T.C. KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EĞİTİM BİLİMLERİ ANA BİLİM DALI
EĞİTİM PROGRAMLARI VE ÖĞRETİM BİLİM DALI

TAM SAYILAR KONUSUNUN ÖĞRETİMİNDE ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN MATEMATİKSEL TEMSİL KULLANIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Çağlar ÇANKAYA

KOCAELİ 2021

T.C. KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EĞİTİM BİLİMLERİ ANA BİLİM DALI
EĞİTİM PROGRAMLARI VE ÖĞRETİM BİLİM DALI

TAM SAYILAR KONUSUNUN ÖĞRETİMİNDE ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN MATEMATİKSEL TEMSİL KULLANIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Çağlar ÇANKAYA

Danışman: Doç. Dr. F. Belgin ÖZAYDINLI

KOCAELİ 2021

T.C. KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EĞİTİM BİLİMLERİ ANA BİLİM DALI
EĞİTİM PROGRAMLARI VE ÖĞRETİM BİLİM DALI

TAM SAYILAR KONUSUNUN ÖĞRETİMİNDE ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN MATEMATİKSEL TEMSİL KULLANIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tezi Hazırlayan: Çağlar ÇANKAYA

Tezin Kabul Edildiği Enstitü Yönetim Kurulu Karar ve No: 07.07.2021/16

Jüri Başkanı:

Jüri Üyesi:

Jüri Üyesi:

KOCAELİ 2021

ÖNSÖZ

Mesleğim olan matematik öğretmenliğine ilk başladığım günden itibaren öğrencilerime etkili bir matematik öğretimi yapabilmek ve alanımda kendimi geliştirmek için çabalamaktayım. Her geçen gün geliştirmeye devam ettiğim mesleki tecrübeme dayanarak, matematik dersinin bütününde olduğu gibi ortaokul matematiğindeki bazı konuların öğretiminde çeşitli sorunların olduğunu fark ettim. Bu sorunlardan en temel olanının tam sayılarla işlemler olduğu kanısına vardım. Bu nedenle, tam sayılarla işlemler konusunda yaşanan sorunlara hem kendi mesleki gelişimime hem de akademik düzeyde bir katkı sağlamak için lisansüstü eğitimine başladım ve bu süreç sonunda tezimi savunmak için mücadele ettim.

Araştırma süreci boyunca büyük bir titizlik, sabır ve emekle çalışmalarıma yardımcı olan ve ışık tutan en başta değerli hocam Doç. Dr. F. Belgin Özaydınlı' ya sonrasında anabilim dalındaki tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu süreç boyunca her zaman yanımda olduğunu hissettiren ve beni destekleyen annem Mahmure, babam İbrahim ve abim Çağatay Çankaya' ya; araştırma süresi boyunca iletişim halinde olarak sürekli birbirimize destek verdiğimiz arkadaşlarım Dilan Şahin ve Elif Özkuzugüdenli' ye; hayatımıza girerek yaşadığım stresli zamanlarda bana sevgisiyle destek olan sevimli kedimiz Portakal'a ve hayatıma girdiği günden beri kendimi çok şanslı hissettiren ve her zaman olduğu gibi bu süreçte beni yalnız bırakmayan biricik eşim Neşe Çankaya' ya teşekkürlerimi sunarım.

Çağlar ÇANKAYA

Kocaeli 2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET

TAM SAYILAR KONUSUNUN ÖĞRETİMİNDE ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN MATEMATİKSEL TEMSİL KULLANIMLARI

ÇANKAYA, Çağlar

Yüksek Lisans

Eğitim Programları ve Öğretim Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. F. Belgin ÖZAYDINLI

Temmuz 2021

ÖZET

Bu araştırmada, ortaokul matematik öğretmenlerinin tam sayılar konusunun öğretiminde matematiksel temsilleri kullanma durumları ortaya koyulması amaçlanmaktadır. Yapılan bu araştırma nitel araştırma paradigmalarından olgubilim desenine göre tasarlanmıştır. Araştırmada veri toplama aracı olarak kullanılan anket formu tam sayılarla ilgili işlem örneklerinden oluşmaktadır. Anket formu uzman görüşü ve 8 matematik öğretmeni ile yapılan pilot çalışma sonrası son halini almıştır. Araştırmanın katılımcılarını Kocaeli ili İzmit ilçesinde görev yapan 37 matematik öğretmeni oluşturmaktadır. Araştırmada veri analizi yöntemlerinden içerik analizi kullanılmıştır; içerik analizinde Lesh (1981) tarafından geliştirilen ve Nakahara (2008) tarafından güncellenen matematiksel temsil sınıflandırılması kullanılmıştır. Bu sınıflandırmada yer alan temsiller temalara, temalar kategorilere dönüştürülmüş; her kategori kodlara ayrılarak analiz edilmiştir. İçerik analizindeki kodlamalar araştırmacı ve tarafsız bir matematik öğretim uzmanı tarafından yapılmıştır. Araştırma sonuçlarına göre öğretmenler tarafından toplama işlemi öğretiminde *gerçekçi temsillerin; çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin öğretiminde sembolik ve dilbilimsel temsillerin diğer temsillere göre daha fazla sayıda kullanıldığı;* özellikle çarpma- bölme işlemlerinde büyük oranda kural odaklı soyut bir öğretim yapıldığı görülmüştür. Yapılan bazı modellemelerde, tam sayılarla işlem öğretimine ait kavramlar dikkate alınmamış veya modelleme için gereken aşamalar model üzerinde gösterilmemiştir. Ayrıca, araştırmaya katılan birçok öğretmen tarafından yapılan modellemelerin çoğu, sembolik ve dilbilimsel kurallara dayalı şekilde yapılmıştır. Araştırmada, öğretmenlerin kullandığı matematiksel temsillerin sırasının somuttan soyuta olmadığı ortaya konmuştur. Araştırmada ayrıca, tam sayılarla öğretimde öğretimi somutlaştırmaya yarayan manipülatiflerin çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinde çoğu öğretmen tarafından kullanılmadığı ve bunu da manipülatiflerle işlem öğretiminin genellikle zaman aldığı, bu konuda modelleme yapmakta güçlük çektikleri ve öğrencilerin manipülatif kullanmayı sevmedikleri gibi gerekçelere dayandırdıkları ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Tam sayılar, tam sayılarla dört işlem, matematiksel temsil, çoklu temsil, somut- temsili- soyut, manipülatifler

ABSTRACT

USAGE OF MATHEMATICAL REPRESENTATIONS OF SECONDARY SCHOOL MATHS TEACHERS DURING TEACHING INTEGERS

ÇANKAYA, Çağlar

Master's of Degree
Department of Education Programs and Instruction
Thesis Advisor: Assoc. Dr. F. Belgin ÖZAYDINLI
July 2021

ABSTRACT

This study aims to reveal mathematical representations' scope of use that secondary school math teachers use for teaching integers. This research was designed according to the phenomenological pattern of qualitative research paradigms. In this study, questionnaire form which is used as a data collecting tool is consist of sample questions based on mathematical operations of integers. The questionnaire form took its final form according to expert opinion and pilot studies that was conducted by 8 math teachers. The attendants of the research are 37 math teachers who work in İzmit district, Kocaeli province. For this research, among data analysis methods, contend analysis method was conducted. For content analysis, mathematical representation classification, which is developed Lesh (1981) and is updated by Nakahara (2008), is applied. Representations that take part in this classification were converted into themes, themes were converted into categories and each category was analysed by separating into codes. Codes of content analysis was conducted by researcher and an impartial math teaching expert. For some kinds of modelling studies, expressions that belongs to teaching operating of integers are ignored or the stages for modelling was not showed on model. Additionally most of the modelling which was made by the teachers who take part in the research study, were made according to the symbolic and linguistic rules in teaching of the operations. In the research it was concluded that the order of usage in the mathematical representations which are used by teachers are not from concrete to abstract. By this research it was determined that during the process

of teaching the integers, manipulatives which are concreting the teaching process are not preferred by most of the teachers and teacher claim that teaching via manipulatives takes too much time, also they have difficulties in modelling and students don't like using manipulatives.

Keywords: Integers, four operations with integers, mathematical representation, multiple representation, concrete-representational-abstract, manipulatives

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

CRA: Concrete- Representational- Abstract (Somut- Temsili- Soyut)

EBA: Eğitim Bilişim Ağı

MDÖP: Matematik Dersi Öğretim Programı

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)

PISA: Programme for International Student Assesment (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı)

OECD: Organisation for Economic Co-operation and Development (Ekonomik Kalkınma ve İşbirliği Örgütü)

TDK: Türk Dil Kurumu

TTKB: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

GİRİŞ

Bu bölümde araştırmaya ilişkin problem durumu, araştırmanın amacı, araştırmanın önemi, sayıltılar, sınırlılıklar ve tanımlar yer almaktadır.

Problem Durumu

19. yüzyılda iki Alman matematikçi tam sayılar konusunu ne kadar önemli gördüklerini aşağıdaki sözlerle ifade etmektedirler (Struik, 2012: s.240-250):

“Tanrı bize tam sayıları verdi. Gerisini biz yarattık (Karl Weierstrass, 1815-1897).”

“Tanrı tam sayıları yarattı. Diğerleri insanların buluşudur. Tam sayılardan başka sayı yoktur (Leopold Kroneckertam, 1810-1891).”

Weierstrass ve Kroneckertam’ın sözleri kadar iddialı olmasa da tam sayıların çeşitli sembollerden oluşarak herkes için aynı anlamı ifade eden sonsuz bir dil olan matematiğin önemli bir parçası olduğu söylenebilir (Çekici ve Yıldırım, 2011). Matematik dilinin bir parçası olmanın yanında tam sayılar, insan hayatının birçok döneminde ortaya çıkmış ve çıkabilecek ihtiyaçların karşılanmasında rol alan önemli bir sayı kümesidir (Baykul, 2020). Gündelik hayattaki sıcaklık, borç- alacak, derinlik gibi çeşitli faaliyetler içerisinde etkileşim halinde olunabilen bu kümenin (Van de Walle, Karp ve Bay- Williams, 2016), Türkiye eğitim sistemi içerisinde sistematik olarak ele alındığı ilk kademe ortaokul 6. ve 7. sınıftır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018a). Tam sayıların ortaokul kademesinde yeterince ve etkili bir şekilde öğrenilmemesi sonraki eğitim kademelerinde birçok probleme alt yapı oluşturabilmektedir (Gallardo, 2008; Özdeş, 2013). Bu nedenle, okul matematiğinde ve akademik matematikte birçok konuda kullanılan tam sayılar (Dönmez, 2002; Gallardo, 2002), kavramsal ve işlemsel yönleriyle anlamlı bir şekilde öğrenilmelidir (İşgüden, 2008; Whitacre, Bishop, Lamb, Philipp ve Schappelle, 2018).

Tam sayılarla ilgili alanyazın incelendiğinde, tam sayıların öğrenimiyle ilgili birtakım sorunlar yaşandığını görülmektedir (Altıparmak ve Özdoğan, 2010; Bozkurt ve Polat, 2011; Erdem, 2015; Hativa ve Cohen, 1995; Kilhamn, 2011; Şengül ve Körükçü, 2012; Van de Walle vd., 2016). Bu sorunlar; yeni öğrenilen negatif tam sayıyı anlamada, tam sayılarla sıralamada, işlem önceliğinde, pozitif ve negatif tam sayıların ve sıfırın tam sayılardaki yerini anlamada ve tam sayılarla ilgili dört işlemde yaşanan sorunlar olarak özetlenebilir (Avcu ve Durmaz, 2011; Altun, 2006; İşgüden, 2008; Erdem, Başbüyük, Gökkurt, Şahin ve Soylu, 2015; Van de Walle vd., 2016; Kilhamn, 2011; Yenilmez ve Bağdat, 2014). Önceki öğretim kademelerinde doğal sayılarla işlem yapan ancak negatif tam sayılarla işlem yapmayan öğrenciler; doğal sayılarda öğrendiklerini genelleme eğiliminde olmaları nedeniyle, özellikle negatif tam sayılarla yapılan işlemlerde sorun yaşayabilir (Altıparmak ve Özdoğan, 2010; Ünal ve İpek, 2010; Erdem vd., 2015; Hativa ve Cohen, 1995). Negatif tam sayılarla ilgili sorunların temel nedeni, eksi (-) işaretine verilen anlam (Carson ve Day, 1985) ve eksi (-) işaretinin işlevleriyle (Vlassis, 2008) ilgilidir. Ayrıca, öğrenciler tarafından negatif tam sayıların işaretinin işlemlerde yön ve nicelik olarak iki farklı anlam içermesi (Carson ve Day, 1985; Hativa ve Cohen, 1995) dikkate alınmadığı gibi, öğrenciler işaretin sayıya veya işleme ait olma durumuna karar vermekte güçlük yaşamaktadır (Yenilmez ve Bağdat, 2014).

Hativa ve Cohen 1995 yılında yaptığı araştırmada, belki de araştırma yaptığı dönem şartlarıyla ilişkili olarak, negatif sayı sistemini açıklayabilecek ve öğrencinin anlamlandırmasını sağlayacak pratik modellerin eksikliğinden söz etmektedir. Ancak, günümüz alanyazınına bakıldığında, tam sayıların öğretimini anlamlı bir şekilde gerçekleştirmek için çeşitli modellerin olduğu ve bu eksikliğin büyük oranda giderildiği söylenebilir (Koç Şanlı ve Işık, 2020). Bunlar; sayı doğrusu modeli (Beyatlı Ak, 2019; Çevik, 2019; Çiçek, 2020; Erdem, 2015; Fuadiah ve Suryadi, 2019; Kumar, Subramaniam ve Naik, 2017; Van de Walle vd., 2016), asansör, termometre, deniz seviyesi modeli, borç-alacak, kar- zarar gibi gerçek yaşam durumuna ait modeller (Akyuz, Stephan ve Dixon, 2012; Bozkurt ve Polat, 2011; Erdem vd., 2015; Fuadiah ve Suryadi, 2019; Kumar vd., 2017; Stephan ve Akyuz, 2012; Van de Walle vd., 2010) ve sayma pulu (Akyüz, 2019; Beyatlı Ak, 2019; Bozkurt ve Polat, 2011; Erdem vd., 2015; Ertuğrul, 2009; Maccini ve Ruhl, 2000; Ltyle, 1992; Şengül ve Körükcü, 2012) gibi birçok model olabilmektedir.

Tam sayı öğretiminde kullanılan söz konusu modeller, alanyazında *temsil* olarak ifade edilmektedir. Keller ve Hirsch'e (1998) göre temsiller, bir kavramı farklı bilgilerle bağdaştırarak kazanma fırsatı sağlayan araçlardır. Van de Walle ve diğerleri (2016) ise temsilleri, matematiksel fikirleri ve ilişkileri ifade edebilmek için kullanılan resim, işaret, sözcük, grafik, diyagram, manipülatif, grafik, tablo ve semboller olarak tanımlamaktadır. Ayrıca, farklı temsillerin bir arada kullanılması ve aralarında geçiş yapılması; kavram veya durumları somutlaştırmaya yardımcı olmakta (Kaput, 1998), daha zengin içeriğe sahip bir öğrenme ortamı (Ainsworth, 1999; MEB, 2013; Taşdan, Erduran ve Çelik, 2015) ve öğrenmede kolaylık ve kalıcılık (Van de Walle, 2016) sağlamaktadır. Bu nedenle bir kavramın öğretiminde farklı temsiller tercih edilmeli ve uygun biçim ve sırayla kullanılmalıdır (Ainsworth, 1999; Çıkla Akkuş, 2004; Nakahara, 2008; Owen ve Clements, 1998).

Soyut bir anlam içeren tam sayılar konusunda kullanılan farklı temsiller, konuyu somutlaştırarak etkili bir öğretimin yapılmasını sağlayabilir (Clements ve McMillen, 1996; Peled ve Carraher, 2007; Rabin, Fuller ve Harel, 2013). Tam sayıların öğretiminde en önemli kaynaklardan olan öğretmenlerin kullandıkları yöntem ve stratejilerin (Erdem vd., 2015; Gürbüz, Erdem ve Gülburnu, 2013; National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi) [NCTM], 2000) yanı sıra öğretmenin özel ve pedagojik alan bilgisi oldukça önemlidir (Erdem vd., 2015; Davis ve Simmt, 2006; Gökkurt, Şahin ve Soylu, 2012; Gürbüz vd, 2013; Hill, Rowan ve Ball, 2005; Tchoshanov, 2011). Bu nedenle öğretmenlerin birbirinden farklı stratejilerin (Erdem, 2011) ve çoklu temsillerin bulunduğu bir öğretim gerçekleştirmesi etkili bir matematik öğretimi sağlayabilir (Khalid ve Embong, 2019; Kumar vd, 2017).

Alanyazında farklı temsillerin, çeşitli yöntem ve stratejilerin kullanıldığı çalışmalar yapılsa da (Akyüz, 2019; Aydın, 2020; Çetin, 2016; Erdoğdu, 2019; Ertuğrul, 2009; Hayes, 1998; Lakoff ve Nunez, 1997); öğretmenler (Khalid ve Embong, 2019; Kubar ve Çakıroğlu, 2017) ve öğrenciler (Akyüz, 2019; Çetin, 2016; Erdoğdu, 2019) açısından söz konusu sorunların devam ettiğini gösteren birçok çalışma mevcuttur. Öğretmenlerin yer aldığı araştırmalara bakıldığında ise; tam sayılarla ilgili yaşanan sorunlarla ilgili öğretmen görüşlerine dayalı araştırmalar (Bozkurt ve Polatlı, 2011; Çevik, 2019; Erdem vd., 2015; Kubar ve Çakıroğlu, 2017; Koç Şanlı, 2018) mevcut olsa da öğretmenlerin matematiksel temsilleri kullanma durumları, nedenleri ve tam sayılar konusunda sorun yaşanan işlemler özelinde çalışılan bir araştırmaya rastlanmamıştır. Tam sayılarla işlemlerin öğretiminde bu sorunların giderilmesine yönelik öğrenme durumlarının yaratılması mevcut durumdaki uygulamaların ortaya konmasıyla yakından ilişkilidir. Bu araştırmanın, tam sayılarla işlem öğretiminde ortaokul matematik öğretmenlerinin matematiksel temsilleri kullanma durumlarının ve gerekçelerinin ortaya konulmasıyla; tam sayılar konusunda araştırma yapan araştırmacılara ve matematik öğretmenlerine tam sayılarla işlem öğretiminde yaşanan sorunların çözümlenmesine yönelik hazırlanacak öğretim tasarımlarının geliştirilmesi ve uygulanması açısından kaynak oluşturacağı düşünülmektedir.

Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, ortaokul matematik öğretmenlerinin tam sayılar konusunun öğretiminde kullandıkları matematiksel temsilleri kullanma durumlarını ortaya koymaktır. Bu amaçla araştırmaya katılan matematik öğretmenlerinin kullandıkları temsiller ve bu temsilleri hangi sırayla kullandıkları incelenmiştir.

Araştırmanın Önemi

Alanyazın incelendiğinde tam sayıların öğretimine yönelik birçok araştırmanın yapıldığı ve araştırma örneklemlerinin ise çoğunlukla kitaplar, öğretim programları, öğrenciler ve öğretmenler olduğu görülmektedir. Yapılan birçok araştırmada, tam sayılar konusunun öğretiminde yaşanan çeşitli sorunların çoğunlukla öğrenciler açısından ele alındığı görülmektedir (Avcu ve Durmaz, 2011; Berber ve Memnun, 2018; Şengül ve Cantimer, 2018; Yenilmez ve Bağdat, 2014; Yenilmez ve Avcu, 2009). Bu sorunları öğretmenler açısından ele alan bazı çalışmalar (Bozkurt ve Polat, 2011; Erdem vd., 2015; Khalid ve Embong, 2019; Kubar ve Çakıroğlu, 2017) yapılsa da özellikle tam sayılarla işlemler özelinde, ortaokul matematik öğretmenlerinin uygulamalarını matematiksel temsiller kullanım durumlarını ortaya koyan çalışmaların sınırlı olduğu görülmektedir. Bu araştırma tam sayılarla işlemlerin öğretiminde sorun yaşanan konularda öğretmenlerin temsilleri kullanımlarının ve kullanma sıralarının tespiti ile; tam sayılar konusunu öğretiminde öğretmenlerin ders içi uygulamalarında yaşadığı sorunları ortaya koyma açısından önemlidir. Bu araştırmada ortaya çıkan sonuçların matematik eğitimcilerine, matematik eğitimi alanında görev yapan akademisyenlere ve matematik öğretim materyalleri hazırlayan kurumlara kaynaklık edeceği varsayılmaktadır. Araştırmanın, tam sayılarla işlem öğretiminde yaşanan sorunları ortaya koymasıyla, temsillerle ilgili deneysel çalışmalara, tam sayılar konusunda öğretim programı hazırlayan program tasarımcılarına ve öğretmenlere örnek ders tasarımlarının hazırlanmasına kaynaklık edeceği düşünülmektedir.

Problem Cümlesi

Araştırmanın amacına yönelik olarak ana problem cümlesi *Tam sayılarla işlem öğretiminde ortaokul matematik öğretmenlerinin matematiksel temsilleri kullanma durumu nasıldır?* şeklindedir. Ana problem cümlesine bağlı olarak yanıt aranacak olan alt araştırma problemleri aşağıdaki gibidir.

1. Tam sayılarla işlem öğretiminde ortaokul matematik öğretmenlerinin kullandığı matematiksel temsiller nelerdir?
2. Tam sayılarla işlem öğretiminde ortaokul matematik öğretmenlerinin matematiksel temsilleri kullanma sırası nasıldır?
3. Tam sayılarla işlem öğretiminde ortaokul matematik öğretmenlerinin manipülatifleri kullanma/kullanmama nedenleri nelerdir?

Araştırmanın başlangıcında ana problem cümlesi ve buna bağlı birinci ve ikinci alt sorularla başlanmış, ancak pilot çalışma sonrası katılımcıların manipülatifleri, bu araştırmada sayma pullarını, özellikle çarpma ve bölme işlemlerinin öğretiminde kullanmadıkları görülmüştür. Bu nedenle alanyazının yeniden incelenmesi sonrası, öğretmenlerin manipülatifleri kullanma/kullanmama gerekçelerini daha derinlemesine analiz edebilmek için üçüncü araştırma sorusu araştırmaya dahil edilmiştir. Araştırmanın yöntem bölümünde bu aşamalar detaylarıyla açıklanmıştır.

Sayıltılar

Araştırmaya katılan ortaokul matematik öğretmenlerinin anket formlarındaki soruları samimi ve güvenilir bir şekilde yanıtladıkları varsayılmaktadır.

Sınırlılıklar

Araştırma,

- 7.sınıf düzeyinde tam sayılarla dört işlemin öğretimiyle ilgili hazırlanmış anket formuyla,
- Manipülatiflerden sayma pullarıyla,
- 2020-2021 Eğitim- Öğretim yılında Kocaeli ilinin İzmit ilçesindeki devlet okullarında görev yapan ve araştırmaya gönüllü olarak katılmayı kabul eden 37 ortaokul matematik öğretmeniyle sınırlıdır.

Tanımlar

Somut: Beş duyu organından en az biriyle varlığına ilişkin bilgi sahibi olunabilen kavramlar somuttur (Çinçin, 2016: s.240). Diğer bir deyişle, somut, varlığı duyularla algılanabilen her şeydir (Türk Dil Kurumu [TDK], 2021).

Soyut: Beş duyu organıyla algılanamayan, varlığı daha çok sezgisel olarak bilinen kavramlar soyuttur (Çinçin, 2016: s.240). Diğer bir deyişle, varlığı duyular yoluyla algılanamayan her şeydir (TDK, 2021).

Model: Anlaşılması güç bir kavram, durum veya sürecin sistematik bir bütünlük içerisindeki gösterimidir (Harrison, 2001).

Modelleme: Model oluşturma işinin gerçekleştiği süreçtir (Harrison, 2001).

Temsil: Bir kavramı anlamak ve açıklamak için başka bir kavram veya durumun temel anlamından farklı olarak kullanılmasıdır **(**Gérard, 1998).

Matematiksel temsil: Matematik öğretimindeki matematiksel kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ifade edebilmek için kullanılan resim, işaret, sözcük, grafik, diyagram, manipülatif, grafik, tablo ve sembollerdir (Van de Walle, 2016: s.4).

Manipülatifler: Soyut bir kavram olan matematiksel kavramların somutlaşmasını sağlamak için geliştirilen dokunma ve görme duyularına hitap eden somut materyaller olarak tanımlanmaktadır (Moyer,2001: s.175-197). Manipülatifler, günlük hayattaki boncuk, fasulye, para ve ölçme araçları olabileceği gibi daha sistematik olan sayma blokları, geometrik cisimler de olabilmektedir (Özdemir, 2008: 362-373).

Sayma Pulları: Matematik öğretimindeki bazı sayma etkinliklerinde (Alptekin, 2015) ve sayılarla işlem öğretiminde çeşitli renk ve şekiller biçiminde hazırlanarak kullanılabilen somut materyallerdir (Bozkurt ve Polat, 2011; Van de Walle vd., 2016; Battista, 1983; Lytle, 1992).

BİRİNCİ BÖLÜM

1.KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

1.1.MATEMATİK

Türk Dil Kurumu (TDK) ve Oxford sözlüklerinde matematik; aritmetik, cebir, geometri gibi sayı ve ölçü temeline dayanarak niceliklerin özelliklerini inceleyen bilimlerin ortak adı olarak tanımlanmaktadır (Oxford, 1985, s.1061; TDK, 2005, s.1353). Baykul'a (1995) göre matematik günlük hayattaki problemleri çözmede başvurulan sayma, hesaplama, ölçme ve çizme; bazı sembolleri kullanan bir dil, insanda mantıklı düşünmeyi geliştiren mantıklı bir sistem ve dünyanın anlaşılmasında ve yaşanan çevreyi geliştirmede başvurulan bir yardımcıdır. Sertöz'e (1998: s.5) göre matematik, insan zekasının soyut düşünebilme becerisiyle ortaya çıkarılmaktadır. Bu beceriyle ortaya konulan bazı kavram ve tekniklerle yapılan matematikteki sayılar ve işlemler, insanların konuştukları dillerde bulunan harfler ve dilbilgisi kurallarına benzemektedir. Oluşturulan bu kurallar ise insanlar tarafından amacına uygun olarak gerçek hayatta birçok yerde kullanılmaktadır (Umay, 1996: s.146). Tüm bu tanımlardan da anlaşıldığı üzere soyut kavramlar ve aralarındaki ilişkiyi inceleyen bir alan olan matematik, hem belirli bilgi ve anlayışları sayılar aracılığıyla aktarmakta hem de günlük hayattaki birtakım olguların daha iyi anlaşılmasını sağlamaktadır.

Matematiği yaşamın soyutlanmış biçimi olarak tanımlayan Altun (2006), matematiğin üç önemli özelliğini aşağıdaki gibi ifade etmektedir:

- İnsanın yaşamayı garanti ettikten sonra daha iyi yaşama isteği,
- Doğal varlıkların ve olayların kararlı davranması,
- Matematikle özellikle problem çözme ile uğraşmanın insanın, düşünme tartışma ve muhakeme etme yeteneklerini geliştirmesi.

İlk özellik açısından ele alındığında; insanın yaşamını garanti etmesinin yolu çevresel olaylarla başa çıkması, yaşam kalitesini yükseltmesinin yolu da çevresel olaylara yön vermesi ve onlardan faydalanılabilir icatlar yapmasıdır. Matematiksel modeller üzerinde çalışmak tüm bu olaylara müdahale etmenin kuramsal temelini üretmekte ve birçok yeni icat için model olabilecek düşüncelerin oluşmasına yol açmaktadır. İkinci özellik açısından ele alındığında, canlı yapılanmalarında gözlenen altın oran, gök cisimlerinin izlediği yörüngeler, ışığın yansıma yaptığı açılar vb. bilimsel gelişmeler gösterilebilir. Üçüncü özellik olan bireylerde problem çözme ve muhakeme yeteneğini geliştirmesi ise matematiğin belki de en önemli özelliği olarak kabul edilebilir (Altun, 2006, s.225). Problem çözme becerisi gelişen bireyler hayattaki birçok faaliyete uyum sağlayabilmekte ve birçok alanda başarılı olabilmektedir (Adair, 2017: s.41-44).

Görüldüğü gibi, matematik, insan tarafından yaratılan ardışık soyutlama ve genellemeler süreci biçiminde geliştirilen fikirler ve bağlantılardan oluşan bir sistem olarak tanımlanabilir. Matematik bir sistem olduğu kadar günlük yaşamdaki problemlerin çözülmesinde kullanılan en önemli araçlardan biri olarak da kabul edildiğinden, öğrencilerin günlük yaşantılarında matematiğin kullanımı hakkında fikir sahibi olması gerektiği açıktır (İlgar ve Gülten, 2013). Tüm bu özelliklerinden dolayı matematikle ilgili amaçlarla, hemen hemen her ülkede, okul öncesinden yükseköğretim programlarına kadar tüm öğretim kademelerinde karşılaşılmaktadır (Baki, 2008; Yıldızlar, 2012).

Eğitim açısından ele alındığında matematik, birbirlerinin tamamlayıcısı olarak, *akademik matematik ve okul matematiği* olarak iki kategoride toplanmaktadır. Akademik matematik günümüzde fen fakültelerinde okutulan teorik matematik, okul matematiği ise diğer bütün eğitim kademelerinde öğretilen matematiktir. Akademik matematiğin amacı, matematiğin ulaşmış olduğu birikimi kullanarak teorik ve pratik anlamda matematiğe bilimsel katkıda bulunmaktır. Okul matematiği ise, "Toplum için nasıl bir insan yetiştirmek istiyoruz?", "Matematikle ilgili ne öğrenelim ve onu nasıl öğretelim?" sorularıyla ilgilenir (Baki, 2008: s.34).

Okul matematiğinin iki amacı vardır: İlki, toplumdaki büyük bir kitleyi matematik yönünden eğiterek sanayi, teknoloji ve günlük hayattaki diğer alanların ihtiyaç duyduğu elemanları yetiştirmek; ikincisi ise akademik matematikte çalışacak matematikçileri daha küçük yaşlarda bir matematikçi gibi eğitmek ve onları matematikçi olarak akademik hayata kazandırmaktır. Ayrıca okul matematiği; matematik kültürü kazandırmanın yanında öğrencinin matematiksel düşünme yeteneğini ve problem çözme becerisini de geliştirmektedir (Baki, 2008, s.34-35). Görüldüğü gibi, okul matematiği sadece bilim ve teknolojide değil günlük ve mesleki yaşantılarda da gerekli olan çözümleyebilme, usavurabilme, iletişim kurabilme, genelleştirme yapabilme, yaratıcı ve bağımsız düşünebilme gibi üst düzey becerileri geliştiren bir alandır (Aydoğdu ve Ayaz, 2008). Bu nedenle okul öncesinden başlayarak tüm eğitim kademelerinde matematik öğretimine verilen önem de giderek artmaktadır (Altun, 2002).

1.1.1.Matematik Öğretimi ve Yapılandırmacı Öğrenme Yaklaşımı

Günümüzde matematik öğretimindeki yaklaşımların odak noktası üreten, yeniliklere açık, eleştirel düşünen ve sürekli kendini geliştiren bireylerin yetiştirilmesidir (Deniz ve Cıtdır, 2020: s.296). Bu doğrultuda hazırlanan öğretim programlarındaki içerik ve uygulamalar yapılandırmacı öğrenme yaklaşımıyla ilişkilendirilmektedir. Bu yaklaşımın son yıllarda aktif rol oynaması geleneksel öğretimde yapılan tekrara ve ezbere dayalı öğrenmelerin kalıcılık sağlayamaması ve bireylerin derslere karşı olumsuz tutum geliştirmesiyle açıklanmaktadır (Yenilmez ve Duman, 2008: s. 44).

Yapılandırmacılık, yeni bilgilerin önceden öğrenilen bilgilerle ilişkilendirerek öğrenilmesini amaçlayan bir öğrenme yaklaşımıdır (Sherman & Kurshan, 2005: s.11-13). Demirel (2002: s.223) yapılandırmacılığı, öğrenilmiş bilgilerin yeni duruma uygun hale getirilerek kullanılması olarak tanımlamaktadır. Diğer bir deyişle, yapılandırmacılık bilginin nasıl oluştuğu ve insanın bilgiyi nasıl elde ettiği ile ilgilidir. Freudenthal'e (1983) göre bu yaklaşımın temelinde, bilginin insandan bağımsız oluşmadığı, zihnine aktarılmadığı, tersine, insanın bilgiyi zihninde yapılandırdığı görüşü yatmaktadır (Akt. Tomic ve Nelissen, 1998: s.4). Baykul'a (2020) göre yapılandırmacılık, öğrencilerin öğrenmeyi kendi kendisine gerçekleştirmesiyle ilgilidir. Bu nedenle, bireyin bilgiyi kendisinin oluşturabilmesi için öğrenme sürecinin her aşamasında aktif bir katılımcı olması sağlanmalıdır (Altun, 2006: s.228). Yapılandırmacı yaklaşıma göre eğitim, öğrencilerin öğrenme esaslarına göre oluşturulduğundan (Arslan, 2007: s.44), yeni öğrenilen kavramlar öğretmenin yapacağı açıklamalar yerine, öğrencinin aktif olarak kendisinin yapacağı uygulamalarla, zihinsel değerlendirmelerle, kavramla ilgili birey tarafından yapılan açıklamalarla ve tartışmalarla öğrenilmelidir (Baykul, 2020).

Yapılandırmacı yaklaşımla ilişkilendirilen gerçekçi matematik eğitiminin kurucusu Hans Freudethal, öğrenmeyi anlamlandırma süreci olarak tanımlamış ve gerçek matematik yapmak için bütün aşamalarda anlamlandırmanın önemini savunmuştur (Altun 2006: s. 224-226). Gravemeijer, Van Den Heuvel ve Streefland (1990, Akt. Altun, 2006: s. 229-231) gerçekçi matematik eğitiminde (a) yönlendirilmiş keşfetme, (b) bağlam problemlerinin uyarıcı olması ve bir kavramın yeniden keşif süreciyle kazanılması ve (c) modellere yer verilmesi olmak üzere üç temel ilkeden bahsetmektedir. Bu ilkelere göre; matematik öğretimi, gerçek hayat durumları ve somut örneklerle bağdaşık olarak, bireylerin aktif biçimde keşfedebileceği şekilde gerçekleşmelidir. Gravemeijer (1990), yapılan modellemeler sayesinde matematiksel kavramlar ile gerçek hayat arasında bağ kurulabileceğini ve kurulan bağ sayesinde bireyin öğrendiği bilgileri zihninde yapılandırabileceğini belirtmektedir (Akt. Yağcı ve Arseven, 2010).

Yapılandırmacı yaklaşıma dayalı matematik öğretiminde ele alınabilecek bir başka kuram Piaget' in bilişsel gelişim kuramıdır. Piaget bilişsel gelişim kuramında üç tip bilgiden söz etmektedir: *Fiziksel bilgi*, *mantıksal/ matematiksel bilgi* ve *sosyal bilgi*. Fiziksel bilgi, uygulamalı etkileşim yapılarak kazanılır; nesnelerin doğrudan deneyimi ve algısıyla ilgilendiği için, doğası gereği, somuttur. Bu tür bilgiler yalnızca çevresel unsurlarla doğrudan temas yoluyla elde edilebilir. Mantıksal/matematiksel bilgi, somut bir uyaranla fiziksel etkileşimin ötesinde yapılan uygulamalarda gerçekleştirilen akıl yürütmeyle ilgilidir. Fiziksel bilgi keşfedilen, mantıksal/matematiksel bilgi eylemler yoluyla yaratılan, sosyal bilgi ise başkalarıyla gerçekleşen etkileşim yoluyla kazanılan bilgidir (Lutz ve Huit, 2004: s.2-5). Fiziksel bilgi bir cismin sertliği, rengi; matematiksel bilgi boyu, mesafesi ve şekliyle (Olkun ve Uçar, 2014: s.6); sosyal bilgi ise bilginin edinilme yoluyla ilgilidir (Lutz ve Huit, 2004: s.2-5). İki farklı rengin görülmesi fiziksel bilgi iken bunların karşılaştırılması mantıksal/ matematiksel bilgidir (Olkun ve Uçar, 2014: s.6). Piaget'e göre fiziksel bilgi, gözlem ve deney sonucu soyutlamalarla yapılanırken mantıksal/ matematiksel bilgi düşünmeye dayalı soyutlamalarla oluşmaktadır (Özdemir, 2008: s.362-363). Özetle, fiziksel bilgiler duyularla algılanırken mantıksal/ matematiksel bilgiler akıl yoluyla, sosyal bilgiler ise etkileşim yoluyla edinilmektedir.

Van de Walle vd. (2016: s.24) *matematiksel bilgiyi*, kavramsal ve işlemsel bilgi olarak ikiye ayırmaktadır; kavramsal bilgi kavramın kendi özellikleriyle ilgiliyken işlemsel bilgi kavramın özelliklerinden yola çıkılarak yapılan hesaplamalarla ilgilidir. Baykul'a (2020: s.34-35) göre kavramsal bilgi zihinde oluşur ve zihinde oluşan bu bilgileri temsil etmek için yazılı ve sözlü ifadeler kullanılır. Kavramsal bilgi, işlemsel bilginin anlam kazanmasında önemli olduğundan birbirlerinden ayrı düşünülmemelidir. Söz gelişi; 4 sayısının dört olması, kavramsal bilgi olarak *dört nesneden oluşan bir kümenin eleman sayısı* şeklinde ifade edilebilir. Benzer şekilde toplama işlemini, çoklukları bir araya getirme veya birleştirme olarak açıklamak da kavramsal bilgidir. İşlemsel bilgi ise kavramsal bilgileri temel alarak belirli sembol ve kurallarla o işlemi gerçekleştirme işidir (Olkun ve Uçar, 2014: s.6). Diğer bir deyişle, kavramsal bilgi işlemin neden ve ne zaman kullanılacağı, işlemsel bilgi ise nasıl yapıldığıyla ilgilidir.

Matematiksel bilgilere ait anlamları temsil etmek, çeşitli sembollerin kullanımıyla sağlanmaktadır. Örneğin; *47 x 21* probleminde yapılacak çarpma işleminin tekrarlı toplamadan oluştuğunu ve bir dikdörtgenin alanını temsil edebildiğini bilmek kavramsal anlamayla ilgilidir. Bu problemdeki *işlemsel bilgi*, çarpma işlemini yapabilmek için gereken işlem bilgisiyle ilişkili olan kısımdır. Diğer bir deyişle, bu işlemdeki işlemsel bilgi, klasik biçimde alt alta yazılarak çarpma işlemini yapabilme veya 21'i onluk ve birliklerine ayırarak çarpma işlemi yapabilmedir (Van de Walle vd., 2016: s.24).

Pulaski (1971), geleneksel öğretim yöntemlerinin kavramları anlamlandırarak öğretmek yerine, onların dışsal ve formel yapısıyla ilgilendiğini söylemektedir. Kavramlar herhangi bir somutlaştırma yapılmadan kazandırılmaya çalışıldığında, yapılan bu öğretim soyut ve anlamsız hale gelebilmektedir (Akt. Ercan, 2010: s.20).

Geleneksel öğretim yöntemleriyle kavramlar daha çok onlara ait özellikleriyle tanımlandığından soyut nitelikli kavramlar zor öğrenilmektedir (Nakiboğlu, 1995, Akt. Ercan, 2010: s.4). Matematiksel bilgiyi, öğrenciye kavramsal düzeyde doğrudan göstermenin mümkün olmadığını söyleyen Van de Walle vd. (2016: s.24-25); kavramsal anlamadan uzak bir şekilde yapılan işlem öğretiminin, öğrencilerin hata yapmasına ve matematikten soğumasına neden olabileceğini belirtmektedir. Kavramları anlamlandırarak öğrenemeyen bireyler çoğunlukla hatırlama aşamasında kalırken anlamlandırarak öğrenen bireyler nesne, olay, fikir, davranışların ve olayların ortak yönlerini soyutlayabilmekte, kavramların benzeyen ve benzemeyen yönlerini tespit edebilmektedir (Alkan ve Altun,1998: s.9-12).

Yapılandırmacı yaklaşımın önemli teorisyenlerinden biri olarak kabul edilen Bruner'e (1966: s.35-38) göre bir bilginin anlaşılabilir, hatırlanabilir ve yeni bir duruma kolaylıkla uyarlanabilir olması o bilginin yapılanma biçiminin öğrenilmesiyle sağlanabildiğinden, o bilginin yapısı ve içeriği kadar öğrenilme şekline de önem verilmesi gerekir. Bruner'e (1966: s.8-16) göre birey içinde bulunduğu gelişim dönemine göre kavramları üç şekilde öğrenebilmektedir. Bu dönemler aşağıdaki şekilde açıklanmaktadır:

- Eylemsel dönem: Eylemsel dönemde çocuk duyu organlarının hepsiyle yaparak yaşayarak öğrendiğinden, çocuğun somut nesnelerle iç içe olması önem kazanmaktadır.
- İmgesel dönem: İmgesel dönemde görsel hafıza daha etkin olduğundan çocuk, resim, fotoğraf gibi görselleri algılama biçimiyle zihninde şekillendirebilir ve nesneleri zihninde canlandırabilir.
- Sembolik dönem: Sembolik dönemde birey herhangi bir somut nesneye ya da görsele ihtiyaç duymadan, ilgili konuyu alana özgü dil ve sembollerle öğrenebilmektedir.

Olkun ve Uçar (2014: s.14), Bruner'in ortaya koyduğu gelişim dönemlerine göre *2 + 3* işleminin öğretimini aşağıdaki şekilde açıklamaktadır:

- Eylemsel dönemdeki çocuk, iki ve üç nesneden oluşan kümeleri bir araya getirerek saydığında beş nesne olduğunu anlayabilir.
- İmgesel dönemde, aynı işlemi nesne olmadan resimler aracılığıyla yapabilir.
- Sembolik dönemde ise $2 + 3 = 5$ şeklindeki matematiksel sembollerle bu işlemi zihninde yapıp gösterebilir.

Yukarıdaki örnekten de anlaşılabileceği gibi, Bruner (1966: s.42-58) kavram öğretiminde üç aşamalı bir süreç önermektedir: somut materyal kullanma (eylemsel aşama), grafikle veya çizimle gösterme (imgesel aşama) ve sembollerle gösterme (sembolik aşama). Bruner bu durumla ilgili bisiklete binmeyi öğrenen bir çocuğu örnek vermektedir. Bisiklete binmeyi öğrenecek bir çocuk imgelerle değil uygulamalar yaparak öğrenir; ancak uygulamaya geçmeden önce çocuğun zihninde bisikletle ilgili ön bilgilerin ve imgelerin olması da gerekmektedir. Bruner, ayrıca, bireylerin içinde bulunulan gelişimsel dönem fark etmeksizin, eylemselden semboliğe doğru sunulan bütün bilgilerin öğrenebileceğini savunmaktadır (Anabritannica, 1994: s.390); diğer bir deyişle öğretim bu sırayla yapıldığında daha anlamlı ve kalıcı olabilir. Sadece çocuklar değil yetişkinler de gündelik (araba sürme, kayak yapma vs.) ve mesleki (cerrah ve sporcuların eylemsel döneme, ressamların imgesel döneme dönmesi gibi) etkinlikleri öğrenirken bu süreçlerden geçmektedir (Bruner, 1966).

Bruner'in görüşlerine benzer şekilde kavramların öğretilmesinde *aşamalılık* ilkesini öne çıkaran Piaget'in *"Öğrenciler, özellikle küçükler, en iyi somut etkinliklerden öğrenir."* sözü eğitim hakkındaki en önemli önerilerinden biri olarak kabul edilmektedir (Olkun ve Uçar, 2014: s.8). Söz gelişi, soyut kavramlardan biri olan sayılar, çocuklarda ilk olarak somut bir anlayışla gelişmektedir. Piaget, küçük yaşlardaki çocukların kavramları sadece fiziksel bilgi olarak algıladıklarını, dört sayısını nesneden ayrı anlayabilmesinin (dört elma gibi) ve bu kavramları fiziksel bilgiden ayrıştırabilmesinin ilerleyen yıllarda gerçekleşebileceğini belirtmektedir (Kamii, Lewis ve Kirkland, 2001: s.22-23; Özdemir, 2008: s.362-363). Öte yandan, çocuklar sayıları sözel olarak gelişigüzel sayabilse bile, bu durum nesne gruplarıyla ilgili sorularda başarılı olacaklarının bir göstergesi olarak kabul edilmemektedir

(Olkun, Fidan ve Özer, 2013: s.246). Brownell (1972) sayı sayma ve diğer aritmetik becerilerinin, matematiksel nesnelerle yapılan eylemlerle, diğer bir deyişle somut tecrübelerle gerçekleştiğini belirtmektedir (Akt. Ercan, 2010: s.22). Bireyler somut nesnelerin kullanılmasıyla gerçekleşen öğrenme deneyimleri sayesinde sayı kavramını kendi zihinsel faaliyetleriyle kazanabilmektedir (Piaget, 1973: s.249-261).

Görüldüğü gibi, küçük yaştaki çocuklar, matematiksel kavramları öğrenebilmek için bulundukları dönem özelliklerine bağlı olarak materyallerin ve çizimlerin olduğu anlatımlara ihtiyaç duymaktadır. Yapılandırmacı anlayışa göre, somutlaştırılarak yapılan öğretim sayesinde soyut kavramları anlamakta zorlanan öğrencilerde olumlu gelişmeler yaşanabilir (Baykul, 2009: s.49-56). Materyaller, soyut bilgileri somutlaştırdığından (Körükcü, 2008: s.73-79), öğretim ortamlarında eğitsel materyallerin bulunması; araştırma, sorgulama ve uygulama yapılabilmesi açısından olumlu etki yaratmaktadır. Öğrenciyi merkeze alan zengin öğrenme ortamları sağlanarak ilgili konu öğrencilere sevdirilebilir ve konu hakkında tartışma ortamları oluşturulabilir (Tutak, 2019: s.42-46). Somutlaştırılarak yapılan eğitim süreçlerinde, öğrencilerin birbiriyle olan fikir alışverişleri ve değerlendirmeleri sayesinde gelişim hızları ve öğretimin niteliği artabilir (Olkun ve Uçar, 2014: s.8), öğrencilerin derse karşı motivasyon ve tutumları da olumlu yönde etkilenebilir (Thompson, 1992: s.144-146).

Gerçek hayatta karşılaşılan birçok matematiksel problemin çözümünde yer alan somut nesneler, en basit şekilde sayma etkinliği yaparken parmakları kullanmak olabildiği gibi daha eski zamanlarda deri, kemik vb. materyaller de olabilmektedir (Gökmen, 2012: s.16-17). Ogg (2010) antik uygarlıklardaki bu hesaplamaların, kil veya tahtadan yapılan bir tepsi üzerine serilen ince bir kum tabakasına yapılan çizimlerle gerçekleştiğini söylemektedir. Hesaplama tahtasını geliştiren Antik Romalılar döneminde ise ilk abaküs icat edilmiştir (Akt. Uzun, 2019: s.26). Günümüzde ise matematik öğretiminde sayma pulu (çubuk, taş, karton vb.), kesir takımları, geometrik cisimler vb. gibi somut materyaller kullanılmakta (Van De Walle vd., 2016) hatta 3D yazıcı kalem teknolojisiyle matematik öğretiminde uygulamalar da yapılabilmektedir (Çopur ve Türkdoğan, 2021).

Piaget’e (1952) göre somut materyallerle yaşanan tecrübeler, matematiksel kavramların öğretiminde bir ihtiyaçtır (Akt. Şengül ve Körükcü, 2012: s.489-508). Matematik öğretiminde kullanılan somut materyaller; bilgiyi basitleştirebilmekte, daha anlaşılır hale getirebilmekte (Baykul, 2004: s.256), bireysel olarak düşünebilmeye teşvik edebilmekte ve problemlerin çözümüne yönelik farkındalık geliştirilmesini sağlayan farklı stratejiler kazandırabilmektedir (Kelly, 2006: s.184-193). Somut materyaller matematik dersinin somutlaştırılarak anlatılmasını, matematiksel fikirlerin farklı temsillerle eşleşmesini ve bu temsiller arasında bağlantı kurulmasını sağlamakta (Clements, 1999: s.45-60) ve dersin anlaşılması kolaylaştırmaktadır (Moyer, 2001: s.175-197). Öğretmenlerin derslerde kullandığı somut materyaller, öğrencilerin matematik dersindeki başarılarını (Aydoğdu, Erşen ve Tutak, 2014: s.179-181), matematiksel düşünme biçimlerini (Stein ve Bovalino, 2001) ve matematik dersine karşı tutumlarını (Gürbüz, 2007) olumlu yönde etkileyebilir.

Öğrencilerin matematik derslerindeki başarılarının artmasına ve derse karşı olumlu tutum geliştirmelerine etki eden somut materyallerin; öğrenme anında aktifleşen duyu sayısını arttırma, kalıcı öğrenmeye yardımcı olma, bireysel öğrenme ihtiyacını karşılama, dikkat çekme, hatırlamayı kolaylaştırma ve soyut şeyleri somutlaştırma gibi katkılarının da olduğu belirtilmektedir (Yalın, 2012, Akt. Kocaman Bayındır, 2015: s.17-18). Ayrıca somut materyaller, öğretmen ve öğrencilerin problem çözerken yaşadığı sorunlara yardımcı olduğu gibi modelleme yapabilme ve algoritma kullanabilme becerilerini geliştirerek, problem çözümünde ortaya çıkan çözüm örüntülerinde bulunan değişiklikler arasındaki ilişkiyi anlama ve matematik öğretiminde yer alan işlemlerdeki bazı işaret ve sayılara anlam yükleyebilme olanağı sağlamaktadır (İnan, 2006: s.47-56). Örneğin; *4x3=12* işleminin çözümü; *her birinde üçer adet bulunan 4 grubun hareketine (manipülasyonuna) bağlı olan 12 adet düğme, taş, kalem gibi* nesnelerle yapılabilmektedir (Fennema, 1972: s.635-640). Görüldüğü gibi matematik öğretimindeki bazı somut materyaller, matematiksel hesaplamalarda yer alabilen bazı nesnelerin manipülasyonuyla kullanılabilir.

Vural (2004), kavram ile materyal arasındaki ilişkiyi görmeyi sağladığından, model ve nesne gibi görsel- işitsel öğelerle yapılan öğretim uygulamalarının, matematiksel olaylarla ilgili açıklamalar yapmada etkili olduğunu ifade etmektedir. (Akt. Çekirdekçi, 2010: s.44). Bu amaçla öğrenciler için somut öğrenme sağlayacak araç-gereçlerin olduğu çoklu öğrenme ortamları tercih edilmelidir (Uysal Koğ ve Başer, 2011: s.89-108). Bu araç-gereçler; nohut, fasulye, kibrit, düğme, boncuk, iplik parçaları gibi sıradan materyaller ya da sandalye, tahta gibi sınıf ortamındaki nesneler olabilmektedir (Baykul, 2009: s.102). Ayrıca, öğretim esnasında kullanılan materyallerle ilgili yapılan *sözlü açıklamalar*, konuyla ilgili kavramlara ait kuralların öğrenilmesini de sağlayabilmektedir (Nakahara, 2008: s.8).

Öğrencilerin, derslerde aktif bir şekilde rol almasını sağlayan en önemli etmenlerden biri olan öğretmenler, matematiksel kavramları öğretirken zihinde gerekli oluşumlar için rehberlik edebilmeli ve öğrencinin öğrenme işini kendisinin gerçekleştirmesini sağlamalıdır (Baykul, 2009: s.49-56). Bunu sağlayabilmek için de öğretmenler derslerinde seçtikleri materyalleri doğru şekilde kullanabilmelidir (Çakıroğlu ve Yıldız, 2007: s.275). Olkun ve Uçar'a (2014: s.88) göre dersi anlatan öğretmenin konuyla ilgili bilgisi kurallar bütününden ibaretse ve işlemsel düzeyde kalıyorsa; öğrencilerin de konuyla ilgili kuralları anlamaları yerine ezberlemeleri doğal karşılanmalıdır.

Bruner'e (1966: s.42-58) göre öğretmenler, çocukların öğrenmelerini sağlamak için, somut nesnelerin, materyallerin olduğu, çocukların nesnelerle iç içe ve onları tutarak, dokunarak hissedebileceği öğretim planları/ortamları oluşturmalıdır. Bu sayede çocuklar, zihinlerindeki düşünceyi daha kolay yapılandırabilir. Öğrencilerin gelişimsel özellikleri göz önüne alınarak öğrenme ortamlarının ders kitabındaki imgesel ve sembolik göstergelerle sınırlı kalmaması ve bu göstergelerin yanında fiziksel model, resim, grafik ve sözel ifadelere yer verilmesi bilginin zihinde soyutlaştırılarak yapılanmasına büyük katkı sağlamaktadır (Olkun ve Uçar, 2014: s.14).

1.1.2. Matematiksel Modelleme Becerisi

Model, alışkın olunmayan / bilinmeyen bir durumla önceden bilinen sistemler arasında bağ kurmaya yarayan benzeşimler olarak tanımlanmaktadır (Lehrer ve Schauble, 2003: s.59-70). Model gerçek yaşamda bireylere karmaşık gelen bazı durumların, açık ve anlaşılır olmasına yarayan bir kavram (Lingefjärd, 2007: s.333-340) modelleme ise, bu durumları zihinde kurgulayarak anlamlı hale getirebilme sürecidir (Lesh ve Doerr, 2003: s.62). Model süreç bittiğinde elde edilen ürün, modelleme ise fiziksel, sembolik veya soyut bir şekilde modeli gerçekleştirme işidir (Güneş, Gülçiçek ve Bağcı, 2004: s.35-48; Sriraman, 2006: s.1686-1695).

