarak ve duyusal nesnelerle gerçek nesneler arasında aracı olarak belirlemişti. Aristoteles daha önce de söylendiği gibi Pythagorasçıların bu tutumunu bir kusur olarak görüyordu. Çünkü "onlar birimlere uzam atfetmektedirler. Ancak birimin (birin) uzama sahip olabilecek şekilde nasıl teşekkül ettiğini açıklamaktan aciz görünmektedirler."[72] Buradaki sorun her biri birer duyusal çokluk olan sayıların, her biri ayrı birer duyusal nesne olması nedeniyle her biri birim olan tek tek nesnelerden elde edilmesi değildir. Fakat öncelikle her biri ayrı birer nesne olması nedeniyle tek tek birimler olan nesnelerin nasıl 1'le aynı şey olduğudur. Çünkü eğer 1 böyle bir ilkeyse onun duyusal nesnelerde nasıl yer aldığını açıklamak gerekir ki Aritoteles'in eleştirisi de bu açıklamanın verilmemiş olmasınadır.

İkinci olarak 1'in duyusal bir birim olarak ele alınması ve sayıların da duyusal birimlerin bir kümesi olarak ortaya konulması aynı sayının birden çok olmasına neden olur. Örneğin aynı sayıdaki köpeklerden ve koyunlardan oluşan iki farklı küme Pythagoras'a göre aynı sayı olmak zorundadır. Fakat eğer birimler duyusal olan şeylerse ve bir koyun bir köpekle aynı şey değilse 1'in onlardan, koyun ve köpekten, farklı olduğunu söylemeden onların özdeş birimler olduğu ve onlardan oluşan bu iki kümenin aynı sayılar olduğu nasıl söylenebilir? Aristoteles şöyle der:

---

[71] Gottlob Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, çev. H. Bülent Gözkan, 1. b., (İstanbul: YKY, 2008), s. 155
[72] Aristoteles, *Metafizik*, s.548

> "İki öbek sayısı da eşitse koyunlarla köpeklerin sayısı aynı ama "on" aynı değil; "on" nesne de aynı değil: tıpkı her ikisi de üçgen olduğundan ötürü şekilleri aynı olsa bile eşkenar üçgen ile çeşitkenar üçgenin aynı üçgenler olmaması gibi. Çünkü ayırıcı özelliği açısından farklı olan değil, farklı olmayan nesnelere "aynı" denir."[73]

Öyleyse "Eğer Bir'in ilke olması isteniyorsa, sayılar hakkında Platon'un görüşlerini benimsemek ve bir ilk İki, bir ilk Üç'ün var olduğunu ve sayıların kendi aralarında birbirleri ile toplanamaz olduklarını söylemek daha doğrudur."[74]

Aristoteles, Pythagoras'ın sayıları duyusal kabul eden teziyle karşılaştırıldığında Platon'un sayıların kendinde şeyler olduğu tezini daha tutarlı görür. Fakat bu sadece bir karşılaştırma söz konusu ise böyledir. Yoksa bir olanın veya sayıların kendinde şeyler veya tözler olması nedeniyle değil. Aristoteles şöyle der:

> Matematiksel şeyler eğer kendilerine has bir gerçekliğe sahipseler, zorunlu olarak ya bazı filozofların dedikleri gibi duyusal şeylerde mevcutturlar veya duyusal şeylerden ayrı olarak vardırlar. Eğer onlar ne duyusal şeylerde, ne duyusal şeylerden ayrı değilseler ya var değildirler veya başka bir tarzda vardırlar; öyle ki böylece tartışmamızın konusu onların var olup olmadıkları değil, ne tür bir varlığa sahip oldukları olacaktır.[75]

Şimdi, sayıların ve özellikle de onları meydana getiren birimlerin yani 1'in bir açıklamaya ihtiyaç duyduğu açıktır. Bu ise bir niceliğin ne olduğu, nasıl ölçüldüğüyle yakından ilgilidir. Çünkü farklı nicelikleri Pythagoras'ın yaptığı gibi birbirleriyle ifade edilebilir kabul etmek farklı nitelikteki ölçülerin de birbirine karıştırılmasına neden olur.[76] Böylece Aristoteles nicelik türleriyle ilgili şöyle ayrımlar belirler.

---

[73] Aristoteles, *Fizik*, s.215
[74] Aristoteles, *Metafizik*, s.560
[75] Aristoteles, a.g.e., s.529
[76] Burada Proklos'un uyarısıyla Pythagoras'ın da sürekli ve süreksiz nicelikler arasında ayrım yaptığı ve böylece aritmetiği ve müziği geometri ve astronomiden ayırdığı hatırlatılabilir. Fakat onun sayıları biçimlerle veya biçimleri sayılarla ifade ederek bu ayrımı ortadan kaldırdığı da daha önce söylenmişti.

Kimi nicelik (poson) süreksiz kimi de sürekli… Süreksiz olanlar, söz gelişi sayı, söz; sürekliler ise çizgi, düzlem, cisim: bunlardan başka zaman, yer. Sayının parçalarının birleştiği hiçbir ortak sınır yok: Sözgelişi "beş" "on"un parçasıysa, "beş" ile "beş" hiçbir ortak sınırda birleşmez, süreksizdir… genel olarak sayı konusunda parçaların ortak bir sınırını da düşünemezsin, hep süreksizdir. O halde sayı süreksiz niceliklerden… Çizgi ise sürekli, parçalarının birleştiği ortak sınır alınabilir.[77]

Aristoteles ölçü için de genel bir tanım verir: "ölçü niceliğin (poson) kendisiyle bilindiği şeydir."[78] Öyleyse niceliklerin birbirinden farklı olması ölçülerin de bu genel tanıma uygun olarak her bir nicelik için farklı olmasını gerektirir. Çünkü "ölçü her zaman ölçülen şeylerin hepsinde ortak olan bir yüklem olmak zorundadır. Örneğin ölçü birimi atsa, ölçülen varlıklar atlardır. Eğer o insansa, insanlardır."[79] Sayılar da nicelikler olduklarına göre onların da kendilerine özgü ölçüsü olacaktır ve bu ölçü veya birim 1'dir. Aristoteles 1'i duyusal veya başka tür nicelikleri ölçen birimlerden böylece ayırır. Buna ek olarak ona diğerlerine göre daha üstün bir anlam yüklemeyi de ihmal etmez: "Kendisine bir şey eklemek veya kendisinden bir şey çıkarmanın mümkün olmadığının düşünüldüğü durumda ölçü tamdır. Bundan dolayı da sayının ölçüsü, bütün ölçüler içinde tam olanıdır. Çünkü sayıda bir birim, her bakımdan bölünmez bir şey olarak vazedilir."[80]

Aristoteles Metafizik'te sık sık 1'in bir sayı olmadığını söyler. "Örneğin 1056b'de "İki ilk çokluktur. İki mutlak anlamda az sayıda olandır. …azı meydana getiren, bazılarının (Anaksagoras) dedikleri gibi bir değil ikidir."[81] der. Daha önce de söylendiği gibi Antik yunanlılar için sayı yani *arithmos* bir çokluktur ve Hem Pythagoras ve Platon hem de Aristoteles bu kavrayışı sürdürürler. Onlara göre bütün sayılar tek ve çift sayılardır ve 1 bütün bu sayıları kendisinden meydana getirdiğinden kendisi ne tek ne de çifttir ve dolayısıyla o bir *monad*'tır ve bir çokluk yani sayı (arithmos) değildir ve bütün sayılar 1'lerin bir toplamıdır.[82] Dahası sayı

[77] Aristoteles, *Kategoriler*, çev. Saffet Babür, (Ankara: İmge Kitabevi, 2002) s.27
[78] Aristoteles, *Metafizik*, s.421
[79] Aristoteles, a.g.e., s.583
[80] Aristoteles, a.g.e., s.421
[81] Aristoteles, a.g.e., s.436
[82] Aristoteles, a.g.e., s.561

Aristoteles'e göre ne maddi ne de maddeden ayrı bir tözdür. Sayı bir töz de değildir. Sayı "kaç tane?" (how many) sorusuna yanıt veren niceliktir ve nitelik, görelik, uzam, zaman, durum, iyelik, etkinlik, ya da edilginlik gibi tözün kategorilerinden biridir.[83] Öyleyse sayı yani arithmos bir soyutlamadır ve tözün ilineğine dair bir bilgi verir. O kaç tane sorusuna soyutlama aracılığıyla bir birimler toplamı olarak verilen yanıttır.

Aristoteles'in sayıları birimler toplamı olarak tanımlaması onun sayıları ordinal nitelikleriyle ele aldığını gösterir. Çünkü birimlerin toplanmasından kasıt aslında birimlerin sayılmasıdır. Böylece ideal sayıların birimlerden oluşmadığını, birbiriyle toplanamaz olduğunu ve onların her birinin ayrı ayrı kendinde varlıklar olduğunu öne süren Platoncu görüş Aristoteles tarafından reddedilir. Çünkü örneğin 4'ün içinde 3, 3'ün içinde 2 vardır.

> Eğer bütün birimler birbirleriyle toplanamaz iseler, ne kendinde İki, ne kendinde Üç, ne de başka hiçbir şeyin var olamayacağı açıktır. Çünkü ister birimler birbirinden farksız olsunlar, ister her biri diğerinden farklı olsun, her halükarda her sayının bir sayının diğeriyle toplanması yoluyla sayılması zorunludur. Böylece İki Bir'le bir başka Bir'in toplanması, Üç İki'yle bir başka Bir'in toplanması sonucu meydana gelir. Dört için de aynı şekilde bir meydana gelme söz konusudur.[84]

Elbette Aristoteles de tıpkı Platon gibi hesap ve aritmetiğin birbirinden ayrılması gerektiğini kabul eder. Her ne kadar aritmetiğin sayıları duyusal nesnelerin niceliğinin soyutlanması aracılığıyla elde edilmiş de olsa, aritmetik kendine has nesneleri ve yöntemiyle bir bilim olma sıfatını kazanır. Fakat onun hem nesneleri hem de yöntemi pratik karşılığını hesapta bulur ve her ikisi de sayıların veya duyusal niceliklerin birbirine göre olan ilişkisini ele alır. Böylece sayma veya toplama birinde teorik diğerinde pratik bir anlamda da olsa aynı ordinal bakış açısını içerir.

---

[83] Aristoteles, *Kategoriler*, s.11
[84] Aristoteles, *Metafizik*, s. 552

2.5. Euclides: İlk İlkeler Ve Aksiyomatik Yöntem

Antik Yunan filozoflarının ilk ilke -arkhe- olarak belirlediği ateş, toprak, su, hava gibi somut kavramlarının arasında Pythagoras'ın ilk ilkesi matematiksel bir nesne olması bakımından oldukça farklı görünür. Fakat Pythagoras dahil hepsinin ortak yanı ilk ilkeleri araştırmaları, ilk ilkeler aracılığıyla varlığı veya bilgiyi açıklamaya çalışmalarıdır. Bu tutum felsefenin olduğu kadar matematiğin de neden Antik Yunanlılarla birlikte başladığını anlaşılır kılar. Çünkü matematik bilimine sahip olmak sadece sayılara sahip olmakla veya onlarla bazı hesaplar yapmakla değil onun kesin ilkelerini belirlemekle mümkündür. En azından Yunanların böyle düşündüğünü ve bu yeni düşünceyledir ki kendilerinden öncekilerin sahip olmadığı teorik bir bilime, matematiğe, sahip olduklarını söylemek gerekir. Thomas Heath matematiğin neden Yunan bilimi sayılması gerektiğini şöyle dile getirir:

> Bütün matematikçiler önemli bir kabulde birleşirler: matematiğin kurulması ve onun içeriğinin büyük bir bölümü Yunan'dır. Yunanlar ilk ilkeleri bulmuş, ab initio yöntemi keşfetmiş ve terminolojiyi belirlemiştir. Kısacası yeni gelişmeler ve modern analizler ne getirirse getirsin matematik her zaman bir Yunan bilimidir.[85]

Heath'in öne sürdüğü üç temel nedenin ilk ilkeler, ab inito yöntem ve belirlenmiş terminolojinin bir arada vücut bulduğu aksiyomatik metot Yunan matematiğinin doruğunu oluşturur. Çünkü matematiğin diğer bilimlere sızan, diğer bilimleri de matematik yapan ve dolayısıyla gizlice Yunan yapan bu değişmez yöntemi ilk keşfinden beri bütün çağlara damgasını vurmuştur.

İlk ilkeleri aksiyomatik metodun habercisi görülebilecek bir şekilde ilk tanımlayan filozof Aristoteles'tir. Euclides ise Aristoteles'in işaret ettiği biçimde ilk kez bir bilimin aksiyomatikleştirilmesini gerçekleştirmiştir.

Hem Aristoteles hem de onun açtığı yolda özenle yürüyen Euclides, tanıtlamanın zorunlu öncüllerden hareket etmesi gerektiğini düşünmüşlerdir. Eğer bazı önermeler tanıtlanmak isteniyorsa, zorunlu olarak kendileri tanıtlanmadan doğru kabul edilen bazı temel önermelere gereksinim vardır. Aksi halde ya *varsayılan* ve

[85] Heath, *A History Of Greek Mathematics*, Volume 1, s. V

tanıtlanan önermelerin yer değiştirdiği bir döngüselliğe ya da sonsuz bir geri gidiş problemine düşülmüş olunur. Böylece *aksiyomlar* ve *postulatlar* bütün bilginin kendileri üzerine kurulduğu ilkeler olarak önceden varsayılmak zorundadır.

> Tanıtlamalı bilginin şöyle öncüllerden çıkması zorunlu: doğru, ilk, doğrudan, sonuçtan daha iyi bilinen, daha önce gelen ve sonucun nedeni olanlar; çünkü böylece ilkeler de tanıtlanana uygun olacak. Bu böyle olmadan da tasım olabilecek, ama bu bir tanıtlama olmayacaktır: nitekim bilgi vermeyecek. İmdi öncülün gerçekten doğru olması gerekir, çünkü olmayanın –sözgelişi çapın koşut olmasının- bilgisi de olamaz. İlk ve tanıtlanamaz olması gerekir… Sonuçtan daha iyi bilinmesi, daha önce gelmesi ve neden olması gerekir…[86]

Aristoteles bütün tanıtlamalı bilimler için ortak olduğunu düşündüğü bu mantıksal bilgi edinme yöntemini belirlerken ilk ilkeler arasında önemli bir de ayrım yapar. Bu ayrıma göre "*tanıtlamalı bilimlerde kullanılan ilkelerden kimisi bir bilimin kendisine özgü, kimisi de ortak*"tır.[87] Aristoteles bütün bilimler için ortak olan ilk ilkeleri *aksiyom*, her bir bilimin kendisine özgü ilk ilkelerini *postulat* olarak tanımlar. Örneğin " 'çizgi ile düz çizginin şöyle bir şey oldukları' gibi ilkeler bir bilime özgü, 'eşit olanlardan eşit olanlar çıkartılınca kalanların eşit olduğu' gibi ilkeler ortak."[88] Bu ayrım aksiyomatik metodu bir bilime sistemli bir biçimde ilk kez uygulayan Euclides tarafından da korunmuştur. Euclides geometriyi aksiyomatikleştirirken "bütün dik açılar birbirine eşittir" (4. Postulat)[89] önermesini geometriye özgü bir 'postulat', "bütün parçasından büyüktür" (5. Aksiyom)[90] önermesini bütün bilimleri bağlayan bir 'aksiyom' olarak belirlemiştir.

Euclides, tıpkı Aritoteles gibi varsayımların sonsuz geri gidiş döngüsüne kapılmadan, basit bir yapıda ve kendileri aracılığıyla çıkarılabilecek başka bilgilere temel oluşturacak şekilde belirlenebileceğini düşünüyordu. Benzer şekilde, tanımların da basit ve sonsuz geri gidişten muaf tutulabileceğini düşünüyordu.

---

[86] Aristoteles, *İkinci Çözümlemeler*, çev. Ali Houshiary, 1. b., (İstanbul: YKY, 2002), s. 11

[87] Aristoteles, *İkinci Çözümlemeler*, s. 22
[88] Aristoteles, a.g.e. s. 22
[89] Euclides, *Elements*, çev. Richard Fitzpatrick, s. 9
[90] Euclides, *Elements*, s. 9

Euclides'in temellendirmesi nokta, çizgi, düzlem, gibi geometriye özel kavramların tanımlarından oluşan yirmi üç tanım, geometri bilimine özgü beş postulat ve mantıksal zorunluluklar olarak ifade edilen beş aksiyomdan oluşur. Euclides temel varsayımlar olarak belirlediği bu otuz üç önerme aracılığıyla teoremleri ispatlamaya girişir. Ve elbette bu ispat süreci ancak mantığın izniyle ve aracılığıyla yürütülür.

Bu yaklaşım mantığın sadece tanıtlamaların yöntemini sağlayan bir bilim değil, aynı zamanda her bir bilim için temel önermeler sağlayan bir bilim olarak görülmesinin bir sonucu olarak düşünülmelidir. Aksiyomları ve postulatları birbirinden ayırmak ve yine birbiriyle beraber aynı tanıtlamalarda kullanmanın şöyle bir yararı da vardır: Bu tutum herhangi bir bilim için belirlenen postulatların da en az mantıksal aksiyomlar kadar kesin oldukları izlenimini verir. Zaten Aristoteles ister aksiyom olsun ister postulat, ilk ilkelerin keyfi varsayımlar olamayacağını düşünür. Aksine onlar aynı zamanda apaçık olgusal zorunluluklardır.

Aristoteles'in "*Aynı niteliğin, aynı zamanda, aynı özneye, aynı bakımdan hem ait olması, hem de olmaması imkânsızdır*"[91] biçiminde formüle ettiği çelişmezlik ilkesi, formel zorunluluğundan başka olgusal bir zorunluluğa da gönderimde bulunur. Çelişmezlik ilkesinin kesinliği olgusal olarak desteklenir. Aynı şekilde "bütün parçasından büyüktür" önermesi de olgusal ve zorunlu bir doğru olarak Euclides'in aksiyomları arasında yer alır. Öyleyse aksiyomların açıkça mantıksal ilkeler olduğu ve reddedilmelerinin aklın işleyişiyle veya en azından olgusallıkla çelişmek olacağı söylenirken, postulatların da her ne kadar mantıksal ilkeler olmasalar da aynı niteliklere sahip olarak düşünüldükleri açıktır.

Gerçekten de herhangi bir postulatın aksini kabul etmek bizi her zaman çelişkiye götürür mü? Başka bir deyişle, Aristoteles'in düşündüğü ve Euclides'in geometride örneklediği gibi, bilimlere özgü nesnel doğruluklar gerçekten mevcut mudur?

Her ne kadar Euclides kendi seçtiği postulatların apaçık doğruluklar olduğunu düşünmüşse de, 19. Yüzyılda, Lobachevski'nin ve Reimann'ın Euclides'in beşinci postulatını değiştirerek farklı ve tutarlı (en azından Euclides geometrisi tutarlı ise

[91] Aristoteles, *Metafizik*, s. 202

tutarlı) geometriler kurmayı başarmasının ardından, postulatlar doğruluğu 'varsayılan' önermelere dönüşmüştür. Bunun anlamı postulatların içeriğinin zorunlu olmadığı, olgularla uyumlu görünmelerinin doğru kabul edilmeleri için yeterli olmadığıdır. Yine bu yüzyıldan sonra aksiyomlar ve postulatlar olarak iki kategoride ilkeler verilmesi sonlandırılmış, herhangi bir aksiyomatik sistem içinde varsayılan bütün önermeler aksiyomlar olarak adlandırılmıştır.

Aristoteles, kavramsal çerçevesini oluşturduğu yöntemi tanıtlamalı tüm bilimler için öngörmüştü. Euclides bu yöntemi sadece bilimlerden biri olan geometriye uygulayarak hem geometriyi ilkelere dayalı olarak kurmuş hem de aksiyomatik yöntemi ete kemiğe büründürmüştür. Euclides'in açtığı sistemli ve dedüktif yolda ilerleyen Apollonius, Archimedes ve Ptolemy daha karmaşık geometrik şekiller ve trigonometri üzerine çalışmalar yürütmüş,[92] Archimedes aksiyomatik yöntemi mekanik bilimine de uygulamıştır. Bütün bu çalışmalardan sonra gerçek anlamda ilk aksiyomatikleştirme Newton tarafından hareketin ilkelerine uygulanmıştır. Newton kütle, hız, kuvvet,[93] gibi temel tanımları kullanarak üç postulat öne sürmüş ve teoremlerini ispatlamıştır.

Euclides geometri kitabında aritmetiğin temel tanımlarını vermeye çalışmışsa da aritmetiği geometri gibi aksiyomatikleştirmemişti. Peano bunu yaklaşık iki bin yıl sonra gerçekleştirdi. Böylece matematiğin iki temel alanı aksiyomatik bir yapı kazandı. Öte yandan Euclides-dışı geometrilerin keşfiyle aynı bilim için farklı aksiyomatik modeller oluşturulabileceği keşfedildi. Ayrıca hem geometri, hem aritmetik için Hilbert ve Dedekind gibi matematikçiler ikinci dereceden yeni aksiyomatik modeller oluşturdular. Böylece denilebilir ki Aristoteles'in açtığı yolda geometriyle başlayan aksiyomatikleştirme pek çok başka denemenin ardından aritmetik için de temel bir yönteme dönüşmüş durumdadır. Bu noktada Euclides'in neden geometri gibi aritmetiği de aksiyomatik bir biçimde kurmadığı yoruma açık bir tartışma alanıdır. Bunun ardındaki neden muhtemelen onun aritmetiği geometrik bir biçimde yorumlaması yatmaktadır. Öte yandan Euclides'in de tıpkı Aristoteles gibi

---

[92] Morris Kline, *Mathematics, The Loss Of Certainty*, (New york: Oxford University Press, 1982), s. 23

[93] Bkz. *Isaac Newton*, *Doğal Felsefenin Matematiksel İlkeleri*, çev. Aziz Yardımlı, (İstanbul: İdea yayınları, 1998)

sayıları birimler toplamı olarak ifade ettiğini ve verdiği bütün aritmetiksel tanımlarda ordinal bir bakışın hakim olduğu söylenebilir.

2.6. Aritmetik Ve Aksiyomatik Yöntem

Peano, Euclides'in geometride için yaptığını aritmetikte yapmış ve aritmetiği aksiyomatik bir biçimde kurmayı denemiştir. O da tıpkı Aristoteles ve Euclides gibi "döngüsellik" veya "sonsuz geri gidiş" sorunlarıyla karşılaşmamak için bazı terimleri tanımlamadan ve bazı önermeleri ispatlamadan kabul etmek gerektiğini savunur. Böylece, ilkel terimler ve aksiyomlar bir kere belirlendikten sonra asıl yapılması gerekenin teoremlerin onlardan mantıksal bir biçimde elde edildiğini göstermek olduğunu düşünür. Böylece Peano doğal sayıların temellendirilmesi için, tanımlanmamış üç terim ("sıfır", "doğal sayı", "hemen ardışık") ve doğruluğu varsayılmış beş aksiyom belirler.

Peano Aksiyomları[94]:

1. Sıfır bir doğal sayıdır.
2. Herhangi bir doğal sayının hemen ardışığı bir doğal sayıdır.
3. Farklı doğal sayıların, asla aynı hemen ardışığı yoktur.
4. Sıfır, herhangi bir doğal sayının hemen ardışığı değildir.
5. Eğer bir şey sıfır için doğru ise ve eğer ne zamanki o, bir doğal sayı için doğru olduğunda, o doğal sayının hemen ardışığı için de doğru ise, şu halde o, bütün doğal sayılar için doğrudur.

Peano'nun iddiası, onun tanımlamadan kullandığı terimlere itiraz edilmediği takdirde, geri kalan tüm doğal sayıların varsayılan aksiyomlardan mantıksal olarak elde edilebileceğidir. 0'ın zaten verili olduğu düşünülürse ilk elde edilecek sayının da onun hemen ardışığı olan "1" sayısının olması beklenmelidir. Fakat gerçekte aksiyomların bizi mantıksal olarak buna zorladığını söyleyemeyiz. Çünkü öyle

[94] Stephen Barker, *Matematik Felsefesi*, çev. Yücel Dursun, 1. b., (İstanbul: İmge Yayınları, 2003), s. 98

olması için “hemen ardışık” teriminin “bir fazla” anlamında kullanılması gerekirdi. Bu ise “1” sayısının ispatlanması gereken bir teorem olarak değil, tanımlanmadan kullanılan bir terim olarak sistemde yer almasını gerektirir. Fakat Peano, aksiyomlarında 1 sayısına yer vermediği gibi, “hemen ardışık” teriminin 1 sayısıyla zorunlu herhangi bir ilişkisi olduğunu da belirtmez. Öyleyse Peano aksiyomlarından zorunlu olarak sadece doğal sayıların türetilebileceğini söyleyemeyiz. Olası yorumlardan birini Bertrand Russell şöyle dile getirir:

> ‘0’ terimini her zamanki anlamında, ‘doğal sayı’ terimini ‘çift sayı’ anlamına gelecek biçimde ve bir sayının ‘hemen ardışığı‘nı da o sayıya 2 eklendiğinde elde edilen sonuç olarak kabul edelim. Bu durumda 1’in yerini 2, 2’nin yerini 4 alacak ve bu böylece devam edecek, ‘sayılar’ kümesi ise: 0, 2, 4, 6, 8, … olarak şekillenecektir. Üstelik Peano’nun beş aksiyomu da sağlanmış durumda olacaktır.[95]

0’dan sonra 1’in gelip gelmeyeceği görüldüğü gibi “hemen ardışık” teriminin nasıl yorumlandığıyla ilgilidir. “Hemen ardışık” teriminin “bir fazla” değil de “iki fazla” olarak anlaşılması bize doğal sayıları değil ama çift sayıları verir.