Matematiksel modelleme Haines, Crouch ve Davis (2000: s.1-10) tarafından, gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin matematiksel bir dille çözümlenip test edilmesindeki döngüsel süreçler olarak tanımlanmaktadır. Bir başka tanıma göre matematiksel modelleme, gerçek hayattaki durumları ve aralarındaki ilişkileri matematiksel anlamda açıklama ve matematiksel örüntüleri açıklama şeklinde ifade edilmektedir (Verschaffel, Greer ve De Corte, 2002, Akt. Tutak ve Güder, 2014: s.182). Blum ve Niss'e (1991: s.37-68) göre matematiksel modelleme, birtakım matematiksel beceriler kullanarak ele alınan durum veya kavramla ilgili çok yönlü problem çözme sürecidir. Diğer bir deyişle, matematiksel modelleme, bir durum ya da olayı matematiksel temsillerle açıklama işidir (Barbosa, 2006; Blum, 2002; Blum ve Ferri 2009; Gravemeijer, 2002).

Lesh ve Doer (2003: s.3-33), gerçek bir durum hakkında yorumlama ve çözümleme yapmaya yarayan matematiksel modelleri, zihindeki yapıları matematiksel bir forma dönüştüren *dış temsiller* olarak tanımlamaktadır. Bu tanıma göre matematiksel modeller, bir nesne ve problem durumunun fiziksel özelliklerinden çok, yapısal kısımlarını ve çalışma ilkelerini açıklamaktadır. İnsanlar günlük hayattaki problemlerini çözmek için bilinçli ya da bilinçsiz bir şekilde modellere başvurabilmektedir (Lehrer ve Schauble, 2007: s.59-70). Matematiksel modelleme birtakım aşamalarla gerçekleştirilen bir süreçtir. Lingefjard'in (2004: s.1-18), Mason'dan (1988) uyarladığı matematiksel modelleme sürecindeki sekiz aşama aşağıdaki gibidir:

1. Basitleştirici varsayımlar yapma,
2. Hedefi belirginleştirme,
3. Problemi formüle etme,
4. Değişkenleri, parametreleri ve sabitleri atama,
5. Matematiksel ifadeleri formüle etme,
6. Bir matematiksel model seçme,
7. Grafik gösterimleri kullanma,
8. Gerçek hayat durumuyla karşılaştırarak kontrol etme.

Polya (1945) matematiksel bir problemin çözümünde bazı aşamalardan bahsetmektedir. Bunlar:

1. Problemin anlaşılması,
2. Problemin çözülmesi için bir plan yapılması,
3. Çözüm planının uygulanması,
4. Sonucun doğrulunun kontrol edilmesidir (Akt. Ural ve Ülper, 2013: s.218).

Ural ve Ülper (2013: s.218), matematiksel bir problemin çözümündeki aşamaların matematiksel modelleme becerileriyle paralellik gösterdiğini söylemektedir. Özetle, gerçek hayat durumlarıyla ilgili problemleri, belirli bir anlam bütünlüğü içerisinde çözmeyi ve açıklamayı sağlayan matematiksel modelleme becerisinin bir süreç olduğu ve bu süreçte gerekli olan bazı aşamaların olduğu söylenebilir. Matematiksel modelleme sayesinde, öğrenciler matematiksel anlamları kendi kendilerine oluşturabilmekte ve matematiksel problemleri çözebilmektedirler (Lesh ve Doerr, 2003: s.3-33). Alanyazın incelendiğinde, gerçek hayat durumlarındaki problemin türüne göre matematiksel modellemeyle ilgili çeşitli sınıflandırmaların yer aldığı görülmektedir. Matematiksel modellemeyle ilgili, birbirlerinden kesin sınırlarla ayrılmayan, bu sınıflandırmalardan biri Kaiser ve Sriraman (2006: s.302-310) ve Bukova Güzel, Tekin-Dede, Hıdıroğlu, Kula-Ünver ve Özaltun-Çelik (2016: s.12-16) tarafından altı başlıkta açıklanmaktadır:

a. Gerçekçi/Uygulamalı Modelleme

Gerçekçi/ uygulamalı modelleme, dünyayı anlamak için gerçekte var olan sorunlara ilişkin çözümler ortaya koymayı amaçlamaktadır. Bu modellemenin açık uçlu gerçek yaşam problemlerine çözüm bulabilen insan gücünü ortaya çıkardığı belirtilmektedir.

b. Bağlamsal Modelleme

Bağlamsal modelleme, bir konudaki sözlü, yazılı, grafik, materyal gibi modellerle çeşitli psikolojik yaklaşımları ortaya koymaktadır. Diğer bir deyişle, ele alınan konudaki öğrenci gelişiminin sağlanmasında, öğrenciyi motive eden psikolojik kavram geliştirme alanındaki bulguların dikkate alan bir modellemedir. Bu modellemenin temel hedefi, model oluşturma etkinlikleri sayesinde zengin öğrenme ortamlarının yaratılması yoluyla deneyimler sağlamaktır.

c. Bilişsel Modelleme

Bilişsel modelleme, araştırma hedefleri ve psikolojik hedefler olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Araştırma hedefleri modelleme sırasında gerçekleşen bilişsel süreçlerin anlaşılmasıyla ilgilidir. Psikolojik hedefler ise modelleri zihinsel imge veya fiziksel resim biçimde kullanarak soyutlama veya genelleme gibi zihinsel süreçlerle ilgili matematiksel düşünmeyi teşvik etmektedir. Diğer bir deyişle, bilişsel modelleme, modelleme sürecindeki bilişsel imge ve yapıları açıklamaya odaklanmaktadır. Bilişsel modellemenin temel amacı öğrencilerin süreçteki olası yaklaşımlarını detaylıca tanımlama ve varsa eksiklikleri ve/veya zorlukları ortaya çıkarmaktır. Bilişsel imge ve yapıların ortaya çıkarılmasıyla öğretmenler, öğrencilerinin hangi bilişsel süreçlerde zorlandıklarını anlayarak uygun öğrenme ortamları yaratabilirler.

d. Sosyo-kritik Modelleme

Sosyo-kritik modelleme, gerçek yaşam durumlarındaki kuralları veya kabulleri eleştirel bir şekilde ele almaktadır. Bu modellemede, problemin tam olarak çözülmesinin yanında, problemdeki varsayımların ve kuralların değişmesi tartışılmakta, sosyal düzen içerisindeki gerçek yaşam durumları sorgulanmaktadır.

e. Epistemolojik veya Teorik Modelleme

Epistomolojik veya teorik modelleme, matematiksel problemlerin çözümündeki kavram ve teorilerin ortaya çıkarılmasını amaçlamaktadır. Bu modellemenin asıl amacı, var olan, farkına varılmayan veya az karşılaşılan yaşam durumlarındaki matematiksel teorileri ortaya çıkarmaktır. Gerçekçi modellemeden farklı olarak günlük yaşamda var olup fazla karşılaşılmayan problemleri de ele almaktadır.

f. Eğitimsel Modelleme

Eğitimsel modelleme, matematik eğitimindeki amaçları, öğretimi ve konuya özgü amaçları ön plana çıkarmaktadır. Bu modelleme yaklaşımı, *öğretimsel modelleme* ve *kavram modelleme* olarak iki alt başlıktan oluşmaktadır. Öğretimsel modelleme, öğrenme süreçlerinin yapılanmasına, kavramsal modelleme ise matematiksel bir kavramın tanıtılmasına yoğunlaşır. Eğitimsel modellemede, öğrencilerin temel matematiksel kavramları keşfetmeleri ve yapılandırmaları hedeflenmekte; keşfedilen ve yapılandırılan kavramların uygun modelleme problemleriyle ilişkilendirilmesi sağlanmaktadır. Erbaş, Kertil, Çetinkaya, Çakıroğlu, Alacacı ve Baş (2014: s.1-21) eğitimsel modelleme yaklaşımını, gerçekçi modelleme yaklaşımı ile bağlamsal modelleme yaklaşımının özelliklerini taşıyan karma bir yaklaşım olarak ifade etmektedir. Aztekin ve Şener (2015: s.139-161) Türkiye'de matematik eğitimi alanında yapılan matematiksel modelleme çalışmalarının büyük bir çoğunluğunun eğitimsel modelleme yaklaşımıyla ele alındığını belirtmektedir.

Galbraith (2012: s.3-16) ve Julie (2002: s.1-8) matematiksel modellemeyi *matematik öğretiminde amaç* ve *matematik öğretmek için araç* olarak iki farklı yaklaşım altında ele almaktadır. Matematiksel modellemeyi amaç olarak kullananlar, matematiksel modelleme becerilerini geliştirebilmeyi hedeflemektedir. Matematiksel modellemenin araç olarak kullanıldığı durumlarda ise matematiksel kavramların öğretilebilmesi için bir yöntem olarak ele alınmaktadır (Erbaş vd., 2014: s.1-21). Stillman (2015: s.791-805) matematiksel modellemenin hem öğretimde bir amaç olduğunu hem de kavram öğretimine yönelik bir araç olduğunu belirtmektedir.

Matematik öğretiminin kalitesi için önemli olan matematiksel modelleme (Van de Walle vd., 2016) öğrencilerin matematiksel ifadeleri kavrama düzeylerini geliştirebilir (Blum ve Niss, 1991: s.37-68). Matematiksel modelleme karmaşık ve anlaşılması güç kavramları kolaylaştırmakta (Harrison, 2001: s.419) ve öğrencilerin matematiksel kavramları zihinlerinde yapılandırmasını sağlamaktadır (Niss, 1999: s.1-24; Tutak ve Güler, 2014: s.180-181). Ayrıca matematiksel modelleme, gerçek hayat ile matematiksel kavramlar arasında bağ kurdurarak, matematiğin soyut olan yapısını somutlaştırır. Örneğin; 58 ile 109 arasındaki arasında kaç tane doğal sayı olduğunu bulurken daha küçük sayılarla modelleme yaklaşımından yararlanarak genellemeye varılıp büyük sayılar için aynı çözümleme yapılabilir (Tutak ve Güler, 2014: s.180-181). Genelleme becerisine verilen bu örneğe göre küçük sayı kümelerinden elde edilen çıkarım ile büyük sayı kümeleri hakkında yorum yapılabilir.

Matematiksel modellemenin eleştirel düşünme, soyutlanma ve genelleme becerilerini geliştirdiği uluslararası kuruluşların raporlarıyla da ortaya konmaktadır. Söz gelişi, Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (Ekonomik Kalkınma ve İşbirliği Örgütü) tarafından düzenlenen, 15 yaşındaki çocukların gerçek hayattaki zorlukların üstesinden gelebilmesi amacıyla matematik ve fen okuryazarlığı becerisi kullanma yetenekleri ölçülen Programme for International Student Assesment [PISA] (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı) (OECD, 2013), matematik okuryazarlığı düzeylerinde de modelleme davranışlarının önemine vurgu yapmaktadır. Matematiksel modellemenin PISA gibi uluslararası bir kurumun araştırma konularından biri olduğu düşünüldüğünde matematiksel modellerin Türkiye'deki matematik öğretim programlarında yer alması kaçınılmaz olacaktır (Aztekin ve Şener, 2015: s.139-161). Nitekim MEB (2019: s.59-62) tarafından yayınlanan PISA ön raporunda matematiksel süreçlerin temelini oluşturan iletişim, matematikleştirme, gösterim, akıl yürütme ve kanıt gösterme, problem çözme stratejisi tasarlama, sembolik, teknik dil ve işlemleri kullanma ve matematiksel araçları kullanma becerilerinden bahsedilmektedir. Sözü edilen tüm bu becerilerin matematiksel modelleme becerisiyle ilişkili olduğu görülmektedir.

Alanyazın incelendiğinde matematiksel modellemenin ilkokul yıllarından başlayarak eğitim-öğretim ortamlarında kullanılmasının önemine yönelik birçok araştırmaya rastlanmaktadır. Jones, Langrall, Thornton ve Nisbet'e (2002: s.113-134) göre matematiksel modelleme hayatın her alanında ihtiyaç duyulan *matematiksel süreç becerilerinin* kazanılmasını sağlamaktadır. Matematik eğitiminin öğrenme alanlarında ve öğretim biçimlerinde köklü değişimler gerçekleştiren ve standartlar oluşturan NCTM (2000) matematik öğretiminde beş süreç standardı belirlemiştir. Bunlar: (a) problem çözme, (b) akıl yürütme ve ispat, (c) iletişim, (d) ilişkilendirme ve (e) temsildir.

1.1.3. Matematiksel Temsiller

Temsil kelimesinin anlamı TDK (2021) sözlüğünde birinin veya bir topluluğun adına davranma olarak tanımlanmaktadır. Bike Kalkan'a (2014) göre temsil genellikle, sembol ve örnek anlamında kullanılmaktadır. Duval (2006: s.104) temsilleri, bir dizi işaret ve kurallarla tanımlanan olguların, zihinde yer etmesini sağlayan bir sistem veya süreç olarak belirtmektedir. Temsiller, kavramları ve kavramlar arasındaki ilişkileri bazı zihinsel süreçler yoluyla anlamayı sağlamaktadır (NCTM, 2000; s.67). Janvier' e (1987) göre temsil, nesnelerle ve kağıt üzerinde ifade edilen çeşitli gösterimleri, kişinin zihnine yansıtmaya sağlayan bir terimdir (Akt. Mainali, 2021: s.2-3). Bu tanımlara göre, insan zihnine yerleşmesi amacıyla, *temel anlamından farklı olarak kullanılan her kavram ya da durum* bir temsil olabilir.

Janvier (1987) olgu, sembol, şema ve grafik gibi bireyin zihninde imgesel şekilde oluşan temsilleri, en genel anlamda iç temsiller ve dış temsiller olarak sınıflandırmaktadır (Akt. Mainali, 2021: s.4). İç temsiller, bireyin öğrenmek istediği kavram veya problem durumunu zihinde kurgulamayı sağlayan temsiller iken, dış temsiller bireyin öğrenmek istediği kavram veya problem durumunu somutlaştırmak için kullandığı temsillerdir (Kaput,1989, Akt. İlhan, 2019: s.14). Zhang'a (1997: s.180) göre dış temsiller; sembol, nesne, boyut ve bilgi biçiminde fiziksel olarak çevrede yer alan dış yapılandırmalardır. Cuoco (2001) iç temsillerin tanımlanmasının zor olduğunu ve dış temsillerin zihinde yarattığı imgeler olduğunu söylemektedir (Akt. Mainali, 2021: s.3-4). Zhang'a göre (1997: s.180) göre iç temsiller, dış temsiller gibi fiziksel bir boyutta değildir; iç temsiller, fiziksel olarak somut bir şekilde etkileşimde bulunulan durumlar yoluyla, sinirsel ağlarda oluşan yapılar olarak bireyin zihninde depolanmasını sağlayan imgelerdir. Goldin'e (2018: s.1-4) göre iç temsiller; geometrik nesneler, görsel/ uzamsal yapılar veya hareketler, modeller, problem çözme esnasında kullanılan dil gibi dış temsiller aracılığıyla, bütün matematiksel bilgilerin zihinde kodlanmış halde bulunduğu bilişsel yapılardır. Özetle; dış temsiller, herhangi bir bilgi için yapılan somutlaştırmalar, iç temsiller ise dış temsiller yoluyla bireyin zihnindeki kodlamalar olarak ifade edilebilir.

Matematik öğretimindeki temsiller, matematiksel kavram ve aralarındaki ilişkileri ifade edebilmek için kullanılan resim, işaret, sözcük, grafik, diyagram, manipülatif, grafik, tablo ve sembollerdir (Can, 2014; NCTM; 2021; Van de Walle vd., 2016). Goldin'e göre (2018: s.1-4) matematiksel temsiller; diyagramlar, sayı çizgileri, grafikler, somut nesneler veya manipülatifler, fiziksel modeller, yazılı kelimeler, matematiksel ifadeler, formüller ve denklemler, tasvirler ve bilgisayar yazılımlarından oluşan somut göstergelerden meydana gelmektedir. Goldin ve Shteingold (2001: s.1-19) matematiksel temsilleri; onluk tabanda numaralandırma, biçimsel cebirsel gösterim, sayı doğrusu veya kartezyen koordinat gösterimi, yazı ve konuşma dili; ayrıca, geleneksel matematik semboller, somut materyaller veya bilgisayar tabanlı sistemleri içeren yapılandırılmış öğrenme ortamları ve öğretimde kullanılan benzeşimler (analojiler) olarak örneklendirmektedir. Duval'e (1993: s.126-129) göre matematiksel temsiller, matematiksel kavramların tanıtımında kullanılan işaret ve simgelerden oluşan bir dildir ve matematiksel bilgiler temsiller sayesinde bütüncül anlam içerir. Gerçek hayattaki birçok alanda çeşitli biçimlerde bilgi veren temsiller, bütün veya parçalar arasında (Goldin ve Kaput, 2013: s.398-401) ve farklı matematiksel bilgiler arasında bağ kurdurarak (Keller ve Hirsch, 1998: s.14-16) bilgiyi kazanma fırsatı sağlayan araçlardır.

Matematiksel bilgilerin temsil edilme yolları, insanların bu fikirleri nasıl anladığı ve kullandığıyla ilgilidir (NCTM, 2021: s.4-5). Goldin ve Shteingold (2001: s.2-6) öğrencilerde oluşan iç temsillerin, konuşma ve yazmada kullanılan dile, simgelere, görsellere, mekânsal temsilleri kişiselleştirmelerine ve anlama biçimlerine dayandığını belirtmektedir. İç temsiller, öğrencilerin dış temsilleri nasıl anladığıyla ilgilidir ve temsillerin anlamı, kullanıldığı bağlam veya kullanma biçimine göre değişebilmektedir (Kosslyn, 1980; Palmer, 1977, Akt. Goldin ve Shteingold, 2001). Bu nedenle, matematik öğretmenlerinin, temsillere kendi yükledikleri anlamdan ziyade, öğrencilerde gelişen iç temsil anlayışlarını önemsemesi gerekir (Kumar, 2020: s.689). Kosslyn ve Palmer bu durumu daha net ortaya koymak amacıyla aşağıdaki örneği vermektedirler:

> *3* rakamı, üç nesneden oluşan bir kümeyi ve bir ölçüm sonucu uzunluğu gösterebilir veya *(-3)* sayısının önündeki eksi işaretinin, bazıları tarafından sayıya ait olduğu düşünülebileceği gibi; *3* rakamının önünde duran herhangi bir işaret, 3' ün zıttı veya olumsuzu olarak algılanabilmektedir. Ayrıca bu sayı, bazı öğrenciler tarafından anlaşılması için farklı modellerle temsil edilmesi gerekebilir. Öte yandan bazı öğrenciler, negatif tam sayı kavramını zihninde oluşturamaz veya bu kavramı anlamsız bulabilir (Akt. Goldin ve Shteingold, 2001; s.5-8).

Örnekte görüldüğü gibi, iç temsilleri oluşturan dış temsillerin anlamı öğrenciler arasında farklılık gösterebilir (Goldin ve Shteingold, 2001). Bireyin kullandığı dış temsiller, onu kullanan kişinin zihnindeki iç temsillerin yansımasıyla oluşmaktadır. Dolayısıyla dış temsiller, diğer bireyler tarafından gözlem, tartışma ve yoruma açıktır (Goldin, 2018: s.1-4).

Matematik eğitiminin doğal bir parçası olan temsiller, kavramları somutlaştırmayı ve öğretim sırasındaki zorlukları azaltmayı sağlamaktadır (Dufour-Janver, Bednarz ve Belanger, 1987, Akt Mainali, 2021). Öğrenciler, matematiksel temsillere dayalı fikirlere erişim kazanır ve matematiksel kavramları veya ilişkileri yakalamak için temsiller oluşturduklarında fiziksel, sosyal, matematiksel olguları/ olayları modelleme ve yorumlama kapasitelerini önemli ölçüde genişleten bir dizi araç edinebilir (NCTM, 2021: s.4-5). Matematik öğretiminde çeşitli şekillerde kullanılan bu araçlar, soyut kavram veya sembollerle birlikte model ve nesne gibi farklı temsiller olarak yer aldığında, öğrenilen kavram ile semboller arasındaki ilişki kurulabildiğinden öğrenme kolaylaşmaktadır (Goldin ve Kaput, 2013: s.398-401). Bir kavram ya da matematiksel yapıyı anlatan birden fazla temsilin olması, matematiği daha ilgi çekici bir hale getirebilmektedir (Dufour-Janver, Bednarz ve Belanger, 1987, Akt. Mainali, 2021: s.2-3). Bu nedenle, öğrencilere kazandırılması gereken temel becerilerin öğretimi esnasında, somut model, şekil, resim, grafik, tablo, sembol gibi farklı temsil biçimlerine yer verilmesi gerekmektedir (NCTM, 2000).

Alanyazın incelendiğinde matematik öğretiminde kullanılan temsillerle ilgili farklı sınıflandırmalarla karşılaşılmaktadır. Janvier (1987; Akt. İncikabı, 2017: s.68) matematiksel temsilleri (a) sözlü tanımlayıcı (metin, sembol ve cümle), (b) tablo, grafik (çizim, resim) ve (c) formül olarak sınıflandırmaktadır. Matematiksel temsilleri bilişsel ve öğretimsel olarak sınıflandıran Miura (2001: s.50-54) bilişsel temsilleri, öğrenciler tarafından matematiksel kavramları anlamaya veya problemlere çözüm bulmaya çalışılırken inşa edilen temsiller; öğretimsel temsilleri ise öğretmenler tarafından derslerde kullanılan temsiller olarak açıklamaktadır. Piaget, temsilleri öğretimde (a) aktif olan semboller (resim, çizim vb.) ve (b) işaretler (sözlü anlatım, yazı dili, sayılar vb.) olarak sınıflandırmakta (Akt. Mainali, 2021: s.7); Bruner (1966: s.8-16) ise bu sınıflandırmayı (a) etkin, (b) ikonik ve (c) sembolik olarak yapmaktadır. Etkin temsiller, eylem yoluyla; ikonik temsiller görselleştirmeyle veya resim ve çizimlerle; sembolik temsiller ise soyut matematik diliyle öğrenme olarak açıklanmaktadır. Bruner'in yaptığı temsil sınıflandırması Lesh (1981) tarafından geliştirilmiş, Nakahara (2008: s.2-9) tarafından da güncel halini almıştır. Bu sınıflandırmaya göre matematiksel temsiller beş başlık altında ele alınmaktadır:

1- Sembolik Temsiller: Matematiksel gösterimlerde yer alan sayı, harf veya simgeler.
2- Dilbilimsel Temsiller: Kavramlar ifade edilirken kullanılan sözlü ifadeler.
3- Görsel Temsiller (açıklayıcı temsiller): Bilgiyi açıklayıcı çizim, şekil, diyagram ve grafikler vb.
4- Manipülatif Temsiller: Öğretime yardımcı olması için özel olarak üretilen sayma pulları, kesir çubukları ve örüntü blokları gibi araçlar.
5- Gerçekçi Temsiller: Gerçek durum veya nesnelere dayalı modeller.

Franzblau ve Warner (2001: s.186-189) ve Goldin ve Shteingold (2001: s.1-19) gerçekçi temsillerden birinin de benzeşimler (analojiler) olduğunu söylemektedir.

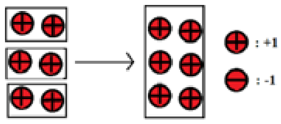
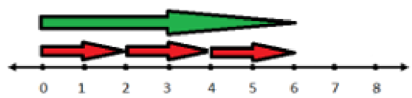
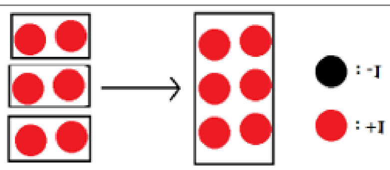
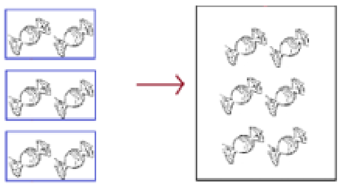
Gentner (1983) matematik öğretiminde gerçek hayata ilişkin örneklendirmelerle yer alabilen benzeşimleri; bilinen ve bilinmeyen kavramlar arasında kurulan benzerlik aracılığıyla, bilinmeyeni anlamada kullanılan bir strateji olarak tanımlamaktadır (Akt. Çetinkaya, Taşpınar ve Özdemir, 2019: s.289). Örneğin; fonksiyonların öğretiminde kullanılan *sonsuz bir caddeyi hayal etme* gibi analojiler, öğrenci kaygısını azaltabilmekte (Franzblau ve Warner, 2001: s.198-199) ve matematiksel kavramların öğretiminde kolaylık sağlayabilmektedir (Bayazit, 2011: s.142). Analojiler (a) basit analojiler; (b) hikaye tarzında analojiler; (c) oyunlaştırılmış analojiler ve (d) resimli analojiler olmak üzere dört başlık altında ele alınabilir (Çetinkaya ve Özdemir, 2018; Harrison ve De Jong, 2003):

a) Basit Analojiler: Bir şeyin doğrudan başka bir şeye benzetilmesidir. Örneğin; kalbin pompaya benzetilmesi.
b) Hikaye Tarzında Analojiler: Bir olayın açıklamasının, başka bir hikayenin olayına benzetilerek yapılmasıdır.
c) Oyunlaştırılmış Analojiler: Anlatılan konunun oyunlaştırılarak yapılmasıdır. Örneğin; bir bitkinin fotosentez yapması olayının, aşçının yemek yapması olayına benzetilerek oyunlaştırılması.
d) Resimli Analojiler: Bir kavram veya olayın açıklamasının resimlerle gerçekleştirilmesidir. Bu analojilerde görsel hafıza devreye girmektedir.

Her temsilin kendine özgü bir anlatım tarzı olduğunu söyleyen Nakahara (2008: s.3-4), sembolik temsilleri kurallarla yönetilen, kısa ve net; dilbilimsel temsilleri, kavramları tanımlayıcı sözler; görsel (açıklayıcı) temsilleri görsel ve sezgisel olarak zengin; manipülatif temsilleri dinamik, biraz somut ve yapay; gerçekçi temsilleri dinamik, son derece somut ve doğal olarak nitelendirmektedir. Lesh (1981) tarafından geliştirilen ve Nakahara (2008: s.2-9) tarafından güncellenen matematiksel temsil sınıflandırmasından esinlenerek hazırlanan, *3x2 işleminin çözümünde* kullanılan matematiksel temsiller Şekil 1'de sunulmaktadır:

Şekil 1

3x2 İşleminin Çözümüne Ait Matematiksel Temsiller

Temsil	Örnek
Sembolik	3x2 = 6
Dilbilimsel	3 kere 2 , 6 eder.
Görsel	 Sayma pulları çizimi  Sayı doğrusu modeli
Manipülatif	 Sayma pulları
Gerçekçi	 Şekerlerle 3x2 işlemi; *Dost: Artı (+) işareti* *Düşman: Eksi (-) işareti* *Dostumun dostu dostumdur.* Benzeşim örneği

Not. Nakahara, T. (2008). Cultivating mathematical thinking through representation. In *Utilizing the representational system. Talk given at the APEC-Tsukuba International Conference (III), Tsukuba, Japan. Retrieved November* (Vol. 17, p. 2019). Esinlenilen.

Şekil 1'deki örneklerde görüldüğü gibi matematiksel bir işlemi bireyin zihninde oluşturmanın beş farklı dış temsil biçimi bulunmaktadır. Verilen temsil örneklerine göre belirtilen toplama işleminin çözümü, gerçekçi nesne veya manipülatif gruplarının bir araya getirilmesiyle ve bu nesnelere ait çizimlerle yapılabildiği gibi matematiksel semboller ve bu sembollere ait dilbilimsel anlatımla soyut biçimde de yapılabilmektedir. Ele alınan kavramın doğasına uygun şekilde kullanılan her temsil, kavramla ilgili bilgilere karşılık gelebilmekte, kavramı ifade ve tasvir edilebilmekte, somutlaştırabilmekte, kodlayabilmekte ve çağrıştırabilmektedir (Goldin, 2003: s.276-278).

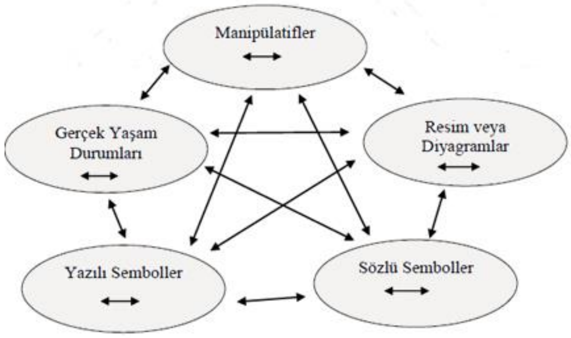
Temsil kavramıyla yapılan öğretimler, bireyin matematiksel olarak düşünmesiyle ilişkili dinamik bir süreçtir (Goldin, 2018: s.1-4). Matematik öğretiminde kullanılan temsiller arasında, birbirinden kesin sınırlarla ayrılamayan bir ilişki bulunduğundan çoklu temsillerin kullanıldığı bir kavram öğretimiyle daha zengin içeriğe sahip öğrenme ortamı oluşturulabilmektedir (Ainsworth, 1999; MEB, 2013; Taşdan ve Çelik, 2015). Her bir temsilin öğretimde kullanılması önemli olduğu kadar farklı temsillerin bir arada kullanılması ve bu temsiller arasında geçiş yapılması da oldukça önemlidir (Ainsworth, 1999; Taşdan, Erduran ve Çelik, 2015).

1.1.4. Çoklu Temsiller ve Temsiller Arasındaki İlişkiler

Çoklu temsil, bir kavram veya durumun öğretiminde kullanılabilen farklı türdeki temsillerin bütünü için kullanılan bir terimdir (Can, 2014; Çetin, 2016). Lesh ve diğerlerinin (1987) *Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving [Matematik Öğrenme ve Problem Çözmede Temsiller ve Temsiller Arası İlişkiler]* başlıklı çalışmasında ortaya koydukları çoklu temsil modeli Şekil 2'de görülmektedir:

Şekil 2

Lesh, Post ve Behr' in (1987) Çoklu Temsil Modeli



Not. Akkuş Çıkla, O. (2004). Çoklu temsil temelli öğretimin yedinci sınıf öğrencilerinin cebir performansına, matematiğe karşı tutumuna ve temsil tercihlerine etkisi. Doktora yeterlik tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara. *Aktaran.*

Şekil 2'de sunulan modelde, bir kavramın gösterildiği farklı temsiller ve bu temsiller arasındaki ilişki ağı görülmektedir. Bu modelde, farklı temsillerin birbiri içinde kullanılabileceği, diğer bir deyişle herhangi bir temsille öğretilen kavramda diğer temsillerden de faydalanılabileceği belirtilmektedir (Çıkla Akkuş, 2004: s.25-26). Goldin'e (2003: s.276- 278) göre temsil sistemleri; işaret, simge ve bunlardan ortaya çıkan dilbilimsel temsil elemanları olmadan neredeyse anlamsız hale gelmektedir. Nakahara'ya (2008: s.1-9) göre manipülatif temsiller problem çözerken dinamik işlemler konusunda, görsel temsiller ise zihindeki kavramla ilgili bilgilerin çağrışımında ve konu bütünlüğü oluşturmada oldukça etkilidir. Ayrıca manipülatif temsiller, gerçekçi ve sembolik temsiller arasında bir bağ kurabilmektedir. Görüldüğü gibi, temsil sınıfları arasında vazgeçilmez bir ilişkinin ve bütünlüğün olduğu; bu sınıfların her birinde özellikle sembolik ve dilbilimsel temsillerin her zaman yer aldığı söylenebilir.

Van de Walle ve diğerleri (2016: s. 27), matematiksel temsillerle ilgili yapılan bazı araştırmalarda, bir problemi çözerken yapılan öğrenci hatalarının, kavramların farklı gösterim biçimleri arasındaki aktarımında yaşanan zorluklardan kaynaklandığını belirtmektedir. Öte yandan çoklu temsil kullanarak öğretime katılan öğrenciler, farklı fikirler üreterek yeni problem durumlarıyla başa çıkabilir (Seufert, 2003: s.235-237). Bir konuda birbirinden farklı biçimdeki temsillerin kullanılması; öğretimde oluşabilecek karmaşayı ortadan kaldırabilmekte, kavramların farklı boyutlarıyla ele alınabilmesini sağlamakta ve temsiller arasında bilişsel bağlantı kurdurabilmektedir (Keller ve Hirsch, 1998: s.3-10). Etkili bir matematiksel düşünme için bir kavramın farklı temsiller arasındaki ilişkisinin anlaşılması gerekir (Goldin ve Shteingold, 2001: s.1-19). Matematik öğretiminde kullanılan çoklu temsiller, kavrama ait farklı gösterimler arasında geçiş yapabilme yeteneğini kuvvetlendirmekte ve kavramın, anlaşılma biçimini ile bireydeki kalıcılığını geliştirebilmektedir (Van de Walle vd., 2016: s. 27). Goldin ve Steingold (2001: s.8) çoklu temsillerin kullanımını bir örnekle açıklamaktadır:

> -*3* sayısı, *3 lira vermek* veya *3 lira borçlanmak* şeklinde ifade edilirse metaforik bir anlam katılabilir ve gerçekçi temsillerle ilişkili bir hale getirilebilir. Böylelikle, sonlu bir kümedeki çoklukların sayılabilmesinden ortaya çıkan sayı kavramının, negatif niceliklerde zıt anlam taşımasına bağlı oluşan karmaşa engellenebilir. Başka bir örnekle; pozitif ve negatif tam sayılar için zıt renklerin temsil ettiği çipler kullanılabilir. Tam sayı öğretiminde (+1) ve (-1)'i temsil eden zıt renkli birer çipin birbirini yok etmesiyle sıfır sayısı ve negatif tam sayılar anlamlı bir şekilde öğrenilebilir.

Goldin ve Steingold'un örneğinde görüldüğü gibi, bir kavram öğretiminde kullanılan farklı temsiller somut bir gösterim sağlayabilir ve öğretimde bazı sorunların yaşanmasına engel olabilir. Ancak, matematik öğretiminde öğrenilen kavramların sayısının artmasıyla, öğrencilerin zihnindeki şemalar karmaşık bir hale gelebilmektedir. Bu karmaşanın oluşmasını engelleyecek olan öğretmenler; çoklu temsillerin bir arada ve doğru bir şekilde kullanıldığı bir ders anlatımı yapmalı ve öğrencilerine de bu uygulamaları yaptırmalıdır (Lesh vd., 1987, Akt. İlhan, 2019: s.13). Çoklu temsillerin kullanılması, ele alınan problemlerin modellenerek anlatılmasını ve matematiksel fikirler arasında anlamlı bir ilişki oluşmasını sağlamaktadır (Tabach, 2001).

Ainsworth'a (1999) göre temsil ve bilgi kaynağı arasındaki ilişki, seçilen temsille bu bilginin inşa edilme biçimine bağlıdır. Ona göre bir kavramın öğretiminde kullanılan çoklu temsillerin üç ana işlevi bulunmaktadır (Ainsworth, 1999: s.134-135):

1. Kavramla ilgili tamamlayıcı bilgiler içermesi ve bilişsel süreçleri desteklemesi.
2. Kavram öğretimi için herhangi bir temsilin kullanımı, diğer temsillerin kullanımındaki olası yanlış yorumları sınırlandırması.
3. Ele alınan konuyu derinlemesine anlamak için kullanılabilmesi.

Çoklu temsiller, matematiksel bir fikrin farklı gösterimlerle belirlenmesini ve ele alınmasını, birden fazla temsile dönüştürülmesini; problemlerin en ideal şekilde ele alınmasını ve çözümlerinin zihne yansımasını sağlayabildiği gibi; bir kavramın benzerliklerini, farklılıklarını, güçlü ve zayıf yanlarını belirleyebilir (Owen ve Clements, 1998: s.202- 203). Ayrıca, matematik öğretiminde farklı temsillerin kullanılması, öğrenmeyi olumlu yönde etkilemekte, öğrencilerin odaklanmasını ve kendilerini ifade etme biçimlerini geliştirmektedir (İlhan, 2019: s.14). Bu nedenle derslerde kullanılacak olan temsiller, matematiksel bir kavram veya durumun öğretiminde aktif bir biçimde ve diğer temsillerle ilişki kurulacak şekilde ele alınmalıdır. Böylelikle, öğretilen kavram veya durum, öğrencilerde anlamlı hale gelebilmektedir (Yıldız, 2019: s.47-49). Ainsworth'a (1999) göre çoklu temsillerin kullanımında dikkat edilmesi gereken bazı önemli noktalar vardır. Bunlar; (a) temsil sayısını süreç ilerledikçe kademeli olarak arttırmak; (b) temsillerle öğrenen bireylerin tecrübelerini ölçmek; (c) yaşanan öğrenme zorluklarında yardım sağlamak; (d) kullanılacak temsilleri en fazla verim alacak şekildeki sırayla kullanmaktır.

1.1.5. Matematik Öğretiminde Çoklu Temsillerin Kullanım Sırası

Matematik öğretiminde çoklu temsillerin kullanılması kadar, bu temsillerin kullanılma sırasının da son derece önemli olduğu söylenebilir. Matematiksel temsillerin kullanılma sırasında farklı görüşler bulunsa da bu görüşlerin ortak noktası öğretimin somuttan soyuta yapılandırılmasıdır. Bu araştırmada matematiksel temsillerin kullanım sırasına yönelik üç görüşten söz edilmektedir. Bunlar

(a) Concrete- Representational- Abstract [CRA] (Somut-Temsili- Soyut), (b) Representational- Abstract [RA] (temsili- soyut) ve (c) Lesh (1981) tarafından geliştirilen ve Nakahara (2008: s.2-9) tarafından güncellenen matematiksel temsil kullanım sırasıdır.

a. Concrete- Representational- Abstract [CRA] (Somut- Temsili- Soyut) Stratejisi

Concrete- Representational- Abstract [CRA] (Somut- Temsili- Soyut), matematiksel bir kavram veya becerinin öğrenilebilmesi için somut-temsili-soyut sırasıyla hazırlanan bir öğretim stratejisidir (Agrawal ve Morin 2016; Cope, 2015; Gallo- Toong, 2020; Kim, Wang ve Michaels, 2015; Soylu, 2008; Witzel, Riccomini ve Schneider, 2008; Yakubova, Hughes ve Shinaberry, 2016). CRA (Concrete- Representational- Abstract), Türkçe karşılığıyla somut- temsili- soyut stratejisi; öğretimi somut, ikonik ve soyut aşamalara uygun olarak ele alan öğretim stratejilerinden biridir (Şahin ve Soylu, 2013: s.67). CRA' nın, Bruner'in öğrenme biçimleri modeline ve Piaget'in bilişsel öğrenme kuramına dayandığı söylenebilir. Bu stratejide yer alan *somut- temsili- soyut* aşamaları, Bruner'in öğrenme aşamalarıyla, nesnelerle uygulama (etkinleştirme), resimlerle öğrenme (ikonik) ve sembollerle öğrenme (sembolik), örtüşmektedir (Flores, Hinton ve Schweck, 2014: s.172; Flores, ve Franklin, 2014; Yakubova vd., 2016; Witzel vd., 2008). Bruner'e (1966: s.42-58) göre çocuklar; kavramla ilişkili somut bir nesneyle yapılan eylem sonrasında kavrama ait bir görselle öğrenebilmekte ve son aşamada kavramla ilgili soyut düşünebilmektedir.

CRA, manipülatif ve resim, çizim gibi temsili gösterimler yoluyla, matematiksel kavramların ve ifadelerin zihinde soyut olarak şemalanmasını sağlayan bir süreçtir. Bu strateji üç aşamadan oluşmaktadır:

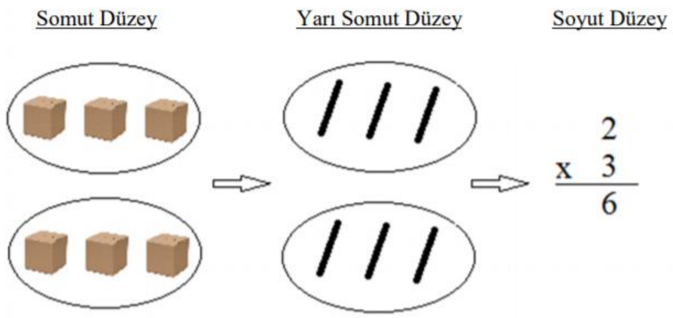
Somut Aşama. CRA stratejisinin ilk aşaması olan *somut* aşamasında öğretilen konuya bağlı olarak, dokunulabilen ve hareket ettirilebilen *manipülatifler* kullanılmaktadır (Flores vd., 2014; Morin ve Miller,1998; Soylu, 2008; Şahin, 2012; Witzel vd., 2008). Manipülatifler, öğrencilerin ders içi aktif katılımını arttırmak amacıyla (Sowell, 1989; Moyer, 2001*)*, somut ve soyut kavramlar arasında kurulan ilişkiler sayesinde, matematik öğretiminde kullanılan *öğrenme nesneleridir* (Clements, 1999). Bu nesnelerin kullanım şekli öğretmen tarafından verilen yönergeler sayesinde yapılan uygulamalarla gerçekleşmektedir (Flores vd., 2014: s.172). Araştırmada ele alınan konulardan biri olması nedeniyle manipülatiflere bir sonraki bölümde daha kapsamlı olarak yer verilmiştir.

Temsili Aşama. Temsili aşaması yarı somut veya resimlendirme olarak da ifade edilebilir. Bu aşamada öğrenciler, öğrenilmesi gereken kavram veya beceriyi somutlaştırdıktan sonra, ilk aşamada kullandıkları manipülatiflerin yerine bu materyalin resimsel temsillerini çizerek aynı konu üzerinde çalışmayı sürdürürler (Morin ve Miller,1998; Flores vd, 2014; Soylu, 2008; Şahin, 2012; Witzel vd., 2008). Söz konusu bu temsiller, blokların resmi (Mancl, Miller ve Keneddy, 2012), sanal görseller (Bouck ve Flanagan,2010), halka, kare, çizgi, nokta gibi somut aşamada hareket ettirilen nesnelerin yerine kullanılabilen çizimler olabilmektedir (Thingpen, 2012). Bu öğretim, temsili aşama olmadan gerçekleştirilebilse de kullanılan her temsil soyut düşünmeye geçişi kolaylaştırmaktadır; bu nedenle bu aşama bir bakıma geçiş aşaması olarak kabul edilebilir (Peltier ve Vannest, 2017; Umay,1996: s.146).

Soyut Aşama. Son kısım olan soyut aşamada; matematiksel kavram, beceri ve düşünceler hiçbir manipülatif veya resimsel temsil kullanılmadan, matematiksel semboller ve sayılarla yapılan eğitim faaliyetleri olarak sürdürülmektedir (Flores vd., 2014; Morin ve Miller,1998; Olkun ve Uçar, 2009; Soylu, 2008; Şahin, 2012; Witzel vd., 2008). İlk iki aşamadaki materyal ve çizimlere bağlı yapılan modellemelerle eğitim gören bireyler (Hughes, 2011), artık bu aşamadaki sayı ve sembollere anlam yükleyebilmekte (Mancl, Miller ve Kennedy, 2012) ve tamamen soyut kavramlarla düşünebilmektedir (Carmack, 2011). Şekil 3'te CRA stratejisinin işleyişine ilişkin bir örnek sunulmaktadır (Özlü, 2016: s.33):

Şekil 3

Somut- Temsili- Soyut Öğretim Stratejisinin İşleyiş Süreci



Not. Özlü, Ö. (2016). Zihinsel yetersizliği olan öğrencilere çarpma öğretiminde somut-yarı somut-soyut öğretim stratejisinin etkililiği. Yüksek lisans tezi yeterlik tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bolu.

Şekil 3'te görüldüğü gibi *3x2 işlemi* CRA stratejisinin somut aşamasında 2 grup halindeki 3 nesnenin manipülasyonu ile işlem öğretimine başlanmıştır. Temsili aşamada her nesneyi temsil eden birer çizgi çizilerek bu hesaplama yapılmış, soyut aşamada ise sadece matematiksel semboller kullanılmıştır.

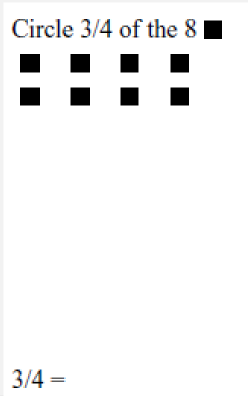
b. Representational- Abstract [RA] (Temsili- Soyut) Stratejisi

Bu öğretim stratejisi CRA stratejisindeki temsili (representational) ve soyut (abstract) aşamalardaki uygulamalarla aynıdır. RA öğretim dizisinde CRA'dan farklı yanı, somut aşamada kullanılan manipülatiflerin bu öğretim dizisinde yer almamasıdır (Butler, Miller, Crehan, Babbitt ve Pierce, 2003; Suh, Lee ve Law, 2020). RA öğretim dizisine göre konu ilk olarak temsili çizimlerle öğrenilir. Soyut aşamada ise çizimler olmadan da ilgili konudaki problemler çözümlenebilir (Butler vd., 2003).

Butler ve diğerlerinin (2003) yaptığı CRA ve RA öğretim dizilerinin karşılaştırılmasıyla ilgili çalışmaya göre; CRA ile RA grupları arasındaki puanlarda istatiksel olarak anlamlı bir farklılık oluşmadığı ortaya çıksa da CRA grubu öğrencilerinin bazı kavramları daha iyi öğrendikleri ve test puanlarının RA grubu öğrencilerine göre daha yüksek puan aldıkları görülmüştür. Butler ve diğerlerinin yaptığı çalışmada kesirler konusunda kullanılan temsili çizim örneğine ait görsel Şekil 4'te sunulmaktadır:

Şekil 4

Temsili- Soyut Öğretim Stratejisi Örneği



Not. Butler, F. M., Miller, S. P., Crehan, K., Babbitt, B., & Pierce, T. (2003). Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences. *Learning Disabilities Research & Practice*, *18*(2), 99-111.

Şekil 4'e göre 8 sayısının ¾' ü görseldeki karelerden bir miktarının seçilmesiyle gerçekleşmektedir. RA öğretim stratejisi sayesinde birey tarafından yapılan çizimlerle ¾ kesrine denk olan kesir bulunabilmektedir. Bu stratejideki uygulamalara göre ilerleyen süreçte şekildeki kareleri bireylerin kendilerinin çizerek düşünmesi istenmekte ve bir süre sonra doğrudan bazı problemlere çözüm üretmeleri istenmektedir.

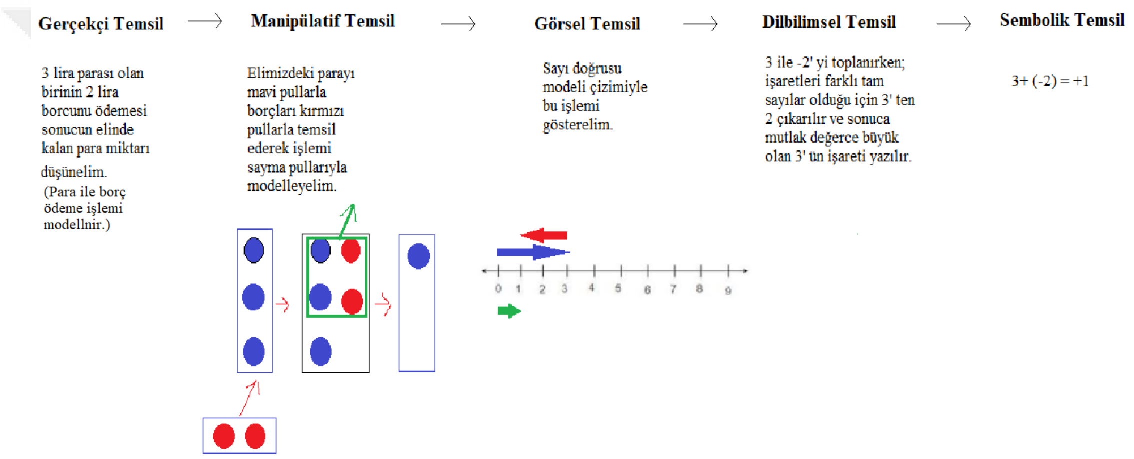
c. Lesh (1981) Tarafından Geliştirilen ve Nakahara (2008) Tarafından Güncellenen Matematiksel Temsil Kullanım Sırası

Bu temsil kullanım sırasının CRA' ya benzer şekilde somuttan soyuta doğru sıralanan yaklaşıma uygun olduğu söylenebilir. Ancak, bu temsil kullanım sırası, CRA stratejisinde yer almayan gerçekçi temsillerin bulunmasının yanı sıra manipülatif (somut) temsillerden sonra görsel temsillerin yer alması gerektiği konusunda CRA stratejisindeki temsil kullanım sırasından farklılaşmaktadır. Nakahara' ya (2008: s.8) göre matematik derslerinde kullanılacak olan temsillerin sırası; (a) gerçekçi temsiller,

(b) manipülatif temsiller, (c) görsel (açıklayıcı) temsiller, (d) dilbilimsel temsiller ve (e) sembolik temsiller şeklinde olmalıdır. Ayrıca, özellikle kavramlar ile uygulanan yöntemlerin sembolik temsillerle eşleştirilmesi son aşamada gerçekleşmelidir. Çünkü gerçekçi ve sembolik temsillerin ilişkilendirilmesi, bu iki temsil arasında yer alan manipülatif, görsel ve dilbilimsel temsillerle sağlanabilir. Nakahara' nın (2008) temsileri kullanım sırasına göre örneklendirilen 3+ (-2) işleminin çözümü Şekil 5'te görülmektedir.

Şekil 5

Nakahara' ya (2008) Göre Temsil Kullanım Sırası Örneği



Şekil 5'e göre 3+(-2) işleminin çözümüne gerçek hayat durumuna bağlı bir örnekle giriş yapılabilir. Gerçek hayatla ilişkilendirilen bu işlemin çözümünün somutlaştırılmasında sayma pulları kullanıldıktan sonra bu çözüm sayı doğrusu modeli çizimiyle yapılabilir. Bu aşamaya kadar işlemin çözüm mantığını somut bir şekilde görülmesi sağlanmakta ve dilbilimsel temsil ifadeleriyle belirtilen kuralın anlamlı şekilde öğrenilmesi sağlanmaktadır. Son aşamada ise bazı sembollerden oluşan sembolik temsillerle bu işlemin çözümü gösterilebilir. Şekil 5' teki işlemin çözüm modellerinde görüldüğü gibi en somut biçimde ele alınabilen temsil biçiminin manipülatiflerle gerçekleştiği söylenebilir.

1.1.6.Matematik Öğretiminde Manipülatifler

Grossnickle, Junge ve Metzner (1951) manipülatifleri, öğrencilerin hissederek, dokunarak ve hareket ettirerek kullanabildiği özel olarak üretilmiş ya da gerçek hayatta var olan nesneler olarak tanımlamaktadır (Akt. Reys, 1971: s.551-558). Bir başka tanıma göre manipülatifler, dokunarak ve hareket ettirilerek manipüle edilebilmesiyle soyut olan matematiksel düşüncelerin somutlaştırılmasına yardımcı olan (Thompson, 1992: s.123-125); dokunma ve görme duyularına da hitap eden materyaller olarak tanımlanmaktadır (Moyer,2001: s.175-197). Benzer şekilde Hartshorn ve Boren (1990: s.1-7) manipülatifleri, matematiksel bir kavramı anlatmak veya kavramın anlaşılmasını desteklemek için dokunularak hareket ettirilebilen nesneler olarak ifade etmektedir.

İlk ortaya çıkışı 1800'lü yıllara dayanan manipülatifler, ilk kez 1837 yılında Alman eğitimci Friedrich Froebel tarafından kurulan ilk anaokulunda, doğadaki bazı örüntü desenlerini tanıtmak amacıyla kullanılmıştır (Uslu, 2014, Akt. Kocaman Bayındır, 2015: s.1). Manipülatifler, 1900'lü yılların başında Maria Montessori tarafından çocuk eğitimi adına geliştirilen ahşap, metal, taş, yün ipek vb. malzemelerle yeni bir anlayış kazanmıştır (Mercan, 2018: s.19). Günümüz teknolojisiyle birlikte manipülatiflerin kullanım biçimi, sanal ortamlardaki bazı çizim, şekil vb. modellemelere dönüşmüştür (Temel Doğan ve Özgeldi, 2018; Pişkin-Tunç, Durmuş ve Akkaya, 2012). Friedrich Froebel tarafından tasarlanan manipülatiflerden biri olan eğrisel bloklar Şekil 5'te sunulmaktadır:

Şekil 6

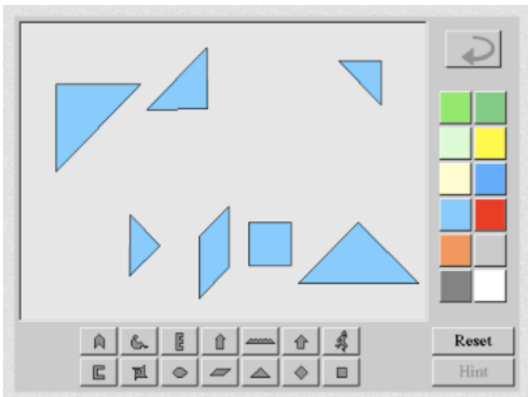
Froebel' in Eğrisel Blokları

Not. Froebel'in eğrisel blok resminin telif hakkı www.froebelgifts.com sitesine aittir.