Şimdi, eğer doğal sayıları temellendirmek istiyorsak fakat bu işi başarmak için Peano aksiyomlarında geçen “hemen ardışık” terimini “iki fazla” değil ama “bir fazla” olarak yorumlama gereğini duyuyorsak, bu durum bize doğal sayıları temellendirdiğimizi değil ama doğal sayıların zaten bildiğimiz bir özelliğini (birer birer artma özelliğini) Peano aksiyomlarına yansıttığımızı gösterir. Sokrates’in *ancak bilinen bir şeyin öğrenilebilir olduğu* şeklinde yorumlanabilecek “öğrenme paradoksu” çözümünde[96] olduğu gibi, burada 1, hem hep bilinen hem de yeni öğrenilen bir şey olarak karşımıza çıkar ve tüm doğal sayıları da kendisi sayesinde var eder.

Öyleyse 1’i bilmek gerçekten önemlidir, aynı şekilde 0’ı ya da “hemen ardışık’ı da öyle. Çünkü bu terimlerin kesin bir tanımı verilebilirse, onları nasıl

---

[95] Bertrand Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, 2. e., New York: The Macmillan Co,.1920, s. 7

[96] Platon, *Menon*, s. 68

bildiğimiz ortaya konabilir, tüm doğal sayılar onlardan hareketle gösterilebilirdi. Bu iddia Carl G. Hempel tarafından da dile getirilmiştir:

> Eğer matematiğin, kastedildikleri anlamda matematiksel kavramların doğru bir teorisi olduğu söylenecekse, bütün sistemin Peano aksiyomlarından ve uygun tanımlardan türetilebilir olduğunu göstermek onun geçerliliği için yeterli olmayacaktır. Bunun yerine, ilkel terimler bilindik anlamlarında alındığında Peano aksiyomlarının gerçekten doğru olup olmadıklarını araştırmak zorundayız. Bu soru, elbette, ancak '0', 'doğal sayı' ve 'hemen ardışık' terimlerinin bilindik anlamları açıkça tanımlandığında cevaplanabilir.[97]

Fakat 1'in veya diğer terimlerin tanımlarının verilebildiği varsayılsa bile bu aritmetiğin artık sağlam bir biçimde kurulmuş olduğu anlamına gelir mi? Bu soru aritmetik dışı bir sorudur. Çünkü bu soru artık ne aritmetiğin terimleriyle ne de onun varsayımlarının sarsılmazlığıyla ilgilidir. Bu bir yöntem problemidir. Daha açık bir deyişle böyle bir soru her şeyden önce aksiyomatik sistemin meşruluğuna yapılacak bir saldırının habercisidir. Şimdi yapılması gereken aksiyomatik yöntemi test etmektir. Aksiyomatik metodun en genel tanımı şöyledir:

> Aksiyomatik yöntem en basit anlamıyla temel kavramların ve bir bilimin bütün kavramlarının kendilerinden sırasıyla tanımlar ve tümdengelim aracılığıyla çıkarıldığı temel doğruların eksiksiz bir kümesini oluşturmayı içerir.[98]

Kısacası aksiyomatik yöntem herhangi bir bilime ait olmak üzere tanımlar, aksiyomlar ve bunlar aracılığıyla çıkarımı yapılan teoremlerle ilgilidir. Aksiyomatik yöntemin üç tane de temel ölçütü vardır: tutarlılık, bağımsızlık ve tamlık.

Tutarlılık bir teoremin aksiyomlar aracılığıyla hem kendisinin hem de değilinin ispatlanamaz olmasıyla ilgilidir:

---

[97] Carl G. Hempel, *The World Of Mathematics*, Vol. 3, New York: 1956, s, 1637
[98] Hermann Weyl, *Philosophy Of Mathematics And Natural Science*, (Princeton: Princeton University Press, 1949), s. 18

> Bir aksiyomatik sistem her koşul altında çelişkiden arınmış olmalıdır. Ancak böyle bir durumda onun tutarlı olduğu söylenebilir. Yani aksiyomlardan yapılan çıkarımlar hem "a" önermesini hem "~a" önermesini ispatlamamalıdır.[99]

Bağımsızlık aksiyomların birbiriyle olması gereken ilişkiyi ifade eder:

> Vazgeçilmez olmasa da bir aksiyomatik sistemde aksiyomların birbirinden bağımsız olması istenir. Aksiyomatik sistem gereksiz öğelere ve diğer aksiyomlarla zaten ispatlanabilir olan ifadeler içermemelidir.[100]

Tamlık, tutarlı ve bağımsız bir aksiyomatik sistemin tamamlayıcı ilkesidir:

> Nasıl ki tutarlılık hem "a" hem değil "~a" önermesinin aynı sistem içinde birlikte ispat edilememesinin koşuludur, tamlık da bu iki önermeden birinin mutlaka ispatlanabilir olmasını gerektirir.[101]

Artık aritmetiğin aksiyomatikleştirilmesindeki tek sorunun ilkel terimlerin tanımlanması sorunu olmadığı söylenebilir. Çünkü eğer yöntemin bu üç temel özelliği sağlanmıyorsa bu terimlerin tanımlanmamış olmasından çok daha önemli bir sorun olarak karşımıza çıkar. Nitekim Kurt Gödel "meta-matematiksel uslamlamanın usta bir zinciriyle, Gödel, en önemli türden sistemler için tutarlılığın tamlıkla bağdaşık olmadığını kanıtlayabildi. Böyle sistemler, eğer tutarlıysa, zorunlu olarak tam olamazdı."[102] Yani aksiyomatik bir sistem eğer tutarlı olmak istiyorsa en az bir teoreminin *ne kendisinin ne de değilinin* ispatlanamaz olmasını kabul etmelidir. Gödel kanıtlamalarıyla birlikte denilebilir ki ilk ilkeler üzerine kurulmuş olan aksiyomatik sistem aritmetiğin kusursuz bir biçimde kurulmasının önünde önemli bir engel oluşturmuştur. Fakat eğer aksiyomatik sistem aritmetiğin kurulması için kusurlu bir sistemse, 1'in ve diğer terimlerin tanımlarının şüpheye yer bırakmayacak bir biçimde verilmesi artık daha elzemdir denemez mi? Özetle 0'ın, 1'in ve genel olarak sayıların ne olduğu artık daha önemli bir soru haline gelmez mi?

---

[99] Weyl, *Philosophy Of Mathematics And Natural Science*, s. 20
[100] Weyl, a.g.e. s. 20
[101] Weyl, a.g.e. s. 24
[102] Stephen F. Barker, *Matematik Felsefesi*, 155

3. SAYMA PARADOKSU

Daha önce defalarca söylendiği gibi ordinal sayı teorileri saymayı, yani sayıların ardışık sıralılığını temel alır. Denilebilir ki "sayı nedir?" sorusunu yanıtlamaksızın, sadece 0, 1 ve ardışıklık gibi temel kavramlar aracılığıyla bütün sayıları ardı ardına dizmek mümkündür. Şimdi, eğer ordinal sayıların kardinal sayıları öncelediği savunulacaksa her şeyden önce onun temelinde yer alan saymanın ne olduğu, onun nasıl mümkün olduğu ortaya konmalıdır. Çünkü 1 sayısına, yani aritmetiğin en temel nesnesine sahip olmadan 2'ye veya 3'e kadar sayabilmek nasıl saçmaysa, 2'ye sahip olmadan saymanın başlaması da aynı derecede saçmadır. Öyleyse sayma 1'den nasıl başlayabilir ve 1'den 2'ye sayma aracılığıyla geçildiği nasıl savunulabilir? Çünkü böyle bir durumda, yani 1'in tek başına kavrandığı bir durumda, 1'e kadar saymak gerçekten anlamsızdır. Denilebilir ki, saymanın nasıl mümkün olduğuna dair bu paradoks tıpkı Platon'un Menon diyalogunda geçen *öğrenme paradoksu* gibi bir başlangıç sorununu dayatır.

Sokrates Menon'a, birlikte erdemin ne olduğuna dair bir araştırma yapmayı önerdiğinde Menon şöyle cevap verir: "Ancak onun ne olduğu hakkında en ufak bir bilgin bile olmadığı zaman, bir şeyi nasıl arayabilirsin? Araştırmanın nesnesi olarak bilmediğin bir şeye nasıl ulaşacaksın? Onunla bir şekilde karşı karşıya gelsen bile, bilmediğin şeyi bulmuş olduğunu nasıl bileceksin?"[103] Menon'un dile getirdiği öğrenme paradoksunun sayma aracılığıyla sayıların öğrenilmesi söz konusu olduğunda çok daha güçlü bir biçimde karşımıza çıktığı söylenebilir. *Sayma Paradoksu* olarak adlandırılabilecek bu özel öğrenme paradoksu saymanın kökenine dair önemli bir belirsizlik yaratır. Daha önce de söylendiği gibi 1 sayısının sayma edimiyle elde edildiğini söylemek mümkün değildir. Çünkü eğer sayma söz konusu ise, nasıl ki 1'i bilmeden 2 bilinemezse, 2'yi bilmeden 1'i bilmek de mümkün değildir. Fakat saymanın mümkün olabilmesi için 1'in ve 2'nin aynı anda bilinmesi gerekiyorsa saymanın sayıların bilinmesinin, öğrenilmesinin veya türetilmesinin temelinde olduğunu söylemek bu kabulle çelişir. Bertrand Russell bu sorunu şöyle dile getiriyor:

---

[103] Platon, *Menon*,, s. 64

Sayma sırasında “bir, iki, üç…” dediğimizde eğer bu kelimelere bir anlam yüklemiyorsak sayılan nesnelerin sayısını keşfettiğimiz söylenemez. Bir çocuk belki onlara hiçbir anlam yüklemeden bu kelimeleri bir sıra içinde öğrenebilir ve alfabedeki harfler gibi doğru sırada tekrarlayabilir. Sayılar hakkında en ufak bir fikre sahip olmayan böyle bir çocuk onu dinleyen birinin bakış açısına göre belki doğru bir biçimde sayabilir Fakat sayma işlemi ancak gerçekte sadece sayıların ne olduğuna dair herhangi bir bilgisi olan biri tarafından zekice yürütülebilir. Bunun anlamı ise saymanın sayı için mantıksal bir temel sağlamadığıdır.”[104]

Öyleyse örneğin otuza kadar sayan biri eğer sayıları sadece alfabedeki harfler gibi veya içi boş kelimeler gibi ardarda dile getirmiyorsa onun zaten bütün bu sayıları bildiğini söylemek gerekir. Aynı şekilde bin nesneyi, beş veya üç nesneyi sayan birinin de kullandığı sayıların ne olduğunu bilmesi gerekir ve böylece denilebilir ki sayma, sayıların ne olduğuna dair bir öğrenme süreci olamaz. Daha açık bir deyişle sayıların bilgisi sayma aracılığıyla kazanılamaz. Bunun aksi bir iddia daha önce de söylendiği gibi daha en başında bir sayma paradoksuyla sonuçlanır.

Russell’ın sayıların anlamını vurgulayarak saymanın önceliğini reddettiği yerde Martin Heidegger etimolojiye başvurarak aynı sonucu onaylar. Heidegger, matematik kelimesinin kökü olan Yunanca *mathemata*’nın “öğrenilen şey”[105] anlamını hatırlatarak sayısal-olan ve matematiksel-olan arasında bir ayrım yapar ve sorar: “Matematiksel-olanı düşündüğümüzde sayıları düşünmeye uzun zamandır alışkınız. Matematiksel-olan ve sayılar elbette ki bağlantılıdır. Fakat şu soru kalır: Bu bağlantı, matematiksel-olanın karakter bakımından sayısal olmasından mı ileri gelir, yoksa tam tersine sayısal-olan mı matematiksel bir şeydir?[106] Heidegger’e göre durum ikincisidir. Yani öğrenilebilir olan (matematiksel-olan) sayısal-olan’dır. Heidegger bunu daha açık bir biçimde şöyle dile getirir:

---

[104] Bertrand Russell, *Our Knowledge Of The External World*, (Chicago: The Open Court Publishing Company, 1914), s. 189

[105] Francis E. Peters, *Antik Yunan Felsefesi Terimleri Sözlüğü*, çev. Hakkı hünler, (İstanbul: Paradigma Yayınları, 2004), s. 215

[106] Martin Heidegger, *Bilim Üzerine İki Ders*, çev. Hakkı Hünler, 1. b., (İstanbul: Paradigma Yayınları), 1998, s. 49.