Van de Walle ve diğerlerine (2016) göre manipülatifler, öğretmen ve öğrencilerin kullandığı soyut kavramları somutlaştırmak amacıyla geliştirilmiş gerçek hayattaki birçok nesne olabilir. Bu nesneler boncuk, fasulye, para ve ölçme araçları olabileceği gibi daha sistematik olan sayma blokları, geometrik cisimler olabilir (Özdemir, 2008: s.362-373). Ayrıca manipülatifler, National Library of Virtual Manipulatives [NLVM] (Ulusal Sanal Manipülatif Kütüphanesi) sitesinde paylaşıma açık olan blok, şema, tangram, grafik vb. şeklindeki sanal içerikler biçiminde kullanılabilir (NLVM, 2021). NLVM'deki tangram örneği Şekil 7'de sunulmaktadır:

Şekil 7

NLVM Tangram Örneği



Not. Tangram örneği resminin telif hakkı NLVM' ye (2021) aittir.

Domino (2010: s.19-25) manipülatiflerin, duyular aracılığıyla kasıtlı ya da kasıtsız olarak öğrenmeyi gerçekleştirmek amacıyla kullanıldığını söylemektedir. Reys'e (1971: s.551-558) göre manipülatifler;

- öğretimde faaliyet çeşitliliğini arttırmak,
- gerçek yaşamdaki problemlere tecrübe oluşturmak,
- soyut zihinsel yapıların somutlaşmasını sağlamak,
- kavram öğretiminde duyuları kullanmak,
- ilişkilendirme ve genellemeye imkan sağlamak,
- etkin katılımı sağlamak,
- bireysel farklılıkları dikkate almak,
- motivasyonu arttırmak amacıyla kullanılabilmektedir.

Manipülatifler, matematiksel kavramların somut ve kalıcı bir şekilde öğrenilmesini sağlamakta (Bozkurt ve Akalın, 2010; Kutluca ve Akın, 2013), geometrik cisimlerin zihinde döndürülme becerisini geliştirmekte (Kadagöl, 2018), matematik başarısına (Şengül ve Körükcü, 2012; Aydoğdu, Erşen ve Tutak; 2014) ve tutumuna (Aydoğdu, Erşen ve Tutak; 2014) olumlu yönde etki etmektedir. Öğrenilen kavram ile kullanılan manipülatif arasındaki temsili ilişkinin kurulmasını sağlayan manipülatifler, bu yönüyle, basit bir ilişkiyi anlamakta zorlanan küçük yaştaki ve daha zor bir ilişkiyi anlamakta zorlanan büyük yaştaki çocuklara yardımcı olabilir (Uttal, Scudder ve De Loache, 1997: s.37-54). Özel öğrenme güçlüğü çekenler de dahil olmak üzere (NCTM, 2000), ilk ve ortaokullarda eğitim gören bütün çocukların matematiksel kavramları öğrenirken manipülatif kullanması bir gereklilik olarak görülebilir (Olkun, 2001: s.181-190). Ayrıca, NCTM de fiziksel model kullanmanın önemini belirtmekte ve manipülatif kullanımına teşvik etmektedir (Hartshorn ve Boren, 1990: s.1-6). Stein ve Bovalino (2001) manipülatifleri kullanmanın, bilginin zihindeki ilk inşasında aktif katılımcı olmayı sağladığını söylemektedir. Manipülatiflerin kullanımı, keşfetme, ilgi ve motivasyonu olumlu etkileyerek matematiksel ifadelere katılabilen ve bunlar hakkında derinlemesine düşünebilen başarılı bireylerin ortaya çıkmasına katkı sağlamaktadır (NCTM, 2008). Çünkü, manipülatiflerle yapılan eğitimlerle gerçekleşen etkileşimler, problem çözümlerinin aşamalı bir şekilde hatırlanmasına yardımcı olabilmektedir. Chiappini ve Bottino (2001) da eğitim esnasında duyusal etkileşim ne kadar artarsa verimliliğin de o kadar artacağını söylemektedir (Akt. Witzel, 2005: s.50). Mercer ve Miller (1992), verimli bir matematik öğretiminin gerçekleşmesi için ilgili konudaki nesnelerle en azından üç tane uygulama etkinliğinin yapılması gerektiğini söylemektedir (Akt. Flores,2010: s.196).

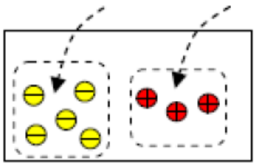
Matematik öğretiminde manipülatiflerin kullanıldığı konulara bakıldığında bunlar; geometride üçgenler (Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015) ve geometrik cisimleri döndürme (Kadagöl, 2018), geometrik cisimlerle hacim hesaplama (Gürbüz ve vd., 2013) ve cebir konuları olabilmektedir (Temel Doğan ve Özgeldi, 2018). Bunların yanında pek çok çalışmaya göre manipülatiflerin kullanıldığı alanlardan biri de sayılar ve işlemlerle ilgilidir (Fennema, 1972; Özlü, 2016). Bu doğrultuda, manipülatiflerin sayılarla ilgili işlemlerde kullanılması etkili bir matematik öğretimi yapılmasını sağlayabilir (Demir, 2016; Gök ve Erbilgin, 2012).

Alanyazın incelendiğinde pek çok çalışmada sözü edilen manipülatiflerin başında sayma pulları gelmektedir (Battista, 1983; MEB, 2019a, 2019b; Lytle, 1992; Van de Walle vd., 2016). Sayma pulları, ilköğretim çağının ilk yıllarındaki sayma etkinlikleriyle kullanılmaya başlayan (Alptekin, 2015), ilerleyen eğitim kademelerinde sayıların bulunduğu basamaktaki değere bağlı olarak farklı büyüklükler biçiminde (Van de Walle vd., 2016) veya bulunduğu basamağı temsil edecek biçimde kullanılabilen (Albayrak, İpek ve Işık, 2006) çeşitli somut materyallerdir. İlköğretim çağında en basit düzeyde sayma etkinlikleri renkli sayma pulları (Van de Walle vd., 2016), sayma çubukları, fasulye, abaküs ve çeşitli geometrik nesneler şeklinde olabilmektedir (Özdemir, 2008).

Temel sayma etkinliklerinden sonra sayma pulları, matematikteki işlem öğretiminde de aktif şekilde kullanılabilmekle birlikte; ortaokul kademelerinde öğrenilen tam sayılardaki negatif olanlarının pozitiflerden ayırt edilebilmesi için farklı renkler biçiminde ve/veya üzerine artı (+) ve eksi (-) işareti yazılarak kullanılabilir (Bozkurt ve Polat, 2011; MEB, 2019a, 2019b; Van de Walle vd., 2016; Battista, 1983; Lytle, 1992). Her iki durumu da örnekleyen Bozkurt ve Polat'ın (2011) çalışmasındaki sayma pulu örneği Şekil 8'de görülmektedir.

Şekil 8

Sayma Pulu Örneği



Not. Bozkurt, A., & Polat, M. (2011). "Sayma Pullarıyla Modellemenin Tam Sayılar Konusunu Öğrenmeye Etkisi Üzerine Öğretmen Görüşleri." Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 10(2): 787-801.

Şekil 8'de görülen sayma pulları tam sayı öğretiminde aktif biçimde kullanılabilir ve alanyazına göre kullanıldığı eğitim kademesindeki konulara göre çeşitli avantajlar sağlayabilir. Sayıların somut bir biçimde anlamlı olarak öğrenilmesini sağlayan sayma pulları, somut işlemler döneminde bulunan öğrenciler için hiç de kolay sayılmayacak olan ileri-geri sayma ve üzerine sayma gibi matematiksel öğrenimlerin geliştirilmesini sağlamaktadır (Van de Walle vd., 2016). Ayrıca, bu materyal ile onluk sayma sisteminin temelindeki kavramlardan biri olan basamak değeri anlamlı bir şekilde öğrenilebilir (Alptekin, İpek ve Işık, 2006). Ortaokul çağlarında da aktif biçimde kullanılabilen bu materyal sayıların miktarının (niceliğinin) kavranmasında avantajlı görülmekte (Van de Walle vd., 2016) ve kullanıldığı gerçek hayat durumuyla birlikte konunun daha anlamlı biçimde öğrenilmesini sağlamaktadır (Battista, 1983; Van de Walle vd., 2016). Şengül ve Körükcü'nün (2012) yaptığı çalışmada, sayma pullarıyla öğrenim gören deney grubu öğrencilerinin daha başarılı olduğu ve öğretimin daha kalıcı hale geldiği görülmektedir.

1.1.7. Türkiye Matematik Öğretim Programlarında Modelleme Becerisi ve Matematiksel Temsiller

1980 yılından sonra tüm öğretim programlarında küresel anlamda yaşanan değişimlerden etkilenen Türkiye'de; 1983, 1990 ve 1998 yıllarındaki öğretim programlarında yenilenmeye gidilmiş ve 2004 yılından sonraki matematik öğretim programında kapsamlı değişiklikler gerçekleştirilmiştir (Korkmaz, 2006; Sezgin

Memnun, 2013). Matematik öğretim programındaki bu değişimlere paralel olan matematik öğretimindeki yapılandırmacı yaklaşım, farklı öğrenme anlayışlarını ortaya çıkarmıştır (Bulut, 2004). Milli Eğitim Bakanlığına bağlı olan Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın [TTKB] 2013 yılında yayınladığı matematik öğretim programında geçmiş yıllardan farklı olarak; öğrenci seviyelerine uygun, derse aktif katılım gerektiren, *gerçekçi*, problem çözme ve *modelleme etkinliklerine* yer verildiği belirtilmektedir (MEB, 2013). Yaşanan bu gelişmelerle, matematiksel kavramların *somut modelli* öğrenmeye yönelik etkinliklerle öğretileceği ve yapılan öğretimlerin öğrenci merkezli öğretim anlayışına uygun olacağı belirtilmektedir. Başka bir ifadeyle, matematik öğretim programı yapılan bu değişikliklerin, NCTM standartlarında da vurgulanan, "Her çocuk matematik öğrenebilir." ilkesine uygun olarak hazırlandığı ifade edilmektedir (MEB, 2009: s.7).

Milli Eğitim Bakanlığı tarafından en son 2018 yılında güncellenen Ortaokul Matematik Öğretim Programında Türkiye Yeterlilikler Çerçevesinde belirtilen sekiz adet yetkinlikten bahsedilmektedir (MEB, 2018a). Bu çerçevede yer alan yetkinliklerden biri olan *matematiksel yetkinlik*, günlük hayatta karşılaşılan problemleri çözebilmek için matematiksel düşünce tarzını geliştirme ve uygulama olarak açıklanmaktadır. Bu yetkinliğin gerçekleşmesi amacıyla, sağlam aritmetik becerisi üzerine inşa edilen süreçteki faaliyetler ve bilgiye vurgu yapılmaktadır. Ayrıca, mantıksal ve uzamsal düşünmeyle birlikte *formüller, modeller, kurgular, grafikler ve tablolarla* sunum yaparak matematiksel yeterlilikleri farklı seviyelerde kullanma becerisi ve isteğinden bahsedilmektedir (MEB, 2018a).

1739 sayılı Millî Eğitim Temel Kanunu'ndaki Genel Amaçlar ve Temel İlkeler doğrultusunda matematik dersi öğretim programında öğrencilerin ulaşması istenilen bazı genel amaçlar bulunmaktadır. Araştırmanın amacı doğrultusunda, bu genel amaçlardan bazıları aşağıda belirtilmektedir:

- Matematiksel kavramları anlayarak günlük hayatta kullanabilmek.
- Matematiksel düşünceleri mantıklı bir şekilde açıklayabilmek ve gerekli terminoloji ile dili kullanabilmek.

- Matematiği anlamlandırarak insan-nesne ve nesne-nesne ilişkisini açıklayabilmek.
- Kavramları farklı temsil biçimleriyle ifade edebilmek (MEB, 2018a: s.9).

Matematik öğretim programının genel amacı ile temel ilkeleri doğrultusunda, sözü edilen matematik öğretimindeki temel beceriler; akıl yürütme becerisi, problem çözme becerisi, iletişim becerisi, ilişkilendirme, duyuşsal beceriler, öz düzenleme yeterlikleri, psikomotor beceriler, bilgi ve iletişim teknolojileri becerileridir (MEB, 2017, 2013). Programdaki bu becerilere bakıldığında birçoğunun birbiriyle ilişkili olduğu söylenebilir. Söz konusu beceriler bu araştırmanın bağlamıyla ilgili olarak incelendiğinde, örneğin; akıl yürütme becerisi için matematiksel modelleme becerisini geliştirmek, problem çözme ve iletişim becerisi için şekil, resim, tablo, materyal vb. temsilleri kullanmak gerekmektedir. Ayrıca, bu temsiller arasındaki materyali kullanabilme ve uygun çizimler yapabilme ise psikomotor becerilerin gelişmesiyle ilişkilendirilmektedir (MEB, 2018a). Söz gelişi, Eğitim Programında iletişim becerisinin geliştirilebilmesi için gerekli olduğu belirtilen alt beceriler (MEB, 2013: s.5) incelendiğinde, bu becerilerin modelleme ve temsillerle ilişkili olduğu görülmektedir:

- Somut model, şekil, resim, grafik, tablo vb. temsil biçimlerini kullanarak matematiksel düşüncelerini ifade etme.
- Matematik ve problemler hakkındaki düşüncelerini açık bir şekilde sözlü ve yazılı ifade etme.
- Günlük dili, matematiksel dil ve sembollerle ilişkilendirme.
- Matematik hakkında konuşma, yazma, tartışma ve okumanın önemini fark etme.

Benzer şekilde, Eğitim Programında ilişkilendirme becerisinin geliştirilebilmesi için gereken alt beceriler ele alındığında (MEB, 2013: s.6), bu becerilerin yine modelleme ve temsillerle ilişkili olduğu görülmektedir:

- Kavramsal ve işlemsel bilgiyi ilişkilendirme.
- Matematiksel kavram ve kuralları çoklu temsil biçimleriyle gösterme.
- Öğrenme alanları arasında ilişki kurma.

- Matematiği diğer derslerde ve günlük yaşamında kullanma.

Matematik dersi öğretim programlarına yönelik yapılan incelemelere göre programlarda yer alan birçok becerinin geliştirilebilmesi, o beceriye ait alt becerilerin veya ilişkili olduğu temel becerilerin gelişimine bağlı olduğu düşünülebilir. Matematik öğretim programının genel amaçları arasında bulunan *Model kurabilecek, modelleri sözel ve matematiksel ifadelerle ilişkilendirebilecektir* cümlesindeki *matematiksel ifadelerin* anlam içerebilmesi *temsillerle* sağlanabilmektedir (Duval, 1993: s.126-129).

1.2. SAYILAR VE İŞLEMLER ÖĞRENME ALANI

1.2.1. Matematik Öğretim Programında Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanı

NCTM standartlarında olduğu (NCTM, 2021: s.1-6) gibi Türkiye Matematik Dersi Öğretim Programında (MDÖP) konular, beş öğrenme alanına ayrılmaktadır. Bu öğrenme alanları; sayılar ve işlemler, cebir, geometri ve ölçme, veri işleme ve olasılıktır. Her öğrenme alanı standardı, bütün sınıf düzeylerine göre uygulanabilen küçük parçalardan oluşmakta ve bu parçalar sınıf düzeylerindeki öğrencilerin bilmesi gereken kazanımları içermektedir (MEB, 2018a). Sayılar ve işlemler öğrenme alanında yer alan konular, sınıf düzeylerine göre aşağıda belirtildiği şekilde yer almaktadır.

- 5. sınıf düzeyinde, doğal sayılarla okuma- yazma ve dört işlem, kesirler ve kesirlerle ilgili basit düzeyde toplama- çıkarma işlemi, basit düzeyde ondalık gösterim ve yüzdeler yer almaktadır.
- 6. sınıfta, 5. sınıfın devamı niteliğinde, doğal sayılarla işlem önceliğini anlatan kazanımlar bulunmaktadır. Ayrıca, doğal sayılarda çarpan ve katlar, üslü ifadelerin tanıtımı, kümeler, tam sayılar yer almaktadır. Tam sayılar konusu ise gerçek hayatla ilişkilendirilerek ilk defa 6.sınıfta ele alınmaktadır. Ardından tam sayılarla karşılaştırma, sıralama, sayı doğrusunda gösterme ve mutlak değerini alma kavramları ve son olarak sayı örüntülerinde istenilen terimi bulma ve cebirsel ifadeleri anlamlandırma yer almaktadır.

- 7. sınıf düzeyinde tam sayılarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleriyle devam eden program, ardından rasyonel sayıları tanımlama, karşılaştırma, sıralama, dört işlem ve dört işlem problemleri; sonrasında oran-orantı, 5.sınıftan daha üst düzeyde yüzdeler, cebirsel ifadelerle işlemler, eşitlik ve denklemler yer almaktadır. Diğer bir deyişle tam sayılar konusuna 6. Sınıfta, tam sayılarla işlemlerin öğretimine ise 7. Sınıfta başlanmaktadır.
- 8.sınıfta ise çarpanlar ve katlardan sonra üslü sayılarda negatif tam sayı kuvveti, kareköklü sayıların tanıtımı ve bu sayılarla işlemler yer almaktadır. Sonrasında ise rasyonel ve irrasyonel sayılardan oluşan gerçek sayılar konusuna yer verilmektedir. Ayrıca, 6.sınıfta temeli oluşturulan cebirsel ifadeler konusu; özdeşlikler, doğrusal denklemler ve eşitsizlikler şeklinde daha kapsamlı bir şekilde yer almaktadır (MEB, 2018a).

Dünyadaki birçok matematik öğretim programda olduğu gibi Türkiye'deki matematik öğretim programında da ilk öğrenilen küme olan doğal sayılar ilkokul matematiğinin en temel konularından biridir (Karaaslan,2015: s.1; Usta, 2018: s.13-24; Yenilmez ve Ata, 2013). Alanyazındaki araştırmalarda doğal sayılar konusunu öğrenmede güçlük yaşayan öğrencilerin, bu konuyu temel alan diğer matematik konularında da sıkıntılar yaşayabileceği (Küçükgencay, 2019: s.46-50; Usta, 2018: s.13-24) ve yeni kavramları öğrenmenin zorlaşabileceği belirtilmektedir (Özdeş, 2013: s.42-43). Matematik öğretim programlarında yer alan ve diğer konuların öğretilmesinde öneme sahip olan sayıların, eğitim kademeleri ilerledikçe daha soyut bir anlam kazandığı görülmektedir (MEB, 2018a; MEB, 2018b). Günlük hayattaki bütün problemlerin çözümünde iki doğal sayının toplamı ve çarpımı karşılık bulurken, çıkarılması ve bölümü her zaman karşılık bulamaz. Örneğin; *3-2=1* iken *2-3=-1*' dir. Bu durum, negatif sayıların varlığını hissettirerek, tam sayıların gerekliliğini ortaya koymaktadır (Baykul, 2020: s.253; Küçükgencay, 2019: s.46-50).

Görüldüğü gibi, günlük hayatta kullanılan doğal sayıların *alacak- borç, derinlik, sıcaklık gibi* birçok alandaki problemlerin çözümünde yetersiz kalması nedeniyle daha geniş bir küme olan *tam sayılara* ihtiyaç duyulmaktadır. (Baykul, 2020: s.253-255). Bu nedenle, Matematik öğretim programında doğal sayılar kümesinin ardından

6.sınıfta ilk kez anlatılan tam sayılar kümesi gelmekte; tam sayılarla işlemlerin öğretimine ise 7. sınıfta başlanmaktadır (MEB, 2018a). NCTM programındaki ve Matematik Dersi Öğretim Programında geniş yere sahip olan tam sayılar (MEB, 2018a; Van de Walle vd, 2016); rasyonel sayı, temel işlemler ve problemler gibi birçok konunun öğretimine temel oluşturduğu için öğrencilere kazandırılması oldukça önemlidir (Baykul, 2009: s.95).

1.2.2. Tam Sayılar

Yaklaşık 2000 yıl önce ortaya çıkan ve çeşitli şekillerde karşılanan gündelik ihtiyaçlar; milattan önce 200 civarında Çinliler tarafından *kırmızı çizgilerle alacak, siyah çizgilerle borç* olarak; daha sonra 17. yüzyıldan önce Hint matematikçiler tarafından negatif sayıları belirtmek için sayıyı yuvarlak içine alma veya sol üst köşesine eksi (-) işareti koyulma şeklinde gösterilmiştir (Albert ve Nelson, 2001, Akt. Baykul, 2020: s.253-255). Matematik dilinin diğer diller gibi düzensiz bir şekilde oluştuğunu söyleyen Carson ve Day (1995: s.2-8), matematikte yer alan *artı (+)* ve *eksi (-)* sembollerinin ilk kez 16. yüzyılda Johann Widmann tarafından yazılan bir ders kitabında ortaya çıktığını söylemektedir. Günümüz tam sayı öğretiminde kullanılan temel kavramlar, mutlak değer ve işaretlerden oluşmaktadır (Baykul, 2020: s.253-255). Bir tam sayının mutlak değeri sıfıra olan uzaklığını, işaretler sayının yönünü göstermektedir (Baykul, 2020: s.253-255; Van de Walle, 2016: s.480-485).

Sayılar ve işlemler öğrenme alanı, okul öncesi dönemden başlayarak ortaöğretimde devam etmekte ve bu süreçte doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı, üslü sayı, köklü sayı ve karmaşık sayı gibi sayılar yer almaktadır (MEB, 2018a, MEB, 2018b). Öğrenciler tam sayılarla, özellikle negatif tam sayılarla, günlük hayatta küçük yaşlardan itibaren karşılaşmalarına rağmen, programdaki buluşmaları çok geç olmakta (MEB, 2018a; Yenilmez ve Bağdat, 2014) ve dolayısıyla, öğrencilerin tam sayılardaki düşünceleri yüzeysel ifadelerle sınırlı kalmaktadır (Ercan, 2010: s.8). Örgün eğitim kapsamında ilk olarak 6. sınıfta geçiş yapılan tam sayılar konusu; bu sayı kümesini tanıma ve sayı doğrusunda gösterme, bu sayılarla karşılaştırma ve sıralama yapma şeklinde öğrenilmekte ve 7. sınıfta ise tam sayılarla dört işlem öğretimiyle devam etmektedir. Tam sayılar konusu, eğitim programında yer alan ünitelerin planlamasında

%17’ lik bir oranla en fazla süreye sahiptir. Tam sayılar konusu 7. sınıftan sonra gelen birçok 8.sınıf konusunda yer almakta (MEB; 2018a) ve lisedeki birçok konuda ağırlıklı olarak kullanılmaktadır (MEB, 2018b).

Tam sayıların öğretimindeki en önemli noktalardan biri, bu konudaki kavramların öğrenilmesi ve sonrasında yer alan kavramlarla ilişkilendirilmesidir (Küçükgencay, 2019: s:46-50). Kavramsal ve işlemsel yönleriyle anlamlı bir şekilde öğrenilmesinin ardından üst eğitim kademelerinde de yer alan tam sayılar (İşgüden, 2008; Whitacre vd., 2018); cebir (Gallardo, 2002; Khalid ve Embong, 2019; Seng, 2010), fonksiyonların ve bir doğrunun noktalarının sürekliliğinin tanımlanması, analitik geometri ile uzaydaki şekillere ilişkin bütün problem denklemlerinin oluşumu ve çözümü (Dönmez, 2002) gibi pek çok alanda yer almaktadır. Ayrıca, zihinde oluşacak bütün sayı kümelerinin arasındaki bağlantıları sağlayan tam sayılar; diğer sayı kümeleriyle birlikte, matematiksel anlamda bir yargıya ulaştırırken, aynı zamanda soyut olan sayı kavramını da somutlaştırabilmektedir (Badarudin ve Khalid, 2008: s.85-94; Kilhamn, 2008: s.30-35). Görüldüğü gibi tam sayılar; bilimsel ve yapısal anlamda matematiğin ve neredeyse matematikteki bütün konuların temelini oluşturmaktadır (Dönmez, 2002; Struik, 2002).

Tam sayıların Türkiye eğitim sistemindeki yerine bakıldığında iki önemli kaynağın temel oluşturduğu görülmektedir. Bunlardan ilki matematik öğretim programıdır; ikincisi ise MDÖP’deki öğrenme alanlarını uygulamak amacıyla kullanılması tavsiye edilen resmi matematik ders kitaplarıdır. Bu nedenle, bu araştırmada, ortaokul matematik öğretim programındaki tam sayılar konusunun kazanımları ve MEB tarafından okullarda kullanılması önerilen 7. sınıf matematik ders kitapları (MEB, 2019a; MEB, 2019b) matematiksel temsiller açısından incelenmiştir

1.2.3. Matematik Öğretim Programında Tam Sayılarla İlgili Kazanımlar

Matematik öğretim programında tam sayılar, 6.sınıfta kavramsal olarak tanınma, karşılaştırma ve sıralama biçiminde başlamakta ve 7. Sınıfta bu sayılarla yapılacak dört işlemin öğretimiyle devam etmektedir. Bu programdaki tam sayılar konusuna ait kazanımlar ve açıklamaları aşağıdaki gibidir (MEB, 2018a).

6.Sınıf

M.6.1.4.1. Tam sayıları tanır ve sayı doğrusunda gösterir.

a) Tam sayılara olan ihtiyacın fark edilmesine yönelik çalışmalara yer verilir.

b) Pozitif ve negatif tam sayıların zıt yön ve değerleri ifade etmede kullanıldığı vurgulanır. Örneğin asansörde katların belirtilmesi, hava sıcaklıkları vb.

M.6.1.4.2. Tam sayıları karşılaştırır ve sıralar.

a) Karşılaştırma yaparken büyük sayının küçük sayıya kıyasla sayı doğrusunun daha sağında olduğu vurgulanır.

b) Tam sayıları karşılaştırma ve sıralamayla ilgili gerçek hayat durumlarını içeren çalışmalara yer verilir.

M.6.1.4.3. Bir tam sayının mutlak değerini belirler ve anlamlandırır.

Mutlak değerin sayı doğrusunda ve gerçek hayatta (asansör, termometre vb.) ne anlama geldiği üzerinde durulur.

7.Sınıf

M.7.1.1.1. Tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapar, ilgili problemleri çözer.

a) Çıkarma işleminin, eksilen ile çıkanın ters işaretlisinin toplamı anlamına geldiğini kavrar.

b) Tam sayıların kullanıldığı asansör, termometre gibi araçlar yatay, dikey sayı doğrusu gibi modellerle ilişkilendirilerek toplama ve çıkarma işlemlerine yer verilir.

M.7.1.1.2. Toplama işleminin özelliklerini akıcı işlem yapmak için birer strateji olarak kullanır.

a) Örneğin 5+7+(-5)=? toplamında sırasıyla değişme, birleşme, ters eleman ve etkisiz eleman özellikleri kullanılarak işlem şu şekilde yapılır: 5+7+(-5) = 5+((-5)+7) = (5+(-5))+7=0+7

b) Toplama işleminin değişme, birleşme, ters eleman ve etkisiz eleman özellikleri ele alınır.

M.7.1.1.3. Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerini yapar.

a) Tam sayılarla çarpma ve bölme işleminin anlamlandırılmasına yönelik uygun modellerle yapılacak çalışmalara yer verilir.

b) Çarpma işleminin değişme, birleşme, etkisiz eleman, yutan eleman özellikleri ile çarpmanın, toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelikleri incelenir.

c) Çarpma ve bölme işlemlerinde 0'ın, 1'in ve -1'in etkisi incelenir.

M.7.1.1.4. Tam sayıların kendileri ile tekrarlı çarpımını üslü nicelik olarak ifade eder.

Kuvvetin tek veya çift doğal sayı olması durumları incelenir.

M.7.1.1.5. Tam sayılarla işlemler yapmayı gerektiren problemleri çözer.

MDÖP'deki kazanımlar ve kazanımlara ait açıklamalarda görüldüğü gibi; tam sayıların öğretiminde harf, sayı ve imge vb. temel matematiksel sembollerin ve bu sembollere bağlı konuyla ilgili kavram ve işlemlerin öğretimini anlatan kurallara yer verilmektedir. Ayrıca, bu kuralların öğretiminde sayı doğrusu modeli görsel temsili ve asansör, termometre gibi gerçek hayat durumları da yer almaktadır.

1.2.4. Matematik Ders Kitaplarında Tam Sayılar

7. Sınıf düzeyinde Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı tarafından onaylanan iki adet resmi matematik ders kitabı bulunmaktadır (MEB, 2019a, 2019b). 7. sınıf matematik ders kitaplarında tam sayılar konusunda yer alan matematiksel temsillerin nasıl yer aldığı Tablo 1'de sunulmaktadır.

Tablo 1

7. Sınıf Matematik Ders Kitaplarındaki Tam Sayılar Konusunda Yer Alan Matematiksel Temsiller

Temsiller		**MEB (2019a)**				
		Tam Sayı Kavramı	**Toplama**	**Çıkarma**	**Çarpma**	**Bölme**
Gerçekçi Temsil	Sıcaklık	√				
	Derinlik/ Rakım	√		-,-		-,-
	Borç-alacak	√		-,-		
	Kar-zarar				+,-	
Sayı Doğrusu	Yatay		+,+ -,- +,-	-,+ -,- -,+	+,-	
	Dikey		-,+			-,-
Sayma Pulları			+,+ -,- +,-	-,+ -,- -,+ +,-	+,-	+,+ -,+
Toplama Cetveli			-,- +,-			
Örüntü Kuralı					+,- -,+	-,-
Temsiller		**MEB (2019b)**				
		Tam Sayı Kavramı	**Toplama**	**Çıkarma**	**Çarpma**	**Bölme**
Gerçekçi Temsil	Sıcaklık	√				
	Derinlik		-,+			
Sayı Doğrusu	Yatay		-,- +,-	-,+		
	Dikey		-,+ +,+	-,-		
Sayma Pulları			+,+	-,- +,- -,+	-,+	+,- -,- -,+

Not: Tabloda yan yana yazılan {+,+/+,-/-,+/-,-} semboller, işlem yapılan sayıların (soldan sağa) işaretlerini göstermektedir. Ayrıca, bu işaretlerin ve √ işaretinin bulunduğu konumlar, ilgili sütundaki işlem türüne göre yatay hizasında belirtilen temsil örneği hakkında bilgi vermektedir. Örneğin; sıcaklık örneği tam sayı kavramında kullanıldıysa √ *işareti* veya günlük hayat örneklerinden *derinlik/ rakım* örneğiyle [-4-(-5)] gibi çıkarma işlemi varsa -,- ile gösterilmiştir.)

Tablo 1’de görüldüğü gibi her iki kitapta da, tam sayılar konusunun öğretimiyle ilgili çeşitli modeller ve günlük hayat örnekleri yer almaktadır. Ancak, tam sayılarla işlemlerde; sayma pulu ve sayı doğrusu modelleri toplama ve çıkarma işlemlerinde yoğun bir şekilde bulunurken, çarpma ve bölmede daha az yer almaktadır. Gerçekçi temsil örnekleri ise diğerleri arasında en az sayıda bulunan modellerdir. Özellikle çarpma ve bölme işlemlerinin öğretiminde kullanılan temsil örnekleri oldukça az sayıdadır. Matematik dersi kitaplarındaki çarpma ve bölme işlemlerinde yer alan model örneklerinin toplama ve çıkarmaya göre daha sınırlı olması, kitaplardaki çarpma ve bölme işlemlerinin öğretimini daha soyut bir biçimde yer aldığının göstergesi olarak kabul edilebilir. Ayrıca, temsil örneklerinin her birinde, işaretlerinde farklılık gösteren bütün işlem türlerinin, söz gelişi (-20): (-5), yer almadığı görülmektedir.

Nitekim, Kar ve Işık’ın (2015: s.84-89) Türkiye ve Amerika Birleşik Devletlerinde yayınlanan matematik kitaplarıyla ilgili karşılaştırmalı araştırmasının sonuçlarına göre; her iki kitapta da günlük yaşam, görsel temsil ve matematiksel cümleler arasındaki bağlantıya vurgu yapıldığı, işlemlerin küpler, çipler, sayı çizgileriyle modellendiği bir anlatım yapıldığı belirtilmektedir. Ancak, Türkiye’de okutulan kitaplarda, Amerika Birleşik Devletlerinde kullanılan ders kitaplarına kıyasla, görsel temsiller ve günlük yaşam örnekleri arasındaki ilişkileri açıklayan sözlü ifadelere daha az rastlanmaktadır. Ayrıca, Türkiye’deki matematik ders kitabında günlük hayattan örneklerle çıkarma işleminin anlatılması yerine; sadece görsel temsiller ile matematiksel cümleler arasındaki ilişkiden bahsedilmektedir. Öte yandan, Amerika Birleşik Devletlerindeki ders kitaplarında tam sayılarla toplama ve çıkarma işleminin kurallarını buldurmaya yönelik yönergeler yer alırken, Türkiye’deki ders kitaplarında bu kurallar doğrudan verilmektedir. Görüldüğü gibi Türkiye’deki matematik ders kitaplarındaki tam sayı öğretimiyle ilgili matematiksel temsil örnekleri çeşitlilik gösterse de günlük hayatla ilişki kurulması açısından yetersiz kaldığı söylenebilir.

1.2.5. Tam Sayıların Öğretimi

İlgili alanyazın, tam sayılar konusunun öğretiminde sadece kurallara dayalı işlem öğretiminin etkisiz kaldığını ve bu nedenle tam sayılar öğretiminin hem kavramsal hem de işlemsel boyutlarıyla bir arada verilmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Tam sayılar konusunun öğretiminde, öncelikle, öğrencilerin doğal sayılar kümesinin yetersiz olduğunun ve negatif tam sayılara ihtiyaç duyulduğunun farkına varması sağlanmalıdır (Altun, 2002). Nitekim 2009 Ortaokul Matematik Eğitim Programında (MEB, 2009), tam sayıların sporda, bilimde, uzamsal ilişkilerde ve sıcak-soğuk, ileri-geri, alacak-borç, kâr-zarar, üstünde-altında, sağında-solunda, kazanmak-kaybetmek gibi sosyal yaşamdaki pek çok alanda yer aldığının gösterilmesinin öğrencilerde olumlu etki yarattığı vurgulanmaktadır. Bell'e (1983, akt. Ercan, 2010: s.8) göre öğrencilerde, tam sayılarla işlem yapmadan önce, negatif sayıların varlığına ve onları anlamladırmaya yönelik bir his oluşmalıdır. Fakat, bunun için önce pozitif tam sayılar öğretilmeli ve sonra negatif tam sayıların gerekliliği öğrenciye hissettirilmelidir (Altun, 2002). Aksi halde, negatif tam sayıları yeni öğrenen bazı öğrenciler, negatif tam sayıların sıfırdan küçük olduğunu anlamayabilir (Kubar ve Çakıroğlu, 2017: s.285-288) ve dolayısıyla *tam sayılarda sıralama* gibi temel sorunlar yaşayabilir (Erdem vd., 2015). Oysaki, pozitif tam sayılardan negatif tam sayılara doğru yapılan öğretim sırasıyla oluşan bağlantılarla bu konu, zihinde anlamlı bir şekilde yer edebilir (Kubar ve Çakıroğlu, 2017: s.285-288).

Tam sayıların alt kümelerinden biri olan negatif tam sayı kavramının anlamlı bir şekilde öğrenilmesi ve işlemlerde yer alan *eksi (-) işareti* ile negatif tam sayının işareti birbirinden farklı olduğunun bilinmesi gerekir (Stephan ve Akyuz, 2012: s.458). *Eksi (-) işareti*, pozitif tam sayıların zıttı olan büyüklüklerin ayırt edilmesinde kullanılabildiği gibi çıkarma işlemi anlamına gelmekte ve aynı zamanda negatif tam sayılar, işlemlerde yön ve nicelik olarak iki anlam taşıyabilmektedir (Carson ve Day, 1995: s.10-11). Kullanıldığı temsil türüne göre tam sayılardaki yön kavramı terslik, nicelik ise çokluk olarak ele alınmaktadır (Van de Walle vd, 2016: s.482). Vlassis'e (2008: s.556-569) göre *eksi (-) işaretinin* üç işlevi bulunmaktadır. Bu işlevler Tablo 2'de sunulmaktadır:

Tablo 2

Vlassis' e (2008) göre Eksi (-) İşaretinin İşlevleri ve Örnekler

İşlev	Açıklama	Örnek
Tekli Fonksiyon	Sayının işareti olması	3 sayısının önüne yazılan eksi (-) ile (-3)' ü oluşturma
İkili Fonksiyon	Çıkarma işleminin işareti olması	4-1 işlemindeki gibi çıkarma işlemi
Simetrik Fonksiyon	Tam sayının toplamaya göre tersini alması	–(–8)'deki gibi toplama işlemine göre tersinin alınması

Tablo 2'de görüldüğü gibi eksi (-) işaretinin tekli, ikili ve simetrik fonksiyon işlevleri bulunmaktadır. Eksi (-) işaretinin işlevlerinin bilinmesi, matematiksel işlemlerin çözümlerinin daha anlaşılır biçimde öğrenilmesini sağlayabilir. Vlassis'e (2008) göre bu işlevleri aktif olarak kullanan ve işlemleri anlayarak çözen öğrenciler daha başarılı olmaktadır. Fakat, bu işlevlerin varlığını bilmek, tam sayılarla işlemlerin etkili bir şekilde çözülebileceği anlamına gelmeyebilir.

Tam sayılar kümesi kavramsal olarak öğrenildikten sonra tam sayılarla sırasıyla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri öğretimi gelmektedir (MEB, 2018a). Tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemiyle ilgili kurallar alanyazına ve MEB ortaokul öğretim programına dayalı olarak hazırlanmış ve Tablo 3'e yerleştirilmiştir:

Tablo 3

Tam Sayılarla Toplama ve Çıkarma İşleminin Kuralları

İşlem	Kural	Örnek
Toplama İşlemi	Öncelikle tam sayıların işaretleri dikkate alınır. *İşaretleri aynı* olan tam sayılar toplanırken, sayıların mutlak değerleri toplanır ve sonucun işaretine tam sayıların ortak işareti yazılır. *İşaretleri farklı* olan tam sayılar toplanırken, mutlak değerce büyük olan tam sayının mutlak değeri, mutlak değerce küçük olanın mutlak değerinden çıkarılır ve sonucun yanına mutlak değerce büyük olanın işareti yazılır (Beyatlı Ak,2019; Erdoğdu, 2019; Fuadiah ve Suryadi, 2019; MEB, 2019a; MEB, 2019b).	(-2) +(-3)=? |-2| + |-3| = 2+3 = 5 Toplanan sayılar negatif olduğu için; (-2) +(-3)=(-5) (-3) + (+2)=? |-3| - |+2| = 3 – 2 = 1 |-3| > |+2| olduğu için; (-3) + (+2) = (-1)
Çıkarma İşlemi	Tam sayılarla çıkarma işlemi yapabilmek için toplama işlemlerini yapabilmek gereklidir (Beyatlı Ak, 2019; Erdoğdu, 2019). Çıkarma işleminde eksilen sayı, çıkan sayının ters işaretlisiyle toplanır (Beyatlı Ak, 2019; Erdoğdu, 2019; MEB, 2019a; MEB, 2019b).	(-4) - (-5) = ? (-4) + (+5) = (+1)

Tablo 3'te görüldüğü gibi toplama ve çıkarma işlemi, bazı sembolik ve dilbilimsel ifadelere bağlı kurallarla öğrenilebilmektedir. Ancak, zaman zaman öğrenciler (Yürekli, 2020) ve öğretmenler (Koç Şanlı, 2018) toplama ve çıkarma işlemindeki bu kuralları ayırt etmeden, yan yana gelen iki eksi (-) işaretini artı (+) işaretine dönüştürerek çözüm yapmakta ve bu işaret dönüşümlerinin iki farklı biçimi vardır. Bunlardan biri *-4-(-5) işlemini; (-4+5)' e,* diğeri ise *(-4)+(+5)* şeklinde toplamaya dönüştürülerek yapılmasıdır.

Etkili bir tam sayılarla işlem öğretimi için kuralların yanında ele alınması gereken kavramsal konulardan biri toplama ve çıkarma işlemlerinin anlamlarıdır. Toplama ve çıkarma işleminin üç anlamı bulunmaktadır: (a) birleştirme, bir bütünü oluşturan parçaların bir araya gelmesi; (b) değişim, başlangıç miktarı üzerinden bir değişiklik (eklenme veya ayrılma) olması durumu; (c) karşılaştırma; iki niceliğin ya da çokluğun kıyaslanması olarak açıklanmaktadır (Fuson, 1992: s.272-279). Van de Walle ve diğerlerine (2016: s.145-146) göre toplama ve çıkarma kavramlarının anlamları aşağıdaki gibi açıklanmaktadır:

- Birleştirme: Birleştirme eylemi başlangıç miktarı, değişim miktarı (toplanan veya eklenen parça) ve sonuç miktarından (değişim olduktan sonraki toplam) oluşmaktadır.
- Ayırma: Ayırma eyleminde, başlangıç miktarı bütün veya en büyük miktar iken birleştirme eylemindeki sonuç ise bütünü verir. Ayırma eyleminde değişimin anlamı, bir miktarın bir başlangıç değerinden ayrılması demektir.
- Parça-parça- bütün: Bu eylem, bir bütüne dönüştürülebilen iki parçanın birleşimidir.
- Karşılaştırma: Karşılaştırma eylemi, iki çokluğun kıyaslanmasıdır.

Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin kurallar alanyazına ve MEB ortaokul matematik programına dayalı olarak hazırlanmış ve Tablo 4'e yerleştirilmiştir:

Tablo 4

Tam sayılarla Çarpma ve Bölme İşlemi Kuralları

İşlem	Kural	Örnekler	
Çarpma-Bölme	Sayıların mutlak değerleri çarpılır veya bölünür. Sonuç işareti olarak çarpanların işaretleri; − Aynı ise sonuç pozitif, − Farklı ise sonuç negatiftir (Çiçek, 2020; Demirören, 2019; Erdoğdu, 2019; Khalid ve Embong, 2019; MEB, 2019a, 2019b; Ünal ve İpek, 2009).	(-5). (-2) = ? |-5| . |-2| =10 İşaretler aynı olduğu için; (-5). (-2) = 10	(+10): (-2)=? |+10| : |-2|= 5 İşaretler farklı olduğu için; (+10): (-2)= -5

Tablo 4'te görüldüğü gibi öğretmenler tarafından tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin kurallar birlikte anlatılmakta; çarpma ve bölme işlemlerindeki sayı ve işaretler ise birbirinden bağımsız olarak ele alınmaktadır. Diğer bir deyişle öğretmenler, işaretlerden bağımsız sayıları çarpmakta ve sayı işaretlerine göre de sonuç işaretini belirlemektedir. Ayrıca, işlemlerdeki sayı ve işaret kurallarının uygulama sırası fark etmemektedir. Etkili bir öğretim için kuralların yanında çarpma ve bölme işlemlerinin anlamlarının da ele alınması gereklidir. Çarpma ve bölme işlemlerinin anlamları aşağıda açıklanmaktadır (Van de Walle vd., 2016: s.154-156):

- Eş- grup: Grupların adet ve büyüklükleri bilinirse çarpma, bunlardan birisi bilinmediğinde işlem bölmedir. Ayrıca bölme durumlarının benzer olmamasıyla birlikte, grup büyüklüğünün bilinmediği problemlerde eşit paylaşım veya parçalara ayırma yapılır. Bütün, her birinin büyüklüğünü belirleyebilmek için belirli sayıda gruba dağıtılır. Öte yandan grup sayısı bilinmiyor ancak eş grupların büyüklükleri biliniyorsa problemler ölçme veya tekrarlı- çıkarma olarak yapılabilir.
- Karşılaştırma: Çarpımsal karşılaştırma problemlerinde, toplama ve çıkarmadaki kıyaslama durumlarında olduğu gibi gerçekte iki farklı küme vardır ve bu kümelerden biri diğerinin kopyası olur. Aslında karşılaştırma, bir miktar ya da çoklukların farkı olabilir.
- Kombinasyon: İki küme arasında yapılabilecek muhtemel ikili eşleşmelerin sayısını saymayı içerir.
- Alan ve diğer ölçümlerin çarpımı: Ölçümlerin çarpımını diğerlerinden ayıran özellik, çarpımın biriminin çarpanlardan farklı olmasıyla ilgilidir.

Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerinde anlamlandırılması gereken konulardan biri, iki negatif tam sayının çarpımının veya bölümünün pozitif olma nedeninin bilinmesiyle ilgilidir. Crowley ve Dunn'ın (1985: s.255) çalışmasındaki iki negatif tam sayının çarpımının pozitif olma nedenini açıklayan bazı işlemler Şekil 9'da görülmektedir:

Şekil 9

İki Negatif Tam Sayının Çarpımının Pozitif Olması

$$\begin{aligned}
(^-4)\cdot(^+3) &= {}^-12\\
(^-4)\cdot(^+2) &= {}^-8\\
(^-4)\cdot(^+1) &= {}^-4\\
(^-4)\cdot(0) &= 0\\
(^-4)\cdot(^-1) &=\\
(^-4)\cdot(^-2) &=\\
(^-4)\cdot(^-3) &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(^-1)\cdot(^-1)\\
&\quad = (^-1)\cdot(^-1) + (0)\cdot(1)\\
&\quad = (^-1)\cdot(^-1) + (^-1 + 1)\cdot(1)\\
&\quad = (^-1)\cdot(^-1) + (^-1)\cdot(1) + (1)\cdot(1)\\
&\quad = (^-1)\cdot(^-1 + 1) + (1)\cdot(1)\\
&\quad = (^-1)\cdot(0) + (1)\cdot(1)\\
&\quad = (1)\cdot(1)\\
&\quad = 1
\end{aligned}$$

Not. Crowley, M. L., & Dunn, K. A. (1985). On multiplying negative numbers. *The Mathematics Teacher*, *78*(4), 252-256.

Şekil 9'da iki negatif tam sayının çarpımının pozitif olma sebebi bir örüntü kuralına ve bazı işlemlere bağlı olarak açıklanmaktadır. Soldaki örüntüyle yapılan açıklama, -4 sayısının 3'ten başlayıp azalarak devam ettiği çarpımların sonucundan oluşmaktadır. Bu örüntüye göre biri negatif diğeri pozitif olan iki tam sayının çarpımdan yola çıkılarak; -4 haricindeki çarpanı birer birer azaltarak yapılan çarpma işlemleriyle, iki negatif tam sayının çarpımının pozitif sonuç olma nedenlerinden biri açıklanmaktadır. Sağdaki bazı işlem ve kurallara göre yapılan açıklamada ilk olarak toplama işleminin etkisiz elemanı olan sıfır sayısı işleme dahil olmakta ve ardından, işlemin sonuç değerini değiştirmeyen bazı eklemeler yapılarak ortak çarpan parantezi kullanılmaktadır. Yapılan anlatıma göre iki negatif tam sayının çarpımının pozitif olma sebebi, bazı kurallara dayandırılarak açıklanabilmektedir.

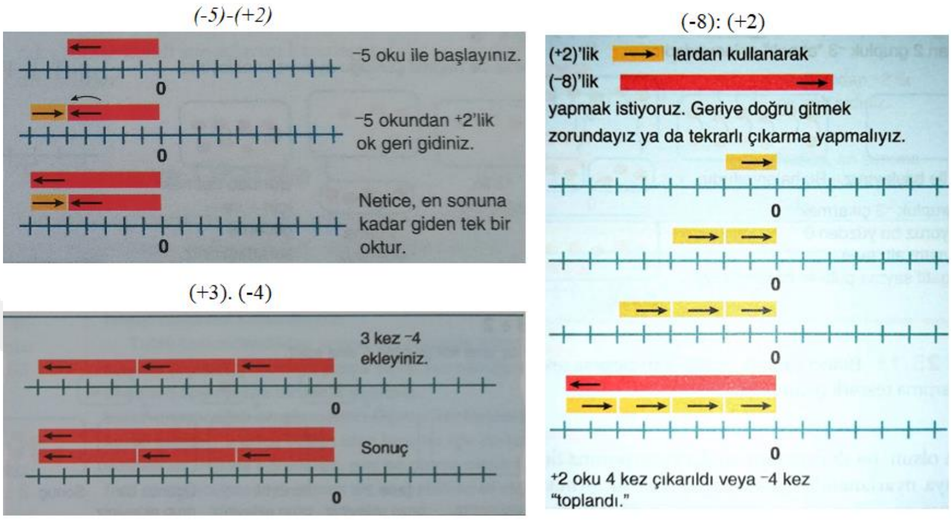
Tam sayılar konusundaki birçok kavram ve bu kavramlarla ilgili işlemler bazı kurallarla açıklanabilse de; sadece kural odaklı temsillere bağlı kalmadan farklı modellerin kullanıldığı uygulamalarla daha etkili tam sayılarla işlem öğretimi yapılabilir (Khalid ve Embong, 2019). Özellikle yön- nicelik ve terslik- çokluk anlamlarıyla karşılaşılan tam sayı öğretiminin; sayma pulu, sayı doğrusu ve gerçek hayat durumu modelleriyle (Erdem vd., 2015; Van de Walle vd., 2016) ve birçok temsilin yer aldığı çoklu temsil anlayışıyla yapılması, bu kavramların anlamlandırılarak öğrenilmesini sağlayabilir (Stephan ve Akyuz, 2012; Kumar vd., 2017). Bu modeller sırasıyla (a) sayı doğrusuyla tam sayılarla işlem öğretimi, (b) sayma pullarıyla tam sayılarla işlem öğretimi, (c) gerçekçi temsillerle tam sayılarla işlem öğretimi ve (d) çoklu temsil anlayışıyla tam sayılarla işlem öğretimidir.

a. Sayı Doğrusuyla Tam Sayılarla İşlem Öğretimi

Tam sayılarla işlem öğretimindeki modellerden biri olan sayı doğrusu, bu konudaki birçok kavramın açıklamasında kullanılabilecek önemli görsel temsillerden biridir (Moreno ve Mayer, 1999: s.215-230). Sayı doğrusu, tam sayıları tanımlarken ve onlarla ilgili işlemleri yaparken, bu konudaki *nicelik ve özellikle yönü* gösterme açısından oldukça kullanışlı bir modeldir (Bozkurt ve Polat, 2011; Liebeck, 1990: s.221-232; Hativa ve Cohen, 1995; Van de Walle vd., 2016). Ayrıca Kumar ve diğerlerine (2017) göre sayı doğrusu modeli, büyük sayılarla yapılacak işlemlerde kullanışlı bir modeldir. Van de Walle ve diğerlerinin (2016: s.482-486) *(-5) - (+2), (+3). (-4)* ve (-8): (+2) işlemlerinin çözümüne ait sayı doğrusu modellemeleri örnek olması açısından Şekil 10'da sunulmaktadır:

Şekil 10

(-5)-(+2), (+3). (-4) ve (-8): (+2) İşlemlerinin Sayı Doğrusunda Modellenmesi



Not. Van De Walle, John A., Karp, Karen S. ve Bay-Williams, Jennifer M. (2016). İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim (Çeviren: Soner Durmuş). Ankara:Nobel Yayın Dağıtım.

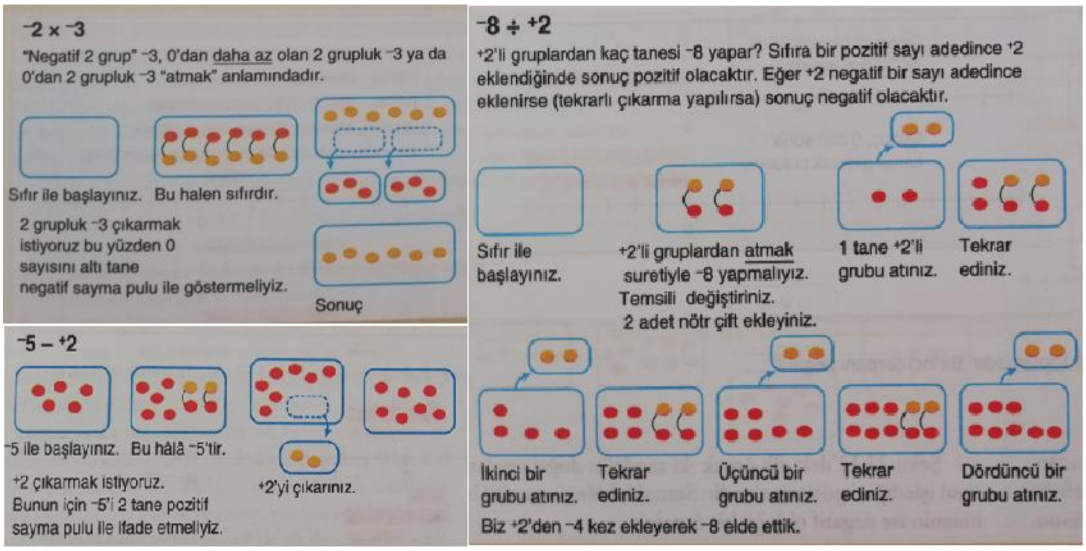
Şekil 10'da görüldüğü gibi sayı doğrusundaki şeritlerin uzunluğu nicelik, üzerindeki oklar ise yönü belirtmektedir. Ayrıca, modelleme örneklerinde çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin kavramsal anlamı temsil üzerinde gösterilmektedir. Görüldüğü gibi, sayı doğrusunda yapılan modellemeler sayesinde yön ve nicelik kavramları somut bir şekilde açıklanabilmektedir. Şekil 10'daki modellemeye benzer bir uygulama biçimiyle Gyampoh, Nyarko ve Agyeman'ın (2020) yaptığı çalışmanın sonucuna göre tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemi yapan öğrencilerin performanslarında olumlu yönde artış olduğu görülmüştür. Ancak, matematiğin anlaşılması için temel bir metafor olduğu söylenilen sayı doğrusu modeli, çıkarma işlemini açıklamada yetersiz kalabilir (Lakoff ve Nunez, 1997: s.21-43). Bu nedenle; *terslik ve çokluk* kavramlarının açıklanmasında sayma pulu modeli öne çıkmaktadır (Van de Walle vd., 2016).

b. Sayma Pullarıyla Tam Sayılarla İşlem Öğretimi

Tam sayı öğretimde kullanılan manipülatif temsilin adı sayma pulu veya nötralizasyon modelidir. En yaygın adıyla sayma pulları olarak ifade edilen bu modeli; Dirks (1984) ile Linchevski ve Williams (1999) abaküs , Maccini ve Ruhl (2000) cebir karoları, Battista (1983) artı (+) ve eksi (-) yükleri, Lytle (1992) ise sarı ve yeşil pullar şeklinde kullanmıştır. Tam sayılarla işlemlerde terslik ve çokluk kavramlarını açıklamada kullanılabilen sayma pulu modeli (Van de Walle vd., 2016), yapılan modellemelerde eklenen ve çıkarılan pul miktarıyla işlemlerdeki değişimi ve sayı işaretlerini somut bir şekilde gösterebilmektedir (Erdem vd., 2015; Kumar vd., 2017; Van de Walle vd., 2016). Ayrıca, Rineck'e (2020) göre *-4-(-7)* gibi mutlak değerce küçük olan tam sayıdan büyüğünün çıkarıldığı işlemlerde sayma pulu modelinin kullanılması, elde olmayan miktarın çıkarılmasını açıklamada oldukça kullanışlıdır. Bazı tam sayı işlemlerinin çözümüne ait sayma pulu modellemeleri örnek olması açısından Şekil 11' de sunulmaktadır (Van de Walle vd., *2016: s.484-486)*:

Şekil 11

(-2). (-3), (-5)-(+2) ve (-8) : (+2) İşlemlerinin Sayma Pullarıyla Modellenmesi



Not. Van De Walle, John A., Karp, Karen S. ve Bay-Williams, Jennifer M. (2016). İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim (Çeviren: Soner Durmuş). Ankara:Nobel Yayın Dağıtım.

Şekil 11'de her kırmızı pul (-1) değerinde, sarı pul (+1) değerindedir. Sayma pullarının farklı renkleri *tersliği*, sayıs*ı ise çokluğu* temsil etmektedir (Van de Walle vd., 2016: s.484-486). Yapılan her farklı sayma pulu modellemesinde, işlemlerin anlamlarıyla birlikte terslik ve çokluk kavramlarının da açıklanabildiği görülmektedir.

Şengül ve Körükcü'ye (2012: s.495) göre sayma pullarını materyal olarak kullanmak yerine, zihinde canlandırmaya çalışmak veya sadece tahtaya çizerek kullanmak; çoğunlukla tam sayıları öğrenmek için çabalamaktan ötesine götüremeyebilir. Ayrıca, tam sayılarla işlemlerde sadece sayma pulu modelinin kullanılması, birer adet artı (+) ve eksi (-) pulların nörtleşmesini varsayımla açıklayabilmektedir (Şengül ve Körükcü, 2012: s.495). Kumar ve diğerlerine (2017) göre tam sayılarla nötrleşme kavramı, sayma pulu modelinin yanında kullanılan borç-alacak gibi bağlamlarla da somutlaştırılabilir. Bu nedenle bu modeli, oyun, borç-alacak (Çevik, 2018) ve kar- zarar gibi gerçekçi temsillerle birlikte kullanmak daha etkili bir öğretim sağlayabilmektedir (Beyatlı Ak, 2019).

c. Gerçekçi Temsillerle Tam Sayılarla İşlem Öğretimi

Gerçek hayat durumlarıyla iç içe yapılması gereken tam sayılara işlem öğretimi (Erdem vd., 2015; Kumar vd., 2017; Stephan ve Akyuz, 2012), öğrencilerin derse karşı olumlu tutum geliştirmesini (Şengül ve Dereli, 2013: s.2509-2534), öğrenci başarısının ve motivasyonun artmasını; hatta bazı öğrencilerin kendi çözüm yollarını keşfedebilmesini sağlamaktadır (Doğan ve Işıtan, 2018: s. 2-7). Tam sayılarla ilgili gerçek hayat durumu örnekleri; asansör, termometre, sıcak hava balonu, deniz seviyesi modeli, yönlü nesneler, borç-alacak, kar- zarardır (Bozkurt ve Polat, 2011; Crowley ve Dunn, 1985; English, 1997; Erdem vd., 2015; Hativa ve Cohen, 1995; Küçükgencay, 2019; Liebeck, 1990; Moreno ve Mayer, 1999; Stephan ve Akyuz, 2012). Ayrıca Kumar ve diğerleri (2017: s.572) gerçekçi temsillere; test puanı, bebek ağırlığı, bilet rezervasyonu, aile bireylerinin boyu, bekleme kuyruğu, gölge uzunluğu, trenle yolculuk, adımlar ve araba hızı gibi örnekleri de vermektedirler. Bunlar arasında yaygın olarak söz edilen *borç- alacak* örneğinde; borç eksi (-) işaretiyle, alacak artı (+) işaretiyle temsil edilmektedir. Bazı çalışmalarda borç yerine ödeme veya harcama, alacak yerine varlık kavramı kullanılmaktadır. Bu temsile ilişkin örnekler aşağıda sunulmaktadır:

- (+7) + (-5) işleminin öğretiminde postacıdan alınan 7 lira ve 5 lira harcamayı gerektiren bir çek örneği kullanılabilir (Altun, 2008).
- 3-7 işleminin öğretiminde, 3 birime sahip olan birinin 7 birim ödemesi gerektiğinde, ödemenin 3 birimlik kısmını yaptıktan sonra 4 birim borcunun kalması örneği kullanılabilir (Kilhamn, 2011: s.21-22).
- –100 – (–50) işlemi, *100 lira borcu olan birinin, borcunun 50 lira azalmasıyla geriye 50 lira daha borcunun kalması* şeklinde daha anlamlı bir biçimde öğrenilebilir. Bu işlemin çözümü bazı öğrenciler tarafından genellikle 100-50 şeklinde hatalı olarak yapılmaktadır (Peled ve Carraher, 2007: s.306-316).
- -155-5 işlemi*, 155 lira borcu olan birinin, 5 lira varlığının alınmasıyla net varlığının -160 lira olması* örneğiyle açıklanabilir. Böylelikle, işlem işareti ile sayı işareti arasındaki ayrım yapılabilmektedir (Stephan ve Akyuz, 2012).
- (-10) işleminin çözümü; 105 lira varlığa ve 100 lira borca sahip olan birini düşünelim. Bu kişinin net varlığı 105-100 işleminden 5 liraya eşittir. Bu kişinin 100 liralık borcundan 10 lirasını eksilttiğimizi düşünürsek; 5- (-10) işleminde net varlığı temsil eden 5 liradan borcu temsil eden 10 lira çıkarıldığında, son durumda 105-90 işlemiyle aynı sonucu gösteren 15 lira net varlığa ulaşılır (Stephan ve Akyuz, 2012: s.436-437) şeklinde örneklendirilebilir.

Son konumdan ilki çıkarılarak *değişim yönünün* anlam kazandığı (Fuadiah ve Suryadi, 2019), yatay veya dikey hareketlere bağlı olarak sayı doğrusunun temel alındığı diğer gerçekçi temsil örnekleri sıcaklık, kat/ asansördür. Bunlar;

- 30^{o}C’ den 16^{o}C’ ye düşen hava sıcaklığı (Altun, 2008) ifadesi bir termometreyle,
- (-4)- (-7) işleminin çözümü dikey sayı doğrusu temel alınarak bir binada -7. kattan -4. kata çıkan birinin hareketiyle veya asansör örneğiyle modellenebilir (Beyatlı Ak, 2019).

Gerçek hayattaki bir kavram veya durumla ilişkili oluşturularak matematik öğretiminde karşımıza çıkan gerçekçi temsillerden biri de benzeşimler, başka bir ifadeyle analojilerdir. Çetinkaya, Taşpınar ve Özdemir (2019: s.295-297) toplama ve çıkarma işlemine ait benzeşimleri *averaj, GTA, tribün*; çarpma ve bölme işlemine ait benzeşimleri ise *kedi- köpek, arkadaş, obur, korkak, kötüler kazanır* olarak açıklamaktadır. Bu benzeşimlere ait açıklamalar aşağıdaki gibidir:

- Averaj benzeşimi ile takımların attığı ve yediği gol sayısına göre hesaplamalar yapılmaktadır.
- GTA benzeşimi ile bir oyundaki karakterin artan veya azalan bazı özelliklerinin hesaplaması yapılmaktadır.
- Tribün benzeşimi ile aynı ya da farklı tribünlerden tezahürat yapan taraftarların ses şiddetine bağlı hesaplamalar yapılmaktadır.
- Kedi- köpek benzeşimi ile köpek artı (+) işaretini, kedi eksi (-) işaretini temsil etmektedir. Bu hayvanların bir araya gelmesiyle aynı türlerin mutlu (+) ortamı, farklı türlerin mutsuz (-) ortamı oluşturması, işlemin sonuç işaretine benzetilmektedir.
- Arkadaş benzeşimi ile iyi insan artı (+) işaretiyle, kötü insan eksi (-) işaretiyle temsil edilerek işlemler yapılmaktadır.
- Obur benzeşimi ile çarpma işlemindeki yutan eleman olan 0 sayısı temsil edilmektedir.
- Korkak benzeşimi ile ise aynı işlemde etkisiz eleman olan 1 sayısı temsil edilmektedir.
- Kötüler kazanır benzeşiminde iyi insanlar artı (+) işaretiyle, kötü insanlar eksi (-) işaretiyle temsil edilmektedir. Bu analojide iyiler ve kötülerin savaşmasından kazananlara göre sonuç belirlenmektedir.

Berber ve Memnun (2018: s.240), Beyatlı Ak (2019: s.72), Çetinkaya ve Özdemir (2018: s.34-35) ve Toluk ve Uçar’ ın (2011: s.97) çalışmalarında bahsedilen bir benzeşim ise *dost-düşmandır*. Bu benzeşimde dost artı (+) işaretiyle, düşman eksi (-) işaretiyle temsil edilerek, işlemlerin sonuç işaretlerinin belirlenmesine yönelik benzetmeler yapılmıştır. Alanyazındaki benzeşimlere bir başka örnek, Küçükgencay’ın (2019) çalışmasındaki tam sayılarla işlemler hakkında *mıknatısların çekme ve itme kuvvetlerine* bağlı olarak oluşturulmuştur. Drama yöntemiyle tam sayılarla toplama işlemi öğretiminin yapıldığı Akyazı’nın (2019) çalışmasında ise sayı doğrusu üzerinde adres bulmaya çalışan bir taksici canlandırılarak, öğrencilere tam sayılarla işlem çözümleri anlatılmaktadır. Akyuz vd. (2012: s.270-280) ise öğrenciler için hazırlanan bir hikayeyle, işaretlerin yan yana geldiği -2-7 ile (-2)+(-7) gibi tam sayı işlemlerinin ayrımının yapılabildiği bir benzeşim kullanmıştır.

Tam sayılarla işlem öğretiminde kullanılan gerçekçi temsiller, görsel modellerle birlikte ele alındığında daha etkili bir öğretim ortamı sağlayabilmektedir. Bazı modellerle ilişkili olarak ele alınan gerçekçi temsil örnekleri, kullanıldığı modellerle birlikte çoklu temsil halinde kullanılabilmektedir. Bu nedenle tam sayılarla işlem öğretiminde çoklu temsil anlayışına yer vermenin önemli olduğu düşünülmektedir (Stephan ve Akyuz, 2012; Kumar vd., 2017).

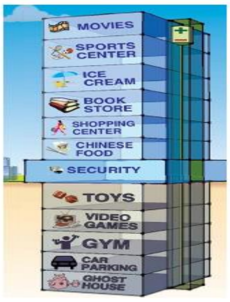
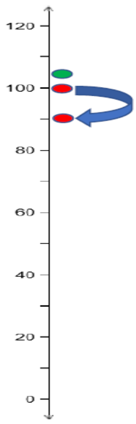
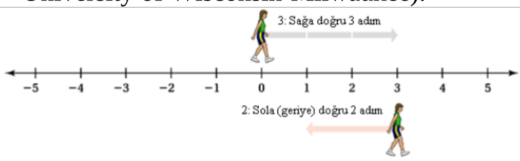
d. Tam Sayıların Öğretiminde Çoklu Temsiller

Tam sayılarla işlem öğretiminde, geleneksel yöntemlere göre daha etkili öğretim ortamı sağlamanın yollarından biri çoklu temsil kullanmaktır (Akyuz,2019; Çetin, 2016). Öğretimde kullanılan çoklu temsiller sayesinde, öğrencilerdeki akıl yürütme becerilerinde oluşacak engeller azalacağından (Fuadiah ve Suryadi, 2019: s.416) ve konuyla ilgili kavram öğretimi kolaylaşacağından (Bolyard ve Moyer- Packenham, 2012; Stephan ve Akyuz, 2012); tam sayılarla işlem öğretiminde çoklu temsillerin kullanılması oldukça önemlidir (Kumar vd, 2017: s.4-5). Örneğin, tam sayıdaki ve işlemdeki eksi (-) işaretinin anlam kazanması için *takımlar arasındaki test puanlarının farkına yönelik* bir etkinlik geliştirilebilir (Kumar, 2020). Öte yandan Altıparmak ve Özdoğan’a (2010: s.33-45) göre *çıkan sayının eksilenden daha büyük olduğu* (*3-7 gibi) işlemlerde*, sonucun negatif olduğu vurgusunun yapılmalı ve işlemlerin öğretimi sadece kuralların açıklanmasıyla sınırlandırılmamalıdır. Kurallara ilişkin açıklamaların yanında kullanılan farklı temsiller, kuralların altında yatan matematiksel fikirlerin kavranmasını sağlayabilmekte ve tam sayının kendisinin de bir değişim olduğunun anlaşılmasını sağlamaktadır (Kumar vd., 2017: s.574-576).

Matematik öğretiminde kullanılan gerçek hayatla ilişkili örnekler ve modeller; somut işlemler döneminden soyuta geçiş yapmakta olan öğrencilerin, tam sayılar konusunu kalıcı ve anlamlı bir şekilde öğrenmesine yardımcı olabilir (Erdem vd., 2015: s.112). Ayrıca, tam sayılarla işlem öğretiminde rol alan çoklu temsiller, kavramsal olarak tam sayıları tanımanın yanında bu konuyla ilgili işlemlerde de aktif olarak kullanılmalıdır (Kumar vd. 2017). Tam sayılarla ilgili alanyazında, çoklu temsil sisteminden oluşan bazı örnekler görülebilmektedir. Bu örnekler Tablo 5'te sunulmaktadır:

Tablo 5

Tam Sayılarla İlgili Çoklu Temsil Örnekleri

Temsil Örneği	Görsel	Açıklama
Alışveriş Merkezi Yukarı: (+) Aşağı: (-)	 *Not*: Kumar, R. S., Subramaniam, K., & Naik, S. S. (2017). Teachers' construction of meanings of signed quantities and integer operation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(6), 557-590.	Alışveriş merkezi modelinde, tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinin çözümü, yukarı ve aşağı yönlü hareketlerle modellenebilmektedir. Bu modelin avantajı başlangıç noktasından 1 birim yukarı ardından 1 birim aşağı hareket edildiğinde, ilk ve son konumun aynı olmasıyla nötrleşme kavramının somut bir şekilde açıklanabilmesidir.
Borç- varlık Borç: Kırmızı nokta Varlık: Yeşil nokta Mavi ok: Borcun azalması	 *Not:* Rineck, L. M. (2020). *A Holistic Developmental Mathematics Course for All Learners* (Doctoral dissertation, The University of Wisconsin-Milwaukee).	Rineck' in (2020: s.52) hazırladığı görsel, borç-varlık kavramlarını ele alarak *5- (-10)* işleminin çözümünde kullanılan çoklu temsil örneğidir. Yapılan bu modellemeye göre kırmızı noktaları temsil eden aşağı yönlü hareketle azalan 10 liralık borç temsil edilmekte ve yeşil ile kırmızı noktalar arasındaki mesafe artarak net varlığın arttığı gösterilmektedir.
Adımlama Sağ: Toplama Sol: Çıkarma	 *3-2* işleminin sayı doğrusu modeli  *3-(-2)* işleminin sayı doğrusu modeli *Not:* Bozkurt, A., & Polat, M. (2011). Sayma pullarıyla modellemenin tam sayılar konusunu öğrenmeye etkisi üzerine öğretmen görüşleri. *Gaziantep University-Journal of Social Sciences*, *10*(2), 803-823. Roper' dan (2007) Aktaran.	Adımlama modeline göre, kişinin yönü işlemin işareti artı (+) olduğunda aynı kalacak, eksi (-) olduğunda değişmektedir. 3-2 ve 3-(-2) işlemlerinin çözümünde kullanılan bu modelde yön değişikliği, sembolik bir temsil olan eksi (-) işaretine bağlıdır.

Tablo 5'te verilen örneklere göre tam sayılarla işlemler, çoklu temsil sistemi içerisinde anlamlı ve somut bir şekilde çözülebilmektedir. Çözümü modellenen borç-varlık örneğinde mutlak değerce büyük bir tam sayıdan küçüğünün ve aynı zamanda negatif bir tam sayının çıkarılması yapılan modellemelerle açıklanabilmektedir. Alışveriş merkezi örneğinin avantajı, tek başına kullanılan bazı modellerin nötrleşme kavramını açıklamadaki eksik yönlerini, yer değiştirmeye bağlı olarak tamamlayabilmesidir. Bu modellerin, negatif tam sayılarla işlemleri yeni öğrenen öğrenciler için oldukça açıklayıcı olduğu söylenebilir. Tam sayılarla işlemlerde gerçek yaşam durumlarına yer vererek, tam sayıları yeni öğrenen öğrencilerin özellikle eksi (-) işaretini anlamlandırmasında, bu konunun öğretiminde kullanmak etkili bir matematik öğretimi sağlayabilir (Erdem vd, 2015; Altun, 2008; Erdem, 2015; Van de Walle vd., 2010; NCTM, 2000).

1.2.6. Tam Sayıların Öğretiminde Yaşanan Sorunlar

Alanyazın incelendiğinde tam sayıların öğretiminde öğrencilerin, bazı kavramları anlamlandırmada sorun yaşadığı görülmektedir. Bu sorunlardan bazıları; negatif tam sayının işaretine anlam verememe (Erdem vd., 2015; İşgüden, 2008; Kilhamn, 2011), tam sayılarla sıralama yapamama (Erdem vd., 2015), günlük hayatla ilişkilendirememe (Erdem vd., 2015), eksi (-) işaretinin işlevlerini bilmeme (Hativa ve Cohen, 1995; Vlassis, 2008) ve işlemlerin kavramsal anlamını bilmeme/ dikkate almama (Fuson, 1992; Van de Walle vd., 2016) ile ilgilidir. Bu sorunların hemen ardından tam sayılar konusunda yaşanan sorunlar, bu konuda öğrenilen dört işlemle ilgilidir (Erdem vd., 2015; Erdoğdu, 2019; Crowley ve Dunn, 1985; Khalid ve Embong, 2019; Yenilmez ve Bağdat, 2014).

Negatif tam sayıların öğrenilmesiyle ilgili sorunlardan birisi, bu sayı kümesindeki büyüklük ve adet kavramlarının pozitif sayılara göre zıt olmasıdır. Diğer bir deyişle, doğal sayılarda öğrenilen kavram bilgisindeki anlayışa yenisini eklemekte sorun yaşayan öğrencilerin, eski kavramsal bilgilerini tam sayılara uygulamak istemesidir (Beyatlı Ak, 2019; Demirören,2019; Erdem, 2015; Erdoğdu, 2019; Gallardo, 2002; Koç Şanlı, 2015; Yürekli, 2020). Dolayısıyla, negatif tam sayıları *eksi (-) işaretinden* bağımsız bir somut bakış açısı ve doğal sayılardaki anlamıyla düşünen öğrenciler; sayının mutlak değeri büyüse de kendi değerinin küçüldüğünü anlarken zorlanabilmektedir (Schumacher ve Rezat, 2019: s.2).

Hativa ve Cohen'a (1995: s.401-431) göre negatif tam sayılarla öğrencilerin yaşadığı sorunların üç temel kaynağı bulunmaktadır. Bunlar;

1- *Eksi (-) işareti* ile hem yönün hem de işlemin temsil edilmesi,
2- Negatif sayının *nicelik* olan aritmetik anlamı ile *yön* anlamı arasında doğan kavram kargaşası,
3- Negatif sayı sistemini açıklayabilecek ve öğrencinin anlamlandırmasını sağlayacak pratik modellerin eksikliğidir.

Tam sayıların, özellikle negatif tam sayıların, kavramsal olarak tanınmasıyla birlikte ortaya çıkan sorunlardan bir diğeri, tam sayılarla işlemlerin öğretimiyle ilgilidir. Altun'a (2008) göre öğrenciler, genelde iki pozitif tam sayıyla işlem yaptığında sorun yaşamazken, negatif tam sayılarla işlemlerde sorun yaşayabilmektedir. Negatif tam sayılarla ilgili yaşanan bu sorunların nedenlerinden biri, negatif tam sayının işaretinin işlemlerdeki yön ve nicelik kavramları olarak iki ayrı anlam taşımasıyla ilgilidir. Keşfedildiği dönemdeki tartışma konularından biri olan *yön ve nicelik* kavramıyla ilgili sorunlar (Carson & Day, 1995: s.2-8) bugünün öğrencilerinde de görülmekte (Altıparmak ve Özdoğan, 2010; İşgüden, 2008; Yenilmez ve Bağdat, 2014) ve öğrenciler, yön ve nicelik kavramları için avantajlı olan sayı doğrusu modelini doğru biçimde kullanamamaktadır (Çetin, 2016; Erdoğdu, 2019).

Alanyazında yer alan araştırmalardan bazıları, toplama işleminin öğrenilmesinde çoğunlukla sorunlarla karşılaşılmadığını ortaya koysa da (Beyatlı Ak, 2019; Çetin, 2016; Demirören, 2019; Erdem, vd. 2015; Ertuğrul, 2009) kimi çalışmalar belirli sorunlarla karşılaşıldığını göstermektedir. Köroğlu ve Yeşildere (2004: s.35), çıkarma işlemi kadar belirgin olmasa da bazı öğrencilerin, negatif ve ters işaretli tam sayılarla toplam işleminde hata yapabildiğini söylemektedir. Bazı öğrenciler, iki negatif tam sayının toplamında doğal sayı temelli öğretim alışkanlarını devam ettirdiği için, e*ksi (-) işaretinin* sadece çıkarma işlemi görevinde olduğunu düşünmektedirler (Erdoğdu, 2019). Demirören'e göre (2019) tam sayılarla toplama işleminin öğrenilmesindeki yanlış algılardan biri, bazı öğrencilerin toplama işleminin sonucunun sadece pozitif olacağını düşünmesidir. Öğrencilerin önceki bilgilerine yönelik bu gibi hatalarının nedeni, pozitif tam sayılarla toplama işleminin doğal sayılardaki gibi olması şeklindeki genellemeyle ilişkilendirilebilir (Çevik, 2019; Demirören, 2019). Geçmiş yıllardaki bilgiler ile toplama ve çıkarma işlemlerinde yapılan bazı genellemeler öğretime yardımcı olsa da bu bilgileri tüm çıkarma işlemlerinde genellemek, öğrencilerde yanlış öğrenmelere sebep olmaktadır (Koç Şanlı, 2018). Öte yandan bazı öğrenciler, tam sayılarla toplama işlemlerini doğru şekilde öğrense bile, sonrasında öğrenilen çıkarma işlemiyle birlikte oluşan bilgi yoğunluğuna bağlı olarak toplama işlemlerinde de sorun yaşayabilmektedir (Beyatlı Ak, 2019). Bu nedenle, çıkarma işleminin anlamlı bir şekilde öğrenilmesinin, toplama işlemine de etki ettiği söylenebilir.

Tam sayılarla toplama/çıkarma işlemlerinde yaşanan işlemsel sorunların çoğu çıkarma işlemleriyle (Avcu ve Durmaz, 2011; Ünal ve İpek, 2009; Hativa & Cohen, 1995) ve bunların büyük çoğunluğu da, negatif tam sayılarla yapılan çıkarma işlemleriyle ilgilidir (Avcu ve Durmaz, 2011; Bağdat ve Yenilmez, 2014; Çiçek, 2020; Çetin, 2016; Erdoğdu, 2019; Erdem vd, 2015; Ertuğrul, 2009; Kumar vd, 2017; Ünal ve İpek, 2009; Zengin, 2014; Yürekli, 2020). Bu doğrultuda öğrenciler çıkarma işlemlerini, sayı doğrusu (Erdoğdu, 2019) ve sayma pulu gibi temsillerle de yanlış modellemektedir (Beyatlı Ak, 2019; Çetin; 2016; Çevik, 2019; Koç Şanlı, 2018; Körükcü, 2008; Liebeck, 1990; Yürekli, 2020). Çıkarma işlemlerinde yaşanan sorunlardan biri, işlem için yazılan *eksi (-) işaretinin* çıkan sayıya ait olduğunun anlaşılmamasıdır (Akyüz vd., 2012; Avcu ve Durmaz, 2011; Erdem vd, 2015; Erdoğdu, 2019; Ertuğrul, 2009; Hayes, 1998: s.87-98; Kumar vd., 2017; Kullberg, 2017; Sevim-Atayev, 2015). Ayrıca, *eksi (-) işareti* görünce her seferinde çıkarma işlemi yapma düşüncesi de bu tip işlemlerde yaşanabilecek sorunlardan biridir (Erdoğdu,2019; Kumar vd., 2017). Örneğin; *-155-5* işlemini çözmekte sorun yaşayan bazı öğrenciler, çıkan sayının yazılmayan artı (+) işaretinin farkında olmadığından eski bilgilerini temel alarak, eksi (-) işaretlerini görünce işaretlerden bağımsız çıkarma işlemi yapmakta ve -150 cevabını bulmaktadır (Stephan ve Akyuz, 2012: s.459). Kumar ve diğerlerine (2017) göre *-155-5* örneğindeki gibi işlemlerin çözümünün somut bir biçimde anlaşılabilmesi için sembolik kurallardan farklı olarak, çeşitli modellerin kullanması ve çıkan sayının işaretine gereken vurgunun yapılması gerekir.

Çıkarma işlemindeki sorunlardan bir diğeri, *yan yana gelen eksi (-) ve artı (+) işaretlerinin işlevlerini bilmeme veya farkında olmama* durumudur (Beyatlı Ak, 2019; Çevik, 2019; Erdoğdu, 2019; Fuadiah ve Suryadi, 2019; Khalid ve Embong, 2019; Koç Şanlı, 2018; Kubar ve Çakıroğlu, 2017; Yürekli, 2020). İşlemlerde yan yana gelen işaretlere kural odaklı çözümler yapılsa da bazı öğrenciler *3-(-4)* ile *3-4* gibi işlemleri aynı algılayabilmekte; işlemin çözümü ile işaretlerin ayrımlarına gereken önemi vermemekte (Kubar ve Çakıroğlu, 2017: s.280) ve bu işlemleri sayı doğrusunda doğru biçimde modelleyememekte (Çiçek, 2020) ve hatta, bazıları işlemi toplamaya çevirdikten sonra modellemektedir (Akyüz, 2019). Öte yandan, *3-4* ile *-4+3* işlemlerinin çözümünün kural gereği aynı olduğu gösterilebilse de *3- (-4)* işleminde aynı uygulama yapıldığında karışıklığa neden olmaktadır (Kubar ve Çakıroğlu, 2017: s.280). Bu nedenle tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinin öğretiminde, kurallara dayalı anlatımlarla birlikte gerçek hayat durumlarının yer aldığı çeşitli modellerin kullanılması etkili bir çözüm olarak kabul edilmektedir (Erdem vd., 2015; Kubar ve Çakıroğlu, 2017; Stephan ve Akyuz, 2012).

Çıkarma işlemiyle ilgili sorunlardan diğeri, *mutlak değere bağlı uygulanan kurallarla ilgilidir.* Mutlak değer kavramının kullanıldığı kurallarda bazı öğrenciler, sayıların ve işlemlerin işaretlerini dikkate almadan, sürekli mutlak değerce büyük tam sayıdan küçük tam sayıyı çıkarmaktadır (Avcu ve Durmaz, 2011; Erdoğdu, 2019; Yenilmez ve Bağdat, 2014). Önceki eğitim kademelerinde küçük tam sayıdan büyük tam sayının çıkarılması durumuyla karşılaşmayan öğrenciler (Kubar ve Çakıroğlu, 2017: s.288; Kumar vd., 2017: s.14; Yenilmez ve Bağdat, 2014), eski bilgilerine bağlı olarak sonucun işaretine her zaman artı (+) işareti yazabilmektedir (Altıparmak ve Özdoğan, 2010; Çiçek, 2020; Demirören, 2019; Kilhamn, 2011).

Öğrencilerin anlamlandırmakta zorlandıkları çıkarma işlemlerinden biri de mutlak değerce küçük tam sayıdan büyüğünün çıkarıldığı işlemlerdir (Khalid ve Embong, 2019: s.8). Bu işlemlerle ilgili sorun, sayma pulu modeliyle yapılmak istenen öğrenci çözümlerinde de görülmekte ve öğrenciler, elde olmayan sayıyı çıkarmayı düşünenemekte, pullarla sıfır çiftini kullanmayı akıl edememekte (Akyüz, 2019; Ertuğrul, 2009) ve çıkarma işlemini kural gereği toplamaya çevirdikten sonra sayma pullarıyla modelleyebilmektedir (Akyüz, 2019). Öte yandan bazı öğrenciler, işlemleri sayma pullarıyla modelleyerek doğru şekilde çözse de problemlerdeki matematiksel ifadeleri bu materyale yansıtarak çözüm üretemeyebilir (Çetin, 2016). Kumar ve diğerlerine (2017) göre bunun temel nedeni, tam sayı kavramının tanıtımında günlük yaşam örneklerine yer verilip işlemlerde yeteri kadar yer verilmemesi ve materyalin veya gündelik hayat örneklerinin tek başına kullanılmasından kaynaklanmaktadır.

Tam sayılarla çıkarma işleminde yaşanan sorunlardan bir diğeri, kavramsal olarak çıkarma işleminin anlamına gereken önemin verilmemesi ve çıkarma işleminin anlamının yapılan işlemlerde öğretmenler tarafından çeşitli nedenlerden dikkate alınmamasıdır (Kullberg, 2007; Kumar vd, 2017; Yürekli, 2020). Sıcaklıklar arasındaki fark hesaplanırken küçük tam sayıdan büyüğü çıkarılarak sonucun negatif bulunması buna örnek olabilir. Bu örnekte hava sıcaklığı 10^{o}C‘den 15^{o}C’ye yükseldiğinde, hava sıcaklığındaki değişim 10-15= -5 şeklinde çözümlenerek hatalı bir işlem yapılmıştır (Yürekli, 2020). Görüldüğü gibi tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinde yaşanan sorunların çoğunun, negatif tam sayılarla yapılan çıkarma işlemlerinde olduğu ve bu işlemlerin anlamlı bir şekilde öğrenilmemesinden kaynaklandığı söylenebilir.

Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerinin öğrenilmesinde yaşanan sorunlara gelindiğinde, Crowley ve Dunn’a (1985) göre öğrenciler, iki negatif tam sayının çarpımının veya bölümünün pozitif olmasının anlamını sorgulasa da çoğu zaman bu durumu kural olarak kabullenmektedir. Yapılan birçok araştırmaya göre öğrenciler, çarpma ve bölme işlemlerindeki işaretleri dikkate almadan/ görmezden gelerek veya işaretlere anlam yüklemeden işlem yapabilmekte (Avcu ve Durmaz, 2011; Erdem vd., 2015; Khalid ve Embong, 2019; Şengül ve Cantimer, 2018; Yenilmez ve Bağdat, 2014) ve dolayısıyla, işlem sonucunun işaretinin belirlenmesinde sorunlar yaşayabilmektedir (Avcu ve Durmaz, 2011; Çiçek, 2020; Demirören, 2019; Erdem vd., 2015; Erdoğdu, 2019; Koç Şanlı, 2018; Yürekli, 2020).

Kubar ve Çakıroğlu'na (2017: s.288) göre kurallar bütününe dayalı bir öğretim yapılması, birçok sorunun oluşmasına sebep olabilmektedir. Bu sorunlardan biri, toplama ve çıkarma işlemlerinde öğrenilen mutlak değerle ilgili kuralların, çarpma ve bölmede uygulanmasıdır (Çiçek, 2020; Erdoğdu, 2019). Örneğin; (+4). (-2) işleminin sonucu, (+4)'ün mutlak değerce büyük olmasından dolayı hatalı bir şekilde (+8) olarak bulunabilir. Benzer şekilde, çarpma ve bölme işlemindeki işaret kuralları, toplama ve çıkarma işlemlerinde de kullanılabilmektedir (Koç Şanlı, 2018; Demirören, 2019; Khalid ve Embong, 2019). Örneğin; -2-7 işleminin sonucu, sayı işaretlerinin aynı olduğu düşüncesiyle sonucun hatalı bir şekilde (+9) olarak bulunabilmektedir. Kuralların karışıklığına bağlı ortaya çıkan bir başka sorun ise iki eksi (-) işaretli sayının çarpımı artı (+) oluyorsa, iki artı (+) sayının çarpımı da eksi (-) olmasıdır (Demirören, 2019; Yürekli, 2020). Böylelikle, kavramlara verilmesi gereken önemi sadece işlemlere veren öğrenciler, hem yaptıkları işlemin ne anlama geldiğini fark edememekte hem de sayı doğrusundaki iki tam sayı arasındaki uzaklığı kural odaklı çözümlerle negatif bulabilmektedir (Yürekli, 2020). Van de Walle ve diğerlerine (2016) göre bir kavram öğretiminde farklı modelleri kullanmak, kavramla modele arasındaki benzerliklerin ele alınmasını ve kavramların, modeller içindeki anlamlarının keşfedilmesini sağlar. Alanyazına dayalı olarak tam sayılarla işlemlerin öğreniminde yaşanan sorunlar özetlenerek Tablo 6'ya yerleştirilmiştir.

Tablo 6

Tam Sayılarla İşlem Öğretiminde Yaşanan Sorunlar

İşlem	Sorunlar
(–4)–(–5)	– Yan yana gelen iki eksi (-) işaretinin işlevinin anlaşılmaması ve/veya farkında olunmaması
	– Tam sayıya ait olan eksi (–) işareti ile çıkarma işlemine ait olan eksi (–) işaretinin işlevinin anlaşılmaması ve/veya farkında olunmaması – Çarpma ve bölmedeki sonuç işareti belirleme kuralının, toplama ve çıkarmaya uygulanması – Sadece kural odaklı geleneksel öğretim yapılması
–2 –7	– Çıkarma işlemini temsil eden eksi (–) işaretinin çıkan sayıya ait olduğunun düşünülmesi
	– Negatif tam sayıdan pozitif tam sayının çıkarılma.
(+4) . (–2) (–2) . (–5) (+10) : (–2) (–20) : (–5)	– Çarpma ve bölme işlemlerinde tam sayıların işaretlerinin dikkate alınmadan işlem yapılması ve/veya işlemin sonucunun işaretinin belirlenmesinde hata yapılması – Sadece kural odaklı geleneksel öğretim yapılması – Mutlak değerce büyük olanın işaretini sonuca yazma kuralının çarpma ve bölmede kullanma

Tablo 6'da görüldüğü gibi tam sayılarla işlem öğretiminde yaşanan sorunların neredeyse tamamının nedeni, negatif tam sayıların anlamlandırılarak öğrenilmemesine dayanmaktadır (Van de Walle vd., 2016). Tam sayılarla işlemlerde yaşanan sorunlar; eksi (-) işaretinin işlevleriyle, bazı bilgi eksiklikleriyle, ele alınan işlemdeki kavramlara ve işlemin anlamına gereken önemin verilmemesi ve kural odaklı yapılan öğretimle ilişkilendirilebilir. Tam sayılarla ilgili yaşanan bu gibi sorunlar işlem ile kavramların özümsenmesinden çok, işlemle ilgili kurallara önem verilmesinden kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla, bir konu hakkındaki temeli oluşturan kavram bilgisi tam olarak zihne yerleşmemekte ve kavram ile işlem arasındaki bağlantı kurulamamaktadır (Baykul, 2009: s.253-273). Yaşanan bu sorunların bir başka sebebi ise işaretlere verilen anlamların sadece sembolik temsillerle sınırlı bırakılmasındandır (Ay, 2019). Tam sayılarla işlemlerin öğrenilmesindeki bu sorunların yaşanmaması veya ortadan kaldırılabilmesi için somut modellerle ve günlük yaşam örnekleriyle bağlantılı bir anlatım yapılması gerektiği söylenmektedir (Erdem vd., 2015: s.112).

Tam sayılarla işlemlerin öğretimiyle ilgili alanyazında yaşanan bu sorunların, öğretimde kullanılan matematiksel dil ile ilişkili olduğu söylenebilir. Bunlardan biri; negatif ve pozitif tamsayılar için *eksi/ artı sayı*, *eksili/ artılı sayı* biçimindeki kullanıma bağlı olan matematiksel dildeki yetersizliktir (Yenilmez ve Bağdat, 2014). Şengül ve Cantimer'e (2018) göre çoğu öğrencinin matematiksel dili doğru şekilde kullanamaması; tam sayılarla birçok kavramı anlayamamasına ve bu sayılarla işlem yapamamasına neden olduğundan, etkili bir öğretimi yapılmasını engellemektedir. Bu nedenle, matematik öğretmenlerinin kullandığı matematiksel dil, etkili bir matematik öğretiminin yapılmasında ve dolayısıyla, öğrencilerin başarılı olmasında bir etkendir (Philipp, Thanheiser ve Clement, 2002; Yeşildere, 2007). Ayrıca, tam sayıların öğretiminde öğrencilerin yaşadığı sorunların bazı nedenlerinin, ders öğretmeninin pedagojik ve matematik öğretimi alan bilgisiyle ilgili olduğu da unutulmamalıdır (Yeşildere, 2007: s.67).

Yapılan araştırmalar doğrultusunda, tam sayılarla işlemlerden önce tam sayılarla ilgili kavramlar anlamlı bir şekilde öğrenilmeli (Şengül ve Dereli, 2013) ve mümkün olduğunca tam sayılarla işlem öğretimi boyunca çoklu temsiller kullanılmalıdır (Kumar vd, 2017). Özellikle, teorik bilgi yığınından uzak, ayrıntıların yer aldığı, önceki ve sonraki konularla ilişkisel (Baykul, 2009; Çetin, 2016), gerçek dünyayla bağlantılı olacak biçimde farklı temsil ve yöntemler içeren (Fuadiah ve Suryadi, 2019; Van de Walle vd., 2016: s.13), öğrencinin aktif olarak rol aldığı etkileşimli bir öğrenme ortamından oluşan (Erdem vd, 2015: s.101-102; Fuadiah ve Suryadi, 2019; Işıtan ve Doğan, 2018; Van de Walle vd., 2016: s.13) farklı modellerin yer aldığı temsillerle yapılan tam sayılarla işlem öğretimi, tam sayıları anlamakta güçlük çeken öğrenciler için büyük avantaj sağlamaktadır (Bryant, Bryant, Dougherty, Roberts, Pfannanstiel & Lee, 2020). Bu doğrultuda öğretmenlerin, derslerinde bir kavramı tanıtırken veya onunla ilgili işlem çözümü yaparken temsil çeşitliliğine ve temsiller arasındaki ilişkiye dikkat etmesi gerekmektedir. Ayrıca, öğretmenlerin derste kullandığı temsil sırasına; gerçekçi, manipülatif, görsel şeklinde başlaması ve en sonda matematiksel kuralları vermesi tavsiye edilmektedir (Nakahara, 2008).

1.2.7. Tam Sayı Öğretimiyle İlgili Yapılmış Araştırmalar

Bu bölümde tam sayı öğretimiyle ilgili Türkiye dışında ve Türkiye'de yapılmış araştırmalara yer verilmiştir.

Tam Sayı Öğretimiyle İlgili Türkiye Dışında Yapılmış Araştırmalar

Battista (1983) tarafından yapılan "A Complete Model for Operations on Integers [Tam Sayılarda İşlemler İçin Eksiksiz Bir Model]" başlıklı araştırma, tam sayılar konusunun öğretimindeki dört işlemin tamamında kullanılabilecek sayma pullarıyla modellemeyi geliştirmeyi amaçlamıştır. Yapılan araştırmaya göre sayma pulları modelinin dört işlemde etkin bir şekilde kullanılabildiği, tam sayılar konusundaki kavramları öğrenirken somut bir model ihtiyacı duyan öğrenciler için kullanışlı olduğu sonucuna varılmıştır.

Crowley ve Dunn (1985) tarafından yapılan "On Multiplying Negative Numbers [Negatif Sayıları Çarpma Üzerine]" başlıklı çalışma, negatif sayıların tarihini ve negatif sayıların çarpımının anlamını açıklamaya yönelik bazı fikirlerin geliştirildiği bir araştırmadır. Bu çalışmada yapılan açıklamalara göre iki negatif tam sayının çarpımı; oluşturulan bazı örüntü kuralları, toplama işlemi ve ortak çarpan parantezi gibi birtakım kurallarla açıklanabilmektedir. Bu doğrultuda, iki negatif tam sayının çarpımının sonucunun pozitif bir tam sayı olma nedeni ispat edilebilmekte ve bu işlemlerin bazı kurallardan yararlanılarak anlamlı bir şekilde öğrenilebileceği belirtilmektedir.

Hativa ve Cohen (1995) tarafından yapılan "Self Learning of Negative Number Concepts by Lower Division Elementary Students Through Solving Computer-Provided Numerical Problems [Alt Bölüm İlköğretim Öğrencilerinin Negatif Sayı Kavramlarını Bilgisayar Tarafından Sağlanan Sayısal Problemleri Çözerek Kendi Kendine Öğrenmeleri]" başlıklı çalışma, negatif sayı kavramının anlaşılması ve bu sayılarla yapılan işlemlerdeki zorlukların tespit edilmesiyle ilgilidir. Araştırmada tespit edilen zorlukların giderilmesi amacıyla, sanal ortamda kullanılan sayı doğrusu modeliyle öğrencilere eğitim verilmiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin eğitim öncesinde negatif sayılar hakkında gayri resmi bilgiye sahip oldukları ve bu sayılarla basit işlemler yapabildikleri görülmüştür. Yapılan eğitimler sonrası deney grubu öğrencilerinin başarısında anlamlı düzeyde farklılık görülmüştür.

Akyuz, Stephan ve Dixon (2012) tarafından yapılan "The Role of the Teacher in Supporting Imagery in Understanding Integers [Tamsayıları Anlamada Görüntüyü Desteklemede Öğretmenin Rolü]" başlıklı çalışma, 7.sınıftaki öğrencilerin tam sayı kavramı ve işlemlerini daha iyi anlayabilmeleri için yapılan beş haftalık bir tasarım araştırma projesidir. Araştırma katılımcıları; tasarım araştırma ekibi, uzman öğretmen, yardımcı öğretmen, aynı üniteyi öğreten diğer iki kişiden oluşan 7. sınıf öğretmeninden ve 7. sınıfta öğretim gören 30 öğrenciden oluşmaktadır. Yapılan araştırmanın veri kaynaklarını; sınıftaki derslerin ses ve video kasetleri, alan notları, öğretmen notlarını ve öğrencilerin eserleri oluşturmaktadır. Araştırma sonucuna göre tam sayılar konusunda yapılan tasarımla, öğrencilerin tam sayı problemlerini anladıkları ve doğru çözdükleri görülmüş ve ayrıca, çalışmada kullanılan farklı temsillerin matematiksel fikirleri iletmede önemli rol oynadığı sonucuna varılmıştır.

Stephan ve Akyuz (2012) tarafından yapılan "A Proposed Instructional Theory for Integer Addition and Subtraction [Tam Sayılarla Toplama ve Çıkarma İçin Önerilen Bir Öğretim Kuramı]" başlıklı çalışma, Gerçekçi Matematik Eğitimi kuramına göre geliştirilen bir ders tasarımıdır. Bu tasarım, tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinin öğretiminde kullanılan sayı doğrusu modeliyle birlikte; varlıklar, borçlar ve net varlıklardan oluşan günlük hayat örneklerini içermektedir. Yapılan araştırmaya göre sayı doğrusuyla ilişkili biçimde kullanılan varlık, borç ve net varlık kavramlarından daha başarılı bir şekilde faydalanılabildiği sonucuna varılmıştır.

Kumar, Subramaniam ve Naik (2017) tarafından yapılan "Teachers' Construction of Meanings of Signed Quantities and Integer Operation [Öğretmenlerin İşaretli Miktarların Anlamlarını Oluşturmaları ve Tam Sayı İşlemleri]" başlıklı çalışma, tam sayıları öğretmek için öğretim sırasında kullanılabilecek çeşitli temsillerin anlaşılması ve geliştirilmesi üzerine yapılan daha büyük çaplı bir araştırmanın nitel bir parçasıdır. Bu araştırmanın ilk yılında 13 öğretmen atölye çalışması yapmıştır. Bu atölyede birçok matematik konusu öğretmenler tarafından ele alınırken, tam sayılar konusuna hiçbir oturumda yer verilmemiştir. İkinci yılında ise ilk atölyeden seçilen dört öğretmen ve uzmanlar eşliğinde bir atölye çalışması düzenlenmiş ve tam sayılarla toplama ve çıkarma konusundaki çeşitli temsiller üzerinde tartışılmıştır. Son aşamada ise tam sayılarla toplama ve çıkarma işleminde kullanılabilecek alışveriş merkezi tasarlanmıştır. Araştırma sonuçlarına göre, çalışma atölyesine katılan öğretmenlerin, tam sayılarla ilgili sınırlı ve ön yargılı düşüncelerini geliştirebildikleri görülmüştür. Ayrıca, tam sayılarla kullanılabilecek farklı temsillerin, bu konudaki farklı kavramların öğretiminde avantaj sağlayabildiği belirtilmektedir.

Fuadiah ve Suryadi (2019) tarafından yapılan "Teaching and Learning Activities in Classroom and Their Impact on Student Misunderstanding: A Case Study on Negative Integers [Sınıfta Öğretme ve Öğrenme Etkinliklerinin Öğrencilerin Yanlış Anlamasına Etkileri: Negatif Tamsayılar Üzerine Bir Örnek Olay]" başlıklı çalışma, negatif tam sayı öğretimindeki bazı sorunları kapsamlı bir şekilde tanımlamak için öğretmenlerin öğretim sürecini nasıl kullandıklarını ve öğretmen anlatımlarının öğrenciler üzerindeki etkilerini ortaya koymayı amaçlamıştır. Vaka çalışması olan bu araştırma, ortaokul 7. sınıftaki 37 öğrenci ve 1 öğretmenle yürütülmüştür. Bu nitel çalışmada; saha gözlemlerinden, görüşmelerden ve belge incelemelerinden veri toplanmış ve bu veriler Didaktik Durum Teorisine dayalı öğrenme engellerinin perspektiflerine göre analiz edilmiştir. Yapılan bu araştırmaya göre öğretmenlerin yaptığı farklı anlatım biçimlerinin, negatif tam sayıları ve tam sayılarla ilgili işlemleri öğrenen öğrencilerin konuyu yanlış anlaması üzerinde oldukça etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

Khalid ve Embong (2019) tarafından yapılan "Sources and Possible Causes of Errors and Misconceptions in Operations of Integers [Tamsayılarla İşlemlerde Hata ve Kavram Yanılgılarının Kaynakları ve Olası Nedenleri]" başlıklı çalışma; tam sayılarla dört işlemlerdeki rutin problem çözmedeki hataları, yanlış anlaşılma kaynaklarını ve bunların nedenlerini araştıran nitel bir araştırmadır. Araştırmanın verileri, öğretmen ve öğrencilerle yapılan görüşme, gözlem ve alan notlarından elde edilmiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre hataların; dikkatsizlikten, tam sayıları bile çarpıp bölememe gibi zayıf temel bilgilerden, tam sayı kavramlarını özümseyememekten, kural karışıklığından ve ayrıca, konuyu yüzeysel bir şekilde öğrenmeden kaynaklandığı tespit edilmiştir. Yüzeysel anlayışların sebebi ise öğretmenlerin matematik öğretim programını tamamlamak için acele etmesinden ve kural odaklı anlatımlardan kaynaklandığı belirtilmiştir.

Gyampoh, Nyarko ve Agyeman (2020) tarafından yapılan "Improving the Performance of Basic School Pupils in Addition and Subtraction of Integers Using Rectangular Cut out Number Line: A Case of a Ghanaian Basic School [Temel Okul Öğrencilerinin Dikdörtgen Kesim Sayı Doğrusu Kullanarak Tam Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemlerinde Performanslarının Artırılması: Bir Ganalı Temel Okulu Örneği]" başlıklı çalışma, tam sayıları toplama ve çıkarma işlemlerinde öğrenci performanslarını araştırmayı amaçlamıştır. Araştırmanın örneklemi, amaçlı örnekleme tekniği ile belirlenmiş; araştırmada veri toplama aracı olarak gözlem, görüşme ve test kullanılmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre, çalışmada kullanılan sayı doğrusu modelinin öğrencilerin performansını önemli ölçüde arttırdığı görülmekte; ayrıca yapılan çalışma, etkili bir matematik öğretimi yapılabilmesi için nesnelere dokunmanın ve nesneleri manipüle etmenin gerektiğini belirtmektedir.

Rineck (2020) tarafından yapılan "A Holıstıc Developmental Mathematics Course For All Learners [Tüm Öğrenciler İçin Bütünsel Bir Gelişimsel Matematik Kursu]" başlıklı araştırma, çoklu gelişimsel matematik derslerine yönlendirilen öğrencilerin ihtiyaçlarını karşılayan bütüncül bir ders geliştirme çalışmasıdır. Kesirler, tam sayılar ve bunlarla yapılan işlemlerle ilgili olarak geliştirilen bu dersin; kavramsal olarak anlaşılırlığa bir katkıda bulunup bulunmadığına bakılmıştır. Yapılan bu araştırmada geliştirilen dersin; kesirlerin, tam sayıların ve bunlarla işlemlerin kavramsal olarak anlaşılmasına olumlu yönde katkı sağladığı sonucuna varılmıştır.

Tam sayıların öğretimiyle ilgili Türkiye dışındaki bazı araştırmalara bakıldığında, bu araştırmaların konusu; öğrenci başarısı, öğretmenlerin mesleki yeterliliği tespit etme ve geliştirme, çeşitli modeller geliştirme, ders tasarımı yapma ve bazı sorunları tanımlamadır. Örneklemlerinin öğretmen ve öğrencilerden oluştuğu bu araştırmalarda kullanılan veri toplama araçları: görüşme, gözlem, ses ve video kayıt, başarı testidir. Araştırmaların sonuçlarına göre farklı modellerin yer aldığı tam sayı öğretiminde başarının arttığı, öğretmenlerle yapılan mesleki eğitimlerde modelleme algılarının gelişebildiği, tam sayılar konusunda bazı sorunların yaşandığı ve etkili bir tam sayı öğretimi için kavram öğretimine gereken önemin verilmesi gerektiği söylenebilir.

Tam Sayı Öğretimiyle İlgili Türkiye'de Yapılmış Araştırmalar

Ertuğrul (2009) tarafından yapılan "Yeni İlköğretim Matematik Dersi 6. Sınıf Öğretim Programında Yer Alan Tam Sayılarla İlgili Etkinliklerin Öğrenci Başarısına Etkisi" başlıklı araştırma, ilköğretim matematik dersi öğretim programında yer alan tam sayılarla ilgili etkinliklerin 6.sınıf öğrencilerinin başarılarına olan etkisini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmanın örneklemini, 6 farklı ilköğretim okulundaki ön teste katılan 176, son teste katılan 181 öğrenci oluşturmaktadır. Bu okullardan seçilen toplam beş öğretmen iki hafta boyunca belirlenen plan ve etkinlikleri uygulamıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin alacak-borç, sıfırın altı-sıfırın üstü, denizin altı-denizin üstü gibi durumları tam sayıları kullanarak ifade ederken, tam sayıları sayı doğrusuna yerleştirirken, bir tam sayının mutlak değerini bulurken ve tam sayılarla toplama işlemini yaparken herhangi bir sorunla karşılaşmadıkları ortaya konmuştur. Ancak araştırmaya katılan öğrencilerin tam sayıları ve mutlak değer içindeki tam sayıları sıralarken, tam sayılarla çıkarma işlemi yaparken, pullarla modellenen toplama ve çıkarma işlemlerine ait matematik cümlesini yazarken, eksilen pulda çıkan kadar pul olmadığı çıkarma işleminin matematik cümlesini yazarken ve tam sayıları kapsayan bir matematik cümlesine ait bir model ve problem yazarken zorlandıkları tespit edilmiştir.