Mathemata, matematiksel-olan, gerçekten zaten bildiğimiz şeyler 'hakkında' olan şeydir. Dolayısıyla, onu ilk başta şeylerden edinmeyiz, fakat belli bir bakımdan onu zaten kendimizle birlikte getiririz. Bundan hareketle, söz gelimi sayının neden matematiksel bir şey olduğunu şimdi anlayabiliriz. Üç sandalye görürüz ve üç tane olduğunu söyleriz. Üç sandalye 'üç'ün ne olduğunu bize söylemez, üç elma, üç kedi ya da başka herhangi üç şey de. Daha ziyade, ancak 'üç'ü zaten biliyorsak üç şeyi sayabiliriz. Üç sayısını üç olarak böyle kavramada, bir şekilde zaten sahip olduğumuz bir şeyi yalnızca açık bir şekilde tanırız. Bu tanıma, sahici öğrenmedir. Sayı, has anlamda öğrenilebilir bir şeydir, bir mathema'dır, yani matematiksel bir şeydir. Şeyler, üç olmak bakımından 'üç'ü, yani üçlük'ü kavramamıza yardım etmezler. 'Üç' –bu kesin olarak nedir? Doğal sayılar dizisi içerisinde üçüncü sırada duran sayıdır. 'Üçüncü'de (mi)? O, üç olduğu için yalnızca üçüncü sayıdır. Ve 'sıra' –sıralar nereden gelir? 'üç' üçüncü sayı değil, fakat ilk sayıdır. 'Bir' gerçekten ilk sayı değildir. Söz gelimi, önümüzde bir somun ekmek ve bir bıçak var, bu bir ve ilave olarak şu da bir. Bunları bir arada aldığımızda 'hem o hem bu', biri ve diğeri deriz, ama 'bu ikisi' ya da 1+1 demeyiz. Ancak ekmeğe ve bıçağa bir bardak ilave ettiğimiz zaman, 'hepsi' deriz. Şimdi onları bir toplam olarak, yani bir bütün olarak ve 'şu kadar çok' olarak almaktayız. Ancak bu toplamı üçüncüden hareketle algıladığımızda, önceki ilk, sonraki ikinci olur, öyle ki bir ve iki ortaya çıkar ve 've' bağlacı 'artı' haline gelir ve sıraların ve bir dizinin imkanı doğar. Şimdi bilgisini aldığımız şey, şeylerin herhangi birinden çıkarılmaz. Biz, bizzat kendimizin zaten bir şekilde sahip olduğumuz şeyi alırız. Matematiksel-olan olarak anlaşılması gereken şey, bu biçimde öğrenebileceğimiz şeydir.[107]

Heidegger'in ilk sayının kavranmasında 1'i ifade eden tek bir nesneye değil de çokluğu belirten *bütün*e yaptığı vurgu bir nesne kümesi aracılığıyla sayıların kardinal özelliğini ima eder. Çünkü bu her şeyden önce bir sayıyı bir kümenin büyüklüğü olarak kavramayı şart koşar. Ancak böyle bir kavrayışın ardından bütün içindeki ayrı duran her bir nesnenin sayılması mümkün olur. Heidegger'in bu akıl yürütmesi

[107] Martin Heidegger, *Bilim Üzerine İki Ders*, s. 51.

Wittgenstein'ın mantık ve nesneler arasında kurduğu ilişkiye benzetilebilir. Wittgenstein, Tractatus'ta (2.0121) şöyle der:

> Sanki kendi başına var olabilen şeye, sonradan bir olgu durumu uygun düşseydi, bu bir rastlantı gibi görünebilirdi. (A)
>
> Şeyler olgu bağlamlarının içinde yer alabiliyorsa, bu, onlarda zaten bulunmalıdır. (B)
>
> Mantıksal olan bir şey, yalnızca olanaklı olamaz. Mantık her bir olanağı ele alır, bütün olanaklar da onun olgularıdır. (C)
>
> Nasıl uzamsal nesneleri uzam dışında, zamansal olanlarını da zaman dışında hiçbir biçimde düşünemiyorsak, aynı şekilde, hiçbir nesneyi başka nesnelerle bağlantı olanaklarının dışında düşünemeyiz. (D)
>
> Nesneyi olgu bağlamının bağı içinde düşünebiliyorsam, onu bu bağın olanağı dışında düşünemem.[108] (E)

Wittgenstein olgu bağlamını da şöyle betimler: "Nesnelerin karşılıklı-biçimlenmesi, olgu bağlamını kurar."[109] (F) Şimdi, Wittgenstein'ın bu ifade tarzı sayılara ve dolayısıyla saymaya uygulanabilir:

1 eğer tek başına kavranabilir olsaydı, ondan sonra 2'nin gelmesi bir rastlantı olabilirdi. (A) Fakat eğer 1'den sonra 2'nin gelmesi bir zorunluluksa, yani onlar bir ardışıklık bağlamında yer alabiliyorsa, 1'in kavranışında 2'nin kendisinden sonra gelmesi, 2'nin kavranışında ise 1'in kendisinden önce gelmesi zaten bulunuyor demektir. (B) Öyleyse eğer 1'den mantıksal olarak 2'nin türeyeceği söylenecekse 2'nin türeyişi sadece bir olanak olarak düşünülemez. (C) Veya 1, 2'yle bir bağlantı olanağı olmaksızın düşünülemez ve ortaya konamaz. (D) Eğer 1'i ancak bir ardışığı varsa ve ancak böyle bir bağlamın içinde düşünebiliyorsam, onu bu bağın olanağı

[108] Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, çev. Oruç Aruoba, (İstanbul: Metis Yayınları, 2006), s. 15
[109] Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, s. 21

dışında düşünemem. (E) Öyleyse sayıların karşılıklı-biçimlenmesi, ardışıklık bağlamını kurar. (F)

Bütün bu akıl yürütmelerden 1'in tek başına bilinemeyeceği sonucu çıkarılır. Öyleyse sonrasında şöyle mi demek gerekir: "1'i bilen bütün sayıları biliyor demektir." Bu sayıların birbirinden türetilerek öğrenilmesinin reddedir. Aynı zamanda saymaya, birimlere ve sıralamaya dayanan her bir ordinal sayı teorisinin de reddidir. Böylece sayma paradoksu herhangi bir ordinal sayı teorisini çürütmek için yeterlidir. Şimdi birimleri ve saymayı temel alan Kant aritmetiği örnek bir sınama için ele alınabilir.

Kant Prolegomena'da şöyle diyor:

> Yargılar hangi kaynaktan gelirlerse gelsinler ya da mantıksal biçimleri bakımından nasıl olurlarsa olsunlar, içerik bakımından aralarında fark vardır; bu içerik sayesinde ya sırf açıklayıcıdırlar ve bilginin içeriğine hiçbir şey eklemezler, ya da genişleticidirler ve eldeki bilgiyi artırırlar; birincilere analitik, ikincilere sentetik yargılar adı verilir.[110]

Yine Kant'ın verdiği örneklerle açıklamak gerekirse, "bütün nesneler yer kaplar" gibi bir yargının öznesi yükleminde örtük olarak içerilir ve bu türlü yargılar kavramı genişletmediği için yeni bir bilgi içermezler. Öte yandan "bazı nesneler ağırdır" gibi bir yargı, yükleminde özneye dair, öznenin kavramında bulunmayan yeni bir bilgi içerir ve bu türlü yargılar kavramı genişlettiklerinden sentetiktirler. Kant yargılar arasındaki bu temel ayrımın nedenini de onların çelişmezlik ilkesiyle olan ilişkisiyle açıklar. Çelişmezlik yasası tüm analitik yargıların ortak ilkesiyken sentetik yargılar başka bir ilkeye gereksinim duyarlar. Analitik yargılar bu özelliğiyledir ki "kullandıkları kavramlar deneysel olsa da olmasa da, doğal yapıları gereği a priori bilgilerdir."[111] Sentetik yargılara gelince, onların kimi a priori, kimi a posteriori'dir ve daha önce söylendiği gibi "tek başına çelişme ilkesinden kaynaklanmama konusunda birleşirler."[112] Kant, hepsi de sentetik yargı olan üç tür yargı belirler.

---

[110] Immanuel Kant, *Prolegomena*, çev. İoanna Kuçuradi-Yusuf Örnek, 3. b., (Ankara: Türkiye Felsefe Kurumu, 2002), s. 14
[111] Kant, *Prolegomena*, s.15
[112] Kant, a.g.e., s.15

Bunlar deney yargıları, “hakiki metafizik”in yargıları ve matematiğin yargılarıdır. Kant matematiğin sentetik olduğunu şu meşhur örnekle açıklar.

> Başlangıçta, 7 + 5 = 12 önermesinin çelişmezlik ilkesinden çıkan yedi ve beş kavramlarının toplamı olan, sırf analitik bir önerme olduğu belki düşünülebilir. Ne var ki, dikkatle bakıldığında görülür ki, 7 ve 5’in toplamı kavramı, her iki sayının bir tek sayıya birleştirilmesinden başka bir şey içermemektedir; ikisini kapsayan bu bir tek sayının ise ne olduğu hiç düşünülmüyor. On iki kavramı, benim sadece yedi ile beşin birleştirilmesini düşünmemle hiçbir şekilde düşünülmüş olmaz; ve ben böyle bir olanaklı toplam kavramımı istediğim kadar öğelerine ayırayım, yine de onun içinde on ikiyi bulamam.[113]

Kant’a göre hem geometrinin hem de aritmetiğin yargıları sentetiktir ve onlar deneysel olmamaları fakat saf görüsel olmaları nedeniyle de a priori’dirler.

> Şimdi, uzam ve zaman, Saf Matematiğin, aynı zamanda zorunluklu ve zorunlu olan tüm bilgilerinin ve yargılarının temeline koyduğu görülerdir. Çünkü Matematik bütün kavramlarını önce görüde ve Saf Matematik saf görüde serimlemek, yani onları kurmak zorundadır. Bu görü olmadan, sentetik a priori yargılar için malzemenin verilebilmesini sağlayan saf görü eksik olduğu sürece, Matematiğin bir adım bile atması olanaksızdır. Geometri uzamın saf görüsünü temel alır. Aritmetik kendi sayı kavramlarını, zaman içinde birbirini izleyen birimlerin eklenmesiyle meydana getirir.[114]

Kant’a göre herhangi bir sayı zihinde yaratılmış bir kavramdır ve bir sayının zihinde yaratılmış olması onun sayılmış olmasıyla eş anlamlıdır. Buna ek olarak insanın zamanla sınırlı olması onun yaratımlarının ve özel olarak da sayıların, saymanın, zamanla sınırlı olmasını gerektirir. Böylece her bir yaratım, sayılan her bir sayı, bir an’da olmak zorundadır ve bir an’da olmak olanak halinde olmayı değil olmuş bitmiş olmayı gerektirir. Olanak halinde olan bir sayı ise henüz sayılmadığından veya hiç sayılamayacağından Kant gibi kavramların zihinde inşa edildiğini savunan bir kavramcı için kabul edilemez. Saymayı temel alan bu görüş

[113] Kant, a.g.e., s.17
[114] Kant, a.g.e., s.32

elbette bir başlangıç varsaymak zorundadır. Fakat kavramcı görüşün en önemli temsilcisi olan Kant'ın, sayı kavramının saymayla oluştuğunu dile getirdiği yerde, böyle bir başlangıcı açıkça ortaya koyduğunu söyleyemeyiz:

> "Eğer sayarken benim için şimdi duyunun önünde yüzen birimlerin ardarda birbirlerine eklendiklerini unutacak olursam, o zaman birin bire bu ardışık eklenişi yoluyla bir çokluğun üretilmekte olduğunu ve dolayısıyla da sayıyı bilmem olanaksız olurdu; çünkü sayı kavramı yalnızca sentezin bu birliğinin bilincinden oluşur."[115]

Kant duyunun önünde yüzdüğünü söylediği birimlerin sanki sırayla kavrandığını, hatta onları birimler olarak adlandırmasının nedenin de sadece bu olduğunu söylemek ister. Fakat tam anlamıyla ordinal bir bakışın ürünü olan bu tür bir saymanın 1'le, yani tek bir birimin kavranmasıyla başlaması ve "zaman içinde birbirini izleyen birimlerin eklenmesiyle"[116] ilerlemesi nasıl mümkün olabilir? Çünkü birim, daha doğrusu birimler, ancak çokluk içinde anlamlıdır. Öyleyse ilk kavranan birim gerçekte ya bir çokluk içinde ya da kendi içinde birimleri olan bir çokluk olarak kavranabilir. Eğer o bir çokluk içinde, kendine eş diğer birimlerle birlikte (aynı anda) kavranıyorsa ardardalık (yani sayma) söz konusu değildir; yok eğer kendisi bir çokluk ise ilk birim kendisi değildir. Dahası, ilk birim, onun birimlerinden herhangi biri de değildir. Ve bu sonsuza kadar devam edebileceğinden, herhangi bir zaman sınırlandırması olmasa bile, 1 sayısına ulaşmak mümkün değildir. Doğal sayıların sonlu bir işlemde zihinde inşa edildiğini savunan Kant böylece bir başlangıçtan, hatta kendi anladığı biçimde "hemen ardışık" teriminden bile yoksundur.

Şimdi Kant'ın aritmetiğin önermelerinin sentetik a priori olduğuna dair iddiasını açıklamak için verdiği $7 + 5 = 12$ örneği yeniden ele alınabilir. Açıktır ki Kant'a göre eşitliğin her iki tarafındaki sayılar kendi başlarına düşünüldüğünde bir birimler sayımının sonucu zihinde yaratılmış kavramlardır. Ayrıca Kant 7 ve 5'in toplamı kavramının 12'nin kavramında içerilmediğini öne sürer. Aynı şey $5 + 2 = 7$

---

[115] Immanuel Kant, *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, 1. b., (İstanbul: İdea Yayınları, 1993), s. 153

[116] Kant, *Prolegomena*, s. 32

önermesi için de söylenebilir. Ve bunu 3 + 2 = 5, 2 + 1 = 3 ve 1 + 1 = 2 diye sürdürmek mümkündür. Fakat 1 + 1 = 2 önermesindeki + işlemini nasıl düşünmek gerekir? Bunun saymadan farklı bir şey olduğu söylenebilir mi? Ya da 1 + 1'in toplamı kavramının gerçekten 2'nin kavramında içerilmediği söylenebilir mi?