Avcu ve Durmaz (2011) tarafından betimsel tarama modeliyle yapılan "Tam Sayılarla İlgili İşlemlerde İlköğretim Düzeyinde Yapılan Hatalar ve Karşılaşılan Zorluklar" başlıklı araştırmada, öğrencilerin tam sayılarla ilgili işlemlerde yaptığı hatalar ve karşılaştıkları zorluklar ele alınmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu, 268 6. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Veri toplama aracı olarak başarı testi kullanılan araştırmanın sonucunda, 6. ve 7. sınıftaki öğrencilerin tam sayılar konusunda belirlenen kazanımları beklenen düzeyde edinemediği görülmüştür. Araştırmanın sonuçlarına göre, öğrenciler negatif ya da pozitif sayının ayrımını yapabilmekte ancak hangi sayının daha büyük ya da daha küçük olduğunun ayrımına varamamakta ve 0'ı tam sayılar kümesi içerisinde nereye yerleştireceğini bilememektedirler. Öğrencilerin aynı zamanda çarpma ve bölme işlemlerini yaparken işaret kullanımından kaçındığı, toplama ve çıkarmayla ilgili işlemlerde ise sayıları toplayıp işareti kafalarına göre belirlediği görülmektedir.

Bozkurt ve Polat (2011) tarafından yapılan “Sayma Pullarıyla Modellemenin Tam Sayılar Konusunu Öğrenmeye Etkisi Üzerine Öğretmen Görüşleri” başlıklı araştırmada, ortaokul öğrencilerinin günlük hayata entegre etmede zorlandıkları tam sayıların öğretiminde sayma pulları ile modellemenin kullanılmasının öğrenmeye etkisi üzerine öğretmen görüşleri alınmıştır. Betimsel tarama modeliyle gerçekleştirilen bu araştırmadaki 16 ilköğretim matematik öğretmeninden yarı yapılandırılmış görüşme formuyla toplanan veriler analiz edilmiştir. Araştırma sonucunda, öğretmenlerin tam sayılar konusunu işlerken sadece programda önerilen sayma pullarını, modellemeleri ve materyalleri kullandıkları belirtilmiştir. Ayrıca öğretmenlerin çarpma ve bölme işlemlerinde modelleme kullanılmasının öğrenciler için konuyu daha zor ve karmaşık hale getireceğini, özellikle sıfır çiftleri oluşturarak yapılan modellemelerin hem öğrenciler hem öğretmenler için zorluk oluşturacağını düşündükleri belirtilmiştir.

Bahadır ve Özdemir (2013) tarafından deneysel desende yapılan “Tam Sayılar Konusunun Canlandırma Tekniği ile Öğretiminin Öğrenci Başarısına ve Hatırlama Düzeyine Etkisi” başlıklı çalışmada, tam sayılar ünitesinin öğretilmesinde canlandırma yönteminin öğrencilerin başarı ve hatırlama düzeylerine etkisi araştırılmıştır. 7. sınıfta öğrenim gören toplam 149 öğrenciden elde edilen verilerin analizi sonucunda canlandırma yönteminin kullanıldığı deney grubunun, düz anlatımın kullanıldığı kontrol grubuna göre tam sayılarla işlem yapma ve hatırlamada daha yüksek başarıya sahip olduğu ortaya çıkmıştır.

Şengül ve Dereli (2013) tarafından yapılan “Tam Sayılar Konusunun Karikatürle Öğretiminin 7. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Tutumuna Etkisi” başlıklı araştırmada, tam sayılar konusunun karikatürle öğretiminin öğrencilerin matematik tutumuna etkisi incelenmiştir. Yarı deneysel, kontrol gruplu ön test-son test modelinden yararlanılan araştırmanın çalışma grubunu 61 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırma sonucunda karikatürlerle oluşturulan sosyal öğrenme ortamının öğrencilerin derse olan ilgilerini arttırdığı ve bu bağlamda karikatürler ile yapılan öğretimin öğrencilerin duyuşsal özelliklerini ve matematiğe yönelik tutumlarını olumlu etkilediği belirtilmiştir.

Yenilmez ve Bağdat (2014) tarafından yapılan "Yedinci Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayılarla İşlemler Konusundaki Öğrenme Güçlükleri" başlıklı araştırma, tam sayılarla işlemler konusunda karşılaşılan öğrenme güçlüklerini ortaya koymayı amaçlamıştır. 7. sınıfta okuyan 10 öğrenciden yarı yapılandırılmış görüşme tekniği ile toplanan veriler içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Araştırma sonuçlarına göre, öğrencilerin tam sayılarla çıkarma işleminde ve işlem önceliği sorularında zorlandıkları ve çarpma- bölme işlemlerinde sayıların işaretlerini görmezden gelerek işlem yaptıkları; ayrıca negatif tam sayıların bir yön belirttiğini zihinlerinde anlamlandıramadıkları için küçük sayıdan büyük sayıyı çıkarmada ve kalanlı bölme işlemlerinde öğrencilerin sıkıntı yaşadıkları görülmüştür.

Erdem, Başıbüyük, Gökkurt, Şahin ve Soylu (2015) tarafından yapılan "Tam Sayılar Konusunun Öğretiminde Yaşanan Zorluklar ve Çözüm Önerileri" başlıklı araştırma, tam sayılar konusunun öğretiminde yaşanan zorluklara ilişkin ortaokul matematik öğretmenlerinin görüşlerinin incelenmesini ve çözüm önerilerinin sunulmasını amaçlamıştır. İki açık uçlu sorudan oluşan bir form aracılığıyla 38 ortaokul matematik öğretmeninden elde edilen veriler içerik analizi tekniği kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırma sonucuna göre; öğrencilerin eksi (-) işaretine anlam vermede, tam sayılarla çıkarma işlemi yapmada, tam sayılarla sıralama yapmada, sayma pullarını anlamada ve tam sayıları günlük hayatla ilişkilendirmede sıkıntı çektikleri, öğretmenlerin ise negatif tam sayının ne anlama geldiğini ve tam sayılarla çıkarma işlemini öğretmede ve sayma pullarını kullanmada zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Özellikle çarpma ve bölme işlemlerimde öğretmenlerin sayma pullarını tercih etmediği görülmüştür.

Kar ve Işık (2015) tarafından yapılan "Comparison of Turkish and American Seventh Grade Mathematics Textbooks in Terms of Addition and Subtraction Operations with Integers [Türk ve Amerikan Yedinci Sınıf Matematik Ders Kitaplarının Tam Sayılarla Toplama ve Çıkarma İşlemleri Açısından Karşılaştırılması]" başlıklı çalışma, Türkiye'de ve Amerika Birleşik Devletlerinde kullanılan matematik ders kitaplarında tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinin nasıl yer aldığını ortaya koymayı amaçlamıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre Amerikan matematik ders kitabındaki görsel temsiller, sözlü açıklamalar ve matematiksel cümleler arasındaki koordinasyonun daha düzenli bir şekilde kurulduğu; ayrıca matematiksel akıl yürütme ve problem kurma gibi üst düzey bilişsel becerilere daha fazla yer verildiği tespit edilmiştir.

Çetin (2016) tarafından yapılan "Sorgulayıcı Öğrenme Yaklaşımıyla Çoklu Temsil Destekli Tam sayı Öğretiminin 6. Sınıf Öğrencilerinin Başarılarına, Model Tercihlerine ve Temsiller Arası Geçiş Becerilerine Etkisi" başlıklı araştırma, tam sayılar konusunun sorgulayıcı öğrenme yaklaşımı ve çoklu temsil destekli modelleme ile öğretiminin; öğrencilerin başarılarına etkisini, öğrencilerin tam sayılar konusuna ilişkin model tercihlerini, temsiller arası geçiş becerilerini ve sorgulayıcı öğrenme süreci aşamalarındaki yeterlilik düzeylerini ortaya koymayı amaçlamıştır. Karma yöntemin kullanıldığı bu araştırmada, 54 kişilik 6. sınıf öğrencisinden başarı testi, çalışma yaprakları ve yarı yapılandırılmış görüşme kayıtları ile veriler toplanmıştır. Araştırma sonucuna göre; deney grubu öğrencilerinin, geleneksel yöntemle öğrenen kontrol grubuna göre daha başarılı olduğu ve deney grubu öğrencilerinin daha fazla model kullanımını tercih ettiği görülmüştür.

Kubar ve Çakıroğlu (2017) tarafından yapılan "Prospective Teachers' Knowledge on Middle School Students' Possible Descriptions of Integers [Öğretmen Adaylarının Ortaokul Öğrencilerinin Tam Sayılara İlişkin Olası Tanımlamaları Hakkındaki Bilgileri]" başlıklı çalışma, ortaokul öğrencilerinin tam sayıları tanımlamasındaki kavram yanılgıları ve hataları ile ilgili ortaokul matematik öğretmeni adaylarının bilgilerini ortaya koymayı amaçlamıştır. Açık uçlu bir anket ile 38 Türk öğretmen adayından toplanan verilerden ulaşılan araştırma sonuçlarına göre; öğretmen adaylarının çoğunun ortaokul öğrencilerinin tam sayıları tanımlamadaki olası yanılgılarına ve hatalarına aşina oldukları, fakat bazı öğretmen adaylarının öğrencilerin düşünme sürecine ilişkin zengin bir bilgi birikimine sahip olmadığı görülmüştür.

Işıtan ve Doğan (2018) tarafından yapılan "Gerçekçi Matematik Eğitiminin Tam Sayılar Konusundaki Başarı ve Kalıcılığa Etkisi" başlıklı çalışmada, Gerçekçi Matematik Eğitimi ile desteklenen tam sayı öğretiminin, öğrenci başarısı ve başarının kalıcılığına etkisi araştırılmıştır. Yarı deneysel yöntemin kullanıldığı bu araştırmada, 66 kişilik 6. Sınıf öğrencisinden matematik başarı testi aracılığıyla veriler toplanmıştır. Araştırmanın sonucuna göre Gerçekçi Matematik Eğitimi ile desteklenen matematik öğretiminin, öğrencilerin başarısı ve başarısının kalıcılığına olumlu etkisi olduğu tespit edilmiştir.

Berber ve Sezgin Memnun (2018) tarafından yapılan "Ortaokul Öğrencilerinin Tam Sayılar Hakkında Sahip Oldukları Metaforlar" başlıklı araştırma, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin tam sayı kavramını algılayış biçimlerini incelemeyi, bu kavrama yönelik sahip oldukları metafor algılarını ortaya çıkarmayı ve sınıf düzeylerine göre bu algılardaki değişimleri incelemeyi amaçlamıştır. 492 öğrenci ile gerçekleştirilen bu olgubilim araştırmasında öğrencilerden "Tam sayı ..... benzer, çünkü ....." cümlesini tamamlamaları istenmiş ve elde edilen veriler, betimsel analiz yöntemi aracılığı ile analiz edilmiştir. Araştırmanın sonucunda, öğrencilerin ürettikleri metaforlar ortak özelliklerine göre 7 farklı kavramsal kategori tam sayıların zıtlığı, sonsuzluğu, zorluğu, işlemselliği, bütünlüğü, kolaylığı ve diğer (6 kategori dışında kalanlar) altında toplanmıştır. Ayrıca, ortaokul öğrencilerinin tam sayı kavramı için ürettiği metaforların sınıf düzeylerine göre anlamlı bir farklılık gösterdiği tespit edilmiştir.

Koç Şanlı (2018) tarafından yapılan "Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Tam Sayıların Öğretim Sürecinde Model Kullanma Becerileri ve Model Kullanımına Yönelik Görüşleri" başlıklı araştırma, 6 ve 7. sınıf düzeylerinde yer alan tam sayılar ve tam sayılarla işlemler konularının öğretim sürecinde öğretmenlerin matematiksel modelleri kullanım düzeylerini, modellerin kullanımına yönelik görüşlerini, ders işleniş sürecindeki yaklaşımlarının öğrencilerin modelleme becerilerine yönelik yansımasını incelemeyi amaçlamıştır. Durum çalışması olan bu araştırmadaki veriler, 5 matematik öğretmeninden ders gözlem formu ve yapılandırılmış görüşme formu ile; bu öğretmenlerin öğrencilerinden ise tam sayılar ve modeller testi ile toplanmıştır. Araştırma sonuçlarına göre; öğretmenlerin programda önerilen ve ders kitabında yer alan modelleri düzenli olarak kullanmadıkları, bunun yanı sıra öğretmenlerin model algılarının çizimle elde edilen somut görsel materyaller şeklinde olduğu ve modelleri daha çok konunun öğretim sürecinde kullandıkları, soru çözümlerinde ise model kullanmaktan kaçındıkları tespit edilmiş; ayrıca, öğrencilerin modelleme becerilerinin genel olarak düşük olduğu anlaşılmıştır.

Şengül ve Cantimer (2018) tarafından yapılan "Öğrenciler Tam Sayı Kavramından Ne Anlıyor? Öğrenci Gözüyle Tam Sayılarda Kavram İmajı" başlıklı araştırma, öğrenci gözüyle tam sayılara yönelik kavram imajlarını değerlendirmeyi amaçlamıştır. 7. Sınıfta öğrenim gören 27 öğrenci ile gerçekleştirilen bu çalışmada, 7 açık uçlu sorudan oluşan tam sayı kavram testi ile toplanan veriler betimsel analiz yöntemi ile çözümlenmiştir. Araştırmada, öğrencilerin çoğunluğunun tam sayı kavramını anlamlandırmada istenilen düzeyde olmadığı, kendi açılarından bölme ve çarpma işlemlerinde yaşadıkları zorluklar nedeniyle tam sayı imajlarının yeterli düzeyde oluşmadığı ve bu nedenle öğrencilerin tam sayılarla işlem yapmada birçok hata yaptıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Akyazı (2019) tarafından yapılan "Drama Yöntemi ile Tam Sayılarla Toplama İşleminin Öğretimi: Altıncı Sınıf Öğrencilerinden Yansımalar" başlıklı araştırma, ilköğretim 6.sınıf öğrencilerine tam sayılarla toplama işlemini drama yöntemi ile öğretmeyi amaçlamıştır. 6. Sınıftaki 14 öğrencinin katıldığı araştırmada; gözlem ve yarı-yapılandırılmış mülakatlar aracılığıyla toplanana veriler, betimsel ve içerik analizi yöntemlerinden yararlanılarak analiz edilmiştir. Araştırma sonucuna göre tam sayılarla toplama işleminin öğretiminin drama yöntemi ile gerçekleştirilmesi; öğrencilerin derse katılmaya istekli hale gelmelerini ve hem konuyu daha kolay öğrenmelerini hem de bu süreçte mutlu olmalarını sağlamıştır.

Akyüz (2019) tarafından yapılan "Tam Sayıların Çoklu Temsillerle Öğretiminin 7. Sınıf Öğrenci Başarısına Etkisi ve Öğrenci Görüşleri" başlıklı çalışma, tam sayıların çoklu temsillerle öğretiminin 7.sınıf öğrenci başarısına etkisi ve öğrenci görüşlerinin belirlenmesini amaçlayan bir eylem araştırmasıdır. Araştırmanın verileri 41 ortaokul öğrencisinden, açık uçlu 10 maddeden oluşan ön test- son test, yarı yapılandırılmış görüşme formu ve yapılandırılmamış gözlem notlarından yararlanılarak toplanmıştır.

Araştırma sonuçlarına göre; deney grubunda bulunan öğrencilerin sayma pulları hariç diğer çoklu temsil etkinliklerine katılmakta istekli oldukları görülmüştür. Tam sayılar cetveli başta olmak üzere tam sayılar animasyonu ve sayı doğrusu modelli çoklu temsil örneklerinin öğrencilerin öğrenmelerinde kolaylık sağladığı ve derse olan ilgilerini arttırdığı, dersi eğlenceli hale getirdiği ve motive edici olduğu belirlenmiştir.

Beyatlı Ak (2019) tarafından yapılan "Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Tam Sayılarla Toplama ve Çıkarma İşlemlerine Yönelik Konu Alan Bilgilerinin İncelenmesi" başlıklı araştırmada, ortaokul matematik öğretmenlerinin matematiksel bilgi modeli kapsamında tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerine yönelik konu alan bilgileri incelenmiştir. Nitel araştırma desenlerinden çoklu durum çalışması kullanılan bu araştırmada, ortaokulda görev yapan ve amaçlı örnekleme yöntemi ile belirlenen iki matematik öğretmeni ile görüşmeler yapılmış ve öğretmenlerin ders süreçleri video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Araştırma sonuçlarına göre ortaokul matematik öğretmenlerinin konu alan bilgilerindeki eksikliklerinin daha çok özel alan bilgisi alt bileşeni üzerinde yoğunlaştığı görülmüştür. Özel alan bilgisi bağlamında öğretmenlerin; özellikle tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinin anlamlarını içeren problemlere öğretim süreçlerinde yer vermede, bu işlemleri sayı doğrusunda modellemede ve modelleme süreçlerinde tam sayının işareti ile işlemin işaretini ayırt etmede sorunlar yaşadıkları tespit edilmiştir.

Çetinkaya, Taşpınar ve Özdemir (2019) tarafından yapılan "7. Sınıf Öğrencilerinin Geliştirdikleri Matematiksel Analojilerin Değerlendirilmesi" başlıklı araştırmanın amacı; 7. sınıf öğrencilerinin geliştirdikleri matematiksel analojileri, analoji türlerine göre sınıflamak ve değerlendirmektir. 7. sınıfa devam eden 19 öğrenciye analoji kavramı hakkında verilen 13 haftalık eğitimden sonra öğrencilerden analoji geliştirmeleri istenen bu araştırma, bir durum çalışmasıdır. Araştırma sonucuna göre, öğretilen konularla ilgili özgün matematiksel analojiler geliştirilmesi istenilen öğrencilerin bunu başarıyla gerçekleştirilebildikleri görülmüştür.

Çevik (2019) tarafından yapılan "Tam Sayılar Konusunun Modellenmesine İlişkin Öğretmen Görüşleri" başlıklı araştırmanın amacı, tam sayılar konusunun modellenmesine ilişkin öğretmen görüşlerini ortaya koymaktır. Nitel araştırma yöntemlerinden örnek olay yönteminin kullanıldığı bu araştırmada; 15 ilköğretim matematik öğretmeninden yarı yapılandırılmış görüşme formu aracılığı ile toplanan veriler, betimsel analiz yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırma sonucuna göre matematik öğretmenlerinin modellemenin faydalarının farkında oldukları, eksik yönlerinin olduğunu düşünmedikleri ve farklı modelleme yöntemine ihtiyaç duymadıkları ortaya çıkmıştır.

Erdoğdu (2019) tarafından yapılan "Ortaokul 7. Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayılarla Dört İşlem Becerilerinin Yapılandırma Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı araştırmanın amacı, tam sayılar ve tam sayılarla işlemler konusuyla ilgili öğrencilerin sahip olduğu becerilerin yapılandırmacı yaklaşım bağlamında incelenmesi ve başarı durumlarının ortaya koyulmasıdır. Karma yöntemin kullanıldığı bu araştırmanın nicel kısmında 3 farklı okulda öğrenim gören 120 kız ve 120 erkek öğrenciyle; nitel kısmında ise 3 kız ve 3 erkek öğrenci ile çalışılmıştır. Uygulama sonucunda öğrencilerin en başarılı oldukları bölüm çarpma işlemi iken, en başarısız oldukları bölüm ise karma işlemler bölümü olmuştur. Araştırmanın nitel bölümünde başarı testinden elde edilen sonuçların ortalamasına göre üst, alt ve orta gruptan birer kız ve erkek öğrenci ile görüşmeler yapılmış ve öğrencilerin toplama işleminde sayıların işaretlerine göre yapılar oluşturduğu, çıkarma işleminde çıkan sayının işaretini değiştirip toplama yaptıkları, çarpma ve bölme işlemlerinde *işlemi yap, işareti belirle* şeklinde yeni yapılar oluşturduğu görülmüştür.

Küçükgencay (2019) tarafından yapılan "Tam Sayılar ve Tam sayılarla İşlemler Konularında Öğretmen ve Öğretmen Adaylarının Kullandıkları Benzetimler" başlıklı araştırma, ilköğretim matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının tam sayılar ve tam sayılarla işlemler konusunu öğretirken kullandıkları benzetimlerin arasındaki fark ve benzerliklerin, türlerinin neler olduğunu, konuya uygunluğunu, özgünlüklerini ve özgün değilse bu benzetimlerin hangi kaynaklardan öğrenildiğini belirlemeye amaçlamıştır. Araştırmada 20 matematik öğretmeninden toplanan veriler, içerik analizi ve betimsel analiz yöntemleri ile çözümlenmiş ve 10 farklı tema altında sunulmuştur. Araştırma sonucunda öğretmenlerin kullandıkları analojilerdeki hataların, hizmet süreleri ile paralel olarak arttığı, öğretmen adaylarına göre daha fazla özgün analoji üretebildikleri, en çok lisans öncesi eğitim hayatlarında edindikleri analojileri kullandıkları; öğretmen adaylarının kullandıkları analojiler ise öğretmenlerinkine göre daha az sayıda olduğu ve daha iyi yapılandırıldığı, lisans eğitimi sırasında öğrendikleri analojileri kullandıkları görülmüştür.

Aydın (2020) tarafından yapılan "Ters-Yüz Edilmiş Sınıf Modelinin Tam Sayılarla İşlemler Konusunun Öğreniminde Akademik Başarıya Etkisi" başlıklı araştırmanın amacı, ortaokul 7. sınıf öğrencilerine tam sayılarla işlemler konusunun ters yüz edilmiş sınıf yöntemi modeli ile öğretmek, araştırma süresince modelin akademik başarıya etkisini incelemek ve modele dair görüşleri ayrıntılı bir şekilde sunmaktır. 7. sınıftaki 45 öğrenciyle açıklayıcı desen modeline göre yapılan bu çalışmada, yarı-yapılandırılmış mülakat ile toplanan veriler betimsel analiz ile, akademik başarı testi ile toplanan veriler ise istatistiki yöntem kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırmanın sonucunda tam sayılarla işlemler konusunun ters yüz edilmiş sınıf yöntemi ile öğretimi, öğrencilerin akademik başarılarında anlamlı farklılık oluşturmadığı; fakat ters yüz edilmiş sınıf modelinin öğrencilerin dikkatini çekerek konuyu daha kolay öğrenmelerine ve ders boyunca daha mutlu olmalarına katkı sağladığı ortaya koyulmuştur.

Çiçek (2020) tarafından yapılan "Farklı Algısal Öğrenme Stiline Sahip Ortaokul Öğrencilerinin Tam Sayılara İlişkin Kavram Yanılgılarının Giderilmesinde Bilgisayar Destekli Matematik Öğretiminin Rolü" başlıklı araştırma, farklı algısal öğrenme stiline sahip ortaokul öğrencilerinin tam sayılar konusunda sahip olduğu kavram yanılgılarının giderilmesinde, bilgisayar destekli matematik öğretimi yönteminin etkilerini belirlemeye çalışmıştır. 23 ortaokul öğrencisiyle yapılan bu eylem araştırmasında, 6. ve 7. sınıflar için kavram yanılgı testleri ve yapılandırılmamış görüşmelerle elde edilen veriler içerik analizi ile analiz edilmiştir. Araştırma sonucuna göre öğrencilerin tam sayılar konusunda çok sayıda kavram yanılgısına sahip oldukları ve bu kavram yanılgılarının giderilmesinde Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi uygulamasının, en çok Kinestetik Algısal Öğrenme Stiline sahip olan öğrencilerde etkili olduğu belirtilmiştir.

Yürekli (2020) tarafından yapılan "Ortaokul 7.Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayılar Konusundaki İşlemlere Ait Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi ve Kavram Karikatürleri ile Giderilmesi" başlıklı araştırmanın amacı, 67 kişiden oluşan ortaokul 7.sınıf öğrencilerinin tam sayılar konusundaki kavram yanılgılarını belirlemek ve bu yanılgıları kavram karikatürleri ile gidermektir. Durum çalışması olan bu araştırmada, 7 adet kavram yanılgısı içeren kavram karikatürlerinden ve 5 açık uçlu sorudan oluşan iki adet kavram yanılgısı tespit testi ile toplanan veriler içerik analizi ve betimsel analiz ile analiz edilmiştir. Araştırma sonucunda, tam sayılar konusuna ait kavramlar içerisinde negatif bir tam sayıdan pozitif bir tam sayının çıkarılması, iki negatif tam sayının birbirinden çıkarılması, tam sayılarla çarpma ve tam sayıların sıfıra bölünmesi gibi işlemlerde öğrencilerin kavram yanılgılarına sahip oldukları ve kavram karikatürlerinin tam sayılarla ilgili bu kavram yanılgılarını gidermede etkili olduğu tespit edilmiştir.

Tam sayıların öğretimiyle ilgili Türkiye'de yapılan araştırmalar incelendiğinde bu araştırmalarda ele alınan konuların; tam sayı öğretiminde öğrenci başarısı, tam sayı öğretiminin kalıcılığı, öğrencilerin tutumu, tam sayı öğretiminde yaşanan zorluklar ve yapılan hatalar olduğu görülmektedir. Öte yandan bazı araştırmalarda, tam sayılar konusuyla ilgili analojilere ve kitap incelemelerine yer verildiği görülmüştür. Ayrıca, bu araştırmalarda çoğunlukla ele alınan işlemlerin toplama ve çıkarma olduğu, çarpma ve bölme işlemlerinin daha az yer aldığı söylenebilir. Bu araştırmaların örneklemlerinin genelde öğretmen, öğretmen adayları ve öğrencilerden oluştuğu; bu araştırmalarda gözlem ve görüşme formları, video ve ses kayıtlar, başarı testleri gibi veri toplama araçlarının kullanıldığı görülmektedir. Araştırma sonuçlarına bakıldığında, çeşitli matematiksel modellemelerin kullanıldığı tam sayı öğretiminde öğrenci başarılarının arttığı, tam sayılarla öğretmen ve öğrenci kaynaklı bazı sorunların ortaya çıktığı ve öğretmenlerin, tam sayılar konusundaki kavram öğretimine gereken önemi vermediği söylenebilir.

İKİNCİ BÖLÜM

2.YÖNTEM

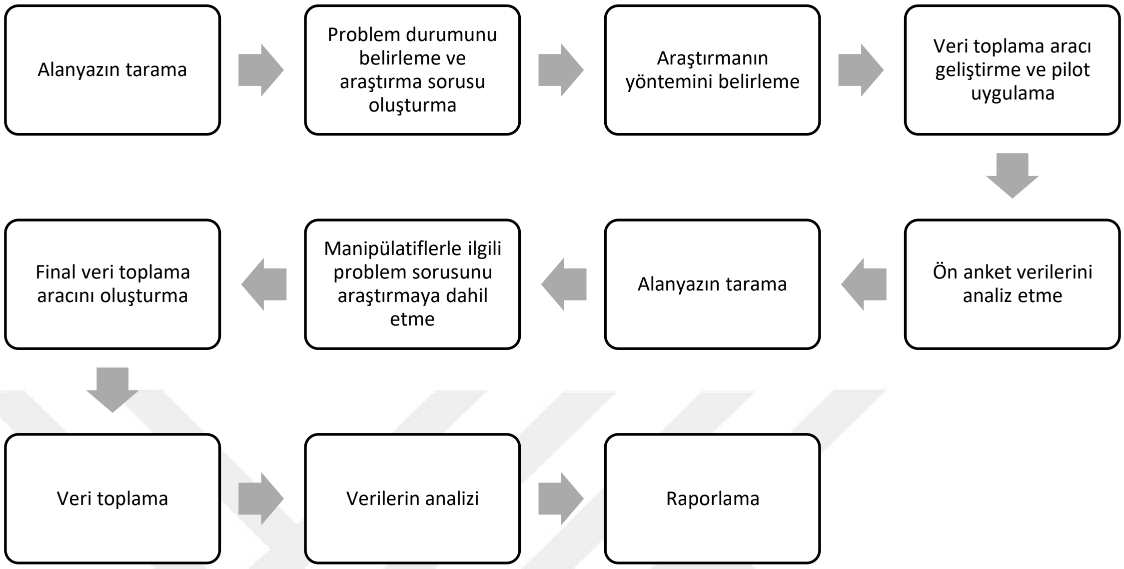
Araştırmanın bu bölümünde; araştırma deseni, araştırmanın evren ve örneklemi, veri toplama aracı, verilerin toplanması ve veri analizi yer almaktadır.

2.1.ARAŞTIRMANIN DESENİ

Bu araştırmada, ortaokul matematik öğretmenlerinin tam sayılar konusunun öğretiminde matematiksel temsil kullanma durumlarını ortaya koymak amaçlandığından; bu konunun öğretiminde yapılan uygulamaları tanımlamayı ve açıklamayı sağlaması açısından (Annells, 2006: s.55-61; Creswell ve Poth, 2016: s.130-140) nitel araştırma paradigmalarından olgubilim (fenomenoloji) kullanılmıştır. Olgubilim araştırmalarında olgularla; olaylar, deneyimler, algılar, yönelimler, kavramlar ve durumlar biçiminde karşılaşılabilir (Ilgar ve Ilgar, 2013: s.201; Yıldırım ve Şimşek, 2018: s.69). Bu araştırma modeli, bireyler tarafından farkında olunan fakat derinlemesine ve ayrıntılı bir anlayışın olmadığı olgulara odaklanmakta (Ilgar ve Ilgar, 2013: s.201; Yıldırım ve Şimşek, 2018: s.69); diğer bir deyişle, kavram veya olguların bireyin zihninde inşa edilme biçiminden daha fazlasını öğrenmeyi, kavram ve olgular hakkında daha ayrıntılı bilgi edinmeyi sağlamaktadır (Cropley, 2002: s.72). Bu araştırma, tam sayılarla işlem öğretiminde öğretmenlerin kullandıkları matematiksel temsillerin neler olduğunu ve bu temsilleri hangi sırayla kullanıldıklarını ele almaktadır. Olgubilim araştırmaları, kendi doğasına uygun bir şekilde kesin ve genellenebilir sonuçlar ortaya çıkaramasa da araştırma sonucunda ortaya çıkan örnek, açıklama ve yaşantı durumlarıyla olguların daha iyi tanınmasını ve anlaşılmasını sağlayabildiğinden (Yıldırım ve Şimşek, 2018: s.69-72), bu araştırmanın konusu olan tam sayılarla işlem öğretimdeki matematiksel temsillerin kullanımlarının daha iyi anlaşılmasını sağlayacağı düşünülmektedir. Araştırma sürecini anlatan model Şekil 12‘de sunulmuştur.

Şekil 12

Araştırma Sürecinin Modeli



Şekil 12' de görüldüğü gibi yapılan alanyazın taraması sonucunda problem durumu ortaya konulmuş ve araştırma soruları yazılmıştır. Belirlenen araştırma yöntemi ardından pilot uygulamadan elde edilen verilerinin analizine göre araştırmaya katılan öğretmenlerin manipülatifleri kullanmadığı ortaya çıkmış ve ilgili alanyazın yeniden taranmıştır. Buna göre ortaokul öğretmenlerinin genelde manipülatif özelde sayma pullarını tam sayılar konusunun öğretiminde kullanmadıkları görülmüş ve bunun gerekçelerini ortaya koymak amacıyla manipülatiflerle ilgili araştırma sorusu çalışmaya dahil edilmiştir. Ayrıca, pilot uygulamada kullanılan ön anketin analiz sonuçlarına göre final veri toplama aracı olan anket geliştirilmiştir. Veri toplama aracıyla ilgili ayrıntılı bilgi veri toplama aracı bölümünde açıklanmaktadır. Son olarak veri toplama aracından elde edilen verilerin analizi ardından raporlama yapılmıştır.

2.2. ÇALIŞMA GRUBU

Araştırmanın çalışma grubunu, Kocaeli ilinin İzmit ilçesinde görev yapan 37 ortaokul matematik öğretmeni oluşturmaktadır. Bu araştırmada, amaçlı örneklem türlerinden kolay ulaşılabilen örneklem seçilmiştir. Amaçlı örneklem, zengin bir bilgiye sahip olduğu düşünülen durumlar hakkında derinlemesine bilgi edinme amacıyla tercih edildiği için (Patton 1987, Akt. Yıldırım ve Şimşek, 2018: s.123) konuyla doğrudan ilişkili olan ortaokul matematik öğretmenleri örneklem olarak seçilmiştir. Bu örneklem türlerinden kolay ulaşılabilen örneklemin seçilme nedeni; diğer örnekleme yöntemlerini kullanma imkanın olmamasından (Yıldırım ve Şimşek, 2018: s.123) ve sınırlı kaynakları en etkili biçimde kullanabilme açısından (Palinkas, Horwitz, Green, Wisdom, Duan ve Hoagwood, 2015: s.533-544) COVID- 19 pandemi koşullarına bağlı olarak belirlenmiştir. Bu amaçla İzmit ilçesinde görev yapan ortaokul matematik öğretmenlerine ulaşılmış, aralarında çalışmaya katılmaya gönüllü olmayı kabul eden 37 matematik öğretmeni ile çalışma gerçekleştirilmiştir. Araştırmaya katılan öğretmenlerin eğitim düzeyleri ve hizmet yıllarına ait bilgiler öğretmenlere verilen kodlar eşliğinde Tablo 7'de sunulmaktadır.

Tablo 7

Katılımcıların Eğitim Düzeyleri ve Hizmet Yılları

Öğretmen Kodu	Mezuniyet Durumu	Mezun Olduğu Okul	Hizmet Yılı Aralığı
TÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	16-20
MÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	11-15
MKÖ	Lisansüstü devam ediyor	Eğitim Fakültesi	1-5
HÖ	Lisansüstü devam ediyor	Eğitim Fakültesi	6-10
DÖ	Lisansüstü	Eğitim Fakültesi	16-20
ÖÖ	Lisansüstü devam ediyor	Eğitim Fakültesi	6-10
SÖ	Lisansüstü devam ediyor	Eğitim Fakültesi	6-10
SHÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	6-10
SVÖ	Lisansüstü devam ediyor	Eğitim Fakültesi	11-15
AÖ	Lisansüstü devam ediyor	Eğitim Fakültesi	1-5
MAÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	11-15
NÖ	Lisans	Fen- Edebiyat Fakültesi (Pedagojik formasyon eğitimi almış)	16-20
İÖ	Lisansüstü devam ediyor	Eğitim Fakültesi	6-10
MYÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	1-5
SÖÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	6-10
EÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	11-15
BÖ	Lisansüstü devam ediyor	Eğitim Fakültesi	6-10
ŞÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	16-20
AAÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	16-20
ABÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	6-10
EAÖ	Lisansüstü	Eğitim Fakültesi	6-10
MLÖ	Lisans	Fen- Edebiyat Fakültesi (Pedagojik formasyon eğitimi almış)	21-25
BAÖ	Lisansüstü	Eğitim Fakültesi	6-10
PÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	6-10
DAÖ	Lisansüstü devam ediyor	Eğitim Fakültesi	1-5
MSÖ	Lisansüstü	Eğitim Fakültesi	11-15
MMÖ	Lisansüstü	Eğitim Fakültesi	6-10
AKÖ	Lisansüstü	Eğitim Fakültesi	6-10
MGÖ	Lisans	Fen- Edebiyat Fakültesi (Pedagojik formasyon eğitimi almış)	21-25
BOÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	11-15
DKÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	6-10
BKÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	6-10
EGÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	6-10
MCÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	6-10
CKÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	6-10
CÖ	Lisans	Eğitim Fakültesi	21-25
EHÖ	Lisansüstü devam ediyor	Eğitim Fakültesi	1-5

Tablo 7'ye göre araştırmaya katılan öğretmenlerin 21'i lisans, 5'i lisansüstü mezunu iken 10 katılımcı lisansüstü eğitimine devam etmektedir. Lisans mezunu olanların 18'i eğitim fakültesinden, 3'ü fen- edebiyat fakültesinden mezundur. Fen- edebiyat fakültesi mezunlarının tamamı pedagojik formasyon eğitimi almıştır. Araştırmaya katılan öğretmenlerin meslekteki kıdemlerine bakıldığında ağırlıklı olarak 6-10 yıllık aralıkta 18 kişi, 11-15 yıllık aralıkta 6 kişi, 1-5 yıllık aralıkta 5 kişi, 16-20 yıllık aralıklarda 5 kişi ve 21-25 yıllık aralıkta 3 kişi bulunmaktadır.

2.3. VERİ TOPLAMA ARACI

Olgubilim araştırmalarında kullanılan başlıca veri toplama aracı görüşme olarak kabul edilse de (Yıldırım ve Şimşek, 2018: s.71) COVİD-19 pandemi süreci nedeniyle yüz yüze görüşme ile veri toplamak olanaklı olmadığından, ayrıca yüz yüze ya da çevrimiçi görüşmelerde öğretmenlerin anket formlarında yer alan işlemlerin çözümünü yapabilmeleri olanaklı olmayacağından, bu araştırmada veri toplama aracı olarak açık uçlu sorulardan oluşan anket formu kullanılmıştır. Pilot çalışma sonrası hazırlanan anket formunda öğretmenlerin tam sayıların öğretiminde ders içi uygulamalarını belirlemeye dönük genel sorular ve tam sayılarla işlemlerin öğretiminde yaşanan sorunlara göre hazırlanan toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinden oluşan sorular yer almaktadır. Araştırmaya katılan öğretmenlere ders içi uygulamalarını doğrudan sormak yerine, işlemlerde gerçekleştirdikleri çözümler üzerinden dolaylı olarak ders içi uygulamalarını ortaya koymak amaçlanmıştır.

Araştırmada kullanılan veri toplama aracının oluşturulması iki aşamadan oluşmaktadır. 8 öğretmen ile gerçekleştirilen pilot çalışmada öğretmenlere tam sayılarla işlemlerin öğretiminde sınıf içi uygulamalarını belirlemeye dönük açık uçlu sorular sorulmuş (Ek 2’de sunulmaktadır), verdikleri yanıtların analizi ve alanyazının bu doğrultuda yeniden incelenmesi sonucunda final anket formu oluşturulmuştur. Final anket formunda (Ek 3’te sunulmaktadır) katılımcılarla sınıf içi uygulamalarını doğrudan sormak yerine, tam sayıların öğretiminde sorun yaşanan işlemler bağlamında toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri verilmiş ve bu işlemlerin öğretimini nasıl gerçekleştirdikleri sorulmuştur. Buradaki amaç, katılımcıların kullandıkları temsilleri ve temsil sıralarını gerçekleştirdikleri çözümler aracılığıyla ortaya koymaktır.

Ankette yer alan tam sayılarla ilgili işlemlerin belirlenmesine yönelik belirtke tablosu Ek 1’de sunulmaktadır. Anket formlarının ön ve final hali, Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesinde matematik öğretimi alanında görev yapan dört matematik öğretimi uzmanı ile iki ölçme- değerlendirme uzmanından alınan görüşler ve 8 kişiyle gerçekleştirilen pilot uygulamaya göre yapılan düzeltmeler sonucunda oluşturulmuştur. Ankette yer alan işlemlere yönelik sorular aşağıdaki gibidir:

- (-3)+ (+2): İşaretleri farklı iki tam sayının toplamı
- (-4)-(-5) : İki eksi (-) işaretinin yan yana gelmesinin anlamı, mutlak değerce küçük tam sayıdan büyüğünün çıkarılması, iki negatif tam sayının farkı.
- -2-7: Çıkan sayının işaretinin gizliliği, negatif bir tam sayıdan pozitif bir tam sayının çıkarılması.
- (+4) . (–2): İşaretleri farklı iki tam sayının çarpımı
- (–2) . (–5): İki negatif tam sayının çarpımı
- (+10) : (–2): İşaretleri farklı iki tam sayının bölümü
- (–20) : (–5): İki negatif tam sayının bölümü

Her bir işlemin altında yer alan sorularla öğretmenlerin;

- hangi temsilleri kullandıklarını,
- temsilleri kullanma sırasını,
- temsil örnekleriyle yaptığı çözümleri açıkça göstermeleri,
- manipülatif temsillerin kullama ve kullanmama gerekçelerini,
- alternatif (öğrencilerin güçlük yaşadıkları durumlarda) temsil kullanımlarının neler olduğunu ortaya koymak amaçlanmıştır.

2.4.VERİLERİN TOPLANMASI

Anketler genel olarak yüz yüze, e posta/posta aracılığıyla, telefonla ve gözlem altında yapılarak uygulanmaktadır (Oğur ve Tekbaş, 2003: s.336-340). Bu araştırmadaki anket formları ise araştırmaya katılan ortaokul matematik öğretmenlerine elektronik posta yoluyla gönderilmiştir. Araştırmaya katılan öğretmenler yanıtlarını en erken iki gün, en geç bir hafta içinde göndermiştir. COVID-19 pandemi süreci nedeniyle yüz yüze görüşme yapmak mümkün olmadığından, online görüşmelerde ise her katılımcının işlemleri herhangi bir online sunu aracı aracılığıyla yazabilmesi mümkün olamayabileceğinden; katılımcıların kağıt üzerinde işlem yapabilmelerini sağlamak adına anketler yazılı form olarak gönderilmiştir.

2.5.VERİ ANALİZİ

Araştırmada elde edilen verilerin analizinde, nitel araştırma yöntemlerinden içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizinde amaç, elde edilen verileri mantıklı bir biçimdeki temalar ve bunların altında oluşturulan kodlarla gruplandırılarak ortaya çıkan kavramları ve bunlarla ilgili ilişkileri derinlemesine açıklamaktır. Söz konusu temalar, elde edilen verilerin düzenlenmesiyle oluşturulabileceği gibi araştırma doğrultusunda dikkate alınan kavramsal çerçeveyle de belirlenebilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2018: s.242-244). Benzer şekilde Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel (2016: s.250) de içerik analizinde oluşturulan tema ve kodlarla kavramların varlığının, anlamlarının ve ilişkilerinin belirlendiğini söylemektedir.

Bu araştırmada elde edilen veriler, kavramsal çerçevesi Lesh (1981) tarafından geliştirilen ve Nakahara (2008: s.2-9) tarafından güncellenen matematiksel temsil sınıflandırmasındaki sembolik, dilbilimsel, görsel, manipülatif ve gerçekçi temsil temalarıyla analiz edilmiştir. Belirtilen temaların altında oluşturulan kodlar, kavramsal olarak birbiriyle alakalı olacak şekilde gruplandırılarak tablolar halinde sunulmuştur. Bu tablolarla ortaya koyulan veriler ise ilgili araştırma sorusu doğrultusunda derinlemesine ele alınmıştır. Araştırmada gerçekleştirilen içerik analizi dört aşamada gerçekleştirilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2018: s.243-252):

1. Verilerin kodlanması
2. Temaların bulunması
3. Kodların ve temaların düzenlenmesi
4. Bulguların tanımlanması ve yorumlanması

İçerik analizinde veriler üç şekilde kodlanmaktadır. Bunlar: (a) daha önceden belirlenmiş çerçeveye göre yapılan kodlama, (b) verilerden çıkarılan kavramlara göre kodlama ve (c) genel bir çerçeve içinde yapılan kodlamadır. Genel bir çerçeve içinde yapılan kodlamalarda verilerin analizinden önce genel bir kavramsal bir yapı mevcut olmakta ve çıkan yeni kodlar listeye eklenebilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2018:

s.243-252). Bu araştırmada temsil sınıflandırması alanyazına dayalı olarak gerçekleştirildiğinden, *daha önceden belirlenmiş çerçeveye göre yapılan kodlama* kullanılmıştır. Araştırmadaki veriler, tarafsız bir matematik öğretim uzmanıyla birlikte alanyazındaki kavramsal çerçeveye bağlı kodlanmış, bu kodların oluşturan kategoriler belirlenmiş ve kategoriler temalara yerleştirilmiştir. Belirtilen temalar, kategoriler ve kodlara ilişkin bilgiler Tablo 8'de sunulmaktadır:

Tablo 8

Tam Sayılarla İşlemlerde Matematiksel Temsillere Ait Tema, Kategori ve Kodlar

Tema	Kategori	Kod	
Sembolik	Temel semboller	Artı (+), eksi (-), eşittir (=), çarpı (.), bölü (:), parantez, sayılar	
	İşaretleri dönüştürme	-(-) nin, +(+)' ya dönüşmesi -(+)' nın, +(-)' ye dönüşmesi -(-)' nin (+)' ya dönüşmesi	
	İşaretlerin etkileşimi	İşaretlerin çarpımı İşaretlerin bölümü	
	Sayıların ve işaretlerin ayrı ele alınması	İşaret ve sayı çarpımına yönelik eşitlikler İşaret ve sayı bölümüne yönelik işaretler	
	Örüntü	Örüntü kuralı	
Dilbilimsel	Eski konuları hatırlama	Tam sayıların yönlü sayılar olması Tam sayıların gerekliliği Konuyu genel hatırlatma	
	İşlem kuralı	Toplama işleminin kuralı Çıkarma işleminin kuralı Çarpma işleminin kuralı	Bölme işleminin kuralı Aynı işaretlerin toplanıp ortak işaretin yazılması
	İşlemin kavramsal anlamı	Toplama işleminin anlamı Çıkarma işleminin anlamı	Çarpma işleminin anlamı Bölme işleminin anlamı
	İşaret dönüşümleri	Yan yana gelen işaretleri, tek işarete dönüştürme Yan yana gelen işaretleri iki işarete dönüştürme Parantezli yazılabilme Çıkan sayının işaretinin gizliliği Çıkarma işlemi işaretinin çıkan sayıya ait olması	
	Sayıların ve işaretlerin ayrı ele alınması	İşaretleri ve sayıları ayrı çarpma İşaretleri ve sayıları ayrı bölme Sayıların mutlak değerce çarpılması Sayıların mutlak değerce bölünmesi İşlemdeki eksi (-) işaretiyle sonuç işareti belirleme Doğal sayılardaki gibi çarpılması Doğal sayılardaki gibi bölünmesi	
	Başka işlemden yararlanma	Çıkarma işleminden yararlanma	
Görsel	Sayma pulu modeli	Sayma pulu çizimi	
	Sayı doğrusu modeli	Sayı doğrusu çizimi	
	Tablo	İşaret etkileşim tablosu	
Manipülatif	Sayma pulu modeli	Sayma pulu materyali	
Gerçekçi	Benzeşim	Futbol takımı Ateş ve su topu Pet bardak oyunu Çarkmat oyunu Trafik polisi Kız-erkek	Dost-düşman Yüz ifadesi İşaretlerin anlaşması Sayma pullarını canlandırma Kıskanç Kız-erkek ve mutlu- mutsuz
	Yatay- dikey hareket	Asansör Denizaltı Adımlama Nesne hareketi Merdiven	Sıcaklık Aşağı- yukarı İleri- geri Robotik kodlama Termometre
	Para hesabı	Borç- alacak/ kazanç Kar- zarar	Alacak- verecek Kredi kartı ekstresi

Tablo 8’de görülen temsil sınıfları ve kodları, kavramsal çerçeve doğrultusundaki temalar çerçevesinde oluşturulmuş ve araştırmada elde edilen verilerin analizinde kullanılmıştır. Tablo 8’de görülen taslak doğrultusunda, tam sayılarla işlemlerin çözümüyle ilgili bulgulardaki tablolarda yer alan kod, kategori ve temaların sağındaki parantez içinde yazan sayılar, ilgili kodun kullanılma sayısını vermektedir. Kodların kullanılma sayılarının toplamıyla kategorilerin, kategorilerin kullanılma sayılarının toplamıyla da temaları kullanılma sayılarına ulaşılmaktadır. Katılımcılar işlem çözümlerinde birden fazla temsil kullandıklarından kategorilerin ve temaların sağında yazan sayılar araştırmaya katılan katılımcıların sayısından fazladır.

2.5.1.Kodlama

Araştırmada yapılan kodlamalar ve kodları oluşturan kategoriler hakkındaki açıklamalar aşağıdaki gibidir.

Sembolik Temsil Sınıfa Ait Açıklamalar

Bu temadaki kodlar temel matematiksel semboller ve bu sembollerden oluşturulan içeriklerden oluşmaktadır. Bunlara ilişkin açıklamalar aşağıdaki gibidir.

- Temel semboller: Tam sayılarla işlemlerde kullanılan artı (+), eksi (-), eşittir (=), çarpı (.), bölü (:), parantez, sayı gibi temel matematiksel sembollerdir.
- İşaretleri dönüştürme: Tam sayılarla çıkarma işlemlerinde yan yana gelen işaretlerin toplamaya dönüştürülmesiyle ilgilidir.
- İşaretlerin etkileşimi: Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerinde sonuç işaretlerini belirlemeye yönelik işleme giren sayı işaretleriyle ilgilidir.
- Sayıların ve işaretlerin ayrı ele alınması: Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerinde sonucu ve sonuç işaretlerini belirlemeye yönelik yazılan eşitliklerdir.
- Örüntü: Tam sayılarla çarpma işlemi öğretiminde iki negatif tam sayının pozitif olma sebebini açıklayan bir örüntü kuralıdır.

Dilbilimsel Temsil Sınıfa Ait Açıklamalar

Bu temada yer alan kodlar, tam sayılarla dört işlem öğretiminde kullanılan matematiksel dille ilgili içeriklerdir. Bunlara ilişkin açıklamalar aşağıdaki gibidir.

- Eski konuları hatırlatma: 6.sınıf düzeyinde tam sayılar konusunda öğrenilen kazanımları hatırlatmayla ilgilidir.
- İşlem kuralı: Tam sayılarla dört işlemin öğretimini anlatan genel kural ifadeleridir.
- İşlemin kavramsal anlamı: Tam sayılarla dört işlem öğretiminde her bir işlemin kavramsal anlamıyla ilgili ifadelerdir.
- İşaret dönüşümleri: Tam sayılarla çıkarma işlemlerindeki yan yana gelen iki işaretin dönüşümü ve çıkan sayının işaretinin gizliliğiyle ilgidir.
- Sayıların ve işaretleri ayrı ele alınması: Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerinde sonuç işaretlerini belirlemeye yönelik işleme giren sayıları ve işaretleri çarpma-bölmeye yönelik ifadelerdir.
- Başka işlemden yararlanma: Tam sayılarla bölme işlemi öğretiminde, çıkarma işleminden yararlanmayla ilgilidir.

Görsel Temsil Sınıfına Ait Açıklamalar

Bu temada yer alan kodlar, tam sayılarla dört işlem öğretiminde kullanılan model çizimleri ve tablodan oluşmaktadır. Bunlara ilişkin açıklamalar aşağıdaki gibidir.

- Sayma pulu modeli: Artı (+) ve eksi (-) işaretlerinin kullanıldığı sayma pulu modeli çizimleridir.
- Sayı doğrusu modeli: Matematik öğretimindeki bilinen sayı doğrusu modeli çizimleridir.
- Tablo: Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerinin öğretiminde sonuç işaretini belirlemeye yönelik çizilen tablodur.

Manipülatif Temsil Sınıfına Ait Açıklamalar

Bu temada yer alan kod, tam sayılarla dört işlem öğretiminde kullanılan sayma pulu modelinin somut materyal olarak kullanım biçimiyle ilgilidir.

Gerçekçi Temsil Sınıfına Ait Açıklamalar

Bu temada yer alan kodlar, tam sayılarla dört işlem öğretiminde kullanılan gerçek hayat durumuna ilişkin bazı modellerden oluşmaktadır. Bunlara ait açıklamalar aşağıdaki gibidir.

- Benzeşimler: Tam sayılarla işlem öğretiminde işlemleri modellemeye, işlemlerdeki işaret dönüşüm ve etkileşimlerini açıklamaya yönelik gerçek hayat örnekleridir.
- Yatay- dikey hareket: Tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinin yatay ve dikey harekete bağlı bazı gerçek hayat örnekleriyle açıklanabildiği örneklerdir.
- Para hesabı: Tam sayılarla işlem öğretiminde para hesaplamalarının yer alabildiği gerçek hayat örnekleridir.

2.6.GEÇERLİK VE GÜVENİLİRLİK

Araştırmada hem pilot çalışmada hem de asıl çalışmada kullanılan veri toplama aracı, Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesinde matematik öğretimi alanında görev yapan dört matematik öğretimi uzmanı ile iki ölçme-değerlendirme uzmanından alınan görüşler doğrultusunda oluşturulmuştur. Araştırmada elde edilen veriler daha önceden var olan matematiksel temsil sınıfları çerçevesinde analiz edilmiştir. Kodlara ilişkin açıklamalar, bazı katılımcıların doğrudan alıntılarını içermekte ve bu alıntılar katılımcıların gizli kalması amacıyla onlara verilen kodlar eşliğinde sunulmaktadır.

Araştırmada elde edilen veriler çözümlenirken kodlar ve kategoriler araştırmacı ile tarafsız bir matematik öğretim uzman tarafından ayrı ayrı oluşturulmuş ve temalara yerleştirilmiştir. İki kodlayıcı arasında belirlenen çıkarma işlemindeki işlem kuralı ile işaret dönüşümleriyle ilgili bazı farklı kodlarda ortak fikre varılmış veya iki kodlayıcının kodları da iptal edilerek yenileri oluşturulmuş; bazı para hesabı ve yatay- dikey hareket kategorisindeki bazı kodların yerleşiminde hem fikir olunarak uygun temalara yerleşim sağlanmıştır (Miles, Huberman ve Saldana 1994). Yapılan kodlamalarda aynı sayıda çıkan toplam kodlama sayısının, farklı sayıda çıkan kodlama sayısına oranı hesaplanmış ve kodlayıcı güvenirliği %91 olarak belirlenmiştir. Ayrıca, araştırma sorularıyla ilgili olmayan veriler dikkate alınmamış ve veri karışıklığı engellenmiştir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3.BULGULAR

Araştırmanın bu bölümünde bulgular araştırma soruları doğrultusunda sunulmaktadır.

3.1. TAM SAYILARLA İŞLEM ÖĞRETİMİNDE ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN KULLANDIKLARI MATEMATİKSEL TEMSİLLERE YÖNELİK BULGULAR

Araştırmanın bu bölümünde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinde ortaokul matematik öğretmenlerinin kullandığı matematiksel temsillere yönelik bulgular yer almaktadır.