Öncelikle eğer 1 herhangi bir biçimde diğer hiçbir sayının bilgisine sahip olunmadan bilinebilir olsaydı onu kendisiyle toplayarak 2 sayısını elde etmenin dayanağı da ortadan kalkardı. Çünkü böyle bir durumda 1 sadece kendisi aracılığıyla bilinmiş olurdu ve tıpkı Plotinos'un Bir'i[117] gibi 1'in 1 olduğu bile söylenemezdi. Daha önce de söylendiği gibi sayma paradoksu 1 ve 2'nin sıralı bir biçimde elde edilen bilgisini reddeder. Fakat eğer 1 ve 2'nin bilgisi sıralanamaz bir biçimde eş zamanlı ise böyle bir bilgide "+" işleminin de örtük bir biçimde tanımlandığı söylenemez mi? Dahası eğer "+" işlemi ilk iki sayının bilgisiyle eş zamanlı olarak bir kere belirlenmişse artık bütün sayıların ve onlar arasındaki olası her toplamanın da belirlenmiş olduğu söylenemez mi? Açıktır ki böyle bir kabul, 7 + 5 = 12 önermesinin, bize 7 + 5 toplamında içerilmeyen yeni bir bilgi verdiğini reddetmek demektir.

---

[117] Betül Çotuksöken Saffet Babür, *Ortaçağda Felsefe*, (İstanbul: Kabalcı Yayınevi, 2000), s.57

4. GOTTLOB FREGE: ARİTMETİĞİN TEMELLERİ

4.1. Temel Düşünceler

4.1.1. Antik Yunan'dan Kopuş: Modern Kardinal Sayılar

Frege "sayal (kardinal) sayının tanımlanması mı gerektiği, yoksa tanımlanmamış olarak mı kabul edileceği sorunu her şeyin üzerindedir"[118] der ve aritmetiğin temel nesneleri sayıların ancak kardinal sayılar aracılığıyla temellendirilebileceğini ilan eder. Fakat Frege'nin kardinal sayılarla kastettiği nedir? Onlar Orinyasyenler'den bugüne kadar hep oldukları gibi mi kavranmıştır veya Frege kardinal sayıları Platon ve Aristoteles'te de olduğu gibi Antik Yunan sayı (arithmos) düşüncesine uygun mu ele almıştır, bu sorular da yanıt bulmalıdır.

Sayıların Kökeni Üzerine adlı bölümde kardinal sayıların birebir eşleştirmeyle olan ilişkisi ele alınmış ve ilkel insanların dahi birebir eşleştirme aracılığıyla, henüz daha sayı sembollerine veya sayma yeteneğine bile sahip olmadan belirli sayıdaki kümeleri birbiriyle karşılaştırabildiğine, onlar arasındaki farkı kavrayabildiğine ve tüm bunların Dantzig'in ileri sürdüğü Sayı Duyusu ile ilişkili olabileceğine değinilmişti. Bütün bu anlatılanlarda göz önüne alınansa sayının sıralama veya yer belirten ordinal anlamı değil, onun bir kümenin büyüklüğünü bildiren ve dolayısıyla "kaçıncı?" değil "kaç tane?" sorusuna yanıt veren kardinal anlamı olmuştu.

Böylece denilebilir ki, kardinal sayılar söz konusu olduğunda her zaman bir küme hakkında bildirimde bulunulur. Frege'nin aritmetiğin temellerinde kardinal sayıları görmesinin nedeni de budur. Çünkü ona göre küme kavramı mantığa ait bir kavramdır ve eğer sayıların temellendirilmesinde bu kavrama başvurulursa aritmetik kesin bir biçimde temellendirilebilir.[119] Aritmetik ise kesin olarak temellendirilmeli ve onun nesnelerinin ne olduğu artık şüpheye yer bırakmayacak bir biçimde bilinmelidir. Çünkü matematikçilerin "bu bilimin kendi nesneleri arasında ilk ve en

[118] Gottlob Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, s. 90
[119] Michael Dummett, *Frege, Philosoph Of Mathematics*, London: Duckworth, 1991), s.12

önde geleni ve görünüşte en yalın olanı hakkında bu kadar karanlık içinde bulunması utanç verici”[120]dir.

Kardinal sayılarla ve dolayısıyla kümelerle ilgili olarak ikinci önemli nokta modern küme kavramının tek nesneli kümeleri ve hatta boş kümeyi de kapsaması, dolayısıyla 0 ve 1’in de küme teorisinde yer almasıdır. Bu nokta Frege için Antik Yunan arithmos kavrayışından temel bir kopuşu niteler. Çünkü daha önce de söylendiği gibi Antik Yunan düşüncesinde sayı yani arithmos bir çokluktur ve gerçekte ilk sayı da 0 veya 1 değil 2’dir. Bu yüzden John Mayberry’nin de belirttiği gibi “arithmos söz konsu olduğunda küme, sayı’dan daha iyi bir çeviridir, fakat bu asla tam bir çeviri de değildir”[121]

Son olarak Frege’nin kardinal sayıları duyusal nesnelerden oluşan kümeler hakkında bir bildirim içermez. Oysa daha önce tartışıldığı gibi Antik Yunan düşüncesinda arithmos her şeyden önce duyusal birimlerden oluşur. Bu birimler kimi zaman birbirine benzer, kimi zaman birbirinden tümüyle farklıdır. Özellikle Pythagoras’ın sayılarla nesneleri eş tutan felsefesi Frege için tümüyle kabul edilemezdir. Öte yandan yine daha önce söylendiği gibi Platon aritmetiği hesaptan ayırdığı gibi aritmetiği de kendi içinde sınıflandırarak arithmos’u duyusal olandan tümüyle ayırmaya çalışmış fakat bu kez de onların kendilerinde varlıklar olarak birimlerden nasıl oluştuğunu açıklamasız bırakmıştır. Yine de Platon’un Frege’ye sayıları birimler toplamı olarak gören Aristoteles’ten daha yakın olduğunu söylemek gerekir. Çünkü Aristoteles sayıyı nicelik aracılığıyla tözün bir kategorisi ilan ettiğinde, onu tözle birlikte var olmaya zorlamış ve tözler de bir yanıyla maddi varlıklar olduğundan sayılar yeniden maddi varlıklara hapsolmuştu. Oysa Frege Platoncu bir yaklaşımla sayıların gerçek birer varlıklar olarak nerede olduğuna dair incelemeye değer bir fikre sahiptir:

> 4 sayısı nerededir? Ne içimizdedir ne dışımızda. Bu sözcükleri uzamsal anlamda aldığımızda bu doğrudur. 4 sayısının uzamsal yerini belirlemenin hiçbir anlamı yoktur; ama bundan çıkacak tek sonuç 4’ün uzamsal bir nesne olmadığıdır, hiçbir şekilde bir nesne olmadığı değil. Her nesnenin bir yeri

[120] Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, s.78
[121] Mayberry, *The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets*, s.71

yoktur ki. …4 sayısı, aslında, onunla uğraşan herkes için aynıdır; ama bunun uzam içinde olmakla hiç ilgisi yoktur. Her nesnel nesnenin yeri yoktur."[122]

4.1.2. İlk İlkeler ve Yöntem

Platon Menon'da Sokrates'i şöyle konuşturur:

> Şu halde, ruh ölümsüz olduğu ve birçok kez doğmuş; hem burada ve hem de öte dünyada her şeyi görmüş olduğu için, var olan her şeyi öğrenmiştir. Bu nedenle, insan ruhu, erdeme ya da herhangi bir şeye ilişkin olarak, görmüş olduğumuz gibi, bir zamanlar sahip olduğu bilgiyi anımsayabilirse buna şaşırmamak gerekir. …bir adam tek bir bilgi parçasını anımsadığı zaman, onun geri kalan her şeyi keşfetmemesi için hiçbir neden yoktur, çünkü araştırma ve öğrenme, gerçekte anımsamadan başka hiçbir şey değildir.[123]

Anımsama Kuramı bir yana bırakılacak olursa, denilebilir ki, aritmetik söz konusu olduğunda gerçekten de en temel olanı kavramak geri kalan her şeyi kavramak demektir ve Platon bu konuda haklıdır. Fakat en temelde olan nedir ve nasıl bilinebilir? Örneğin 1'i bilmek bütün sayıları bilmek midir? Muhtemelen Platon bunu sadece bir başlangıç olarak görür, ama asla kastettiği diğer sayıların 1'lerden oluşturulacağı değildir. Sayıların 1'lerin toplamı olduğu fikrini onaylayan Platon değil Aristoteles'tir. Öyleyse 1'i kavramak Aristoteles için yeterlidir çünkü 1 bütün sayılar için bir ölçü ve ilk ilkedir.

Aristoteles İkinci Analitikler'in sonunda "ilk olanları tümevarımla bilmemiz zorunlu"[124] der. Nikhomakhos'a Etik'te ise bununla neyi kastettiğini daha detaylı açıklar:

> Her bilim öğretilebilir, bilimsel bilgi nesnesi de öğrenilebilir. *Analitikler*'de söylediğimiz gibi her öğretim önbilgilerden yola çıkar: Bir tümevarım, bir de tasım yoluyla. Tümevarım bir ilkedir ve genele ilişkindir, tasım ise genelden

[122] Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, s. 155
[123] Platon, *Menon*, s. 68
[124] Aristoteles, *İkinci Analitikler*, s.77

> hareket eder. Demek ki, tasımı olmayan, tasımın onlara dayandığı ilkeler vardır. Yani tümevarım.[125]

1'i soyutlama ve böylece bir tümevarımla bir birim olarak elde etmek Platon için olmasa da Aristoteles için makul görünür ve bu aksiyomatik yöntemin tasımlarıyla birlikte bütün sayıların elde edilmesi için de yeterlidir. Fakat geometri örneği bize bunun sorunlu olabileceğinin ipuçlarını verir. Euclides-dışı geometrilerin bize öğrettiği, ilkeleri duyusal olandan soyutlamanın gerçekliğin sadece bir yorumu olacağıdır. Eğer Euclides geometrisi gibi Peano aritmetiği de duyusal soyutlamanın ve tümevarımın sonucu olan ilkelere sahip olacaksa bunun anlamı Peano-dışı aritmetiklerin de olabileceği ve eğer Peano aritmetiği tutarlı ise onların her birinin de yine tutarlı olacağıdır.

Frege aritmetiğin ilk ilkelerinin soyutlamayla veya tümevarımla elde edilebileceğine dair Aristotelesçi tezi açıkça reddeder. Bu, onun Platoncu kaygılar taşıdığını ve duyusal olanın en azından aritmetik söz konusu olduğunda yanıltıcı olacağına inandığını ima eder. Frege'ye göre "tümevarım, kendisini olasılık kuramına dayandırmalıdır, çünkü bir önermeyi olası kılmaktan fazlasını hiçbir zaman sağlayamaz."[126] Öyleyse aritmetiğin temel nesnelerinin gerçekte ne oldukları açık ve seçik olarak belirlenmediği sürece aksiyomatik yöntemin bütün diğer nesneleri sunan verimliliği de anlamsızdır. Dummet Frege'nin bu tutumunu şöyle dile getirir:

> Frege'nin sayı teorisini aksiyomatikleştirmemiş olması ona yöneltilebilecek geçerli bir eleştiridir. Oysa Dedekind, Peano aritmetiğine uyarlayarak böyle bir aksiyomatikleştirme yapmıştır. Frege böyle yapmamıştır çünkü o, sayı teorisinin, mantıksal temellerinden farklı olarak neye sahip olacağıyla ilgilenmek için güçlü bir nedene sahip değildir. Dahası Frege aritmetik ve mantık arasında kesin bir çizgi olduğunu düşünmez.[127]

Frege bu nedenle Peano aritmetiğinde yer alan ilkel terimlerin tanımlarını mantıksal ilkelere başvurarak verir. Böylece 0'ın tanımını çelişmezlik ilkesinin, 1'in tanımını ise özdeşlik ilkesinin dilsel çözümlemesiyle elde etmeye çalışır.

---

[125] Aristoteles, *Nikhomakhos'a Etik*, çev. Saffet Babür, (Ankara: Kebikeç Yayınları, 2005), s.117
[126] Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, s. 102
[127] Dummett, *Frege, Philosopy Of Mathematics*, s.12

4.1.3. Sayılar Birimlerin Toplamı Değil

Frege, Locke tarafından savunulan sayıların birimler olduğu iddiasını aritmetiğin nesnelerini sonsuzca çoğaltmaya olanak vermediği için eleştirir:

> Eğer 'birim', 'sayı verilecek (sayılacak) nesne'ye gönderme yapıyorsa, bu durumda sayı birim olarak tanımlanamaz. Ama eğer 'birim' ile, altında bir sayısından başka hiçbir şeyi toplamayan bir kavramı anlıyorsak, bu durumda çoğulun bir anlamı yoktur… tıpkı altın ve altın ve altın'ın altından başka bir şey olmayışı gibi, 1 ve 1 ve 1 de 3 değil, ama 1'dir.[128]

4.1.4. Sayılar Dışsal Şeylerin Bir Özelliği Değil

Frege Mill'in önerdiği, sayıların 'dışsal şeylerin bir özelliği olduğu' veya 'dışsal şeylerden soyutlama yoluyla elde edildiği' fikrine pek çok argümanla karşı çıkar. Her şeyden önce, Mill'in kuramı her bir sayı için gözlenmesi gereken bir olguyu zorunlu kılmaktadır. Örneğin 1.000.000 sayısına özgü bir olgu gözlemlenmedikçe 1.000.000 sayısının tanımı verilemez. Başka bir deyişle 1.000.0000 = 999.999 + 1 gibi bir ifadenin yazılabilmesi için eşitliğin her iki tarafında yer alan sayıların ayrı ayrı gözlemlenmiş olması gerekmektedir. Öte yandan 0 sayısı için herhangi bir gözlemin de olanağı yoktur. 0 sayısının taşıyıcısı olan herhangi bir nesne düşünülemez. Son olarak nesneler bize kesin birimler olarak sunulmadığından herhangi bir nesnenin belirleyici özelliği olan tek bir sayıdan bahsedilemez:

> Eğer bir nesneyi haklı olarak kırmızı ve yeşil diye niteleyebiliyorsam, bu, bu nesnenin yeşilin asıl taşıyıcısı olmadığının kesin işaretidir. Bunun için yalnızca yeşil olan bir yüzeyin olması gerekir. Aynı şekilde, farklı sayılar yükleme hakkına sahip olduğum bir nesne de, bir sayının asıl taşıyıcısı değildir.[129]

---

[128] Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, s. 134
[129] Frege, a.g.e., s. 114

4.1.5. Sayılar Öznel Şeyler Değil

Frege aritmetiğe ait nesnelerin kesin tanımlarının verilmesini bir zorunluluk olarak gördüğünden, kesin olmadığını düşündüğü psikoloji bilimine böylesi bir araştırmada yer verilemeyeceğini savunur. Bu anlamda sayıların öznel tasarımlar olarak değil kendilerinde nesneler olarak görülmesi gerektiğini vurgular:

> Eğer sayı bir öznel tasarımsa, bu durumda aritmetik psikoloji olacaktır. Ancak aritmetik, gökbilimin olduğundan daha fazla psikoloji değildir. Nasıl ki gökbilim, gezegenlerin öznel tasarımlarıyla değil, gezegenlerin kendileriyle uğraşıyorsa, aynı şekilde aritmetiğin nesneleri de öznel tasarım değildir. Eğer iki sayısı bir öznel tasarım olsaydı, yalnızca bana özel bir şey olurdu. Başka bir insanın öznel tasarımı da, işte bundan dolayı, başka bir tasarım olacaktır. Eğer böyle olsaydı, elimizde milyonlarca iki olması gerekirdi.[130]

4.1.6. Kant'tan Kopuş: Aritmetik Analitik A Priori

Frege, Kant'ın 'geometrinin önermelerinin sentetik a priori olduğu' savını desteklerken, Kant'tan farklı olarak aritmetik önermelerinin a priori analitik olması gerektiğini düşünür. Bunun anlamı aritmetiğin herhangi bir görü aracılığıyla temellendirilemeyeceğidir.

> Aritmetiğin doğruları sayılabilir olanın alanına hükmetmektedir. Bu, bütün alanlar içinde en kapsayıcı olanıdır; çünkü yalnızca fiili gerçek olanı, görüsü edinilebilir olanı değil, düşünülebilir olan her şeyi de kapsar. Öyleyse sayıların yasaları, düşüncenin yasalarıyla çok yakından bağlantılı olmak durumunda değil midir?[131]

Frege'nin düşüncenin yasalarıyla kastettiği elbette özünde mantık yasalarıdır. Frege'ye göre mantık yasaları aritmetik söz konusu olduğunda geometride olmadığı kadar güçlü bir biçimde söz sahibidir. Böylece aritmetiğin önermelerinin sentetik olduğunun reddedilmesi gerekir.

---

[130] Frege, a.g.e., s. 121
[131] Frege, a.g.e., s. 106

> Kavramsal düşünce itibariyle, geometrinin aksiyomlarından herhangi birinin karşıtını kabul edebiliriz; ve görüyle çelişen bu tür kabullerden, kendi kendimizle çelişmeden, sonuçlar çıkarabiliriz. Bunun olanaklı olması, geometrinin aksiyomlarının birbirlerinden ve mantığın başlangıç yasalarından bağımsız olduklarını ve dolayısıyla sentetik olduklarını göstermektedir. Peki aynı şey sayı biliminin temel önermeleri için de söylenebilir mi?[132]

Frege açıkça Kant'la başlayan bir anlayışı yıkmaya çalışmaktadır. Çünkü aritmetiğin yasalarının sentetik a priori olduğunu iddia eden Kant'ın "böyle yargıların nihai bilgi zemini olarak bir saf görüyü öne sürmekten başka bir seçeneği"[133] kalmamaktadır. Frege kendi yapıtında bir görüye başvurmanın ne tür problemlere neden olacağına değinmiştir. Örneğin Kant'ın 5 + 7 = 12 gibi aritmetik ifadelerin a priori sentetik önermeler olduğunu parmakların veya noktaların görüsüne başvurarak göstermeye çalıştığı yerde, Frege, onu "kendi düşüncesine karşıt olarak bu önermelerin deney kökenli olduğu düşüncesine sürüklenmekle"[134] suçlar. Öte yandan özellikle 37.863 gibi büyük sayılar için nasıl bir saf görünün mümkün olabileceğini bilmek ister.

Özetlemek gerekirse, Frege'nin sayılara dair çeşitli görüşleri inceledikten sonra vardığı sonuç, sayının ne fiziksel bir şey ne de öznel bir şey olduğu; ne renk, ağırlık gibi, nesnelerden soyutlanmış bir özellik ne de nesneye ait bir tür özellik olduğudur. Bunlara ek olarak sayı, birlik ve çokluk ayrımını bulanıklaştırdığından birim olarak da düşünülemez. Bu düşüncelerden hangisi kabul edilirse edilsin, bir sayı tümcesinin ne hakkında bildirimde bulunduğu sorusu yanıtsız kalır.

4.2. Sayılar ve Kavramlar

Frege, kendisinden önce geliştirilen sayı teorilerinin yanlış veya yetersiz yanlarını gösterdikten sonra, bir sayı tümcesinin ne hakkında bildirimde bulunduğu sorununu ele alır. Ona göre bu sorunun çözümü, dilin mantıksal yapısının çözümlenmesiyle, yani onda öznel (psikolojik) olanın değil nesnel olanın ortaya çıkarılmasıyla mümkündür. Kant'la birlikte yargı'nın kavram'a önceliğini kabul eden Frege, kavramların da sayılara önceliği olduğunu söyler. Kendileri birer soyutlama

[132] Frege, a.g.e., s. 106
[133] Frege, a.g.e., s. 103
[134] Frege, a.g.e., s, 93

olmayan sayılar, tam da öyle olan kavramlara atfedilirler. Frege sayılar ve kavramlar arasındaki ilişkiyi şöyle dile getirir:

> Bir sayı tümcesi bir kavram hakkında bir bildirim içerir. Belki bu en fazla 0 sayısında açıkça bellidir. Eğer "Venüs'ün 0 uydusu var" dersem, demek ki, hakkında bir şey öne sürülecek herhangi bir uydu ya da uydular grubu varolmamaktadır; ama burada "Venüs'ün uydusu" kavramına bir özellik, yani o kavramın altına hiçbir şey düşmeme özelliği atfedilmiş olmaktadır. Eğer "Kralın arabası dört at tarafından çekiliyor" dersem, "Kralın arabasını çeken at" kavramına dört sayısını atfetmiş olurum.[135]

Burada ilk akla gelen soru, Frege'nin de hemen değindiği gibi, herhangi bir kavramın altına düşen nesne sayısının zamanla değişmesi durumunda ne olacağıdır. Örneğin Venüs'ün gelecekte bir uydu sahibi olması durumunda "Venüs'ün uydusu" kavramının altına bir nesne düşmüş olacağından bu kavrama 0 değil 1 sayısının atfedilmesi gerekecektir. Fakat aynı kavrama farklı sayıların atfedilebilmesi bu yöntemin nesnellik iddiasıyla çelişmeyecek midir? Frege'nin yanıtı şöyledir:

> 'Alman İmparatorluğu'nda yaşayanlar' kavramı, bir değişken öğe olarak zaman öğesini içermektedir ya da matematiksel olarak ifade edersek, bu kavram zamanın bir fonksiyonudur. "a Alman İmparatorluğu'nda yaşayan biridir" yerine "a Alman İmparatorluğu'nda yaşıyor" diyebiliriz ve bu da o andaki tarihe karşılık gelecektir. Dolayısıyla kavramın içinde zaten akışkan bir şey vardır. Öte yandan, "Berlin saatiyle 1883 yılbaşı günü Alman İmparatorluğu'nda yaşayanlar" kavramına ait olan sayı bütün zamanlar için aynıdır.[136]

Şimdi, "Alman İmparatorluğu'nda yaşayanlar" kavramına bütün zamanlar için aynı olan belirli bir sayının atfedilemeyeceği açıktır. Öte yandan, "Alman İmparatorluğu'nda yaşayanlar" kavramı zamanın bir fonksiyonu olarak kabul edildiğinde, bu fonksiyonun belirli bir anını yansıtan "Berlin saatiyle 1883 yılbaşı günü Alman İmparatorluğu'nda yaşayanlar" kavramına bütün zamanlar için aynı olan bir sayının karşılık gelecek olması, bu sayının hangi sayı olduğunun

[135] Frege, a.g.e., s. 142
[136] Frege, a.g.e., s. 143

bilinebileceği anlamına gelmez. Çünkü “Berlin saatiyle 1883 yılbaşı günü” gibi belirli bir anda “Alman İmparatorluğu’nda yaşayanlar”ın sayısının bilinmesi, mantıksal değil duyusal bir işlem gerektirir ve bu işlem yapılmadığı sürece böyle belirli bir sayıdan söz etmek mümkün değildir. Öte yandan, buradaki örnekten de kolayca anlaşılacağı gibi, büyük bir sayı söz konusu olduğunda, kavram için belirlenmiş zamanın sınırları içinde (örneğin Berlin saatiyle 1883 yılbaşı günü) bu tür bir işlemin tamamlanması mümkün olmayabilir. Son olarak, bu mümkün bile olsaydı, sonsuz bir sayıdan bahsetmek asla mümkün olmayacaktı. Hemen hatırlanacağı gibi bu sorunlar, Kant’ın düşüncesinde ortaya çıkan sorunlarla aynıdır ve Frege’nin daha önce görüye başvurmayı reddetmesinin temel nedenleri de zaten bunlardır. Öyleyse “Berlin saatiyle 1883 yılbaşı günü Alman İmparatorluğu’nda yaşayanlar” kavramına atfedilen sayının hangi sayı olduğunu kesin bir biçimde belirlemeye çalışmak, ister deneysel ister saf olsun herhangi bir görüye başvurmama ilkesiyle çelişecektir. Fakat Frege de her tekil sayının tanımının bu tür bir yöntemle, yani atfedildiği kavramın altına düşen nesnelerin sayılmasıyla verilmesini önermez:

> Şimdiye kadar, bir sayı tümcesinin bir kavram hakkında bildirim içerdiğini gördüğümüz için, her tekil sayının Leibnizci tanımını 0 ve 1’in tanımlarını vererek tamamlamayı deneyebiliriz.[137]

0’ın, 1’in ve hemen ardışık teriminin açık bir tanımının verilmesi doğal sayıların tümünün türetilmesi için yeterli olacağından, bir sonraki başlık altında Frege’nin bu temel terimleri nasıl tanımladığı incelenecektir.

4.3. İlkel Terimlerin Tanımlanması

Frege 0 ve 1 gibi tekil sayıların tanımını vermeden önce “her tekil sayı kendi başına varolan bir nesnedir”[138] iddiasında bulunur. Onun “bir sayı tümcesi bir kavram hakkında bir bildirim içerir”[139] düşüncesi hatırlanacak olursa, bu “kendi başına varolma”nın dilin nesnel yapısı içinde anlam kazanacağı açıktır.

[137] Frege, a.g.e., s. 150
[138] Frege, a.g.e., s, 150
[139] Frege, a.g.e., s. 142

> Sayılar için öne sürdüğüm kendi başına varolma, sayı sözcüğünün tümcenin bağlamı dışında da bir şeye gönderdiği anlamında alınmamalı; bunu öne sürmemin nedeni sayı sözcüklerinin, gönderimlerini değiştirecek şekilde yüklem ya da sıfat olarak kullanılmalarına engel olmaktır.[140]

Böylece Frege sayıya tümce içinde sanki ikinci bir özneymiş gibi bir kendi başına varolma atfetmiş olur.