Tam Sayılarla Toplama İşlemindeki Matematiksel Temsillere Yönelik Bulgular

Araştırmaya katılan öğretmenlerin tam sayılarla toplama işleminin öğretiminde kullandıkları temsiller Tablo 9’da sunulmaktadır:

Tablo 9

Toplama İşleminde Kullanılan Matematiksel Temsiller

Tema	Kategori	Kodlar (-3)+(+2)
Sembolik	Temel semboller	Artı (+), eksi (-), eşittir (=), sayılar. (37)
Dilbilimsel	Eski konuları hatırlatma	Tam sayıların yönlü sayılar olması (6)
		Tam sayıların gerekliliği (3)
		Konuyu genel hatırlatma (3)
	İşlem kuralı	Toplama işlemi kuralı (18)
	İşlemin kavramsal anlamı	Toplama işleminin anlamı (1)
Görsel	Sayı doğrusu modeli	Sayı doğrusu çizimi (14)
	Sayma pulu modeli	Sayma pulu çizimi (5)
Manipülatif	Sayma pulu modeli	Sayma pulu materyali (18)
Gerçekçi	Para hesabı	Borç- alacak (18) Kar- zarar (5) Alacak- verecek (3) Kredi kartı ekstresi (1)
	Yatay- dikey hareket	Asansör (7) Denizaltı (1) Adımlama (2) Nesne hareketi (2) Sıcaklık (4) Aşağı- yukarı (1) İleri- geri (1)
	Benzeşim	Futbol takımı (1) Ateş ve su topu (1) Pet bardak oyunu (1) Çarkmat oyunu (1) Sayma pullarını canlandırma (1)

Not. İşlemlerin çözümünde birden fazla temsil kullanıldığından katılımcı öğretmen sayısından fazla temsil sayısı bulunmaktadır.

Tablo 9'da görüldüğü gibi toplama işlemindeki öğretmen çözümlerinde yer alan matematiksel temsillerin kullanım sayılarına göre sırası; gerçekçi, sembolik, dilbilimsel, görsel ve manipülatif temsillerdir. Araştırmaya katılan öğretmenlerden gerçekçi, görsel ve manipülatif temsil örneklerini kullananların yarıya yakını, toplama işlemi kuralını sözel olarak belirtmeden yaptıkları modellemeler aracılığıyla öğretmektedir. Öğretmenlerin toplama işleminde en fazla sayıda kullandığı gerçekçi temsil örnekleri para hesabıyla yapılmakta ve bunlar arasından en fazla kullanılan borç-alacak örneğidir. Öğretmenlerden bazıları borç-alacak örneğindeki *alacak* kelimesi yerine *kazanç* ifadesini kullanmaktadır. Para hesabı kategorisine ait borç-alacakla ilgili gerçekçi temsil örneği aşağıda sunulmuştur.

AÖ: *"…Ör: (-3)+(+2) işlemini açıklarken 3 lira borcum var 2 lira para kazanırsam borç ve param ne durumda olur diye soruyorum…"*

Yatay- dikey harekete bağlı gerçek hayat durumu örnekleri arasında en fazla kullanılan örnek *asansör* örneğidir. Bunlar arasında yer alan *adımlama* ve *nesne hareketi* ise yere ya da tahtaya çizilen sayı doğrusu üzerinde ilerleme biçiminde yapılan bir modelleme örneğidir. Yatay- dikey hareket kategorisine ait asansörle ilgili gerçekçi temsil örneği aşağıda sunulmuştur.

MYÖ: *"…Günlük hayattan asansör örneği verdiğimde daha net anlaşılıyor. Örneğin -3. Kattasınız, 2 kat yukarı çıkmak isterseniz kaçıncı katta olursunuz? gibi örnekler veriyorum."*

Toplama işlemi öğretiminde öğretmenler tarafından en az kullanılan kategorilerden biri benzeşimdir. Araştırmaya katılan öğretmenler benzeşimleri, işaretleri farklı ya da aynı olan iki tam sayının toplamının öğretiminde zıt işaretleri temsil eden gerçek hayat durumlarıyla veya içerisinde tam sayıların toplamıyla benzerlik göstererek oluşturulan oyunlar şeklinde kullanılmaktadır. Katılımcıların kullandığı benzeşimler aşağıdaki gibi özetlenmektedir.

- Futbol takımı benzeşiminde, işaretleri aynı olan iki tam sayının toplamı, aynı takım oyuncularına benzetilerek öğretilmektedir.
- Ateş ve su topu benzeşiminde, ateş topu eksi (-), su topu artı (+) ile temsil edilerek işlemler yapılmaktadır.
- Pet bardak oyunu; tabanlarına tam sayılar yazılmış pet bardakların, karton üzerine yazılı işlem sonuçlarıyla eşleştirilerek oynanmaktadır.
- Çarkmat oyunu; bir çarkın ortasında yer alan işlemin, çarkın kenarında yer alan tam sayılardan biriyle eşleştirilerek oynanmaktadır.
- Sayma pullarını canlandırma; artı (+) ve eksi (-) işaretleri temsil eden kız ve erkek öğrenciler, sayma pulları görevini alarak sınıfta işlemleri canlandırmaktadır.

Öğretmenlerin toplama işlemi öğretiminde kullandığı sembolik temsil örnekleri temel matematiksel sembollerden oluşmaktadır. Bu semboller sadece işlemi temsil etmede ve işlemin sonucunu göstermede kullanılmaktadır. Bu durumla ilgili bir örnek aşağıda sunulmuştur.

HÖ: *"…Yani (-1) tam sayısına ulaşırız. (-3) + (+2)= (-1)…"*

Dilbilimsel temsil örneklerinden en fazla kullanılan ifade toplama işleminin kuralıdır. Öğretmenler tarafından belirtilen toplama işlemi kuralı, işaretleri aynı ve farklı olan iki tam sayının toplamı olarak iki durum şeklinde ele alınmaktadır. Bu kuralı öğrettiğini söyleyen öğretmenlerin çoğunun mutlak değer kavramını kullanmadığı görülmektedir. Toplama işlemi kuralıyla ilgili örnek aşağıda sunulmuştur.

BÖ: *"…'Aynı işaretli tam sayılar toplanırken sayıların mutlak değeri toplanır işaret toplanan sayılarla aynı olur. Farklı işaretli sayılar toplanırken mutlak değeri büyük olan sayıdan mutlak değeri küçük olan sayı çıkarılır işaret mutlak değeri büyük olan sayıyla aynı olur.' bilgisini vererek çeşitli örnekler çözdürüyorum…"*

Toplama işlemine başlamadan önce tam sayılarla ilgili 6.sınıfta öğrenilenleri hatırlatan bazı öğretmenlerin tam sayıların işaretlere bağlı olarak yönlü olduğunu, doğal sayılarla yapılan bazı işlemlerin yetersizliğini giderdiğini ve bazılarının ise tam sayılarla ilgili ayrıntılı bir bilgi vermeden hatırlattığını belirtmektedir. Araştırmaya katılan öğretmenlerin büyük çoğunluğunu toplama işlemi öğretiminden önce tam sayılarla ilgili eski bilgileri hatırlatmadığı görülmektedir. Toplama işleminin anlamını açıklayan tek bir katılımcı (MLÖ) bulunmakta ve bu durumla ilgili bir örnek aşağıda sunulmuştur.

MLÖ: *"…Sayma pulu kullanıyorum, toplamanın birleştirmek çıkarmanın da eksiltmek olduğunu anlatıyorum…"*

Toplama işlemi öğretiminde kullanılan görsel temsiller sayı doğrusu ve sayma pulu modelinin çizimleridir. Sayma pulu modeli, yuvarlaklar içindeki artı (+) ve eksi (-) işareti çizimleriyle yazı tahtasında veya akıllı tahtadaki sanal ortamda modellenmektedir. Sayı doğrusu modelini kullanan öğretmenlerin çoğu farklı işaretleri tam sayıların toplamında yön kavramını açıklamak için sayı doğrusu modelini kullanmaktadır. Sayı doğrusu modelinin kullanımına ait bir örnek aşağıda sunulmuştur.

MGÖ: *"…Toplama işlemini anlatırken aynı işaretli olan tam sayıların toplama işleminde öğrenciler çok sıkıntı çekmiyorlar. Ancak farklı işaretli olan tam sayıların toplama işlemini kavramalarını sağlamak için daha çok sayı doğrusu üzerinde yön belirterek işlem sonucunu kavramalarını sağlıyorum…"*

Toplama işlemi öğretiminde kullanılan manipülatif temsil (sayma pulları) yuvarlak biçimdeki karton, kağıt, mıknatıs gibi nesnelerin üzerinde yazılan artı (+) ve eksi (-) işaretleri şeklinde tasarlanarak kullanılmaktadır. Öğretmenler genel olarak bu modeli, (+1) ve (-1)' in birbirini nötrlemesinde kullanmaktadır. Materyal veya çizim şeklinde sayma pulu modelini kullanan öğretmenlerin bütünü göz önüne alındığında, araştırmaya katılan öğretmenlerin çoğunluğunun toplama işleminde sayma pullarını kullandığı görülmektedir. Sayma pullarının kullanımıyla ilgili örnek aşağıda sunulmuştur.

DAÖ: *"… Sayma pullarıyla da zıt işaretli sayıların toplamını yapıyoruz. Bir artının bir eksiyi nötr yaptığı şeklinde. Daha sonra kalan işaretli pulları sayıp sonuca ulaşıyoruz…"*

Araştırmaya katılan öğretmenlerin yarısından fazlasına göre (21) çoğu öğrenci toplama işlemini anlamakta sorun yaşamamaktadır. Öğretmenlerden birinin (MGÖ) görsel temsil örneklerinden sayı doğrusu modeliyle somut bir şekilde öğretim yaptıktan sonra anlamayanlar için sembolik ve dilbilimsel temsil örnekleriyle soyut bir şekilde tekrar öğretim yapmaktadır. Belirtilen durumlara yönelik örnekler aşağıda sunulmuştur.

TÖ: *"…Toplama işleminde herhangi bir problem yaşamıyoruz. Konu çabuk anlaşılıyor…"*

EAÖ: *"..Pozitif tam sayılarla toplama işlemini anlatırken doğal sayılarla kolaylıkla toplama işlemi yaptıkları için hemen kavrayabiliyorlar…"*

MGÖ: *"…Toplama işlemini anlatırken aynı işaretli olan tam sayıların toplama işleminde öğrenciler çok sıkıntı çekmiyorlar. Ancak farklı işaretli olan tam sayıların toplama işlemini kavramalarını sağlamak için daha çok sayı doğrusu üzerinde yön belirterek işlem sonucunu kavramalarını sağlıyorum. Bu kısım ile ilgili bol örnek yapınca bir müddet sonra artık öğrenciler toplama işlemini yaparken çok fazla zorluk çekmiyorlar."*

Tam Sayılarla Çıkarma İşlemindeki Matematiksel Temsillere Yönelik Bulgular

Araştırmaya katılan öğretmenlerin tam sayılarla çıkarma işleminin öğretiminde kullandıkları temsillere yönelik bulgular Tablo 10'da sunulmaktadır:

Tablo 10

Çıkarma İşlemi Öğretiminde Kullanılan Matematiksel Temsiller

Tema	Kategori	Kod	
		(-4)-(-5)	**-2-7**
Sembolik	Temel semboller	Artı (+), eksi (-), eşittir (=), sayılar (37)	
	İşaretleri dönüştürme	-(-) nin, +(+)' ya dönüşmesi (21) -(-)' nin (+)' ya dönüşmesi (10)	-(+) nın, +(-)' ye dönüşmesi (14)
Dilbilimsel	İşlemi kuralı	Çıkarma işlemi kuralı (20)	Çıkarma işlemi kuralı (11)
	İşaret dönüşümleri	Yan yana gelen işaretleri, tek işarete dönüştürme (16) Yan yana gelen işaretleri iki işarete dönüştürme (10)	Çıkan sayının işaretinin gizliliği (14) Çıkarma işlemi işaretinin çıkan sayıya ait olması (14) Parantezli yazılabilme (7)
	İşlemin kavramsal anlamı	Çıkarma işleminin anlamı (1)	Çıkarma işleminin anlamı (1)
Görsel	Sayı doğrusu modeli	Sayı doğrusu çizimi (12)	Sayı doğrusu çizimi (12)
	Sayma pulu modeli	Sayma pulu çizimi (4)	Sayma pulu çizimi (5)
Manipülatif	Sayma pulu modeli	Sayma pulu materyali (18)	Sayma pulu materyali (11)
Gerçekçi	Para hesabı	Borç- alacak/ kazanç (10) Kar-zarar (1)	Borç- alacak/ kazanç (12)
	Benzeşim	Sayma pullarını canlandırma (1) Trafik polisi (1) Kıskanç (1) Dost- düşman (3)	Trafik polisi (1)
	Yatay- dikey hareket	Asansör (1) Adımlama (2) Robotik kodlama (1) Nesne hareketi (1)	Termometre (2) Merdiven (1) İleri- geri (1) Robotik kodlama (1) Nesne hareketi (1)

Not. İşlemlerin çözümünde birden fazla temsil kullanıldığından katılımcı öğretmen sayısından fazla temsil sayısı bulunmaktadır.

Tablo 10'a göre çıkarma işlemlerindeki öğretmen çözümlerindeki yer alan matematiksel temsillerin kullanılma sayılarına göre sırası; dilbilimsel, sembolik, gerçekçi, görsel ve manipülatiftir. Çıkan sayının işaretinin gizli olduğu -2-7 işleminde ise görsel temsil kullanım sayısı manipülatiflerden fazladır. Çıkarma işlemlerinin çözümünde çoğu öğretmen tarafından kullanılan sembolik temsiller, işlemlerde yan yana gelen işaretleri toplamaya dönüştürmede kullanılmaktadır. Sembolik temsillerle ilişkili olarak kullanılan dilbilimsel temsillerle bu dönüşümler açıklanmakta ve bunlara bağlı olarak çıkarma işleminin *eksilen ile çıkan sayının ters işaretlisinin toplanması* kuralı verilmektedir. Çıkan sayının işaretinin gizli olması halinde bazı öğretmenler bu durumu ve bu işlemlerle ilgili parantez kullanımını açıklamakta; bazı öğretmenler bu durumu açıklamadan doğrudan toplama işlemine dönüştürmektedir. Hatta öğretmenlerden biri, çıkan sayının işareti gizli olan çıkarma işlemlerini, toplama işleminde öğrettiğini belirtmektedir. Ayrıca, çıkarma işleminin kavramsal anlamına yönelik açıklama yapan tek öğretmenin olduğu görülmektedir. Çıkarma işlemi öğretiminde sembolik ve dilbilimsel temsillerin kullanıldığı örnekler aşağıda sunulmuştur.

AKÖ: *"Tam sayılarda çıkarma işlemi yaparken çıkarma işlemi toplamaya çevrilir ve işaretin yanındaki sayı ters işaretine dönüşür şeklinde anlatıyorum öncelikle. (–4)+(+5) oluyor…"*

MAÖ: *"-2-7 işleminin aslında (-2)-(+7) olduğunu anlatıyorum…Sayının önünde 2 tane farklı işaret varsa tek eksi (-) işaretine çevirip aradaki işareti teke düşürüyorum…"*

İÖ: *"…Sayıları paranteze almalarının karışıklığı önleyeceğini söylüyorum ve (-2)-(+7)=? Yazıyorum. Ardından işlemi (-2)+(-7)=-9 olarak toplamadan çözüyorum."*

ÖÖ: *"…Konun öğretimini ise şu şekilde yapıyorum. Çıkarmanın aslında bir fark olduğunu anlatıyorum…"*

Çıkarma işleminde kullanılan gerçekçi temsiller; para hesabı, benzeşim ve yatay- dikey harekete bağlı gerçek hayat durumu örnekleridir. Para hesabıyla ilgili borç- alacak/ kazanılan ve kar- zarar para örneğini kullanan öğretmenlerin çözümleri incelendiğinde, borcun eksi (-), alacak/ kazanılan paranın artı (+) işaretiyle temsil edildiği ifade edilse de; öğretmenler tarafından bu temsil örneğiyle yapılan çıkarma işlemi çözümleri kural gereği toplamaya çevrilmekte ve sonrasında bu temsille modellenmektedir. Borç- alacak/ kazanılan parayla ilgili örnekler aşağıda sunulmuştur.

AÖ: *"Tam sayılarda çıkarma işlemi yaparken çıkarma işlemi toplamaya çevrilir ve işaretin yanındaki sayı ters işaretine dönüşür şeklinde anlatıyorum öncelikle.*

(–4)+(+5) olarak sonra burada da borç para-kazanılan para aynı cepte mantığı ile düşünüyoruz: 4lira borcum var 5lira param var o zaman ne kadar param vardır?...”

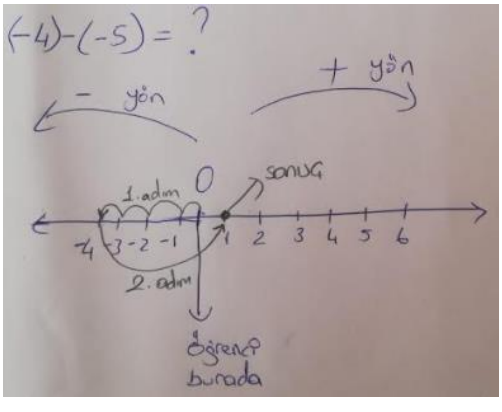
Çıkarma işlemi öğretiminde kullanılan benzeşimlerden trafik polisi ve dost-düşman örnekleri işlemlerde yan yana gelen işaret dönüşümlerini hatırlatmaya ve sayma pullarını canlandırma ise sayma pullarıyla yapılan modellemeyi öğrencilerle gerçekleştiren bir etkinliktir. Benzeşimler arasındaki dost- düşman örneğine ait örnekler aşağıda sunulmuştur.

EÖ: *“Düşmanımın düşmanı dostumdur, ifadesiyle yan yana gelen iki eksi (-) işaretini artıya(+), yani (-4)-(-5) işlemine (-4)+(+5) dönüştürerek çözüm yapıyorum…”*

Yatay- dikey harekete bağlı gerçek hayat durumlarına ait temsil örnekleri; robotik kodlama, asansör, adımlama ve nesne hareketidir. Yatay- dikey hareket örneklerinin yer aldığı işlem çözümleri incelendiğinde; neredeyse bütün öğretmenler işlemi toplamaya dönüştürdükten sonra veya çıkarma işlemine ait eksi (-) işaretiyle örneklerdeki nesne veya kişilerin yönünü değiştirdikten sonra modelleme yapmaktadır. Adımlama örneğine ait çizim Şekil 13’de görülmekte ve bununla ilgili örnek aşağıda sunulmuştur.

Şekil 13

SÖÖ Kodlu Öğretmeninin Adımlama Örneği

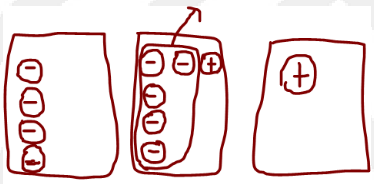


SÖÖ: *“…4 adım negatif yönde geri gidiyoruz. Daha sonra -5 olduğundan tekrar negatif yönde 5 adım gitmemiz gerekirken, çıkarmanın eksisinden dolayı ters yönde 5* *adım gidiyoruz. Ya da aradaki – bizim geri dönmemizi istiyor geri dönüp 5 adım ilerliyoruz diyorum. Birkaç örnekle oturuyor...”*

Çıkarma işleminde kullanılan görsel temsil örnekleri sayma pulu ve sayı doğrusu modelidir. Araştırmaya katılanların yarıya yakınının kullandığı sayma puluyla çıkarma işleminin çözümünü modelleyen öğretmenlerden bazıları bu modeli doğru şekilde kullanırken, bazılarının modellemeyi aşamalı bir şekilde yapmamaktadır. Bazı öğretmenlerin ise öğrencilerin sıfır çiftini anlamadıklarını veya kafalarının karıştıklarını belirtmekte ve bu yüzden çıkarma işlemlerini kural gereği toplamaya dönüştürdükten sonra sayma pullarıyla modellemektedir. Çıkarma işlemi öğretimini sayma pullarıyla yapan örnek bir modelleme Şekil 14’te görülmektedir:

Şekil 14

ABÖ Kodlu Öğretmenin Sayma Pulu Modellemesi

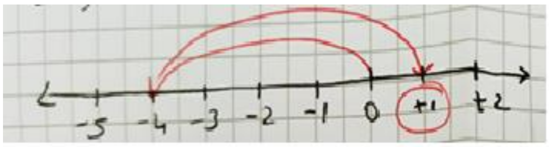


Şekil 14’te yapılan modellemede, terslik ve çokluk kavramlarına dikkate edilse de 5 adet eksi (-) pulu çıkarabilmek için eklenen sıfır çiftini belirten bir gösterim yer almamaktadır. Ayrıca bu çizimde, modelleme için gereken aşamalar açıkça belirtilmemektedir.

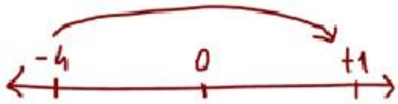
Az sayıda öğretmenin kullandığı sayı doğrusu modeli kullanılan bütün çözümlerde çıkarma işlemleri toplamaya dönüştürülerek veya çıkan sayıyı temsil eden çizimin, eksi (-) işaretine bağlı olarak yön değiştirmesiyle modellenmektedir. Öğretmenlerden biri sayı doğrusuyla yapılan modellemedeki aşamaları model üzerinde belirtmemekte, bu modeldeki yön ve nicelik kavramlarını dikkate almamaktadır. Çıkarma işlemlerinin modellendiği bazı öğretmen ifadeleri ve bunlara ait çizimler Şekil 15’te görülmektedir:

Şekil 15

MKÖ ve ABÖ Kodlu Öğretmenlerin Sayı Doğrusu Modeli



MKÖ: “…İki eksinin artı olduğu bilgisini vererek başlıyorum. (-4)+(+5)= +1…"



ABÖ: “… - sol yön, + sağ yön olarak ele alırım. İki eksi yan yana geldiğinde yön değiştirmeleri gerektiğini vurgularım. Sağa 5 birim ilerleyecek.”

Şekil 15’te görülen sayı doğrusu modellerine göre MKÖ kodlu öğretmen kural gereği toplamaya çevirdikten sonra modelleme yapmakta, ABÖ kodlu öğretmen ise modelleme için gereken aşamaları model üzerinde belirtmemektedir.

Çıkarma işlemlerinin çözümünde, araştırmaya katılan öğretmenlerin yarısından azının kullandığı manipülatif temsil sayma puludur. Sayma pulu materyalini kullanan öğretmenlerin hazırladığı materyaller üzerinde artı (+) ve eksi (-) işareti yazılı karton, kağıt, mıknatıs vb. materyalden oluşmakta ve bu materyalle yapılan uygulamaların işlevi, sayma pulu çizimleriyle aynıdır. Sayma pulu modelinin materyal veya çizim olarak (-4)-(-5) işleminde araştırmaya katılan öğretmenlerin yarıdan fazlası kullanmakta, -2-7 işleminde yarısından fazlası kullanmamakta ve çıkarma işleminin bütününde ise yarıya yakınının çıkarma işleminde sayma pulu modelini kullanmaktadır. Ayrıca, sayma pulu materyaliyle yapılan öğretmen çözümlerine ilişkin açıklamalar, görsel temsillerdeki sayma pulu modeli çizimleriyle aynı uygulamalardan oluşmaktadır.,

Çıkarma işleminin öğretiminde araştırmaya katılan öğretmenlerin bir kısmı gerçekçi, manipülatif ve görsel temsil örneklerinin birini veya birkaçını kullanarak somut bir şekilde öğretim yaptıktan sonra anlamakta zorlanan öğrenciler için sembolik ve dilbilimsel temsillerden oluşan kurallarla soyut bir şekilde tekrar öğretim yapmakta (12); bir kısmı gerçekçi, manipülatif ve görsel temsil örneklerinden biri veya birkaçıyla somut bir öğretim yaptıktan sonra anlamayanlar için bu temsil örneklerinden biri veya birkaçıyla tekrar somut bir öğretim yapmakta (9); bir kısmı sembolik ve dilbilimsel temsillerden oluşan soyut kurallarla öğretim yaparak anlamayanlar için tekrardan bu temsillerle soyut bir öğretim yapmakta (5); bir kısmı da sembolik ve dilbilimsel temsil örneklerinden oluşan soyut kurallarla öğretim yaptıktan sonra gerçekçi veya görsel temsillerden oluşan somut örneklerle öğretim yapmaktadır (2). Çıkarma işleminin öğretimini anlamakta zorlanan öğrencilerle ilgili bazı örnekler aşağıda sunulmuştur.

DAÖ: *"Sayı doğrusu çizip sıfır başlangıç noktasından 4 birim sola gidiyoruz…Somut materyal olarak sayma pullarıyla -4 pul elimizde 5 eksi pul çıkarmamız gerekiyor… Anlamadıklarında, öğrenci seviyesine ya da gelen tepkilere göre doğru olmasa da iki eksi yan yana geldiğinde + oluyor. Yani işlem -4+5 şeklinde toplamaya dönüşür ve toplama yaparız diye anlata da biliyorum."*

EAÖ: *"…4 lira borcum var. Bu borcu ödemek için 5 lira veriyorum…Çok zorlanırlarsa sayma pulları değil de sayı doğrusu üzerinden anlatmayı tercih ediyorum. Sayma pullarını anlamak öğrenciler için daha zor olabiliyor."*

MLÖ: *"– 2 – 7 sayıların işareti yazılmamışsa işareti + dır. – 2 – (+7) çıkarmaları toplamaya çevir. -2 + (-7) = (-9). Pul kullanmıyorum. Zorlananlar için bol bol örnek sorular çözüyorum."*

İÖ: *"7'nin önünde gizli artısı var bunu biliyorlar. Çıkarma görünce toplamaya çevirin demiştim diye kuralı hatırlatıyorum… Günlük hayattan örnekler veriyorum. -2 ve -7 var yani 2 lira borcum var ne olur diyorum… Ama yapamayan yine yapamıyor."*

Tam Sayılarla Çarpma İşlemindeki Matematiksel Temsillere Yönelik Bulgular

Araştırmaya katılan öğretmenlerin tam sayılarla çarpma işleminin öğretiminde kullandıkları temsillere yönelik bulgular Tablo 11'de sunulmaktadır:

Tablo 11

Çarpma İşlemlerinin Çözümünde Kullanılan Matematiksel Temsiller

Tema	Kategori	Kod	
		(+4).(-2)	(-2).(-5)
Sembolik	Temel semboller	Artı (+), eksi (-), eşittir (=), nokta, parantez, sayılar. (37)	
	İşaretlerin etkileşimi	İşaretlerin çarpımı (21)	İşaretlerin çarpımı (21)
	Sayıların ve işaretlerin ayrı ele alınması	İşaret ve sayı çarpımına yönelik eşitlikler(1)	İşaret ve sayı çarpımına yönelik eşitlikler(1)
	Örüntü		Örüntü kuralı (1)
Dilbilimsel	İşlem kuralı	Çarpma işlemi kuralı (31)	Çarpma işlemi kuralı (31)
	Sayıların ve işaretlerin ayrı ele alınması	İşaretleri ve sayıları ayrı çarpma (23) Sayıların mutlak değerce çarpılması (1) İşlemdeki eksi (-) işaretiyle sonuç işareti belirleme (1) Doğal sayılardaki gibi çarpılması (2)	İşaretleri ve sayıları ayrı çarpma (23) Sayıların mutlak değerce çarpılması (1) İşlemdeki eksi (-) işaretiyle sonuç işareti belirleme (1) Doğal sayılardaki gibi çarpılması (2)
	İşlemin kavramsal anlamı	Çarpma işleminin anlamı (4)	Çarpma işleminin anlamı (1)
Görsel	Tablo	İşaret Etkileşim Tablosu (1)	İşaret Etkileşim Tablosu (1)
	Sayı doğrusu modeli	Sayı doğrusu çizimi (3)	
	Sayma pulu	Sayma pulu çizimi (3)	Sayma pulu çizimi (1)
Manipülatif	Sayma pulu modeli	Sayma pulu materyali (10)	Sayma pulu materyali (10)
Gerçekçi	Para hesabı	Borç- alacak (1)	Borç- alacak (1)
	Benzeşim	Kız- erkek (1) Kız-erkek ve mutlu- mutsuz (1) Dost- düşman (4) İşaretlerin anlaşması (1) İyi ve kötü anlaşması (1) Yüz ifadesi (4)	Kız- erkek (1) Kız-erkek ve mutlu-mutsuz (1) Dost- düşman (4) İşaretlerin anlaşması (1) İyi ve kötü anlaşması (1) Yüz ifadesi (4)

Not. İşlemlerin çözümünde birden fazla temsil kullanıldığından katılımcı öğretmen sayısından fazla temsil sayısı bulunmaktadır.

Tablo 11’e göre çarpma işlemlerindeki öğretmen çözümlerinde yer alan matematiksel temsillerin kullanılma sayısına göre sıralaması; dilbilimsel, sembolik, gerçekçi, manipülatif ve görseldir. Dilbilimsel temsil örneklerine bakıldığında çarpma işleminin kuralı neredeyse her öğretmen tarafından kullanılmaktadır. Bu kurallarla birlikte işlemlerdeki sayı ve işaretler ayrı ayrı ele alınmakta ve öğretmenler tarafından *işaret çarpımı* şeklinde ifade edilmektedir. Ayrıca, bazı öğretmenler doğal sayılardaki gibi çarpma işlemi yapıldığı belirtilmekte ve bu öğretmenlerden sadece biri mutlak değer kavramını kullanmaktadır. Öğretmenler tarafından kullanılan çarpma işlemi kuralı ifadesi; *işaretleri aynı olan tam sayıların çarpımı pozitif, farklı olan tam sayıların çarpımı negatif bir tam sayıdır.* Bazı öğretmenler tarafından çarpma işlemlerinin çözümündeki açıklamalara ilişkin sembolik temsillerden oluşan eşitlikler yer almaktadır. Sembolik ve dilbilimsel temsillerin kullanıldığı çarpma işlemi çözümlerine ait örnek aşağıda sunulmuştur.

HÖ: *"Direkt (+).(-) = (-) / (+).(+)=(+) / (-).(-)=(+) olduğunu kavratıyorum. Sayıları zaten kendi aralarında çarpmaları gerektiğini biliyorlar. (+4).(-2) = (+.-)(4.2) = (-8)"*

PÖ kodlu öğretmenin diğer öğretmenlerden farklı olarak mutlak değer kavramını kullanarak yaptığı örnek aşağıda sunulmuştur.

PÖ: *"Sayılar mutlak değerce çarpılır ve daha sonra işaretler çarpılır tanımını veriyorum. Çarpımdaki eksi işareti diğer sayının işaretini tersine çevirir tanımından sonra örneklerle pekiştiriyorum. (+4).(-2)=eksi artının işaretini tersine çevirdiğinden sonuç eksi olacak deyip önce işareti belirliyorum daha sonra sayıları çarpıyoruz=-8"*

Tam sayılarla çarpma işlemlerinde, çarpma işleminin anlamına yönelik sadece iki öğretmen (ÖÖ ve MSÖ) tarafından açıklama yapılmıştır. Bu duruma yönelik örnek aşağıda sunulmuştur.

ÖÖ: *"... Daha sonra öğrencilerin ön bilgilerini harekete geçirmek için çarpmanın toplamanın kısa yolu olduğundan bahsediyorum…"*

MSÖ: *"…Çarpma işlemi tekrarlı bir toplama işlemi olduğundan sayma pullarını ya da sayı doğrusunu kullanıyorum…"*

Araştırmaya katılan öğretmenlerden sadece birinin (MSÖ) iki negatif tam sayının çarpımının sonucunun pozitif olma nedenini açıklamakta ve bu duruma yönelik bir örüntü kuralı kullanmaktadır. Bu öğretmenin ifadesi aşağıda sunulmuştur.

MSÖ: *"…Ben örüntü kuralıyla ispat etmeye çalışıyorum.*

3. (-5) =-15

2. (-5) =-10

1. (-5)=-5

0. (-5) =0

-1. (-5) =+5

-2. (-5) ...“

Çarpma işleminin öğretiminde kullanılan gerçekçi temsiller; para hesabıyla ve benzeşimlerden oluşan gerçek hayat durumu örnekleridir. Para hesabında kullanılan borç- alacak örneği sadece bir öğretmen (MÖ) tarafından kullanılmakta ve bununla ilgili örnek aşağıda sunulmuştur.

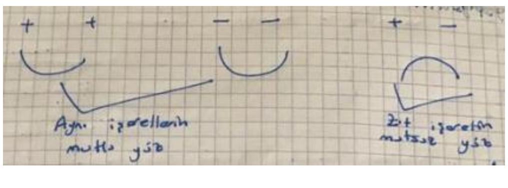
MÖ: *“ Bu işlemi de yine alacak ve borç kavramı ile gösteriyorum. Pozitif sayılar kişi sayısını, negatif sayılar borç miktarını ifade ediyor. Bu şekilde 4 kişinin her birine 2 lira borcun varsa toplamda kaç lira borcun olduğunu buluyorsun. (+4) . (–2) = - 8”*

MÖ kodlu öğretmenin ifadelerine göre ilk çarpanın mutlak değeri 4 kişiyi, ikinci çarpan 2 lira borcu ve ilk çarpanın işareti borcun alındığını temsil etmektedir. Bu doğrultuda bu işlemin modellemesi, 4 kişiden alınan ikişer lira borçla toplamda 8 lira borç alındığını göstermektedir.

Çarpma işleminin öğretiminde kullanılan kız- erkek, kız-erkek ve mutlu-mutsuz, dost- düşman, işaretlerin anlaşması, iyi ve kötü anlaşması ve yüz ifadesi benzeşim örnekleri, işlemin sonuç işaretini belirlemede dikkate alınan sayı işaretlerinin etkileşimini hatırlatmaya dönük gerçek hayat durumlarıdır. Çarpma işleminde kullanılan benzeşimlerden biri olan yüz ifadesi örneğiyle ilgili çizim Şekil 16’da görülmektedir:

Şekil 16

CÖ Kodlu Öğretmenin Yüz İfadesi Benzeşimi



CÖ kodlu öğretmenin yaptığı çizimlerde; mutlu yüz ile aynı işaretli sayıların çarpımının sonuç işareti, mutsuz yüz ile farklı işaretli sayıların çarpımının sonuç işareti temsil edilmektedir.

Çarpma işlemlerinin çözümünde manipülatif temsil örneği olan sayma pulu materyalini, araştırmaya katılan öğretmenlerin büyük çoğunluğu kullanmamaktadır. Sayma pulu materyalini kullanan öğretmenlerin hazırladığı materyaller ve sayma pulu çizimleri, çıkarma işlemlerindeki işlevleriyle aynıdır. Sayma pulu modeliyle yapılan öğretmen çözümlerine ilişkin açıklamalar görsel temsillerde yer almaktadır.

Çarpma işleminin öğretiminde kullanılan görsel temsiller; tablo, sayma pulu ve sayı doğrusu modelleridir. Sadece bir öğretmenin (TÖ) kullandığı tablo, çarpma işlemlerinin sonucunu belirlemeye yönelik işaret çarpımlarını görselleştirmekte ve oluşturulan bu şablon Tablo 12'de sunulmaktadır:

Tablo 12

TÖ Kodlu Öğretmenin Tablosu

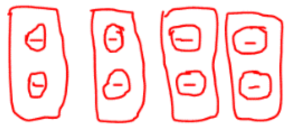
	+	-
+	+	-
-	-	+

Tablo 12'ye göre TÖ kodlu öğretmen, *4.2= 8'i* bulduktan sonra sonuç işaretini belirlemek için çarpanların işaretlerine tablodan bakarak sonucun negatif bir tam sayı olacağına karar vererek -8 yanıtını bulduğu görülmektedir.

Sayma pulu modelinin materyal veya çizim olarak kullanılma sayıları göz önüne alındığında çarpma işlemi öğretiminde sayma pulu modeli araştırmaya katılan öğretmenlerin büyük çoğunluğu tarafından kullanılmamaktadır. İki çarpma işleminin öğretiminde de araştırmaya katılan öğretmenlerden bazılarının işlem çözümlerini aşamalı bir şekilde yapmamaktadır. Bu duruma ait örnek bir çizim Şekil 17'de görülmektedir:

Şekil 17

NÖ Kodlu Öğretmeninin Sayma Pulu Modeli

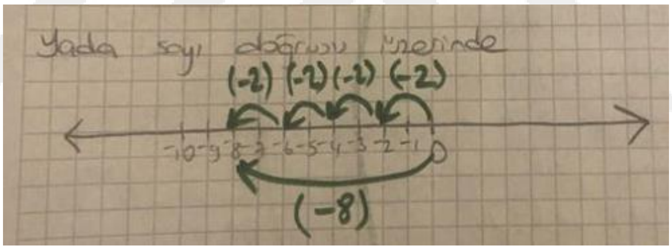


Şekil 17'de görüldüğü gibi dört grup ikişerli eksi (-) pul grubu gösterilse de bunların bir araya gelerek grupların birleşmesini temsil eden bir gösterim, yapılan modellemede yer almamaktadır.

Çarpma işlemi öğretiminde sadece üç öğretmeninin kullandığı sayı doğrusu modeliyle ilgili örnek çizim Şekil 18'de görülmektedir:

Şekil 18

ŞÖ Kodlu Öğretmenin Sayı Doğrusu Modeli



Şekil 18'deki modellemede; okların sayısı ilk çarpanı, okların her biri ikinci çarpanı temsil etmektedir. Ayrıca, (-2) çarpanındaki 2 sayısının temsil ettiği niceliği ve eksi (-) işaretiyle yön kavramı model üzerinde gösterilmektedir.

Çarpma işleminin öğretiminde araştırmaya katılan öğretmenlerin bir kısmı sembolik ve dilbilimsel temsil örnekleri kullanarak soyut bir şekilde öğretim yaptıktan sonra anlamakta zorlanan öğrenciler için aynı temsillerden oluşan kurallarla soyut bir şekilde tekrar öğretim yapmakta (13); bir kısmı sembolik ve dilbilimsel temsil örnekleri kullanarak soyut bir şekilde öğretim yaptıktan sonra anlamayanlar için görsel veya manipülatif temsil örneklerinden biri veya birkaçıyla somut bir şekilde tekrar öğretim yapmakta (6); bir kısmı gerçekçi, manipülatif ve görsel temsillerden biriyle öğretim yaptıktan sonra anlamayanlar için tekrardan aynı temsil örnekleriyle somut bir öğretim yapmakta (4); bir kısmı gerçekçi, manipülatif ve görsel temsillerden biriyle somut bir şekilde öğretim yaptıktan sonra anlamayanlar için sembolik ve dilbilimsel temsilleri kullanarak soyut bir şekilde tekrardan öğretim yapmaktadır (3). Öğretmenlerin biri (İÖ) öğrencilerin çarpma işlemini anlamakta zorlanmadıklarını belirtmektedir. Çarpma işleminin öğretimini anlamakta zorlanan veya zorlanmayan öğrencilerle ilgili bazı örnekler aşağıda sunulmuştur.

MKÖ: *"+ ile – nin çarpımının eksi olduğu bilgisini vererek. Somut materyalle anlatılabilecek bir konu olmadığı için kullanmıyorum. + ile -nin çarpımı -dir. 4*2=8. Cevap=-8. (Anlamayanlar için) Konuya dair temel bilgileri hatırlatarak (anlamalarını sağlıyorum)."*

AÖ: *"Tam sayılarla çarpma yapılırken doğal sayılarda olduğu gibi sayılar çarpılır, çarpılan sayıların işaretleri aynı ise sonucun işareti +, çarpılan sayıların işareti birbirlerinden farklı ise işlem sonucunun işareti – olur diyorum. Çarpmada çok zorlanmadıkları için sayı pulları kullanmıyorum.* ***(+4) . (–2)=****işaretler farklı o zaman – olur, 4kere 2 8dir sonuç=-8 olarak anlatıyorum. (Anlamayanlar için) -2li sayılardan(pullardan) 4er grup tahtaya çizmeye çalışarak açıklarım.*

BKÖ: *" (-2). (-5) işleminin çözümüne sayma pullarıyla başlıyorum…(İşlem çözümüyle ilgili bazı çizim ve açıklamalar var.)…Eğer öğrenciler bu yolu anlamakta zorluk çekerlerse sayma pullarıyla modelleme örneklerinde yaptığımız işlemleri incelemelerini istiyorum…"*

MGÖ: *"İşaretleri ve sayıları ayrı ayrı çarpmamız gerektiğini söylüyorum. Farklı ve aynı olan işaretlerin çarpım sonuçlarını anlatıyorum ve bol örnek çözüyorum. Sayma pullarından yararlanıyorum. (–2) . (–5) = +10. (Anlamayanlar için) Genel olarak bol örnek çözüyorum."*

İÖ: *"Direk kural veriyorum. Zıt işaretlilerin çarpımı eksidir diye. Ondan sonra çarpıp geçiyoruz. (Sayma pulları)Kullanmıyorum. Çünkü çarpmada hiç zorlandıklarını görmedim…"*

Tam Sayılarla Bölme İşlemindeki Matematiksel Temsillere Yönelik Bulgular

Araştırmaya katılan öğretmenlerin tam sayılarla bölme işleminin öğretiminde kullandıkları temsillere yönelik bulgular Tablo 13'te sunulmaktadır:

Tablo 13

Bölme İşlemlerinin Çözümünde Kullanılan Matematiksel Temsiller

Tema	**Kategori**	**Kod**	
		(+10): (-2)	(-20): (-5)
Sembolik	Temel semboller	Artı (+), eksi (-), eşittir (=), bölme işareti (:), parantez, sayılar (37)	
	İşaretlerin etkileşimi	İşaretlerin bölümü (21)	İşaretlerin bölümü (21)
	Sayıların ve işaretlerin ayrı ele alınması	İşaret ve sayı çarpımına yönelik eşitlikler(1)	İşaret ve sayı çarpımına yönelik eşitlikler(1)
Dilbilimsel	İşlem kuralı	Bölme işlemi kuralı (31)	Bölme işlemi kuralı (31)
	Sayıların ve işaretlerin ayrı ele alınması	İşaretleri ve sayıları ayrı bölme (23) Sayıların mutlak değerce bölünmesi (1) İşlemdeki eksi (-) işaretiyle sonuç işareti belirleme (1) Doğal sayılardaki gibi bölünmesi (2)	İşaretleri ve sayıları ayrı bölme (23) Sayıların mutlak değerce bölünmesi (1) İşlemdeki eksi (-) işaretiyle sonuç işareti belirleme (1) Doğal sayılardaki gibi bölünmesi (2)
	İşlemin kavramsal anlamı	Bölme işleminin anlamı (2)	Bölme işleminin anlamı (1)
	Başka işlemden yararlanma	Çıkarma işleminden yararlanma (1)	
Görsel	Sayma pulu modeli	Sayma pulu çizimi (1)	Sayma pulu çizimi (1)
Manipülatif	Sayma pulu modeli	Sayma pulu materyali (6)	Sayma pulu materyali (6)
Gerçekçi	Benzeşimler	Kız-erkek ve mutlu-mutsuz (1) Dost- düşman (4) İyi ve kötü anlaşması (1) İşaretlerin anlaşması (1) Yüz ifadesi (4)	Kız-erkek ve mutlu-mutsuz (1) Dost- düşman (4) İyi ve kötü anlaşması (1) İşaretlerin anlaşması (1) Yüz ifadesi (4)

Not. İşlemlerin çözümünde birden fazla temsil kullanıldığından katılımcı öğretmen sayısından fazla temsil sayısı bulunmaktadır.

Tablo 13'te görüldüğü gibi bölme işlemlerindeki öğretmen çözümlerinde yer alan matematiksel temsillerin kullanılma sıklığına göre sırasıyla; dilbilimsel, sembolik, gerçekçi, manipülatif ve görseldir. Araştırmaya katılan öğretmenler arasında manipülatif temsilleri bölme işleminde kullanan çok az sayıda öğretmen bulunmakta ve görsel temsil örneklerinden sayı doğrusu modelini kullanan hiçbir öğretmen bulunmamaktadır. Ayrıca, sadece bir öğretmen sayma pulu modelini çizim şeklinde kullanmaktadır.

Bölme işleminin öğretimindeki dilbilimsel temsillerden oluşturulan kural ifadesi; *aynı işaretli tam sayıların bölümü pozitif, farklı işaretli tam sayıların bölümü negatif bir tam sayıdır*. Bölme işlemi öğretiminde de çarpmadaki gibi işaretlerin ve sayıların ayrı ayrı ele alındığı görülmektedir. Ayrıca, çarpma işlemine benzer şekilde bazı öğretmenler *işaret bölümü* ifadesini kullanmaktadır. Çarpma işleminde mutlak değer kavramını kullanan aynı öğretmenin (PÖ) bölme işleminde de benzer çözümü yaptığı görülmektedir. Sembolik ve dilbilimsel temsillerin kullanıldığı bazı örnekler aşağıda sunulmuştur.

HÖ: *"…Sayıları zaten kendi aralarında bölmeleri gerektiğini biliyorlar. Bu kurala göre bölme işlemini yapıyorlar. (-20) : (-5) = (- : -)(20:5) = + 4"*

BÖ: *"…Aynı işaretli iki sayının bölümü pozitif, farklı işaretli iki sayının bölümü negatiftir bilgisini veriyorum…"*

Araştırmaya katılan öğretmenlerden sadece birinin (MSÖ) pozitif bir tam sayının negatife bölümünde ardışık çıkarma işleminden yararlandığı görülmektedir. Bu çözüme yönelik örnek aşağıda sunulmuştur.

MSÖ: *"…Ardışık çıkarma işleminden yararlanıyorum. (+10)'un -2 ye bölünmesi, +10 sıfır olana kadar geri götürüyorum. Bunu yaparken 5 kez geri gidiyorsun bu da -5 ile gösteriliyor… "*

Bölme işleminin kavramsal anlamına yönelik sadece iki öğretmen benzer açıklama yapmaktadır. Bu duruma yönelik örnek aşağıda sunulmuştur.

ÖÖ: *"Dersin başlangıcında öğrencilerin dikkatini çekmek ve güdülemek için hepsini ayağa kaldırırım birden sonra herkesin (sınıfın sayısına göre) dörderli yada beşerli grup olması isterim sonrasında oluşan grupları beraber sayarız bunu yapmamdaki amaç öğrencilere bölme işleminin aslında bir gruplama ayırma işi olduğunu göstermektir..."*

Bölme işlemlerinin çözümünde kullanılan gerçekçi temsiller sadece benzeşimlerden oluşmaktadır. Bu benzeşimler, çarpma işleminde olduğu gibi sonuç işaretini belirlemeye yönelik olarak çarpanların işaretleriyle yapılan benzetimlerden oluşmakta ve bu benzetimlere göre işlemin sonuç işareti hatırlatılmaktadır. Bu durumla ilgili bir örnek aşağıda sunulmuştur.

DÖ: *"Tamsayılarla çarpma ve bölme işlemlerinde kız ve erkeklerin sırada yan yana oturmalarını göz önünde bulundurarak iki kız oturunca mutlu, iki erkek oturunca mutlu, bir kız bir erkek oturunca mutsuz gibi giriş yapıyorum. Aslında cinsiyet ayrımına çok karşıyım ancak baktım ki yıllar içinde böyle anlatımımla iyi anladılar ben de devam ettim.*

Kız . kız =mutlu erkek . erkek=mutlu kız . erkek=mutsuz"

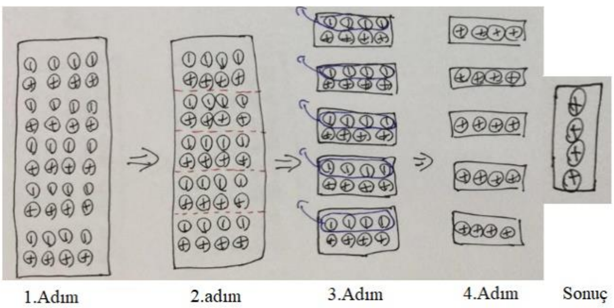
Bölme işlemi öğretiminde manipülatif temsil örneği olan sayma pulu materyali araştırmaya katılan öğretmenlerin büyük çoğunluğu tarafından kullanılmamaktadır. Sayma pullarıyla yapılan bölme işlemi çözümüyle ilgili bir örnek aşağıda sunulmuştur.

MSÖ: *"…Burada sayma pulları işe yarıyor. 20 tane negatif pulu içinde 5 tane – olan kaç gruba ayırabiliriz sorusu ile işlemi çözüyoruz…"*

Bölme işlemlerinin çözümünde kullanılan tek görsel temsil örneği sayma pulu modeli çizimleridir. Sayma pulu modelini bölme işlemi öğretiminde kullanan tek bir öğretmen (BKÖ) bulunmaktadır. Bu öğretmeninin iki negatif tam sayının bölümüne ait işlem modellemesi Şekil 19'da görülmektedir.

Şekil 19

BKÖ Kodlu Öğretmenin Sayma Pulu Modeli



Şekil 19’da (-20) : (-5) işleminin çözümüne yönelik yapılan modelleme bölünen ve bölen sayılara göre oluşturulan birtakım kurallar çerçevesinde yapılmaktadır. Bu modellemede izlenen yol aşağıdaki açıklanmıştır:

1.adım: Bölünen 20 olduğu için 20 tane sıfır çiftini işlem çerçevesine çizilir.

2.adım: Bölendeki 5 sayısıyla sıfır çiftleri 5 gruba ayrılır.

3.adım: Bölünenin işaretinin eksi (-) olduğu için gruplardaki dörder adet eksi (-) pul işlem çerçevesinden çıkarılır.

4.adım: Gruplardan birinde kalan 5 adet artı (+) pul sonucu göstermektedir.

Bölme işleminin öğretiminde araştırmaya katılan öğretmenlerin bir kısmı sembolik ve dilbilimsel temsil örnekleri kullanarak soyut bir şekilde öğretim yaptıktan sonra anlamakta zorlanan öğrenciler için aynı temsillerden oluşan kurallarla soyut bir şekilde tekrar öğretim yapmakta (15); bir kısmı sembolik ve dilbilimsel temsil örnekleri kullanarak soyut bir şekilde öğretim yaptıktan sonra anlamayanlar için gerçekçi veya manipülatif temsil örneklerinden biriyle somut bir şekilde tekrar öğretim yapmakta (4); bir kısmı manipülatif veya görsel temsillerden biriyle somut bir öğretim yaptıktan sonra anlamayanlar için sembolik ve dilbilimsel temsil örnekleriyle soyut bir öğretim yapmakta (3); bir kısmı gerçekçi veya manipülatif temsillerden biriyle öğretim yaptıktan sonra anlamayanlar için tekrardan aynı temsilleri kullanarak soyut bir öğretim yapmaktadır (3). Bölme işleminin öğretimini anlamakta zorlanan öğrencilerle ilgili bazı örnekler aşağıda sunulmuştur.

MYÖ: *“Ters işaretlerin çarpma ve bölmesinde işaretin negatif olduğunu hatırlatıyorum. Çarpma ve bölme işlemlerinde sayma pullarını kullanmıyorum. İşaretlerin kolay öğrenildiğini farkettigim için gerek duymadım. Ters işaretli olduğu için bölmenin sonucu negatif olacaktır. 10un 2ye bölümü 5tir. İşareti negatif olduğu için -5tir diyorum. (Anlamayanlar için) Benzer örnek verip tekrar anlatıyorum.”*

MCÖ: *“Her iki sayı da negatif olduğu için sonucun pozitif olacağını belirtiyorum. Kısaca gösteriyorum. (-20): (-5)= 4. (Anlamayanlar için) Pullardan faydalanabilirim.”*

BKÖ: *"(+10): (-2) işleminin öğretimine sayma pulları ile nasıl modelleme yapacağımızı anlatarak başlıyorum… (Bazı çizim ve açıklamalar var.)… Eğer anlamazlarsa bölmede de çarpmada olduğu gibi aynı işaretlerin bölümü pozitif, farklı işaretin bölümü negatiftir kuralını söyleriz…"*

BÖ: *"Önce işareti belirlememiz gerektiğini söylüyorum… Bölme işleminde (sayma pullarıyla) modellemeyi öğrencilerin çoğunluğu anlamakta zorlanıyor ama yine de yararlanıyorum konuyu somutlaştırmak adına… (Anlamayanlar için) Pullarla modelliyorum. Başka örneklerle anlatımı destekliyorum. Çarpma işlemi ve ritmik sayma ile ilgili bilgi eksikliği varsa onu gidermeye çalışıyorum. EBA'daki (Eğitim Bilişim Ağı) içeriklerden faydalanıyorum."*

Araştırmaya katılan öğretmenlerin toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinde kullandığı matematiksel temsillerin bütününe bakıldığında, toplama işlemi haricindeki işlemlerde ön plan çıkan temsillerin sembolik ve dilbilimsel temsiller olduğu görülmektedir. Özellikle çarpma ve bölme işlemlerinde ağırlıklı olarak kullanılan temsiller, sembolik ve dilbilimsel temsil örneklerinden oluşan kural odaklı ifadelerdir. Bu kuralların öğretiminde en çok kullanılan gerçekçi temsiller benzeşimlerdir ancak benzeşimler işlemin anlamına yönelik olarak kullanılmamaktadır, diğer bir deyişle benzeşimler aracılığıyla işlemlerin kavramsal açıklaması yapılmamaktadır. Çıkarma işlemlerinde birtakım görsel, gerçekçi ve manipülatif temsiller yer alsa da bu temsillerdeki yön veya zıtlık kavramlarının bir çoğu soyut kurallarla gerekçelendirilerek kullanılmaktadır. Pek çok işlemin çözümünde yer alan gerçekçi temsiller ise sözel ifadelerle kullanılmakta ve bu örneklerin çok azı görsel veya somut materyallerle desteklenmektedir. Ayrıca, öğretmenler tarafından kullanılan sayma pulu modelinin çizim veya somut materyal olarak kullanıldığı görülmektedir. Sayı doğrusu modelini toplama ve çıkarma işlemlerinde az sayıda öğretmen kullanmakta ve çarpma işleminde neredeyse hiç ve bölme işleminde ise hiçbir zaman kullanılmamaktadır. Araştırmaya katılan öğretmen yanıtlarında dikkat çeken bir husus da dört işlemin kavramsal anlamını dikkate alan ve bu anlamlarla ilgili yapılan açıklama yapan öğretmen sayısının son derece sınırlı olmasıdır (parantez içinde sayıyı ver) Özetle; araştırmaya katılan öğretmen yanıtlarına göre tam sayılarla işlemlerde yer alan sayı ve işlem işaretlerine yüklenen anlamlar çoğunlukla sembolik ve dilbilimsel temsil ifadelerinden oluşmaktadır.

3.2.TAM SAYILARLA İŞLEM ÖĞRETİMİNDE ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN MATEMATİKSEL TEMSİLLERİ KULLANMA SIRASINA YÖNELİK BULGULAR

Tam sayılarla işlemlerin öğretiminde araştırmaya katılan öğretmenlerin matematik temsilleri kullanma sırası işlem türüne göre farklılıklar göstermektedir. Tam sayılarla toplama işlemi öğretiminde matematiksel temsillerin kullanım sırasına ilişkin bilgiler Tablo 14'te sunulmaktadır:

Tablo 14

Toplama İşlemi Öğretiminde Matematik Temsillerin Kullanım Sırası

Temsil Sırası	Öğretmen Sayısı	Öğretmen İfadesi
1.Gerçekçi 2.Sembolik-Dilbilimsel	11	**MKÖ:** "Negatif sayılarla ilk defa karşılaştıkları için somutlaştırarak anlatıyorum. Negatif sayıları asansör örneği vererek anlatmaya başlıyorum. Sonrasında da -3. Kattan 2 kat çıkarsak ne olur diyerek farklı işaret toplamlarını anlatıyorum."
1.Gerçekçi 2.Görsel 3.Sembolik-Dilbilimsel	7	**PÖ:** "Derse girişte asansör, kar zarar, alacak verecek, hesaplamalarından örnekler vererek başlıyorum. Sonra sayı doğrusu çizerek anlatıyorum. Daha sonra aynı işaretli sayılar toplanır ortak işaret yazılır, ters işaretli sayılar çıkarılır mutlak değerce büyük sayının işareti konulur açıklamasını verip örneklerle konuyu devam ettiriyorum."
1.Gerçekçi 2.Manipülatif 3.Sembolik-Dilbilimsel	5	**DÖ:** "Tam sayılar konusunun neden ihtiyaç duyulmuştur öncelikle onu anlatarak başlıyorum. Daha sonra toplama işlemini ileri geri, aşağı yukarı, kar zarar…gibi kavramlarla pekiştiriyorum, en son sayma pullarını kullanıyorum ve kuralları anlatıyorum."
1.Manipülatif 2.Görsel 3.Gerçekçi 4.Sembolik-Dilbilimsel	6	**EHÖ:** "Öncelikle toplama işleminin mantığını hatırlatıp konuşuyoruz. Daha sonra sayma pulları yardımıyla tam sayılarla nasıl işlem yapacağımızı anlatıyorum. Önceki yıllarda somut olarak öğrencilere pulları veriyordum ve kendileri bireysel işlem yapıyorlardı. Sayı doğrusu üzerinde de incelemeler yapıyorduk. Ayrıca asansör örneği de veriyordum. Bu örnekler üzerinden basitçe çalışma yaptıktan sonra kısa yoldan bu işlemleri nasıl yapabileceğimizi konuşuyorduk."
1.Manipülatif 2.Sembolik-Dilbilimsel	5	**BÖ:** "Önce sayma pullarıyla modelleyerek konuyu somutlaştırmaya çalışıyorum. Sonra "Aynı işaretli tam sayılar toplanırken sayıların mutlak değeri toplanır işaret toplanan sayılarla aynı olur. Farklı işaretli sayılar toplanırken mutlak değeri büyük olan sayıdan mutlak değeri küçük olan sayı çıkarılır işaret mutlak değeri büyük olan sayıyla aynı olur." bilgisini vererek çeşitli örnekler çözdürüyorum. Ayrıca toplama işleminin özelliklerini akıcı işlem yapmak için kullanmalarını sağlıyorum."
1.Gerçekçi 2.Manipülatif 3.Görsel 4.Dilbilimsel-Sembolik	1	**MSÖ:** " Günlük hayat örnekleriyle derse giriş yaparım. Örneğin borcunuz var ya da paranız var durumları gibi. Kredi kartı ekstreleri gibi ya da banka hesap fişi gibi örnekler gösteririm ve çocuklarla tartışırım. Sayma pullarını kesinlikle kullanırım. Onların da kendi sayma pullarını yapmalarını sağlarım. Çoğu meslektaşımın aksine ben sayma pullarının daha kalıcı olduğunu düşünüyorum. Ayrıca sayı doğrusunu kullanıyorum. Kesinlikle bireysel ödev veriyorum. Bu modellerle kuralları öğreniyoruz."

Not. Tablodaki temsillerin arasına koyulan tire "-" simgesi, sözü edilen iki temsil örneğinden hangisinin daha önce kullanıldığını ayırt edilemediğini göstermektedir. Ayrıca, temsil kullanım sırasına karar verilemeyen öğretmen yanıtları değerlendirmeye alınmamıştır.

Tablo 14'te görüldüğü gibi toplama işlemindeki temsillerin kullanım sırası öğretmenlerde farklılık gösterilmektedir. Öğretmen yanıtlarına göre öğretime gerçekçi temsillerle başlayan 24 öğretmen, manipülatiflerle başlayan 11 öğretmen bulunmaktadır. İşlem çözümlerinde temsil sınıflarının tamamına yer veren 5 öğretmenden sadece biri (MSÖ) bütün temsil sınıflarına ait örnekleri Nakahara'nın temsil sırasına göre kullanmaktadır. Öğretmen yanıtlarında dikkat çeken bir nokta, sadece sembolik-dilbilimsel temsillerden oluşan kural ağırlıklı bir toplama işlemi öğretimi yapan öğretmenin olmamasıdır. Öğretmenlerin hiçbiri temsilleri CRA stratejisine, 7 öğretmen ise RA stratejisine göre öğretim yapmaktadır.

Tam sayılarla çıkarma işlemi öğretiminde matematiksel temsillerin kullanım sırasına ilişkin bilgiler Tablo 15'te sunulmaktadır:

Tablo 15

Çıkarma İşleminin Öğretiminde Matematik Temsil Kullanım Sırası

Temsil Sırası	Öğretmen Sayısı	Öğretmen İfadesi
1.Sembolik-Dilbilimsel	12	**MMÖ:** "Burada ilk yaptığım iş -2-(+7) şeklinde sayıları tekrar yazmak oluyor. Sayı pullarından yararlanmıyorum. Daha sonra klasik çıkarma işlemini uyguluyorlar ve zorluk yaşamıyorum. Bu örnekler çoğaldıkça artık kendileri gizlenmiş olan işareti yazmadan da çözüme ulaşıyorlar. "
1.Gerçekçi 2.Sembolik-dilbilimsel	8	**MÖ:** " (- 4): borç (- 5): borç - (-5) : 5 lira borcun önündeki ikinci eksi borcun ödenip alacağa (+5) döndüğünü gösterir. Bu şekilde işlemim: (-4) + 5 e yani 5 lira param var ve 4 lira borcum var. 5 lira paramla 4 lira borcumu ödersem geriye 1 lira param kalır. (-4) + 5 = +1"
1.Sembolik-Dilbilimsel 2.Görsel	7	**EAÖ:** "Bu kısmı toplama işlemini anlatırken anlatıyorum. Biraz önceki soruda bahsettiğim gibi. + nın sağındaki işarete etkisi olmadığı için işareti teke indiriyoruz. böylece aynı işaretli iki tam sayının toplamını yapıyoruz. anlamakta zorlanırlarsa yine sayı doğrusu üzerinden göstermeye çalışıyorum. 2 adım geri 7 adım daha geri gidince ne oldu gibi cümlelerle anlamalarını sağlarım. bu konuda somut materyal şimdiye kadar kullanmadım. Sayma pullarını da hep tahtada çizerek anlattım."
1.Manipülatif 2.Sembolik-dilbilimsel	5	SÖ: "4 tane negatif sayma pulundan 5 negatif sayma pulunu çıkarmaya başlıyorum. 4 taneyi çıkardıktan sonra elimde hiç sayma pulu kalmıyor. Hiçin matematikte sıfır olduğunu fark ettirdikten sonra sıfır pulunu tahtaya yapıştırıyorum ve içinden bir eksi bir de artı pul çıkıyor. Böylece artık bir negatifi daha çıkarabiliyorum. Geriye sadece bir artı pul kalıyor. Çözüm böylece yapılmış oluyor."
1.Sembolik-dilbilimsel 2.Manipülatif	5	**MCÖ:** "Yan yana gelen iki eksinin artıya dönüştüğünü belirterek çözüme başlıyorum. İki eksinin yan yana gelmesinin asıl anlamının eksi sayıyı çıkarmak olduğunu belirtmek için pullardan kısaca bahsediyorum. (-4)+5=1"

Tablo 15 devam

Çıkarma İşleminin Öğretiminde Matematik Temsil Kullanım Sırası

1.Sembolik-dilbilimsel 2.Gerçekçi	5	**AAÖ:** "İşaret değiştirmeyi asla kullanmıyorum. Öncelikle işlem yapabilmek için parantezden kurtulmayı öğretiyorum. Bunun için konu öncesinde işaretlerin yan yana geldiğinde hangi işaretin ortaya çıkacağını iyice pekiştiriyoruz. Daha sonra bol bol soru çözümü ile konu iyice pekiştirilmiş oluyor. (-4)-(-5)=-4+5 (- ile - = +) 5lira para 4 lira borç elde kaldı 1 lira para."
1.Görsel 2.Gerçekçi 3.Sembolik-dilbilimsel	2	**MÖ:** " Bu işlemi sayı doğrusunda ya da yön kavramı ile anlatmak daha kolay oluyor. Sayı doğrusunda veya diğer yöntemlerle anlamazsa, bir öğrenciyi tahtaya çıkarıp negatif sayıları geriye adım atarak, pozitif sayıları ileri doğru adım atarak gösteriyorum. -2: 2 adım geriye -7: 7 adım geriye -2 -7 işleminde sürekli geriye gidildiği için ilk konuma göre 9 birim geriye gitmiş oluyoruz.
1.Manipülatif 2.Görsel 3.Sembolik-dilbilimsel	4	**SHÖ:** "Tam sayılarla çıkarma işleminde de sayma pullarını ve sayı doğrusunu kullanıyorum. Genelde sayma pulları ve sayı doğrusuyla anlatımın toplama kadar kolay anlaşılmadığını görüyorum. Birbirinden çıkabilen ve aynı işaretli olanlarda sorun olmuyor. Farklı işaretli olanlar ve birbirinden çıkamayanlarda ise + - çifti ekleyerek işlemlerin nasıl yapıldığını kavratmaya çalışıyorum. Hepsi anlaşıldıktan sonra ise çıkarma işleminin aslında toplama işlemi olduğu üzerinde durup çıkarma işleminin kuralını toplamadan yararlanarak anlatıyorum. "
1. Görsel 2. Manipülatif 3.Sembolik-dilbilimsel 4.Gerçekçi	1	**ÖÖ:** "Konun öğretimini ise şu şekilde yapıyorum. Çıkarmanın aslında bir fark olduğunu sayı doğrusu üzerinde göstererek sunuş yoluyla anlatıyorum. Sonrasında kurallarla beraber pekiştirerek örnekler çözüyoruz. Sayma pullarını kullanıyorum fakat öğrencilerin sayı doğrusunda daha iyi öğrendiklerini düşünüyorum. Zorlanan öğrencilerde ise şöyle bir yol izliyorum çıkarma işlemini toplama işlemine dönüştürüyorum. Eksilen aynı kalacak çıkarma toplama işlemine dönüşecek çıkanın ise işareti değiştirilecek sonra toplama işlemine dönüştüğünde param var borcum var yolu ile anlatıyorum."

Not. Tablodaki temsillerin arasına koyulan tire "-" simgesi, sözü edilen iki temsil örneğinden hangisinin daha önce kullanıldığını ayırt edilemediğini göstermektedir. Ayrıca, her bir işlem ayrı ayrı incelenmiş ve temsil kullanım sırasına karar verilemeyen öğretmen yanıtları değerlendirmeye alınmamıştır.

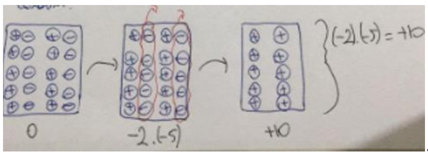
Tablo 15'te görüldüğü gibi çıkarma işlemi çözümlerine 29 öğretmen sembolik-dilbilimsel temsil örneklerinden oluşan kurallarla öğretime başlamakta ve bunların 12'sinde bu temsillerle sınırlı bir öğretim yapılmaktadır. Bazı öğretmenler sembolik-dilbilimsel temsillerin yanında görsel, manipülatif ve gerçekçi temsillerden sadece birini, bazıları birkaçını kullanmaktadır. Gerçekçi temsil örnekleri çıkarma işlemi öğretiminde sık sık kullanılsa da gerçekçi temsillerle öğretime başlayan 8 öğretmen görülmekte ve bu öğretimlerde diğer temsil sınıflarına ait örnekler yer almamaktadır.

Bütün temsil sınıflarına ait örnekleri bir öğretmen (ÖÖ) kullansa da; bu öğretmen gerçekçi temsil örneklerine çıkarma işlemi öğretiminde en son yer vermektedir. Öğretmenlerin hiçbiri temsilleri CRA stratejisine göre öğretim yapmamaktadır. Görsel temsilleri kullanan öğretmenler olsa da bunlardan sadece 2'si RA stratejisine göre öğretim yapmaktadır.

Tam sayılarla çarpma işlemi öğretiminde matematiksel temsillerin kullanım sırasına ilişkin bilgiler Tablo 16'da sunulmaktadır:

Tablo 16

Çarpma İşlemi Öğretiminde Matematik Temsillerin Kullanım Sırası

Temsil Sırası	Öğretmen Sayısı	Öğretmen İfadesi
1.Sembolik-dilbilimsel	18	**HÖ:** "Direk (+).(-) = (-) / (+).(+)=(+) / (-).(-)=(+) olduğunu kavratıyorum. Sayıları zaten kendi aralarında çarpmaları gerektiğini biliyorlar. (+4).(-2) = (+.-)(4.2)= (-8). Açıkçası bunu gayet güzel algılıyorlar."
1.Sembolik-dilbilimsel 2.Gerçekçi	7	**SHÖ:** "Açıkçası çarpma ve bölmede ezbere dayalı gidiyorum diyebilirim. Önce işaretler aynı olduğunda ve farklı olduğundaki durumları değerlendiriyoruz. Dostumun dostu, düşmanımın düşmanı şeklinde akıllarında daha iyi kalmalarını sağlayıcı bazı kavramlar üzerinden işlemleri yapıyoruz."
1.Gerçekçi 2.Sembolik-dilbilimsel	7	**SVÖ:** "Çarpma ve bölme işlemlerinde çok fazla sorun yaşamıyorum. İşaretler anlaşır mı, anlaşamaz mı? Anlaşabilirse olumlu yani artı, anlaşamazsa olumsuz yani eksi. Bu noktada sıkıntı şu oluyor. Çarpma ve bölmedeki bu kural onlara kolay geldiği için aynısını toplama ve çıkarmada yapmak istiyorlar. Yani işaretler aynı ise artı, farklı ise direkt eksi koyuyorlar."
1.Sembolik-dilbilimsel 2.Manipülatif	5	**BÖ:** "Önce işareti belirlememiz gerektiğini söylüyorum. Aynı işaretli 2 sayının bölümü pozitif, farklı işaretli 2 sayının bölümü negatiftir bilgisini veriyorum. Çarpma işleminde modellemeyi öğrencilerin çoğunluğu anlamakta zorlanıyor ama yine de yararlanıyorum konuyu somutlaştırmak adına."
1.Sembolik-dilbilimsel 2.Görsel	3	**AÖ: "**Tam sayılarla çarpma yapılırken doğal sayılarda olduğu gibi sayılar çarpılır, çarpılan sayıların işaretleri aynı ise sonucun işareti +, çarpılan sayıların işareti birbirlerinden farklı ise işlem sonucunun işareti – olur diyorum. (+4) . (–2)=işaretler farklı o zaman – olur, 4kere 2 8dir sonuç=-8 olarak anlatıyorum. -2li sayılardan(pullardan) 4er grup tahtaya çizmeye çalışarak açıklarım."
1.Görsel 2.Sembolik-dilbilimsel	1	**BKÖ: "** (-2).(-5) işleminin çözümüne sayma pullarıyla başlayalım. Kuralları fark edelim.  .."

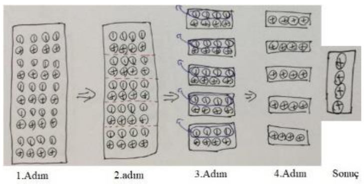
Not. Tablodaki temsillerin arasına koyulan tire "-" simgesi, sözü edilen iki temsil örneğinden hangisinin daha önce kullanıldığını ayırt edilemediğini göstermektedir. Ayrıca, her bir işlem ayrı ayrı incelenmiş ve temsil kullanım sırasına karar verilemeyen öğretmen yanıtları değerlendirmeye alınmamıştır.

Tablo 16'da görüldüğü gibi öğretmenlerin yarısından fazlası tarafından çarpma işlemi öğretimi, sayıların işaretlerine yönelik sembolik- dilbilimsel temsillerle ve bunların 18'i ise sadece sembolik- dilbilimsel temsillerle yapılmaktadır. Bu temsil örneklerinin yanında çoğunlukla benzeşimlerden oluşan gerçekçi temsil örneklerini kullanılmakta ve gerçekçi temsil örnekleriyle öğretime başlayan 7 öğretmen bulunmaktadır. Ayrıca, bütün temsil sınıflarına ait örneklere yer veren öğretmen görülememektedir. Görsel ve manipülatif temsil örneklerini kullanan öğretmenler çok az sayıda bulunmakta ve ayrıca, CRA stratejisine göre öğretim yapan hiçbir öğretmen görülmemekte; RA stratejisiyle öğretim yapan 1 öğretmen (BKÖ) bulunmaktadır.

Tam sayılarla bölme işlemi öğretiminde matematiksel temsillerin kullanım sırasına ilişkin bilgiler Tablo 17’de sunulmaktadır:

Tablo 17

Bölme İşlemi Öğretiminde Matematik Temsil Kullanım Sırası

Temsil Sırası	Öğretmen Sayısı	Öğretmen İfadesi
1.Sembolik-dilbilimsel	20	**AAÖ:** "Önce işaretlerle işleme başlıyoruz; - . - = + daha sonra sayılarla işlem yapıyoruz; 20 :5 =4 sonuç +4. Bol soru bol tekrar konu pekiştirmesi sağlanıyor."
1.Gerçekçi 2.Sembolik-dilbilimsel	7	**DÖ:** "Çarpma ve bölme işlemlerinde çok fazla sorun yaşamıyorum. İşaretler anlaşır mı, anlaşamaz mı? Anlaşabilirse olumlu yani artı, anlaşamazsa olumsuz yani eksi. Bu noktada sıkıntı şu oluyor. Çarpma ve bölmedeki bu kural onlara kolay geldiği için aynısını toplama ve çıkarmada yapmak istiyorlar. Yani işaretler aynı ise artı, farklı ise direkt eksi koyuyorlar."
1.Sembolik-dilbilimsel 2.Manipülatif	5	**BÖ:** "Önce işareti belirlememiz gerektiğini söylüyorum. Aynı işaretli 2 sayının bölümü pozitif, farklı işaretli 2 sayının bölümü negatiftir bilgisini veriyorum. Farklı işaretli 2 sayının birbirine bölümü negatif olduğundan sonuç – çıkar. 10'un 2'ye bölümü 5 olduğuna göre işlemin sonucu – 10'dur. Bölme işleminde modellemeyi öğrencilerin çoğunluğu anlamakta zorlanıyor ama yine de yararlanıyorum konuyu somutlaştırmak adına. Başka örneklerle anlatımı destekliyorum. Bölme işlemi ile ilgili bilgi eksikliği varsa onu gidermeye çalışıyorum."
1.Sembolik-dilbilimsel 2.Gerçekçi	6	**CÖ:** "Bölme işleminin kuralı vererek başlıyorum. Aynı işaretlerin bölümü (+), zıt işaretlerin bölümü (-) tam sayıdır şeklinde. Çarpmadan sonra bölmede çok zorlanmıyorlar. (-20): (-5) önce sonucun işaretini belirleyip belirleyip sonra bölmeyi yaptığımızı her örnekte tekrarlıyoruz…(İşaretlerle yüz ifadesi çizimleri yer almaktadır). Bu çizimlerden yararlanıyoruz."
1.Görsel 2.Sembolik-dilbilimsel	1	**BKÖ: "**…Sayma pulları çizimiyle tahtada anlatıyorum ve kuralları buluyoruz.  …"

Not. Tablodaki temsillerin arasına koyulan tire "-" simgesi, sözü edilen iki temsil örneğinden hangisinin daha önce kullanıldığını ayırt edilemediğini göstermektedir. Ayrıca, her bir işlem ayrı ayrı incelenmiş ve temsil kullanım sırasına karar verilemeyen öğretmen yanıtları değerlendirmeye alınmamıştır.

Tablo 17'ye göre öğretmenlerin bölme işlemi öğretiminde kullandığı temsil örnekleri genellikle, çarpma işleminde olduğu gibi sembolik ve dilbilimsel temsil örneklerinden veya bu temsil örnekleriyle birlikte kullanılan gerçekçi temsil sınıfına ait benzeşimlerden oluşmaktadır. Gerçekçi temsil örnekleri 13 öğretmen tarafından kullanılmakta ve 7 kişi tarafından gerçekçi temsil örnekleriyle öğretime başlanmaktadır. Çarpma işleminde olduğu gibi bölme işlemi öğretiminde de bütün temsil sınıflarına ait örnekleri kullanan hiçbir öğretmen bulunmamakta ve 20 öğretmen sadece sembolik- dilbilimsel temsil örnekleriyle öğretim yapmaktadır. CRA öğretim stratejisine göre öğretim yapan hiçbir öğretmen bulunmamakta ve RA öğretim stratejisini uygulayan 1 öğretmen (BKÖ) bulunmaktadır.

Öğretmenlerin verdiği yanıtlardaki temsil kullanım sıralarının bütününe bakıldığında, dört işlemin öğretimindeki toplama işlemi haricinde çoğunlukla gerçekçi temsillerle başlanmamakta ve birçok öğretimde somut materyal yer almamaktadır. Bütün temsil sınıflarına ait örneklerinin gerçekçi, manipülatif, görsel, dilbilimsel ve sembolik şeklindeki sırayla sadece bir öğretmen tarafından kullanıldığı işlem toplamadır. Çıkarma işleminde bütün temsil sınıfına ait örnekleri bir öğretmen kullansa da kullanım sırası gerçekçi temsiller başlamamaktadır. Çarpma ve bölme işlemlerinde ise çoğunlukla sembolik- dilbilimsel temsil örnekleriyle sınırlı kalınmaktadır. Ayrıca, gerçekçi temsillere ait örnekleri kullanan öğretmenlerin çoğunun bu örnekleri kullanım şekli sözel ifadelerle sınırlı kalmakta ve çok az sayıda öğretmen gerçekçi temsil örneklerini görsel çizimlerle ve somut materyallerle desteklemektedir.

Sayma pulu modeli, tam sayılarla toplama işlemi öğretiminde araştırmaya katılan öğretmenler tarafından çoğunlukla kullanılırken, çıkarma işlemi öğretiminde azalmakta; çarpma ve bölme işlemlerine geçildiğinde ise özellikle bölme işleminde neredeyse hiç kullanılmamaktadır. Öğretmenler tarafından verilen yanıtlara göre tam sayı öğretiminde kullanılabilen sayma pulu modelinin kullanım durumları farklılıklar göstermektedir.

3.3.TAM SAYILARLA İŞLEM ÖĞRETİMİNDE ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN MANİPÜLATİF KULLANMA/ KULLANMAMA NEDENLERİ

Araştırmaya katılan öğretmenlerin tam sayılarla işlem öğretiminde manipülatifleri (bu araştırmada sayma pullarını) kullanma gerekçeleri ve bazı örnek öğretmen ifadeleri Tablo 18'de sunulmaktadır:

Tablo 18

Sayma Pullarının Kullanılma Durumları ve Gerekçeleri

İşlem	Kullanma Nedeni	Durum	Öğretmen İfadesi
Toplama (12)	Bazı kavramların açıklanabilmesini sağlaması (4)	Toplamanın birleşme anlamını açıklaması (1)	**MLÖ:** "…Sayma pulu kullanıyorum, toplamanın birleştirmek çıkarmanın da eksiltmek olduğunu anlatıyorum…"
		Nötrleşmeyi ve sonuç işaretindeki farklılığı açıklama (3)	**DAÖ:** "… Sayma pullarıyla da zıt işaretli sayıların toplamını yapıyoruz. Bir artının bir eksiyi nötr yaptığı şeklinde. Daha sonra kalan işaretli pulları sayıp sonuca ulaşıyoruz…"
	Öğretime destek sağlama (8)	Kullanışlı olması (1)	**BOÖ:** "…Toplama işleminde sayma pulları kullanışlı oluyor…"
		Somutlaştırması (2)	**BÖ:** "…Önce sayma pullarıyla modelleyerek konuyu somutlaştırmaya çalışıyorum…"
		Görselliği sağlayarak zihinde kalıcılığı arttırmak (2)	**EAÖ:** "…Bu örneklerden sonra sayma pulları ile göstererek yine görsel olarak da zihinlerinde daha netleştirmelerini sağlıyorum..."
		Kolaylaştırma (3)	**MCÖ:** "…Sayma pulları toplama işleminde kolaylık sağlasa da tam sayılarla çıkarma işleminde bazı öğrenciler için daha da zorlayıcı oluyor…"
Çıkarma (11)	Bazı kavramların açıklanabilmesini sağlaması (5)	Çıkarmanın eksiltme anlamını açıklaması (1)	**EHÖ:** "…Sayma pullarıyla toplamanın birleşme, çıkarmanın eksiltme olduğunu gösteriyorum…"
		Mutlak değerce küçük olandan büyük tam sayıyı çıkarmada etkili olması (3)	**DAÖ:** "…Pullarla küçük tam sayıdan büyüğü çıkarma daha iyi oluyor…"
		Nötrleşmeyi açıklaması (1)	**MSÖ:** "…Sayma pullarını kesinlikle kullanıyorum. Zaten -4 'ün içinde -5'in olmadığını söyleyince çocuklar bu sefer peki ne yapacağız sorusuyla devam ediyorum. Sıfır yani nötr durumunu keşfettirmeye çalışıyorum…"
	Öğretime destek sağlaması (6)	Görselleştirmeyi sağlaması (1)	**AÖ:** "…Anlaşılmayınca görselleştirme yoluna gidiyorum hemen yani bunu pul üzerinden yada tahtaya bir + - pul çizimi şeklinde anlatıyorum…"
		Daha kolay anlaşılması (2)	**MSÖ:** "…Sayma pullarını kesinlikle kullanıyorum. Zaten -4 'ün içinde -5'in olmadığını söyleyince çocuklar bu sefer peki ne yapacağız sorusuyla devam ediyorum. Sıfır yani nötr durumunu keşfettirmeye çalışıyorum…"
		Somutlaştırması (3)	**SÖ:** "…Evet sayma pullarıyla dersimi işliyorum. Öğrenciler, konular somutlaştırılınca daha iyi öğreniyorlar…"

Tablo 18 devam

Sayma Pullarının Kullanılma Durumları ve Gerekçeleri

Çarpma (2)	Bazı kavramların açıklanabilmesini sağlaması (1)	Çarpma işleminin, toplamadan geldiğinin açıklanmasına yardımcı olması (1)	**ŞÖ:** "Önce bu işlemin uzun yolu olan toplama ile işlemimizi sayma pulları ile yapıyoruz….(Pullarla modelleme yer alıyor). Ya da 4 tane (-2)+(-2)+(-2)+(-2)= (-8)…"
	Öğretime destek sağlaması (1)	Somutlaştırması (1)	**BÖ:** "…Çarpma işleminde modellemeyi öğrencilerin çoğunluğu anlamakta zorlanıyor ama yine de yararlanıyorum konuyu somutlaştırmak adına."
Bölme (2)	Bazı kavramların açıklanabilmesini sağlaması (1)	Gruplandırma kavramını açıklayabildiği için kullanışlı olması (1)	**MSÖ:** "…20 tane negatif pulu içinde 5 tane – olan kaç gruba ayırabiliriz…"
	Öğretime destek sağlaması (1)	Somutlaştırması (1)	**BÖ:** "Bölme işleminde modellemeyi öğrencilerin çoğunluğu anlamakta zorlanıyor ama yine de yararlanıyorum konuyu somutlaştırmak adına…"

Tablo 18'de görüldüğü gibi öğretmenlere göre sayma pullarını kullanmak, bu modelle yapılan öğretimde +1 ile -1'in nötrleşmesi, bazı işlem tiplerinin ve işlemin anlamı gibi çeşitli durumlardaki bazı kavramların açıklanabilmesini ve öğretimin somut, kalıcı, daha kolay gerçekleşmesi şeklinde öğretime destek sağlamaktadır. Sayma pulları toplama ve çıkarma işlemlerinde daha fazla sayıda öğretmen tarafından kullanılmakta çarpma ve bölme işlemlerinde ise oldukça azalmaktadır.

Araştırmaya katılan öğretmenlerin tam sayılarla işlem öğretiminde sayma pulu modelini kullanmama durumları, gerekçeleri ve bazı örnek ifadeler Tablo 19'da sunulmaktadır:

Tablo 19

Sayma Pullarının Kullanılmama Durumları ve Gerekçeleri

İşlem	Kullanmama Nedeni	Durum	Öğretmen İfadesi
Toplama (4)	Öğrenciye ilişkin (3)	Öğrenciler için sıkıcı olması (1)	**TÖ:** "…Sayma pullarını kullanmıyorum. Çocuklar genelde sıkılıyor. Onun yerine öğrencileri kullanıyorum. Gırgır şamata ders daha eğlenceli geçiyor…"
		Öğrencilerin çok iyi anlamaması (1)	**DKÖ:** "…Sayma pulları kullandığım zaman çok da iyi anlaşılmadığını fark ettiğim için artık tercih etmiyorum…"
		Kafa karışıklığına yol açması (1)	**EÖ:** "…Sayma pulları kafa karıştırıyor. Somut bir şekilde görmenizi sağlıyor sayma pulları diyorum ama kuralları tercih ediyorlar…"
	Öğretmene ilişkin (1)	Sorun oluşturma (1)	**AAÖ:** "Sayma pullarını tercih etmiyorum. Başlangıç olarak işe yarasa da ileri aşama işlemlerde sıkıntıya yol açtığını düşünüyorum…"
Çıkarma (9)	Öğrenciye ilişkin (3)	Öğrencilerin anlamasını zorlaştırması (1)	**EAÖ:** "..Sayma pullarını anlamak öğrenciler için daha zor olabiliyor…"
		Öğrencilerin mantıksal çıkarımının zayıf olması (1)	**DKÖ:** " …Sayma pulları çocukların mantıksal çıkarımı zayıf olduğu için çok etkili olmuyor…"
		Kafa karışıklığına yol açması (1)	**HÖ:** "Sayma pullarından yaralanmıyorum çünkü öğrencilerimde kafa karışıklığına yol açıyor…"
		Öğrencilerin bildiklerini de karıştırmasına sebep olması (1)	**MYÖ:** " Sayma pulları kullanmıyorum. Bildiklerini de bu yöntemle karıştırdıklarını gözlemlediğim için"
	Öğretmene ilişkin (6)	Sayı doğrusu çizerek görselleştirmenin daha iyi olduğu düşüncesi (1)	**MKÖ:** "Sayı pulları kullanmıyorum. Tahtaya sayı doğrusu çizerek görselleştirme daha iyi."
		Okulda materyalin olmaması (1)	SÖÖ:"… Okulumuzda materyal olmadığından kullanmıyorum…"
		Derse gidip gelirken sürekli materyal taşımak istememe (1)	**İÖ:** "…Derse gidip gelirken yanımda sürekli bir şeyler taşımak istemiyorum…"
		Kalabalık sınıflar olduğu için materyal yerine çizimle anlatılması (1)	**EGÖ:** "…Sınıflar kalabalık olduğu için materyal kullanımı pek tasarruflu olmuyor."
		Sayma pullarının görevini öğrencilerle canlandırma (1)	**TÖ:** "…Sayma pulları yerine öğrencilerle canlandırma yapıyoruz…"
		Kural odaklı çözümün daha iyi anlaşıldığı düşüncesi (1)	**TÖ:** "..Sayı pullarından yararlanmıyorum. Daha sonra klasik çıkarma işlemini uyguluyorlar ve zorluk yaşamıyorum.."

Tablo 19 devam

Sayma Pullarının Kullanılma Durumları ve Gerekçeleri

Çarpma (11)	Öğrenciye ilişkin (4)	Öğrencilere karışık gelmesi (3)	**BOÖ:** "Negatif iki sayının sayma pulları ile modellenmesi öğrencilere karışık geliyor…"
		Öğrenciler için anlaşılmasının zorlayıcı olması (1)	**EAÖ:** "…Özellikle iki negatif tam sayının çarpımını sayma pulları ile anlatmak ve anlaması çocuklar için çok zorlayıcı…"
	Öğretmene ilişkin (7)	Sayma pullarıyla anlatmanın zor olması (1)	**EAÖ:** "…Özellikle iki negatif tam sayının çarpımını sayma pulları ile anlatmak ve anlaması çocuklar için çok zorlayıcı…"
		Sayma puluyla anlatılabilecek bir konu olmaması (1)	MKÖ: "Somut materyalle anlatılabilecek bir konu olmadığı için kullanmıyorum."
		Sayma pullarıyla modellemenin zorlaşması (2)	**AÖ:** "…çıkarmamız gereken o son -1 pulu nasıl çıkaracağımızı açıklamak anlaşılması zor bir hale getiriyor…"
		Konuyu daha karmaşık hale getirmesi (1)	**DAÖ:** "…Açıkçası sayma pulları ile daha karmaşıkmış gibi geliyor kişisel olarak o sebeple tercih etmiyorum…"
		Geleneksel (kural odaklı) öğretimin daha etkili olması (1)	**İÖ:** "…Kurallarla daha etkili öğreniyorlar. Pul kullanmama gerek yok…"
		Bu konunun öğretiminde sorun yaşanmadığı için kullanılmaması (1)	**İÖ:** "… Materyal kullanma şansım olsa da kullanmazdım. Zaten basit olarak kural verip anlattığım bir konuda sorun yaşansın istemem."
Bölme (13)	Öğrenciye ilişkin (4)	Bu materyalle anlatılan dersi öğrencilerin anlamakta zorlanması (1)	**ÖÖ:** "…Somut materyal olarak sayma pullarını kullanmıyorum nedeni iste öğrencilerin çok çok zorlandıklarını gördüm meslek hayatımda."
		Öğrencilerin sevmemesi (1)	**HÖ:** "…8 yıllık öğretmenlik yapıyorum ve sayma pullarını sevebilen bir öğrenci göremedim…"
		Öğrencilerin konuyu öğrenmekte zaten zorlanmaması (2)	**İÖ:** "… Zaten basitçe yapılan bir konuyu uzatmaya gerek yok. Zaman da yetmeyebiliyor."
		Zaman alması (1)	**İÖ:** "… Zaten basitçe yapılan bir konuyu uzatmaya gerek yok. Zaman da yetmeyebiliyor."

Tablo 19 devam

Sayma Pullarının Kullanılma Durumları ve Gerekçeleri

	Öğretmene ilişkin (9)	Materyali kullanan öğretmenin yetersizliği düşüncesi (1)	**HÖ:** "…belki de ben anlatmayı beceremiyorumdur ama okuldaki zümrelerim de sayma pullarına hiç değinmezler tam sayıları anlatırken."
		Sayma puluyla anlatılabilecek bir konu olmaması (1)	**MKÖ:** "Somut materyalle anlatılabilecek bir konu olmadığı için kullanmıyorum."
		Sayma puluyla dersi anlatmanın zor olması ve bölme işlemine ait bu modelle kitaplarda uygulama olmaması (1)	**EAÖ:** "…Özellikle bölme konusunun sayma pulları ile anlatımını ders kitaplarında dahi pek göremezsiniz. Benim için de çok zorlayıcı oluyor anlatması."
		Kullanım şeklini bilmeme (1)	**EGÖ:** "…Somut materyal kullanmıyorum veya asıl kullanacağımı bilmiyorum."
		Negatif sayılarda gruplandırma kavramını açıklayamama (2)	**MSÖ:** "…Bana bunu modellemek biraz soyut ve ezber geliyor. Çünkü -5 tane grup diye söylemek garip…"
		Konunun daha karmaşık hale gelmesi (2)	**DAÖ:** "…Açıkçası sayma pulları ile daha karmaşıkmış gibi geliyor kişisel olarak o sebeple tercih etmiyorum…"
		Geleneksel anlatım kadar etkili olmaması (1)	**SÖ:** "…Öğrenciler bu yöntemle (yapılan geleneksel anlatımdan bahsediliyor) az hata ile kısa zamanda soruların cevaplarını buluyorlar."

Tablo 19'a göre sayma pullarının kullanılmamasındaki öğrenciye ilişkin gerekçeler, genellikle öğrencilerin bu materyalle yapılan öğretimi anlamasında yaşanan zorluklarla ve karışıklıklarla ilgilidir. Öğretmene ilişkin gerekçeler ise sayma pullarıyla yapılan dersin karışık hale gelebilmesiyle, kural odaklı öğretimin daha iyi olduğu düşüncesiyle ve öğretmenlerin sayma pullarına yönelik aldıkları eğitimin yetersizliğiyle ilgilidir.

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Sonuç ve Tartışma

Araştırmanın bu bölümünde; araştırma soruları doğrultusunda elde edilen bulgulardan ulaşılan sonuçlar alanyazınla ilişkilendirilerek sunulmuştur.

Tam Sayılarla İşlem Öğretiminde Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Kullandıkları Matematiksel Temsillere Yönelik Sonuç ve Tartışma

Tam sayılarla işlem öğretiminde, araştırmaya katılan öğretmenlerin büyük çoğunluğu 6. sınıfta öğretilen tam sayı kavramıyla ilgili bazı hatırlatmaları yapmamaktadır. Araştırmaya katılan öğretmenler tarafından toplama işleminin öğretiminde en fazla kullanılan örnekler *gerçekçi* temsilerdir ve toplama işleminin kuralı çoğu öğretmen tarafından gerçekçi temsil örnekleriyle açıklanmaktadır. Benzer şekilde sayma pulu manipülatif temsil örneği ve görsel temsil örnekleriyle yapılan modellemeler de toplama işleminin kural öğretiminde konuyla ilgili kavramlar dikkate alınarak kullanılmaktadır. Araştırmaya katılan öğretmen yanıtlarına göre tam sayı öğretiminde kullanılan matematiksel temsiller göz önüne alındığında toplama işleminin somuttan soyuta sıralamasıyla öğretildiği söylenebilir. Bu durum, yapılandırmacı yaklaşım anlayışına göre yapılan matematik öğretimindeki Piaget'nin bilgi kuramındaki soyut olan matematiksel bilginin somutlaştırılmasının (Lutz ve Huit, 2004) ve gerçek hayatla ilişkili öğrenilmesinin gerekliliği göz önüne alındığında toplama işlemi öğretimi, gerçekçi matematik öğretimiyle büyük oranda paralellik göstermektedir (Altun, 2006).

Araştırmaya katılan öğretmenlerinin *çıkarma işlemi* öğretiminde en fazla kullandığı temsil örnekleri *sembolik ve dilbilimseldir*. Araştırmaya katılan öğretmenlerin çoğunun yan yan gelen iki eksi (-) işaretini [(-4)-(-5) işlemi] artı (+) işaretine dönüştürdüğü ve çıkan sayının işaretinin gizli olduğu [-2-7] çıkarma işleminde ise çıkan sayı işaretine gereken vurguyu yapmadan kural gereği toplamaya dönüştürdüğü görülmektedir. Toplama ve çıkarma işlemi öğretimindeki kurallarla ilgili olarak çıkan sayının işaretinin ve işlemin toplamaya dönüştürülerek ele alınması, resmi matematik kitapları (MEB, 2019a, 2019b) ve alanyazındaki bazı çalışmalardaki kurallarla (Beyatlı Ak, 2019; Erdoğdu, 2019) benzerdir.

Çıkarma işleminde öğretmenlerin en fazla kullanılan *gerçekçi* temsil örneklerinin büyük çoğunluğu, işlemleri toplamaya dönüştürmede kullanılan benzeşim veya işaret değişimine dayalı kurallarla kullanılan *para hesabı ve yatay-dikey harekete* bağlı gerçek yaşam durumlarına ait örneklerdir. Genel olarak araştırmaya katılan öğretmenler para hesabında eksi (-) işaretini borçla temsil ettiklerini belirtseler de; çıkarma işlemindeki eksi (-) olan çıkan sayının işaretini kural gereği toplamaya dönüştürmektedir [(-4)-(-5)= -4+(+5)]. Çıkarma işleminde yan yana gelen işaret dönüşümü Yürekli (2020) ve Koç Şanlı'nın (2018) çalışmalarında görülmektedir. Çıkan sayının işaretinin gizli olduğu durumda ise bazı öğretmenler tarafından işlem işaretinin çıkan sayıya ait olduğunu belirtilmekte ve doğrudan toplama işlemi olarak [-2-7= (-2)+(-7)] borç- alacak temsil örneğiyle kullanmaktadır. Benzer şekilde yatay- dikey hareketi gerçekleştiren kişi, nesne vb. öğelerin yönü de kural gereği işaret değişimiyle açıklanmaktadır. Öğretmenler tarafından kullanılan gerçekçi temsillerin bazıları alanyazında yer almaktadır. Bunlar; borç-alacak (Baykul, 2020; Stephan ve Akyuz, 2012), sıcaklık (Altun, 2008), adımlama (Roper, 2007, Akt. Bozkurt ve Polat, 2011), asansör (Kumar vd., 2017), deniz seviyesi ve ileri- geri (MEB, 2009) ve termometre (MEB, 2019a) örnekleridir.

Çıkarma işleminde manipülatif temsillerden sayma pulu modelini kullanan öğretmenlerin çoğu bu temsil biçimiyle modellemeyi doğru biçimde yapsa da bazıları modelleme için gereken aşamaları model üzerinde belirtmemekte ve işlemdeki sayı ile işaretleri temsil üzerinde açıkça göstermemektedir. Benzer şekilde öğretmenlerin yarısından azı görsel temsillerden sayı doğrusu modelindeki aşamaları da yapılan modellemelerde belirtmemektedir. Sayı doğrusu modelini kullananların büyük çoğunluğunun model üzerinde çıkan sayıyı temsil eden çizimin yönünü, işaret değişimine bağlı kural odaklı biçimde açıklamakta ve bu açıklamaların alanyazındaki bazı öğretmen modellemeleriyle benzer olduğu görülmektedir (Beyatlı Ak, 2019; Fuadiah vd., 2019). Oysaki matematiksel modelleme; problemlerin matematiksel bir şekilde çözümlenip test edilmesinde (Haines, Crouch ve Davis, 2000) ve ele alınan kavram veya durumla ilgili çok yönlü problem çözme sürecidir (Blum ve Niss, 1991). Matematiksel modelleme becerisini kazanabilmek için problemleri aşamalı modelleyerek çözmek gerekir (Ural ve Ülper, 2013).

Çarpma ve bölme işlemi öğretimini genellikle birlikte ele aldığını söyleyen öğretmenler, bu işlemlerin öğretiminde en fazla dilbilimsel ve sembolik temsil örneklerini kullanmaktadır. Bu işlemlerin öğretiminde belirtilen kurallardaki işaret ve sayıların ayrı ele alınmasına alanyazındaki pek çok çalışmada da rastlanmaktadır (Çiçek 2020, Demirören 2019; Erdoğdu, 2019; Khalid ve Embong, 2019). Çarpma ve bölme işlemlerinde öğretmenlerin kullandığı *işaret çarpımı ve bölümü* Koç Şanlı'nın (2018) çalışmasındaki öğretmen ifadeleriyle benzerdir. Çarpma ve bölme işlemlerinde kullanılan işaret çarpımı veya bölümü, çarpma ve bölme işlemlerinin kavramsal anlamıyla örtüşmemektedir.

Çarpma ve bölme işlemi öğretiminde araştırmaya katılan öğretmenlerin yarıdan azının kullandığı gerçekçi temsiller ağırlıklı olarak işlemlerin sonuç işaretini belirlemedeki işaret etkileşimlerini hatırlatmaya yönelik kullanılan benzeşimlerdir. Araştırmaya katılan öğretmenlerden birinin çarpma işleminde para hesabına dayalı borç- alacak örneğini kullandığı görülmekte ve alanyazında yapılan araştırmalarda tam sayılarla çarpma işleminin öğretiminde para hesabına dayalı bir örneğe rastlanmamaktadır. Öğretmenlerin en çok kullandığı gerçekçi temsillerden biri olan dost- düşman örneğine alanyazındaki Berber ve Memnun (2018), Çetinkaya ve Özdemir (2018) ve Toluk Uçar'ın (2011) çalışmalarında rastlanmaktadır.

Çarpma işlemi öğretiminde araştırmaya katılan öğretmenlerin büyük çoğunluğunun kullanmadığı manipülatif temsillerden sayma pulu, bölme işleminde çarpmadan daha da az sayıda öğretmen tarafından kullanılmaktadır. Sayma pulu modelini çarpma ve bölme işlemlerinde kullanan öğretmenlerin çoğunlukla işlemlerdeki sayılara ve işaretlere bağlı birtakım kurallara dayalı öğretim yaptığı görülmektedir. Çarpma işlemi öğretiminde sadece üç öğretmenin kullandığı, bölme işleminde hiçbir öğretmenin kullanmadığı görsel temsil sayı doğrusu modelidir. Araştırmaya katılan öğretmenlerin, özellikle iki negatif tam sayının bölümünde, sayma pulu modelini büyük çoğunluğunun kullanmaması; sayı doğrusu modelini çok az sayıda öğretmenin kullanması ve kullananların da her işlem çözümünde (iki negatif tam sayının bölümü) kullanmaması resmi matematik dersi kitaplarındaki (MEB, 2019a, 2019b) işlem öğretiminde yer alan temsil örneklerindeki sınırlılıkla paralellik göstermektedir. Ayrıca, öğretmenlerden birinin kullandığı görsel temsil örneği, çarpma ve bölme işlemlerindeki kuralda yer alan işaret etkileşimlerini gösteren bir tablo çizimidir.

Tam sayılarla işlem öğretiminin bütününe bakıldığında, araştırmaya katılan öğretmenlerin yarısından çoğu sayı ve işaretlerin işlevlerine yönelik açıklamaları yaparken kural odaklı sembolik ve dilbilimsel temsil örnekleriyle sınırlı kalmakta ve işlemin anlamını (kavramsal açıklama) dikkate almamaktadır. Tam sayı öğretimiyle ilgili alanyazına göre; toplama, çıkarma (Altıparmak ve Özdoğan, 2010; Kumar vd., 2017), çarpma ve bölme (Van de Walle vd., 2016) işlemlerindeki işlem işareti ile sayı işaretlerine yönelik açıklama ve vurgular, çeşitli modellemelerle birlikte yapılmalıdır. Ancak araştırmaya katılan öğretmenlerin büyük çoğunluğunun işlemlerin kavramsal anlamına yönelik açıklama yapmadığı, açıklama yapanların ise bu anlamları kısıtlı biçimde ifade ettiği görülmektedir. Araştırmaya katılan öğretmenler tarafından yapılan işlemlerle ilgili yapılan kavramsal açıklamalar; toplamanın birleştirme, çıkarmanın fark, çarpmanın tekrarlı toplama ve bölmenin gruplara ayırma işi olmasıdır. Dört işlemin öğretimiyle ilgili alanyazına bakıldığında dört işlemin kavramsal anlamlarının öğretiminde kullanılan temsil örneklerine bağlı olarak toplama- çıkarma işlemlerinin birleştirme, ayrılma, karşılaştırma gibi (Fuson, 1992; Van de Walle vd., 2016) ve çarpma- bölme işlemlerinin eş- grup, karşılaştırma, kombinasyon, alan ve diğer ölçümlerin çarpımı şeklindeki (Van de Walle vd., 2016) kavramsal anlamlarıyla derinlemesine ele alınması gerektiği vurgulanmaktadır. Ancak araştırmaya katılan öğretmenlerin neredeyse tamamı bu açıklamaları yapmamaktadır. Bu durumun diğer anlamı. Ayrıca, iki negatif tam sayının çarpımının sonuç işaretinin neden pozitif olduğunu açıklamak için Crowley ve Dunn'ın (1985) örüntü kuralını kullanan tek kişi MSÖ kodlu öğretmendir. Aynı öğretmen, bölme işlemlerindeki *(+10): (-2)* işlemini, ardışık çıkarma işleminden (Van de Walle vd., 2016) yararlanarak çözmektedir. Diğer öğretmenlerden farklı yaklaşımlar sergileyen MSÖ kodlu öğretmenin bu yaklaşımının meslekte görev yaptığı yıl aralığının 11-15 ve mezuniyet durumunun lisansüstü olması ile ilişkili olduğu düşünülmektedir.

Tam sayılarla dört işlem öğretiminde gerçekçi temsil örneklerinin ağırlıklı kullanıldığı tek işlem toplamadır. Çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin öğretiminde en fazla kullanılan temsiller ise sembolik ve dilbilimseldir. Diğer bir deyişle, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri soyut temsil örnekleriyle; toplama işlemi ise diğer işlemlere göre daha somut temsil örnekleriyle öğretilmektedir. Toplama işleminde kullanılan temsil örnekleri her ne kadar diğer işlemler göre daha somut olsa da dört işlemin tamamının öğretiminde kullanılan çoğu gerçekçi temsil örneği sözel ifadelerle sınırlı kalmaktadır. Ayrıca dikkat çeken bir başka durum ise çıkarma işleminde kullanılan işaret dönüşümlerinin toplama işleminde kullanılmamasıdır. Dolayısıyla, tam sayılarla toplama işleminin diğer işlemlere göre daha somut, çıkarma işleminin toplamadan daha az somut, çarpma ve bölme işlemlerinin ise araştırmaya katılan çoğu öğretmen tarafından neredeyse soyut bir biçimde öğretildiği söylenebilir. Öte yandan, tam sayılarla işlemleri öğrenirken anlamakta zorluk yaşayan öğrenciler için öğretmenler tarafından yapılan uygulamaların; aynı veya farklı temsil örnekleriyle konunun tekrar anlatılması ve çoğunlukla yapılan uygulama ise ilgili konuda daha fazla soru çözülmesidir. Öğretmenler tarafından konuyu anlamayan öğrenciler için daha fazla sayıda soru çözmeye Khalid ve Embong'un (2019) çalışmasındaki öğretmen davranışlarında rastlanmaktadır. Khalid ve Embong'un (2019) da vurguladığı gibi sadece daha fazla sayıda soru çözülerek halledilmeye çalışılan öğrenme zorlukları öğretimdeki hataların pekişmesine neden olabilir ve yaşanan sorunları çözmeyebilir.

Araştırmaya katılan öğretmen yanıtlarına göre toplama işlemi, yapılandırmacı yaklaşımdaki soyut olan matematiksel bilgilerin somutlaştırılarak öğretilmesi anlayışına (Baykul, 2009) en yakın olanıdır. Araştırmaya katılan bazı öğretmenler tarafından oldukça veya tamamen soyut olarak gerçekleştirilen tam sayı öğretimlerinde kavramların zihinde yapılanmasında bazı sorunlar oluşabilir. Yapılandırmacı yaklaşım anlayışına dayalı matematik öğretimine göre; matematiksel kavramlar ile gerçek hayat arasında bağ kurularak (Gravemeijer, 1990, Akt. Yağcı ve Arseven, 2010) yapılan matematiksel modellemelerle, karmaşık ve anlaşılması güç kavramlar (Harrison, 2001) zihinde yapılandırılabilir (Niss, 1999; Tutak ve Güler, 2014).

Araştırmaya katılan öğretmenlerin gerçekleştirdiği tam sayılarla işlem öğretimlerinde dikkat çeken konulardan biri de öğretmenlerin kullandığı dilbilimsel temsillerden oluşan matematiksel dildir. İşlemlerde yapılan çözümlerdeki *işaretleri çarpma- bölme yapma, işlemleri parantezden kurtarma, negatifi çıkarma* gibi ifadelerin yer alması; bazı öğretmenlerin matematiksel dili doğru şekilde kullanmadığının göstergesidir. Buna karşın alanyazındaki bazı araştırmalara göre dersi anlatan öğretmenin matematiksel dilinin doğruluğu, etkili bir matematik öğretimin yapılmasına katkı sağlamaktadır (Philipp vd., 2002; Yeşildere, 2007).