> Tekil sayı, tam da, bildirimin sadece bir bölümünü oluşturmakla, kendi başına varolan bir nesne olarak görünmektedir.[141]

Frege'nin tüm bu uslamlamaları, aritmetiğin temel ifade biçimi olan eşitliğin dil içinde de gösterilmesiyle anlam kazanır.

> Günlük dilde sayının sıfat yapısında da kullanılıyor olması bizi engellemeyecek. Bu engelden kendimizi her zaman kurtarabiliriz. Örneğin, "Jüpiter'in dört uydusu vardır" tümcesi "Jüpiter'in uydularının sayısı dörttür" tümcesine çevrilebilir. Burada "…dır"ın anlamı "bir şeye eşittir" veya "bir şeyle aynıdır" anlamındadır. Böylece, "Jüpiter'in uydularının sayısı" dile getirişinin, "dört" sözcüğüyle aynı nesneyi gösterdiğini öne süren bir eşitlik elde ediyoruz. Ve aritmetikteki egemen tümce biçimi, eşitliktir.[142]

Yukarıdaki örnekte "dört" sözcüğü "kendi başına varolan" bir sayısal nesnenin yerine kullanılan bir sözcük olarak belirir. Aynı şekilde, "Jüpiter'in uydularının sayısı" ifadesi de bu aynı "kendi başına varolan" sayısal nesneyi gösterir. Fakat bu nesne için daha pek çok ifade kullanılabilir. Örneğin "Kralın arabası dört at tarafından çekiliyor" ifadesi "Kralın arabasını çeken atların sayısı dörttür" biçiminde yazıldığında, "Kralın arabasını çeken atların sayısı" ifadesi de, "dört" sözcüğüyle ve "Jüpiter'in uydularının sayısı" ifadesiyle aynı nesneyi göstermiş olur. Böylece birbirine eşit üç farklı ifade elde etmiş oluruz ki, bu ifadelerden biri olan "dört" sözcüğünü dışarıda bırakarak,

"*Jüpiter'in uydularının sayısı, Kralın arabasını çeken atların sayısına eşittir*"

---

140 Frege, a.g.e., s. 154
141 Frege, a.g.e., s. 152
142 Frege, a.g.e., s. 152

gibi hiçbir tekil sayı sözcüğünü içermeyen bir ifade elde ederiz. Şimdi daha sembolik bir ifade için Frege'ye başvurabiliriz:

"*F kavramına ait olan sayı ile G kavramına ait olan sayı aynıdır.*"[143]

Daha önce de söylediğimiz gibi, G kavramının yanı sıra, F kavramına ait olan sayı ile kendisine ait olan sayı aynı olan H, I, J, gibi daha pek çok kavram bulunabilir. Böylece, altlarına düşen nesnelerin bire-bir eşlenebildiği kavramlardan oluşan bir küme düşünebiliriz. Şimdi, bu kümede olduğu söylenen her bir kavramın "F kavramıyla eşsayılı" olduğu açıktır. Fakat henüz sayının tanımının verilmediği unutulmamalıdır. Çünkü Frege kendisinden önce düşünüldüğü gibi sayıyı bir çokluk tanımı olarak düşünmez. Dolayısıyla sayı bahsedilen eşsayılı kavramların altına düşen nesnelerden türetilmiş değildir. Eşsayılı bu kavramların her biri bir küme olarak düşünülecek olursa, Frege için sayı, bu kümelerin kümesi olarak tanımlanmalıdır:

> F kavramına ait olan sayal sayı "F kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamıdır[144]

F kavramını "Jüpiter'in uydularının sayısı" kavramı olarak düşünecek olursak, F kavramıyla "Kralın arabasını çeken atların sayısı" kavramı (buna da G kavramı diyelim) eşsayılıdır. Şimdi, F kavramı ve G kavramı eşsayılı olduğundan, G kavramı "F kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamında ve F kavramı da "G kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamında yer alır. Aynı şekilde, eğer bir H kavramı F ve G kavramlarıyla eşsayılı ise, F ve G kavramları da "H kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamında yer alır ve tersi. Örneklere göre düşündüğümüzde, "F kavramıyla eşsayılı" kavramı, kaplamında bütün dörtlüleri içeren bir kümedir ve bu kavrama ait olan sayal sayı "dört"tür.

Frege "F kavramına ait olan sayal sayı "F kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamıdır" genel tanımını kullanarak, ilk olarak sıfırın tanımını verir. Sıfır, altına hiçbir nesnenin düşmediği kavramların kümesi, yani boş kümelerin bir kümesidir:

---

[143] Frege, a.g.e., s. 156
[144] Frege, a.g.e., s. 162

‘Kendisiyle aynı olmayan’ kavramının altına hiçbir şey düşmediğinden, sıfır sayısını şöyle tanımlıyorum: 0, “kendisiyle aynı olmayan” kavramına ait olan sayal sayıdır.[145]

Burada, sıfırın tanımında kullanılan “Kendisiyle aynı olmayan” kavramının, Aristoteles’in “bütün ilkeler içinde en kesin olan”[146] diye betimlediği çelişmezlik ilkesinden (Hiçbir şey hem A, hem A-değil olamaz) türetilmiş olduğuna dikkat edilmelidir. Frege’nin amacı kendileri üzerinden tüm aritmetiğin temellendirileceği ilkel terimlerin kesin tanımlarını vermektir. Böylece o, ilk ilkel terim olan 0’ın tanımı için kesin olduğunu düşündüğü çelişmezlik ilkesine başvurmuştur. Frege 1’in tanımını ise özdeşlik ilkesinden yararlanarak verir:

Şimdi 1 sayısına ulaşmak için, her şeyden önce doğal sayılar serisinde 0’ı izleyen bir şey olduğunu göstermemiz gerekiyor. “0’la aynı olan” kavramını – ya da istersek buna yüklemini diyelim- ele alalım. Bunun altına 0 sayısı düşmektedir. Ancak “0’la aynı, ama 0’la aynı değil” kavramının altına hiçbir nesne düşmüyor, böylece 0, bu kavrama ait olan sayal sayı oluyor. Yani elimizde “0’la aynı olan” kavramı ve onun altına düşen bir nesne, yani 0 var; ve bunlar hakkındaki şu tümceler doğru olmaktalar:

“0’la aynı olan” kavramına ait olan sayal sayı, “0’la aynı olan” kavramına ait olan sayal sayıyla aynıdır; “0’la aynı olan, ama 0’la aynı olmayan” kavramına ait olan sayı 0’dır. Yani, bizim tanımımıza göre [§ 76][147] “0’la aynı olan” kavramına ait olan sayal sayı, doğal sayılar serisinde doğrudan 0’ı izlemektedir.

Şimdi eğer aşağıdaki gibi tanımlarsak:

1, “0’la aynı olan” kavramına ait olan sayal sayıdır,

Bu durumda elde edilen sonucu şöyle yazabiliriz:

---

145 Frege, a.g.e., s. 168

146 Aristoteles, *Metafizik*, s. 201

147 Frege, *Aritmetiğin Temelleri*, s. 171

1, doğal sayılar serisinde doğrudan 0'ı izlemektedir.[148]

Frege, çelişmezlik ilkesinden türettiği "kendisiyle aynı olmayan" kavramından 0'ın tanımını ve özdeşlik ilkesinden türettiği "0'la aynı olan" kavramından 1'in tanımını elde ederek, aritmetiğin mantıkla temellendirilmesi yolunda önemli bir girişimde bulunmuştur. Bir sonraki adım 0'ın dışında her bir sayının başka bir sayının ardından geldiğinin gösterilmesi, yani "hemen ardışık" teriminin tanımlanmasıdır. Bu terim de tanımlandıktan sonra sayal sayıların Peano önermelerinde amaçlandığı gibi sonsuz bir biçimde türetilmesinin olanağı elde edilmiş olacaktır.

Frege'nin "hemen ardışık" terimi için oluşturduğu tanım oldukça karışık olduğundan ve birazdan değinilecek sorun açısından ikincil bir öneme sahip olduğundan burada bu tanımı alıntılamaya gerek görmüyoruz.

4.4. Russell Paradoksu

Frege'nin aritmetiği mantıkla temellendirme girişimi onun hiç beklemediği bir biçimde yine mantıksal bir problemle sarsılmıştır. Russell tarafından dile getirilen ve "*kendi kendisinin üyesi olmayan tüm kümelerin kümesi kendi kendisinin bir üyesi midir?*" biçiminde özetlenebilecek olan paradoks, Frege'nin aritmetiği temellendirmek için başvurduğu bir mantık kavramı olan küme kavramının gerçekte çelişkiler barındırdığını gözler önüne sermiştir. Frege, Russell'dan gelen mektubun ardından bu çelişkiyi şöyle dile getirmiştir:

> Hiçkimse insanlar kümesinin bir insan olduğunu iddia etmeyecektir. Burada kendisinin bir üyesi olmayan bir kümeye sahibiz. Bir şeyin, kaplamı bir küme olan bir kavramın altına düştüğünde o kümeye ait olduğunu söylüyorum. Şimdi şu kavramı göz önüne alalım: *kendi üyesi olmayan küme*. Bu kavramın kaplamı (eğer onun kaplamından bahsedilebilirse) kendilerine üye olmayan kümelerin kümesidir. Kısaca bu kümeye K diyelim. Şimdi K kümesinin kendisine üye olup olmadığını soruyoruz. İlk olarak kendisinin bir üyesi olduğunu varsayalım. Eğer bir şey bir kümeye aitse kaplamı o küme olan bir kavramın altına düşer. Eğer bizim kümemiz kendisinin bir üyesiyse,

[148] Frege, a.g.e., s. 172

kendisinin üyesi olmayan bir kümedir. Bu ilk varsayımımızla çelişir. İkinci olarak, K kümesinin kendisinin bir üyesi olmadığını varsayalım; bu durumda o kaplamında olduğu kavramın altına düşer ve böylece kendisinin üyesi olur. Burada bir kere daha aynı çelişkiyi elde ederiz![149]

Frege'nin bu sözleri Russell paradoksuyla ortaya çıkan çelişkinin, Frege'nin kesin ve zorunlu tanımlar olarak ortaya koyduğunu düşündüğü ilkel terim tanımlarını geçersiz kıldığının açık bir ispatıdır. Şimdi bize düşen bu çelişkinin önemli başka yanına vurgu yapmaktır. Çünkü böylece aritmetiğin mantıkla temellendirilmesinin bu ilk başarısız girişiminin, sonraki pek çok başarısızlığın da nedenini kesin bir biçimde ortaya koyacak olan temel bir sorunu gösterilmiş olacaktır.

Şimdi, eğer Frege'nin 0'ın tanımında başvurduğu "kendisiyle aynı olmayan" kavramını Russell paradoksuyla birlikte düşünecek olursak hayli ilginç bir sonuç elde ederiz. Sorumuz şu: Frege'nin K kümesi olarak adlandırdığı yukarıdaki küme, "Kendisiyle aynı olmayan" kavramının kaplamında mıdır? Frege bu kavramın altına hiçbir şey düşmediğinden kaplamının boş küme olduğunu ve sayal sayısının 0 olduğunu söylemişti. Oysa K kümesinin açıkça bir çelişki içerdiği, *kendisinin üyesi olmadığı varsayıldığında kendisinin üyesi olması ve kendisinin üyesi olmadığı varsayıldığında kendisinin üyesi olması* bakımından kendisiyle aynı olmadığı ortadadır. Dolayısıyla "kendisiyle aynı olmayan" kavramının kaplamında en az bir kümenin, K kümesinin, olduğu ve Frege'nin tanımına göre sayal sayısının 0 olamayacağı açıktır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta elde ettiğimiz sonucun sadece basit bir çelişki olarak görülmemesi gerektiğidir. Çünkü "kendisiyle aynı olmayan" kavramının çelişmezlik ilkesinin bir yansıması olduğu hatırlanacak olursa, buradaki sorun mantığın temel ilkelerinden biri olan çelişmezlik ilkesinin kendisiyle absürt bir biçimde çelişmesidir. Bu durumda Russell paradoksunun aritmetik için değil öncelikle mantık adına sorgulanması gerektiği ve aritmetiğin mantıkla temellendirilmesinin ancak ikincil bir görev olduğu söylenmelidir.

Öyleyse küme kavramı ister mantığın isterse matematiğin bir kavramı olsun eğer sayıların temellendirilmesinde merkezi bir öneme sahip olacaksa öncelikle

[149] Gottlob Frege, *Philosophical Writings*, 2. e., New York: Basil Blackwell, 1960, s. 241

kendi içindeki paradokslardan temizlenmelidir. Nitekim Russell'ın sonraki çalışmaları da buna yöneliktir.

SONUÇ

Tarih boyunca insanlar pek çok şekilde sayılarla olan ilişkisini belli eden kayıtlar tutmuştur. Matematiğin bir bilim olarak felsefeyle de harmanlanmış birikimi bu kayıtların en dikkat çekenidir. Fakat her şeyin kemiklere atılan küçük çentiklerle başladığı düşünüldüğünde bütün bu külliyatın bir çentikten daha değerli olduğunu söylemek güçtür. Bu tam da ilk ilkeleri kutsayan bir görüş olarak düşünülebilir. Fakat matematik her zaman ilk ilkelerin bilimi olmuştur. Bu çalışma bu yüzden ilk ilkeler kadar ilk izlerin de önemli olduğunun bilinciyle çok gerilerden başlamıştır. Fakat eğer aritmetiğin temel nesneleri diğer bütün nesneleri kendilerinden var etme iddiasında olacaklarsa onların her türlü izini bilmek önemlidir.

Orinyasyenler ve Frege arasında kurulan tarihsel bağ en çok da sayılar bakımından kurulabilirdi. Çünkü hep söylendiği gibi evrende sayıların değişmesini gerektirecek yeni hiçbir şey yok. Fakat özellikle felsefenin çelişkili bir alışkanlığı olan her şeyi kendince yorumlama sayıları kılıktan kılığa sokmuş olabilir. Yine de sayıların felsefeyi değiştirme gücünün yanında bu hiçbir şeydir.

Bu çalışmada çeşitli kavramlara yer verildi. Farklı soruların yanıtları olarak kardinal ve ordinal sayılar, onlarla doğrudan veya dolaylı olarak ilişkili olan birebir eşleştirme, sayma, birim, ardışıklı, sıralılık… Tüm bunlar sayıların ne olduğu kadar belki ne olmasının istendiğiyle de ilgili olarak ele alındı. Fakat denildiği gibi bu felsefecileri keyfi görevlerinden biridir. Böylece hayli iddialı bir tez olarak bahsedilen tüm kavramların yanına Sayma Paradoksu gibi bir ucube eklendi. Sayma Paradoksu temel olarak saymayı, birimleri veya sıralılığı konu edinen bütün ordinal sistemlerin başlangıcına yapılan bir saldırı olarak düşünülebilir. Bu paradoks ordinal bir sistemin temel nesnelerini belirlemesindeki bir güçlükten hareket eder. Yani aritmetiğin temel nesnelerinden biri olan 1 sayısının kavranma biçimine. Dahası onun herhangi bir sistemde, herhangi bir biçimde tek başına ele alınmasını konu edinir. Bir anlamda 1'e ikilik dayatarak onu tahtından indirmeyi dener.

Sayma Paradoksu'nun kardinal sayılar için önemi nedir? Özellikle Platon'la ilgili bölümde bunun ipuçları mevcuttur. Sayıların gerçekliği Platoncu anlamda olmasa da onun Frege'deki yansıması bakımından dikkate değerdir. Bu gerçeklik

Parmenides'in pay alma sorununu aşan bir uslamlama içerir. Örneğin 5'er nesneden oluşan iki farklı küme olsun. Biri öküzlerden bir koyunlardan oluşsun. Buradaki sorun, eğer 5 kendinde bir nesne ise hem öküzlerin hem de koyunların kümesi ondan pay alır ve böylece sanki iki farklı 5 vardır. Fakat böyle olması için 5'in iki farklı yerde olduğu, yani duyusal nesnede/nesnelerde olduğu düşünülmelidir. Oysa 5 hem bu iki duyusal kümenin hem onların kavramının gönderimde bulunduğu bir nesnedir. O Venüs gibi kendi yerindedir, ama anlamı farklı ifade edilir. 5 öküz denildiğinde bunun anlamı birimleri öküzler olan duyusal 5'tir fakat gönderimi gerçek nesne olan ve birimleri öküzler olmayan ve anlamı duyusal veya kavramsal birimlerden oluşan ama kendisi böyle olmadığından birimlerle ifade edilmeyen gerçek nesne 5'tir. Frege'nin sayıların yersizliğini vurgulaması gerçekliğin sınırlarını genişleten bir adım olarak düşünülmelidir.

Frege ne yapmak istiyordu? Frege'nin amacı Peano aksiyomlarında tanımlanmadan yer almış olan ilkel terimlerin mantık temelli tanımlarını vermek ve böylece aritmetiğin nesnelerini kesinliğe kavuşturmaktı. O, haklı olarak (tıpkı Euclides'in geometriyi kurarken öngördüğü aksiyomatik yöntemin Peano tarafından aritmetiğe uyarlanmasında olduğu gibi) bu kesinliğin mantık aracılığıyla elde edilebileceğini düşünmüş ve aritmetiğin bu ilkel terimlerini mantığın çelişmezlik ve özdeşlik gibi temel ilkelerinden türetmeyi denemişti. Bu temellendirme ise dilin mantıksal çözümlemesini ve bu çözümleme içerisinde sayı bildiren bir tümcenin özne ve yüklemi arasındaki eşitlik ilişkisinin gösterilmesini içeriyordu. Bu eşitlik ilişkisi ise matematiğin birebir eşleştirme kavramı ve mantığın küme kavramıyla birlikte farklı bir temellendirme imkanı sağlıyordu. Fakat gelinen noktada onun başvurduğu mantıksal kavramların en az aritmetiğin kavramları kadar belirsizlik taşıdığı Russel tarafından gösterilmiş oldu. Russell paradoksu mantıksal bir kavram olan küme kavramının kendisinin de sorunlu olduğu iddiasındaydı. Fakat eğer russel haklıysa sorunun mantığın temel ilkeleriyle daha doğrusu onların nasıl görüldüğüyle ilgili olduğu anlaşılmaktadır. Öyleyse aritmetiğin mantıkla temellendirilmesi ancak mantık ilkelerine nasıl sahip olduğumuzun gerçekten bilinmesiyle anlamlı olacaktır. Ve bu konudaki temelsiz kabuller aritmetiğin mantıkla temellendirilmesindeki sonuçsuz çabaların da gerekçesi olarak görülmelidirler. Fakat bu türlü bir araştırma her şeyden önce Frege'nin kendi çalışmasında yaptığı gibi her bir felsefi görüşü ayrı

ayrı ele almak ve aralarından en doğrusunu keşfetmeyi gerektirir. Belki Sayma Paradosu da böyle bir incelemeye küçük bir katkıda bulunmuştur.

YARARLANILAN YAYINLAR

- ALLMAN, George Johnston, *Greek Geometry from Thales to Euclides*, Dublin: University Press, 1877
- ARİSTOTELES, *Fizik*, çev. Saffet Babür, İstanbul: YKY, 2001
- ARİSTOTELES, *İkinci Çözümlemeler*, çev. Ali Houshiary, İstanbul: YKY, 2002
- ARİSTOTELES, *Kategoriler*, çev. Saffet Babür, Ankara: İmge Kitabevi, 2002
- ARİSTOTELES, *Metafizik*, çev. Ahmet Arslan, İstanbul: Sosyal Yayınları, 1996
- ARİSTOTELES, *Nikhomakhos'a Etik*, çev. Saffet Babür, Ankara: Kebikeç Yayınları, 2005
- BADIO, Alain, *Number And Numbers*, Cambridge: Polity Press, 2008
- BARKER, Stephen, *Matematik Felsefesi*, çev. Yücel Dursun, İstanbul: İmge Yayınları, 2003
- BELL, John, *The Art of the Intelligible: An Elementary Survey of Mathematics in its Conceptual Development*, Kluwer: 1999, http://publish.uwo.ca/~jbell/#Publications
- BRAINERD, Charles J., *The Origins of the Number Concept*. New York: Wiley, 1979
- CONANT, Levi Leonard, *The Number Concept: Its Origin And Development*, Middlesex: The Echo Library, 2007
- ÇOTUKSÖKEN, Betül – BABÜR, Saffet, *Ortaçağda Felsefe*, İstanbul: Kabalcı Yayınevi, 2000

- DANTZIG, Tobias, *Number, The Language Of Science*, New York: Pi Press, 2005
- DEHAENE, Stanislas, *The Number Sense*, New York: Oxford University Press, 1997
- DENKEL, Arda, *İlkçağ'da Doğa Felsefeleri*, İstanbul: Doruk Yayınları, 2003
- DESCARTES, René, *Kurallar-Meditasyonlar*, çev. Aziz Yardımlı, İstanbul: İdea Yayınevi, 1998
- DUMMETT, Michael, *Frege, Philosoph Of Mathematics*, London: Duckworth, 1991
- EUCLİDES, *Elements*, çev. Richard Fitzpatrick
- FLEGG, Graham, *Numbers: Their History And Meaning*, General Publishing Company, 1983
- FREGE, Gottlob, *Aritmetiğin Temelleri*, çev. H. Bülent Gözkan, 1. b., İstanbul: YKY, 2008
- FREGE, Gottlob, *Philosophical Writings*, 2. e., New York: Basil Blackwell, 1960
- GOW, James, *A Short History Of Greek Mathematics*, London: Cambridge University Press, 2010
- HEATH, Thomas, *A History Of Greek Mathematics, Volume 1*, New York: Oxford At The Clarendon Press, 1921
- HEIDEGGER, Martin, *Bilim Üzerine İki Ders*, çev. Hakkı Hünler, 1. b., İstanbul: Paradigma Yayınları, 1998
- HEMPEL, Carl G., *The World Of Mathematics*, Vol. 3, New York: 1956
- HESIOD, *Theogony, Works and Days, Testimonia*, London: Harward University Press, 2006

- IFRAH, Georges, *From One To Zero*, New York: Penguin Books
- IFRAH, Georges, *Universal History Of Numbers*, New York, John Wiley And Sons, 2000
- KANT, Immanuel, *Arı Usun Eleştirisi*, çev. Aziz Yardımlı, 1. b., İstanbul: İdea Yayınları, 1993
- KANT, Immanuel, *Prolegomena*, çev. İoanna Kuçuradi-Yusuf Örnek, 3. b., Ankara: Türkiye Felsefe Kurumu, 2002
- KLEIN, Jacob, *Greek Mathematical Thought And The Origin Of Algebra*, (New York: Dover Publications, 1992
- KLINE, Morris, *Mathematical Thought From Ancient To Modern Times, Volume 1*, New York: Oxford University Press, 1990
- KLINE, Morris, *Mathematics, The Loss Of Certainty*, New york: Oxford University Press, 1982
- MAKKAY, Janos, *Before Indo-European And Uralics*, Nostratic Centennial Conference: the Pecs Papers. Pecs, 2004. s. 143-164.
- MAYBERRY, John P., *The Foundations Of Mathematics In The Theory Of Sets*, (Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- NEWTON, Isaac, *Doğal Felsefenin Matematiksel İlkeleri*, çev. Aziz Yardımlı, İstanbul: İdea yayınları, 1998
- PETERS, Francis E., *Antik Yunan Felsefesi Terimleri Sözlüğü*, çev. Hakkı Hünler, (İstanbul: Paradigma Yayınları, 2004), s. 215
- PIAGET, Jean, *Genetic Epistemology*, New York: Norton Library, 1971
- PLATON, *Devlet*, çev. Sabahattin Eyuboğlu-M. Ali Cimcoz, (İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları, 2005
- PLATON, *Devlet Adamı*, çev. Aylin Kırgızoğlu, İstanbul: Karınca Kitabevi

- PLATON, *Diyaloglar 2, Theaitetos*, çev. Macit Gökberk, İstanbul: Remzi Kitabevi, 1999
- PLATON, *Gorgias*, çev. Mehmet Rifat-Sema Rifat, (İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları, 2006
- PLATO, *Gorgias*, Forgotten Books, 2008
- PLATON, *Kratylos*, çev. Cenap Karakaya, (İstanbul: Sosyal Yayınları, 2000),
- PLATON, *Mektuplar*, çev. İrfan Şahinbaş, İstanbul: M.E.B., 1997
- PLATON, *Menon*, çev. Ahmet Cevizci, İstanbul: Sentez Yayınları, 2007
- PLATON, *Şölen*, çev. Azra Erhat-Sabahattin Eyuboğlu, İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları, 2002
- PLATON, *Parmenides*, çev. Saffet Babür, Ankara: İmge Yayınevi, 2001
- PLATON, *Philebos*, çev. Aylin Kırgızoğlu, İstanbul: Karınca Kitabevi s.101
- RUSSELL, Bertrand, *Introduction to Mathematical Philosophy*, 2. e., New York: The Macmillan Co, 1920
- RUSSELL, Bertrand, *Introduction To Mathematical Philosopy*, New York: Dover Publications Inc., 1993
- RUSSELL, Bertrand, *Our Knowledge Of The External World*, Chicago: The Open Court Publishing Company, 1914
- TABAK, John, *Algebra,* New York: Fact On File Inc., 2004
- TABAK, John, *Mathematics And The Laws Of Nature*, New York: Fact On File Inc., 2004
- *Upanişadlar*, İstanbul: Dergah Yayınları, 1997
- VAAN, Michiel de, *Etymological Dictionary Of Latin And The Other Italic Languages*, Boston: Brill, 2008

- WEYL, Hermann, *Philosophy Of Mathematics And Natural Science*, Princeton: Princeton University Press, 1949
- WITTGENSTEIN, Ludwig, *Tractatus Logico-Philosophicus*, çev. Oruç Aruoba, İstanbul: Metis Yayınları, 2006
- YILDIRIM, Cemal, *Matematiksel Düşünce*, 4. b., İstanbul: Remzi Kitabevi, 2004
- ZERZAN, John, *Gelecekteki İlkel*, çev. Cemal Atila, İstanbul: Kaos Yayınları, 2009