Tam Sayılarla İşlem Öğretiminde Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Matematiksel Temsilleri Kullanma Sırasıyla İlgili Sonuç ve Tartışma

Tam sayılarla işlem öğretimindeki öğretmen yanıtlarında kullanılan temsillerin sırasına bakıldığında; bazı öğretmen çözümlerinin sembolik ve dilbilimsel temsil örnekleriyle başlamakta veya bu temsil sınıfındaki örneklerle sınırlı kalmakta; diğer bir deyişle çoklu temsil anlayışından uzak bir şekilde öğretim yapılmakta veya bu anlayışa çok az yer verilmekte ve gerçekçi temsillerle derse başlanmamaktadır. Nakahara'nın (2008) temsil kullanım sırasına uygun bir öğretmen (MSÖ) tarafından öğretilen tek işlem toplamadır. Nakahara'ya (2008) göre kullanım sırasına gerçekçi temsillerle başlanarak; manipülatifler ve görsel temsillerle devam edilmesi, en son kuralları anlatan dilbilimsel ve sembolik temsil ifadelerine yer verilmesi gerekir. Ayrıca Nakahara, gerçekçi temsillerin bir öğretimde mutlaka yer alması gerektiğini söyleyerek; bu temsil örneklerini dinamik, son derece somut ve doğal olarak nitelendirmektedir. Yapılandırmacı yaklaşımla ilişkilendirilen gerçekçi matematik eğitiminin kurucusu Hans Freudethal, matematikte öğrenmeyi anlamlandırabilmek için öğretimde gerçek matematik yapmanın önemini vurgulamaktadır (Altun, 2006).

Araştırmaya katılan bazı öğretmen yanıtlarına göre kısmen çıkarma, özellikle çarpma ve bölme işlemlerinin öğretimi, tamamen soyut bir anlayışa dayalı sembolik ve dilbilimsel temsillerden oluşmaktadır. Alanyazındaki bazı araştırmalara göre soyut kuralların yanında kullanılan, çoklu temsil anlayışının hakim olduğu öğretim ortamlarında daha etkili bir matematik öğretimi yapılabilmekte (Çetin, 2016; Nakahara, 2008; Goldin ve Shteingold, 2001; Kumar vd., 2017) ve bu anlayışın öğrenilen kavramla ilgili eksik kalan yönlerin tamamlanmasını, diğer temsillerle yapılan öğretimdeki yanlış yorumların sorgulanmasını, konunun derinlemesine anlaşılmasını (Ainsworth, 1999), üretilen farklı fikirler sayesinde yeni problem durumlarına çözüm bulabilmeyi (Seufert, 2003), kavrama ait farklı temsiller arasında geçiş yapabilme yeteneğinin, kavramın anlaşılma biçiminin ve kalıcılığının gelişmesini sağlamaktadır (Van de Walle vd., 2016).

Araştırmaya katılan çoğu öğretmenlerin yaptığı özellikle çarpma ve bölme işlemi çözümlerinde somuttan soyuta doğru geçiş yapılmamaktadır. Toplama işleminde kullanan bir öğretmen dışında, tam sayıların öğretiminde kullanılan temsil sırasının ne CRA modeline ne de Lesh (1981) tarafından geliştirilen ve Nakahara (2008: s.2-9) tarafından güncellenen matematiksel temsil kullanım sırasına uymadığı görülmektedir. Bazı öğretmenler tarafından sayma pulu modeli çizimleriyle yapılan tam sayı öğretimleri ise RA öğretim stratejisine uygundur. Tam sayılar konusunun öğretimindeki kavramların daha iyi öğrenilebilmesi sayma pulu modeli sadece çizim ya da materyal olarak kullanılması yerine CRA stratejisiyle kullanılabilir. Butler ve diğerlerinin (2003) araştırma sonuçlarına göre CRA grubu öğrencilerinin RA grubuna göre matematiksel kavramları daha iyi öğrendikleri görülmüştür.

Araştırmanın sonuçlarına göre tam sayılarla işlem çözümleri; somuttan sonra doğrudan soyut kurallara, temsili çizimlerden soyut kurallara, soyut kurallardan somuta ve sadece soyut kurallarla yapılmaktadır. Araştırmaya katılan öğretmenlerin çok az bir kısmının, somut bir materyalle yapılan öğretim ardından görsel temsilleri kullandığı ve en son soyut kuralları öğrettiği görülmektedir. Oysaki, Bruner'e (1966) göre ortaokul çağındaki öğrenciler, somuttan soyut öğrenme biçimine geçiş yaptıkları bu dönemde bir kavram ya da beceriyi öğrenirken; ilk olarak bu kavram veya beceriyle ilgili bir nesneye dokunmalı veya nesneyi manipüle etmeli (eylemsel), ardından bu kavram veya beceriye ait bir görseli kullanmalı (ikonik) ve son aşamada bu kavram veya beceriyle soyut bir biçimde uygulama (sembolik) yapmalıdır. Ayrıca, bazı öğretmenler tam sayılarla işlem öğretiminde sadece işleme önem vermekte, diğer bir deyişle işlemleri anlamlandıran kavramların öğretimini dikkate almamaktadır. Oysaki işlemsel bilgi, kavramsal bilgiyle anlam kazanmakta (Olkun ve Uçar, 2014) ve Piaget'nin bilişsel bilgi kuramlarına göre mantıksal/ matematiksel bilgi somut bir uyaranla oluşan fiziksel bir etkileşim yoluyla öğrenilebilmektedir (Lutz ve Huit, 2004: s.2-5).

Tam Sayılarla İşlem Öğretiminde Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Manipülatifleri Kullanma/ Kullanmama Nedenleriyle İlgili Sonuç ve Tartışma

Araştırmaya katılan öğretmenler bu modeli kağıt, mıknatıs vb. somut materyal veya artı (+) ve eksi (-) işareti bulunduran çizim olarak farklı biçimlerde kullanmaktadır. Erdem ve diğerlerine (2015) göre somut işlemler döneminden soyuta geçen öğrencilerle yapılan öğretimde somut materyal kullanmak, etkili bir tam sayı öğretimi yapılmasını sağlayabilmektedir. Sayma pullarını sadece tahtaya çizerek kullanmak, somut materyal şeklinde kullanmak kadar etkili değildir (Şengül ve Körükcü, 2012). Araştırmaya katılan öğretmenlerin sayma pulu modelini toplama işleminde yarısından fazlası, çıkarma işleminde yarıya yakını kullanmakta; çarpma ve bölme işlemlerinde ise öğretmenlerin büyük çoğunluğu kullanmamaktadır. Bu durum Bozkurt ve Polat'ın (2011) çalışmasındaki öğretmenlerin çoğunlukla sayma pulu modelini toplama ve çıkarmada kullanmasıyla, çarpma ve bölmede kullanmamasıyla paralellik göstermektedir.

Sayma pulu modelinin kullanılma durumları; bu modelin konuyu anlamlandırması, somutlaştırması, kalıcı hale getirmesi, görselleştirmesi, konunun öğrenilmesini kolaylaştırması ve konudaki bazı kavramları açıklamaya yardımcı olmasıdır. Daha yoğun şekilde belirtilen kullanılmama durumları öğrenciler açısından ele alındığında bunlar; sayma puluyla yapılan dersin anlaşılmasında zorluk yaşanması, bu modelle anlatılan dersin sevilmemesi veya karmaşık hale gelmesidir. Sayma pulunu kullanılmama durumlarının bir kısmı da; öğretmenlerin bu modeli karmaşık bulmaları, bu modelin bazı kavramları açıklayamadığını düşünmeleri, öğretmenlerin yetersiz oluşu ve kaynaklarda sayma puluyla her işlem türünde [(-20): (-5) gibi] modellemenin yer almadığı düşüncesidir.

Sayma pullarıyla ilgili öğretmenler tarafından belirtilen kullanılma durumlarından somutlaştırmayı sağlamaya, Bozkurt ve Polat'ın (2011) çalışmasında da rastlanmaktadır. Kullanılmama durumlarından öğrencilerin dersi anlamakta güçlük yaşamasına Akyüz (2019), Bozkurt ve Polat (2011) ve Çevik'in (2019); ders kitabında bu modelle ilgili uygulamanın olmayışına ve öğretmenlerin bu modeli kullanmakta zorlanmasına Bozkurt ve Polat'ın (2011) çalışmalarında da rastlanmaktadır. Öte yandan, araştırmaya katılan bazı öğretmenlerin bazı bölme işlemlerini sayma pulu modeliyle anlatan kaynakların olmadığını belirtmesi, resmi matematik dersi (MEB, 2019a, 2019b) kitaplarındaki iki negatif tam sayının bölümündeki kısıtlı örneklerle paralellik göstermekte; işaretine göre her işlem türünün sayma pullarıyla modelleme uygulamalarının yer aldığı alanyazındaki bazı çalışmalarla çelişmektedir (Battista, 1983; Van de Walle ve diğerleri, 2016).

Sonuç olarak araştırmaya katılan ortaokul matematik öğretmenleri tarafından tam sayılarla işlem öğretiminde kullanılan matematiksel temsillerde farklılık görülmekte ve çoğunlukla çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinde daha soyut bir öğretim yapılmaktadır. Oysaki, ortaokul çağlarında öğrenim gören bireylerin yaş aralıklarına göre somuttan soyuta geçtikleri dikkate alınırsa; Bruner'in (1966) anlayışıyla öğretim önce somut yapılmalı ve sonrasında temsili çizimler ardından soyutlaştırılmalıdır. Araştırmaya katılan öğretmen yanıtlarının bütününe bakıldığında birbirinden farklı tam sayı öğretimi ve soyut öğretim yapılmasının nedeni; tam sayı öğretiminde dikkate alınmayan bazı kavramlardan ve yapılan matematiksel modellemedeki anlayış farklılıklarıdan veya eksikliklerden kaynaklanmaktadır. Yapılan bu araştırma; ortaokul matematik öğretmenlerinin tam sayılarla işlemlerde matematiksel temsilleri kullanma durumlarını ve sırasına ve ayrıca, manipülatiflerin kullanılma/ kullanılmama durumlarını ortaya koymaktadır. Ortaya koyulan bu durumlar, araştırmayı yapan yazarın ve meslektaşlarının mesleki becerilerini geliştirmesine yardımcı olabileceği gibi bu konuda yapılacak olan araştırmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Öneriler

Yapılan araştırmanın sonuçlarına dayalı olarak;

- Ortaokul matematik öğretmenlerinin tam sayıların öğretiminde alan bilgilerini geliştirebilmeleri ve varsa eksiklerini giderebilmeleri için hizmet içi eğitimlere katılmaları; ayrıca, tam sayılarla ilgili alanyazından yeterince yararlanmaları,
- Tam sayılar konusunu öğreten ortaokul matematik öğretmenleri için öğretim programı tasarlayan tasarımcılarının daha somut ve yapılan uygulamaların aşamalı bir biçimde açıklandığı öğretim programı tasarlamaları,
- Tam sayılar konusunda çalışan araştırmacıların içinde somut materyallerin yer aldığı çoklu temsil anlayışına dayalı deneysel çalışma yapmaları,
- Araştırmaya katılan öğretmen yanıtları ve MEB tarafından yayınlanan resmi matematik dersi kitaplarında yapılan inceleme doğrultusunda, işleme giren tam sayıların işaretlerine göre her işlem türünde modelleme örneklerine yer verilmesi ve özellikle çarpma ve bölme işlemlerinde yer alan günlük hayat örneklerinin sayısının arttırılması önerilmektedir.

KAYNAKÇA

1.Kitaplar

Adair, John (2017). Karar verme ve problem çözme (Çev. G. Korkmaz). Ankara: Pegem Akademi.

Albayrak, Mustafa, A. Sabri İpek & Cemalettin Işık. (2006). Onluk sayma sisteminin öğretimi. Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, (13), 199-206.

Alkan, Hüseyin ve Murat Altun (1998), "Matematik öğretiminin amaç ve ilkeleri." Matematik öğretimi: Ed. Aynur Özdaş. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, 2-17.

Altun, Murat (2002). Matematik öğretimi (ilköğretim ikinci kademede). Bursa: Erkam Matbaacılık.

Altun, Murat (2008). "Eğitim fakülteleri ve sınıf öğretmenleri için matematik öğretimi." Ankara: Alfa Yayıncılık.

Anabritannica (1994). Anabritannica ana yıllık 1994. Ankara: Ana Yayıncılık.

Baki, Adnan (2008). Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Baykul, Yaşar (1995). İlköğretimde matematik öğretimi. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Baykul, Yaşar. (2004). 6.-8. sınıflar için ilköğretimde matematik öğretimi. Ankara: Pegem A Yayıncılık, ss.256.

Baykul, Yaşar (2009). İlköğretimde matematik öğretimi 6-8. sınıflar. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Bruner, Jerome Seymour (1966). Bir öğretim kuramına doğru (Çev. F. Varış ve T. Gürkan). Ankara: Ankara Üniversitesi Basımevi.

Bukova Güzel, Esra, Ayşe Tekin-Dede, Çağlar Naci Hıdıroğlu vd (2016). Matematik eğitiminde matematiksel modelleme. Ankara: Pegem Akademi.

Bulut, Safure (2004). İlköğretim programı yeni yaklaşımlar matematik (1-5 sınıf). Ankara: Milli Eğitim Yayınları.

Büyüköztürk, Şener, Ebru Kılıç Çakmak., Özcan Erkan Akgün vd (2016). Bilimsel araştırma yöntemleri. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Demirel, Özcan (2002). Kuramdan uygulamaya eğitimde program geliştirme. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Dönmez, Ali (2002). Matematiğin öyküsü ve serüveni: dünya matematik tarihi ansiklopedisi. İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları.

Gravemeijer, Koeno (2002). "Preamble: Frommodelstomodeling." Ed. K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers ve L. Verschaffel. Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education. Dordrecht, The Netherlands: KluwerAcademicPublish, 7-22.

Milli Eğitim Bakanlığı (2019a). Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik 7 ders kitabı. Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı (2019b). Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik 7. sınıf ders kitabı. İstanbul: EKOYAY.

Miles, Matthew B., A. Micheal Huberman ve Johnny Saldana (1994). Qualitative data analysis: an expanded sourcebook. Thousand Oaks, CA: Sage.

Olkun, Sinan ve Zülbiye T. Uçar (2014). İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi. Ankara: Eğiten Kitap.

Oxford (1985). Resimli ansiklopedik sözlük (Çev. Resuhi Akdikmen). İstanbul: Güneş Yayıncılık.

Sertöz, Sinan (1998). Matematiğin aydınlık dünyası. Ankara: Tübitak Popüler Bilim Kitapları.

Struik, Dirk J. (2002). Kısa Matematik Tarihi (Çev.Yıldız Silier). İstanbul: Doruk Yayınları.

Türk Dil Kurumu. (2005). Türkçe sözlük. Ankara: TDK.

Van De Walle, John A., Karen S. Karp ve Jennifer M. Bay-Williams (2016). İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim (Çev. S. Durmuş). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Yıldırım, Ali ve Hasan Şimşek (2018). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldızlar, Mehmet (2012). Yapılandırmacı Öğretimde Matematik Problemlerini Çözebilme Yöntemleri. İstanbul: Pegem Akademi Yayıncılık.

2. Makale, Bildiri ve Diğer Basılı Yayınlar

Agrawal, Jugnu, ve Lisa L. Morin (2016). "Evidence-based practices: applications of concrete representational abstract framework across math concepts for students with mathematics disabilities.” Learning Disabilities Research & Practice, 31(1): 34-44.

Ainsworth, Shaaron (1999). “The functions of multiple representations.” Computers & education, 33(2-3), 131-152.

Akyazı, Nazmiye (2019). Drama Yöntemi ile Tam Sayılarla Toplama İşleminin Öğretimi: Altıncı Sınıf Öğrencilerinden Yansımalar. Yüksek lisans tezi, T.C. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Akyuz, Didem, Michelle Stephan ve Juli K. Dixon (2012). “The role of the teacher in supporting imagery in understanding integers.” Education and Science, 37(163): 268-282.

Akyüz, Mehmet (2019). Tam Sayıların Çoklu Temsillerle Öğretiminin 7. Sınıf Öğrenci Başarısına Etkisi ve Öğrenci Görüşleri. Yüksek Lisans Tezi, T. C. Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Rize.

Alptekin, Serpil (2015). Sayma becerilerinin öğretimi. Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Özel Eğitim Dergisi, 16(01), 63-72.

Altıparmak, Kemal ve Ece Özdoğan (2010). “A study on the teaching of the concept of negative numbers.” International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(1): 31-47.

Altun, Murat (2006). “Matematik öğretiminde gelişmeler.” Eğitim Fakültesi Dergisi, (2), 223–238.

Annells, Merilyn (2006). “Triangulation of qualitative approaches: hermeneutical phenomenology and grounded theory.” Journal of advanced nursing, 56(1), 55-61.

Arslan, Mehmet (2007). “Constructivist Approaches in Education.” Ankara University, Journal of Faculty of Educational Sciences, 40(1), 41-61.

Avcu, Tevfik ve Burcu Durmaz (2011). “Tam sayılarla ilgili işlemlerde ilköğretim düzeyinde yapılan hatalar ve karşılaşılan zorluklar.” International Conference on New Trends in Education and Their Implications, (2), 1648-1656.

Ay, Büşra (2019). An investigation of seventh grade students’ understanding of negative integers via mathematics history-based model-eliciting activities. Master's thesis, Mıddle East Technıcal Unıversıty The Graduate School Of Socıal Scıence, Ankara.

Aydın Ünal, Zeynep ve Ali Sabri İpek (2009). “Gerçekçi matematik eğitiminin ilköğretim 7. Sınıf öğrencilerinin tamsayılarla çarpma konusundaki başarılarına etkisi.” Eğitim ve Bilim, 34(153): 60-70.

Aydın Ünal, Zeynep ve Ali Sabri İpek (2010). “Gerçekçi matematik eğitiminin ilköğretim 7. sınıf öğrencilerinin tam sayılarla çarpma konusundaki başarılarına etkisi.” Eğitim ve Bilim, 34(152).

Aydoğdu, Mustafa ve Mehmet Fatih Ayaz (2008). “Matematikte öğrencilere problem çözme yeteneğinin kazandırılması.” Physical Sciences, 3(4): 588-596.

Aydoğdu, Mustafa, Ayşe Nur Erşen ve Tayfun Tutak (2014). “Materyal destekli matematik öğretiminin ortaokul 6. sınıf öğrenci başarısına ve tutumuna etkisi.” Turkish Journal of Educational Studies, 1(3): 166-185.

Aydın, Hilal (2020). Ters-Yüz Edilmiş Sınıf Modelinin Tam Sayılarda İşlemler Konusunun Öğreniminde Akademik Başarıya Etkisi. Yüksek lisans tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Aztekin, Serdar ve Zehra Taşpınar Şener (2015). “The Content Analysis of Mathematical Modelling Studies in Turkey: A Meta-synthesis Study.” Education & Science, 40(178): 139- 161.

Badarudin, B. Rosmah Hj. Ve Madihah Khalid (2008). “Using The Jar Model To Improve Students Understanding of Operations on Integer.” 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico, 85.

Barbosa, J. Conei (2006). “Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective.” ZDM-Classification, 38(3), 293-301.

Battista, Michael T. (1983). “A complete model for operations on integers.” The Arithmetic Teacher, 30(9), 26-31.

Bayazit, İbrahim (2011). “Öğretmen adaylarının matematik öğretiminde analoji kullanımları konusundaki görüş ve yeterlilikleri.” Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, (31): 139-158.

Berber, Merve ve Dilek Sezgin Memnun (2018). “Ortaokul öğrencilerinin tam sayılar hakkında sahip oldukları metaforlar”. (Ed.) Hayrullah Kahya. 1.Uluslararası Eğitim ve Sosyal Bilimlerde Yeni Ufuklar Kongresi Bildirileri. Elazığ: Asos Yayınlar. 234-251.

Beyatlı AK, Merve (2019). Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Tam Sayılarla Toplama ve Çıkarma İşlemlerine Yönelik Konu Alan Bilgilerinin İncelenmesi. Yüksek lisans tezi, T. C. Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Rize.

Bike Kalkan, Deniz (2014). Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Kavramsal Anlama ve Cebirsel Muhakeme Yapıları. Yüksek lisans tezi, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Blum, Werner (2002). “ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education-Discussion document.” Educational Studies in Mathematics, 51(1-2), 149-171.

Blum, Werner ve Rita Borromeo Ferri (2009). “Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?” Journal of mathematical modelling and application, 1(1): 45-58.

Blum, Werner ve Mogens Niss (1991). “Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction.” Educational studies in mathematics, 22(1): 37-68.

Bolyard, Johanna J. & Moyer-Packenham, Patricia S. (2012). “Making sense of integer arithmetic: The effect of using virtual manipulatives on students’ representational fluency.” Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 31(2): 93-113.

Bouck, Emily C. ve Flanagan, Sara M. (2010). “Virtual manipulatives: What they are and how teachers can use them.” Intervention in School and Clinic, 45(3): 186-191.

Bozkurt, Ali ve Saliha Akalın (2010). Matematik Öğretiminde Materyal Geliştirmenin Vekullanımının Yeri, Önemi Ve Bu Konuda Öğretmenin Rolü. Dumlupınar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 27, 47-56.

Bozkurt, Ali ve Merve Polat (2011). “Sayma Pullarıyla Modellemenin Tam Sayılar Konusunu Öğrenmeye Etkisi Üzerine Öğretmen Görüşleri.” Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 10(2): 787-801.

Bryant, Diane Pedrotty, Brain R. Bryant ve Barbara Dougherty vd (2020). “Mathematics performance on integers of students with mathematics difficulties.” The Journal of Mathematical Behavior, (58): 1-13.

Butler, Frances M., Susan P. Miller, Kevin Crehan vd (2003). “Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences.” Learning Disabilities Research & Practice, 18(2), 99-111.

Can, Cihan (2014). Fonksiyonlar Konusunun Çoklu Temsiller ile Öğretiminin Öğrenci Başarısına Etkisinin İncelenmesi. Yüksek lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Balıkesir.

Carmack, Christi Miller (2011). Investigating the effects of addition with regrouping strategy instruction among elementary students with learning disabilities. Doctoral dissertation. University of Nevada Las Vegas, Las Vegas, NV.

Carson, Cristi L. Ve Judith Day (1995). “Annual report on promising practices: How the algebra project eliminates the “game of signs” with negative numbers.” Office of Educational Research and Improvement (ED), Washington, DC: 1-29.

Clements, Douglas H. (1999). “’Concrete’ manipulatives, concrete ideas.” Contemporary Issues in Early Childhood, 1(1), 45–60.

Clements, Douglas H. ve Sue McMillen (1996). “Rethinking “concrete” manipulatives. Teaching children mathematics." Published by NCTM: 2 (5), 270-279.

Cope, Liza (2015). "Math manipulatives: making the abstract tangible." Delta Journal of Education, 5(1), 11-19.

Crowley, Mary L. ve Kenneth A. Dunn (1985). "On multiplying negative numbers." The Mathematics Teacher, 78(4): 252-256.

Çekici, Elif ve Hakan Yıldırım (2011). "Matematik eğitimi üzerine bir inceleme." Marmara Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi, 31(2), 175-196.

Çekirdekçi, Sıtkı (2010). İlköğretim 4. ve 5. Sınıf Matematik Dersinde Sınıf Öğretmenlerinin Programda Belirtilen Öğretim Materyallerini Kullanma Düzeylerinin İncelenmesi. Yüksek lisans tezi, T.C. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Çetin, Hatice (2016). Sorgulayıcı Öğrenme Yaklaşımıyla Çoklu Temsil Destekli Tam Sayı Öğretiminin 6. Sınıf Öğrencilerinin Başarılarına, Model Tercihlerine ve Temsiller Arası Geçiş Becerilerine Etkisi. Doktora Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Çetinkaya, Melike ve Mehmet Çağatay Özdemir (2018). Matematiksel analoji geliştirme çalışması. Journal Of Steam Education, 1(2), 27-49.

Çetinkaya, Melike, Mehmet Taşpınar ve Mehmet Çağatay Özdemir (2019). "7. Sınıf öğrencilerinin geliştirdikleri matematiksel analojilerin değerlendirilmesi." Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi, 18(69): 288-307.

Çevik, Yurdagül (2019). Tam Sayılar Konusunun Modellenmesine İlişkin Öğretmen Görüşleri. Yüksek lisans tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Çıkla Akkuş, Oylum (2004). The Effects of Multıple Representatıons-Based Instructıon on Seventh Grade Students' Algebra Performance, Attıtude Toward Mathematıcs and Representatıon Preference. Doctoral thesis, Middle East Technical University Natural And Applıed Scıences Instıtute, Ankara.

Çiçek, Sinan Cem (2020). Farklı Algısal Öğrenme Stiline Sahip Ortaokul Öğrencilerinin Tam Sayılara İlişkin Kavram Yanılgılarının Giderilmesinde Bilgisayar Destekli Matematik Öğretiminin Rolü. Yüksek lisans tezi, Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Giresun.

Çinçin, Kemal (2016). "Matematiksel soyut kavramlar ile somut kavramların bilgisi." 21. Yüzyılda Eğitim ve Toplum Eğitim Bilimleri ve Sosyal Araştırmalar Dergisi, 5(13), 239-246.

Çopur, Sibel ve Ali Türkdoğan (2021). "3D yazıcı kalem teknolojisinin matematik dersinde uygulanmasından yansımalar.” Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 18(1): 106-136.

Demir, Mehmet Raci (2016). Farklı Oyun Türlerine Dayalı Matematik Öğretiminin 1. Sınıf Öğrencilerinin Erişi ve Kalıcılık Düzeylerine Etkisi. Doktora tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Davis, Brent ve Elaine Simmt (2006). “Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know.” Educational Studies in Mathematics, 61, 293–319.

Demirören, Selma (2019). Ortaokul 8. Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayılar ile İlgili Bilgi Düzeyleri ve Yaptıkları Hatalar. Yüksek lisans tezi, T.C. Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.

Deniz, Levent ve Neslihan Cıtdır (2020). “Ortaokul öğrencilerinin matematiğe yönelik tutumlarının incelenmesi.” Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (AUJEF), 4(3): 294-322.

Dirks, Michael K. (1984). “The integer abacus.” Arithmetic Teacher, 31(7), 50–54.

Doğan, Mevlüde ve Haşim Işıtan (2018). “Gerçekçi matematik eğitiminin tam sayılar konusunda başarıya ve kalıcılığa etkililiği.” Medeniyet Eğitim Araştırmaları Dergisi, 1(4): 1-9.

Duval, Rraymond (1993). “Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.” In Annales de didactique et de sciences cognitives (Vol. 5, No. 1, pp. 37-65).

Duval, Raymond (2006). “A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics.” Educational studies in mathematics, 61(1), 103-131.

English, Lyn D. (1997). “The development of fifth-grade children's problem-posing abilities.” Educational studies in Mathematics, 34(3), 183-217.

Erbaş, Kürşat Erbaş, Mahmut Kertil, Bülent Çetinkaya vd (2014). “Mathematical Modeling in Mathematics Education: Basic Concepts and Approaches.” Educatıonal Scıences: Theory & Practıce, 14(4): 1621-1627.

Ercan, Bahar (2010). İlköğretim Yedinci Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayı Kavramı ile İlgili Bilgilerin Değerlendirilmesi. Yüksek lisans tezi, T.C. Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Erdem, Emrullah (2015). Zenginleştirilmiş öğrenme ortamının matematiksel muhakemeye ve tutuma etkisi. Doktora tezi, T.C. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Erdem, Emrullah, Kani Başıbüyük, Burçin Gökkurt vd (2015). “Investigation of pedagogical content knowledge of middle school prospective mathematics teachers on the cone topic in terms of some components." Journal of Cognitive and Education Research, 1(1), 18-40.

Erdem, Emrullah (2011). İlköğretim 7. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel ve Olasılıksal Muhakeme Becerilerinin İncelenmesi. Yüksek lisans tezi, Adıyaman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adıyaman.

Erdoğdu, Şahan Yusuf (2019). Ortaokul 7. Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayılarla Dört İşlem Becerilerinin Yapılandırma Süreçlerinin İncelenmesi. Yüksek lisans tezi, T.C. Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Tokat.

Ertuğrul, Gülşah (2009). Yeni İlköğretim Matematik Dersi 6. Sınıf Öğretim Programında Yer Alan Tam Sayılarla İlgili Etkinliklerin Öğrenci Başarısına Etkisi. Yüksek lisans tezi, T. C. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Fennema, Elizabeth H. (1972). "Models and mathematics." Arithmetic Teacher, (18), 635-640.

Flores, Margaret M., Hinton, Vanessa M. ve Kelly B. Schweck (2014). "Teaching multiplication with regrouping to students with learning disabilities." Learning Disabilities Research & Practice, 29(4): 171-183.

Flores, Margaret M. ve Toni M. Franklin(2014). "Teaching subtraction and multiplication with regrouping using the concrete-representational-abstract sequence and strategic instruction model." Learning Disabilities Research & Practice, 29(2): 75-88.

Flores, Margaret M. (2010). "Teaching subtraction with regrouping to students experiencing difficulty in mathematics." Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth , 53 (3), 145-152.

Tabach, Alex F. M. (2001). "Promoting multiple representations in algebra." A. A. Cuoco. Yearbook of the National Council of the Teachers of Mathematics: The Roles of Representation in School Mathematics. Reston, Virginia: The Council: 173-185.

Fuadiah, Nyiayu Fahriza ve Didi Suryadi(2019). "Teaching and learning activities in classroom and their ımpact on student misunderstanding: a case study on negative ıntegers." International Journal of Instruction, 12(1), 407-424.

Fuson, Karen (1992). "Research on whole number addition and subtraction." ın d. a. grouws (ed.), handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the national council of teachers of mathematics." Macmillan Publishing Co, Inc. 243–275.

Galbraith, Peter (2012). "Models of modelling: genres, purposes or perspectives." Journal of Mathematical Modeling and Application, 1(5), 3-16.

Gallardo, Aurora (2002). “The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra.” Educational Studies in Mathematics, 49(2), 171-192.

Gallardo, Aurora (2008). “Historical epistemological analysis in mathematical education: Negative numbers and the nothingness.” In Proceedings of the joint meeting of PME, 32, 17-29.

Gallo-Toong, Nelsa (2020). “The extent of use of concrete-representational-abstract (cra) model in mathematics.” International Journal For Research In Mathematics And Statistics, 6(5), 1-25.

Gerard, Vergnaud (1998). “Matematik eğitimi için kapsamlı bir temsil teorisi.” Matematiksel Davranış Dergisi, 17 (2), 167-181.

Gülkılık, Hilal, Hasan Hüseyin Uğurlu ve Nejla Yürük (2015). “Öğrencilerin düzlem dönüşümlerine ait kavramsal anlamalarının geliştirdikleri iç temsiller kapsamında incelenmesi.” Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 35(3).

Goldin, Gerald A. (2003). “Developing complex understandings: On the relation of mathematics education research to mathematics.” Educational Studies in Mathematics, 54(2), 171-202.

Goldin, Gerald A. ve James J. Kaput (2013). “A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics.” In Theories of mathematical learning (pp. 409-442). Routledge.

Gök, Gülşen ve Evrim Erbilgin (2012). “Öğrenme nesneleriyle toplama oyunu.” Journal of Inquiry Based Activities, 2(1), 10-18.

Gökmen, Ali (2012). İlköğretim Matematik ve Sınıf Öğretmenlerinin Matematik Eğitiminde Materyal (Manipülatif) Kullanmaya Yönelik İnançları ile Kullanım Düzeyleri Arasındaki İlişki. Yüksek lisans tezi, T.C. Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Gökkurt, Burçin, Ömer Şahin ve Yasin Soylu (2012). “Matematik öğretmenlerinin matematiksel alan bilgileri ile pedagojik alan bilgileri arasındaki ilişkinin incelenmesi.” The Journal of Academic Social Science Studies, 5(8), 997-1012.

Güneş, Bilal, Çağlar Gülçiçek ve Necati Bağcı (2004). “Eğitim fakültelerindeki fen ve matematik öğretim elemanlarının model ve modelleme hakkındaki görüşlerinin incelenmesi.” Türk Fen Eğitimi Dergisi, 1(1): 35-48.

Gürbüz, Ramazan (2007). “Olasılık konusunda geliştirilen materyallere dayalı öğretime ilişkin öğretmen ve öğrenci görüşleri.” Kastamonu Eğitim Dergisi, 15(1), 259–270.

Gürbüz, Ramazan, Emrullah Erdem ve Mehmet Gülburnu (2013). “Sınıf öğretmenlerinin matematik yeterliklerini etkileyen faktörlerin incelenmesi.” Ahi

Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 14(2): 255-272.

Gyampoh, Samuel Amoh, Josephine Nyarko ve Agyeman, Kofi D. (2020). "Improving the Performance of Basic School Pupils in Addition and Subtraction of Integers Using Rectangular Cut out Number Line: A Case of a Ghanaian Basic School." IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), 16(3): 21,28.

Harrison, Allan ve Onno De Jong (2003). "Using analogies in chemistry teaching: A case study of a teacher's preparations, presentations and reflections." Research in Science Education, 31, 401- 436.

Harrison, Allan G. (2001). "How do teachers and textbook writers model scientific ideas for students?" Research in science education, 31(3), 401-435.

Hartshorn, Robert ve Sue Boren (1990). "Experiential learning of mathematics: Using manipulatives." ERIC Publications, ERIC Digests, 1-7.

Hativa, Nira ve Dorit Cohen (1995). "Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems." Educational Studies in Mathematics, 28(4): 401-431.

Hayes, Robert Leslie (1998). *Teaching negative number operations: A comparative study of the neutralisation model using integer tiles*. Doctoral dissertation, University of Melbourne, Melbourne, Australia.

Hill, Heather C., Brian Rowan ve Deborah R. Ball (2005). "Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement." American educational research journal, 42(2), 371-406.

Hughes, Elizabeth (2011). The Effects of Concrete-Representational-Abstract Sequenced İnstruction on Struggling Learners Acquisition, Retention, and Self-Efficacy of Fractions. Doctoral Dissertation. Retrieved from ProQuest Dissertations and Theses database, South Carolina.

Ilgar, Mehmet Zeki ve Semra Coşkun Ilgar (2013). "Nitel bir araştırma deseni olarak gömülü teori (Temellendirilmiş Kuram)." İstanbul Zaim Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 2 (3): 197-247.

İncikabi, Semahat (2017). "Çoklu temsiller ve matematik ögretimi: Ders kitaplari üzerine bir inceleme." Cumhuriyet International Journal of Education, 6(1), 66.

İlgar, Lütfü, Dilek Çağırgan Gülten (2013). "Matematik konularının günlük yaşamda kullanımının öğrencilere öğretilmesinin gerekliliği ve önemi." İZÜ Sosyal Bilimler Dergisi, 2(3): 119-128.

İlhan, Ali (2019). 9. Sınıf öğrencilerinin farklı temsiller bağlamında fonksiyon kavramı bilgisi oluşturma süreçleri. Yüksek lisans tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

İnan Cemil (2006). “Matematik Öğretiminde Materyal Geliştirme ve Kullanma.” D.Ü.Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, (7), 47-56 .

İşgüden, Elif (2008). 7. ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayılar Konusunda Karşılaştıkları Güçlükler. Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Julie, Cyril (2002). “Making relevance in mathematics teacher education.” In I. Vakalis, D. Hughes Hallett, D. Quinney ve C. Kourouniotis (Compilers). Proceedings of 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics. New York: Wiley.

Kadagöl, Elmas (2018). Somut Materyal Kullanımının 8.Sınıf Öğrencilerinin Zihinde Döndürme Becerilerine Etkisi. Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Kaiser, Gabriele ve Bharath Sriraman (2006). “A globalsurvey of internationalperspectives on modelling in mathematicseducation.” ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 38(3): 302-310.

Kamii, Cconstance, Barbara A. Lewis. ve Lynn Kirkland (2001). “Manipulatives: When are they useful?” The Journal of Mathematical Behavior, 20(1): 21-31.

Kaput, James J. (1998). “Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows.” The Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 265-281.

Kar, Tuğrul ve Cemalettin Işık (2015). “Comparison of turkish and american seventh grade mathematics textbooks in terms of addition and subtraction operations with integers.” Education and Science, 40(177): 75-92.

Karaaslan, Berivan (2015). Doğal Sayıların Tarihsel Gelişimi ve İlköğretim Matematik Programındaki Doğal Sayıların Öğretimi ile Karşılaştırılması. Yüksek lisans tezi, Başkent Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Keller, Brian A. ve Christian R. Hirsch (1998). “Student preferences for representations of functions.” International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29(1): 1-17.

Kelly, Catherine A. (2006). “Using manipulatives in mathematical problem solving: A performance-based analysis.” The mathematics enthusiast, 3(2), 184-193.

Khalid Madihah ve Zulmaryan Embong (2019). “Source and possible causes of errors and misconceptions in operations of integers,” IEJME, International Electtonic Journal of Mathematics Education, 15(2): 1-13.

Kilhamn, Cecilia (2008). “Making sense of negative numbers through metaphorical reasoning.” Christer Bergsten, Barbro Grevholm ve Thomas Lingefjärd. In Perspectives on mathematical knowledge: Proceedings of the sixth research seminar with the Swedish society for research in mathematics education." Linköping, Sweden: Swedish Society for Research in Mathematics Education, 30–35.

Kim, Sun A., Peishi Wang ve Craig A. Michaels. (2015). "Using explicit C-R-A instruction to teach fraction word problem solving to low-performing asian English learners." Reading & Writting Quarterly, 31 (3): 253-278.

Kocaman Bayındır, Nermin (2015). Manipülatifler Kullanılarak Yapılan Öğretimin 11.Sınıf Öğrencilerinin Matematik Başarısına Etkisi. Yüksek lisans tezi, T.C. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Koç Şanlı, Kiraz (2018). Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Tam Sayıların Öğretim Sürecinde Model Kullanma Becerileri ve Model Kullanımına Yönelik Görüşleri. Yüksek lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

Koç Şanlı, Kiraz & Cemalettin Işık (2020). "Tam Sayıların Öğretim Sürecinin Öğretmenlerin Model Kullanımları Üzerinden Analizi." Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 15(29), 81-108.

Korkmaz, İsa (2006). "Yeni ilköğretim birinci sınıf programının öğretmenler tarafından değerlendirilmesi." Selçuk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, (16), 419-431.

Köroğlu, Hayrettin ve Sibel Yeşildere (2004). "İlköğretim yedinci sınıf matematik dersi tam sayılar ünitesinde çoklu zeka teorisi tabanlı öğretimin öğrenci başarısına etkisi." Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24(2):25-41.

Körükcü, Ezgi (2008). Tam Sayılar Konusunun Görsel Materyal ile Öğreniminin 6. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Başarılarına Etkisi. Yüksek lisans tezi, T.C Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Kubar, Ayşenur ve Erdinç Çakıroğlu (2017). "Prospective Teachers' Knowledge on Middle School Students' Possible Descriptions of Integers." International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 5 (4): 279 294.

Kullberg, Angelika (2007). "Students opening up dimensions of variation for learning negative numbers." In World Association of Lesson Studies international conference, Hong Kong Institute of Education, Hong Kong, (30), 1-12.

Kumar, Ruchi S. (2020). "Evolutıon of crıterıa for representatıonal adequacy for teachıng ıntegers through collaboratıve ınvestıgatıon." (Ed.) Hilda Borko & Despina Potari. Icmı Study 25 Teachers Of Mathematıcs Workıng and Learnıng In Collaboratıve Groups. Lısbon, Portugal: 684-691.

Kumar, Ruchi S., K Subramaniam ve Shweta Shripad Naik (2017). "Teachers' construction of meanings of signed quantities and integer operation." Journal of Mathematics Teacher Education, 20(6): 557-590.

Kutluca, Tamer ve M. Faysal Akın (2013). “Somut materyallerle matematik öğretimi: dört kefeli cebir terazisi kullanımı üzerine nitel bir çalışma.” Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 4(1): 48-65.

Küçükgencay, Naci (2019). Tam Sayılar ve Tam Sayılarla İşlemler Konularında Öğretmen ve Öğretmen Adaylarının Kullandıkları Benzetimler. Yüksek lisans tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya.

Lakoff, George ve Rafael E. Nunez (1997). “The metaphorical structure of mathematics: sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics.” In L. D. English. Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images, Erlbaum. Mahwah, NJ: Erlbaum, 21-89.

Lehrer, Richard ve Leona Schauble (2007). “A developmental approach for supporting the epistemology of modeling.” In Modelling and applications in mathematics education, (10): 153-160.

Lesh, Richard (1981). “Uygulamalı matematiksel problem çözme.” Matematikte eğitim çalışmaları , 12 (2), 235-264.

Liebeck, Pamela (1990). “Scores and foreits- an intuitive model for integer arithmetic.” Educational Studies in Mathematics, 21(3), 221-239.

Linchevski, Liora ve Julian Williams (1999). “Using intuition from everyday life in'filling'the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers.” Educational Studies in Mathematics, 39(1): 131-147.

Lingefjärd, Thomas (2007). “Mathematical modelling in teacher education—Necessity or unnecessarily.” In Modelling and applications in mathematics Education, 333-340.

Lutz, Stacey ve William Huitt (2004). “Connecting cognitive development and constructivism: Implications from theory for instruction and assessment.” Constructivism in the Human Sciences, 9(1): 67-90.

Lytle, Patricia Ann (1992). Use Of A Neutralization Model to Develop Understanding of İntegers and of The Operations of İnteger Addition and Subtraction. Concordia University Teaching of Mathematics. Doctoral Dissertation, , Montreal, Quebec.

Maccini, Paulo ve Kathy Ruhl (2000). “Effects of a graduated instructional sequence on the algebraic subtraction of integers by secondary students with learning disabilities.” Education and Treatment of Children, 23(4): 465-489.

Mainali, Bhesh (2021). “Representation in teaching and learning mathematics. International Journal of Education in Mathematics.” Science and Technology, 9(1), 1-21.

Mancl, Dustin B., Susan P. Miller ve Meghan Kennedy (2012). “Using the Concrete-Representational-Abstract Sequence with Integrated Strategy Instruction to

Teach Subtraction with Regrouping to Students with Learning Disabilities” Learning Disabilities Research & Practive, 27 (4): 152-166.

Mason, James (1988). “Modelling: what do we really want pupils to learn?” In D. Pimm (Ed.), Mathematics, teachers and children. 201-215.

Mercan, Ceren (2018). Ahşap Oyuncakların Çocuk Gelişiminde Yeri ve Ahşap Oyuncaklar İçin Tasarım Önerileri. Yüksek lisans tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Moreno, Roxana ve Richard E. Mayer (1999). “Multimedia-supported metaphors for meaning making in mathematics.” Cognition and instruction, 17(3): 215-248.

Morin, Victoria A. ve Susan Peterson Miller (1998). “Teaching multiplication to middle school students with mental retardation.” Education and Treatment of Children, 21(1): 22-36.

Moyer, Patricia S., (2001). “Are we having fun yet? how teachers use manipulatives to teach mathematics. “, Educational Studies in Mathematics, (47), 175-197.

Nakahara, Tadao (2008). “Cultivating mathematical thinking through representation.” ın utilizing the representational system. ın apec-tsukuba ınternational conference (III), Tsukuba. Retrieved November, (17), 1-8.

Niss, Mogens (1999). “Aspects of the nature and state of research in mathematics education.” educational studies in mathematics (40), 1-24.

Oğur, Recai ve Ömer Faruk Tekbaş (2003). “Anket nasıl hazırlanır?” Sted, 12(9), 336-340.

Olkun, Sinan (2001). “Öğrencilerin hacim formülünü anlamlandırmalarına yardım edelim.” Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi, 1(1), 181-190.

Olkun, Sinan, Esra Fidan ve Ayşe Babacan Özer (2013). “5-7 yaş aralığındaki çocuklarda sayı kavramının gelişimi ve saymanın problem çözmede kullanımı.” Eğitim ve Bilim, 38(169): 236-248.

Owens, Kay D., ve MA Ken Clements (1998). “Representations in spatial problem solving in the classroom.” The Journal of Mathematical Behavior, 17(2): 197-218.

Özdemir, İ. Elif Yetkin (2008). “Sınıf öğretmeni adaylarının matematik öğretiminde materyal kullanımına ilişkin bilişsel becerileri.” Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, (35) ,362-373.

Özdeş, Hayri (2013). 9. Sınıf Öğrencilerinin Doğal Sayılar Konusundaki Kavram Yanılgıları. Yüksek lisans tezi, Adnan Menderes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Aydın.

Özlü, Özge (2016). Zihinsel Yetersizliği Olan Öğrencilere Çarpma Öğretiminde Somut-Yarı Somut-Soyut Öğretim Stratejisinin Etkililiği. Yüksek lisans tezi, T.C. Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bolu.

Palinkas, Lawrance A., Sarah M. Horwitz ve Carla A. Green vd (2015). "Purposeful sampling for qualitative data collection and analysis in mixed method implementation research." Administration and policy in mental health and mental health services research, 42(5), 533-544.

Peled, Irid ve David W. Carraher (2007). "Signed numbers and algebraic thinking." In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.). Mahwah, NJ: 303-327.

Peltier, Corey ve Kimberly J. Vannest (2018). "Using the concrete representational abstract (CRA) instructional framework for mathematics with students with emotional and behavioral disorders." Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth, 62(2): 73-82.

Philipp, Randolph A., Eva Thanheiser ve Lisa Clement (2002). "The role of a children's mathematical thinking experience in the preparation of prospective elementary school teachers." International Journal of Educational Research, 37(2), 195-210.

Piaget, Jean (1973), "The affective unconscious and the cognitive unconscious." Journal Of The American Psychoanalytic Association, 21(2), 249-261.

Pişkin-Tunç, Mutlu, Soner Durmuş ve Recai Akkaya (2012). "İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematik öğretiminde somut materyalleri ve sanal öğrenme nesnelerini kullanma yeterlikleri." MAT-DER Matematik Eğitimi Dergisi, (1): 13–20.

Rabin, Jeffrey M., Evan Fuller ve Guershon Harel (2013). "Double negative: the necessity principle, commognitive conflict, and negative number operations." The Journal of Mathematical Behavior, 32(3), 649-659.

Reys, Robert E. (1971). "Considerations for teachers using manipulative materials." Arithmetic teacher, (18), 551-558.

Rineck, Leah M. (2020). A Holistic Developmental Mathematics Course for All Learners. Doctoral Dissertation, The University of Wisconsin-Milwaukee. Milwaukee.

Schumacher Jan ve Sebastian Rezat (2019). "A hypothetical learning trajectory for the learning of the Rules for manipulating Integers." Paper presenterat vid Cerme 11, the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht: ERME: 1-10.

Seng, Lim Kok (2010). "Análisis de los errores de alumnos del primer curso de Educación Secundaria en la simplificación de expresiones algebraicas." Electronic Journal of Research in Education Psychology, 8(1), 139-162.

Seufert, Tina (2003). “Supporting coherence formation in learning from multiple representations.” Learning and instruction, 13(2), 227-237.

Sevim-Atayev, Gizem (2015). Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayıları Kavrama ve Sıralama Kavramlarındaki Başarı Düzeyleri Yaptıkları Hatalar ve Bu Hataların Nedenleri. Yüksek lisans tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Sezgin Memnun, Dilek (2013). “Türkiye’deki Cumhuriyet dönemi ilköğretim matematik programlarına genel bir bakış.” Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 13 (25), 71-91.

Sherman, Thomas M. ve Barbara L. Kurshan (2005). “Constructing learning: Using technology to support teaching for understanding.” Learning & leading with technology, 32(5): 10.

Suh, Sangho, Martinet Lee ve Edirth Law (Haziran 2020). “How do we design for concreteness fading? survey, general framework, and design dimensions.” In Proceedings of the Interaction Design and Children Conference , 581-588.

Sowell, Evelyn J. (1989). “Effects of manipulative materials in mathematics instruction.” Journal For Research İn Mathematics Education, 20(5), 498-505.

Soylu, Yasin (2008). “Matematik derslerinde başarıya ulaşmada somut-yarı somut-soyut ilkesinin etkisi.” Journal of Qafqaz University, Sayı 22, 174-181.

Sriraman, Bharath (2006). “Conceptualizing The Model-Eliciting Perspective of Mathematical Problem Solving.” In M. Bosch (Ed.), Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education(CERME 4). SantFeliu de Guíxols: FUNDEMI IQS: 1686-1695.

Stein, Mary Kay ve Jane W. Bovalino (2001). “Manipulatives: One Piece of the Puzzle”, Mathematics Teaching in the Middle School, 6(6): 356–359.

Stephan, Michelle ve Didem Akyuz (2012). “Proposed Instructional Theory for Integer Addition and Subtraction.” Journal for Research in Mathematics Education. 43(4): 428–464.

Stillman, Gloria A. (2015). “Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt?” In Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. Seoul: Springer, Cham: 791-805.

Şahin, Ömer (2012). Cebir öğretiminde Somut-Yarı Somut-Soyut Öğretim Tekniğinin öğrencilerin başarılarına, tutumlarına ve kalıcılığına etkisi. Yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Şahin, Ömer ve Yasin Soylu (2013). “Cebir öğretiminde somut-yarı somut-soyut öğretim tekniğinin öğrencilerin başarılarına ve tutumlarına etkisi.” Journal Of

Qafqaz Unıversıty- Phılology And Pedagogy, 1(1): 65-76.

Şengül, Sare ve Ezgi Körükcü (2012). “Effect of Teaching Integers Using Visual Materials on the Sixth Grade Students’ Mathematics Achievement and Retention Levels.” International Online Journal of Educational Sciences, 4(2): 489-509.

Şengül, Sare ve Gülşah G. Cantimer (2018). “Öğrenciler tam sayı kavramından ne anlıyor? Öğrenci gözüyle tam sayılarla kavram imajı.” International Journal of Social Sciences, (65): 29-50.

Şengül, Sare ve Mehtap Dereli (2013). “Tam sayılar konusunun karikatürle öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin matematik tutumuna etkisi.” Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 13(4): 2509-2534.

Tataroğlu Tasdan, Berna ve Ayten Erduran ve Adem Çelik (2015). “A Daunting Task for Pre-Service Mathematics Teachers: Developing Students' Mathematical Thinking.” Educational Research and Reviews, 10(16): 2276-2289.

Tchoshanov, Mourat (2011). “Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics.” Educational Studies in Mathematics, 76, 141-164.

Temel Doğan, Dilan ve Meriç Özgeldi (2018). “How do preservice mathematics teachers use virtual manipulatives to teach algebra through lesson study?” Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science & Mathematics Education, 12(1): 152-179.

Thingpen, L. Christine (2012). Building A Concrete Foundation: A Mixed-Method Study of Teaching Styles and The Use of Concrete, Representational, and Abstract Mathematics İnstruction. Doctoral dissertation, Capella University.

Thompson, Patrick W. (1992). “Notations, conventions, and constraints: Contributions to effective uses of concrete materials in elementary Mathematics.” Journal For Research İn Mathematics Education, 23(2), 123-147.

Toluk Uçar, Zülbiye (2011). “Öğretmen adaylarının pedagojik içerik bilgisi: öğretimsel açıklamalar.” Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 2(2), 87-102.

Tutak, Ahmet Melih (2019). Kesirler Konusunun Görsel Materyal ile Öğreniminin İlkokul Öğrencilerinin Matematik Başarısına ve Tutumuna Etkisi. Yüksek lisans tezi, T.C. Fırat Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

Tutak, Tayfun ve Yunus Güder (2014). “Matematiksel modellemenin tanımı, kapsamı ve önemi.” Turkish Journal of Educational Studies, 1(1): 173-190.

Umay, Aysun (1996). “Matematik eğitimi ve ölçülmesi.” Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 12(21), 145-149.

Ural, Alattin ve Hakan Ülper (2013). “İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme ile okuduğunu anlama becerileri arasındaki ilişkinin değerlendirilmesi.” Kuramsal Eğitimbilim Dergisi, 6(2): 214-241.

Usta, Aysel (2018). İlkokul Matematik Ders Kitaplarındaki Doğal Sayılarla Çarpma ve Bölme İşlemleriyle İlgili Problemlerin İncelenmesi. Yüksek lisans tezi, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Rize.

Uttal, David H., Kathyrn V. Scudder ve Judy S. DeLoache (1997). “Manipulatives as Symbols: A New Perspective on The Use of Concrete Objects to Teach Mathematics. “, Journal of Applied Developmental Psychology, (18): 37-54.

Uysal Koğ, Oya ve Neşe Başer (2011). “Görselleştirme Yaklaşımının Matematikte Öğrenilmiş Çaresizliğe ve Soyut Düşünmeye Etkisi.” Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi, 2(3): 89-108.

Uzun, Meryem (2019). Ortaokul Matematik Öğretiminde Somut Materyal Kullanımı: Hizmet İçi Eğitimden Yansımalar. Yüksek lisans tezi, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Rize.

Vlassis, Joelle (2008). “The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign.” Philosophical Psychology, 21(4), 555-570.

Whitacre, Ian, Jessica Pierson Bishop, Lisa L. Lamb vd (2018). “A Cross-Sectional Investigation of Students’ Reasoning About Integer Addition and Subtraction: Ways of Reasoning, Problem Types, and Flexibility” Journal for Research in Mathematics Education, 49(5): 575–613.

Witzel, Bradley S. (2005). “Using CRA to teach algebra to students with math difficulties in inclusive settings.” Learning Disabilities: A Contemporary Journal, 3(2), 49-60.

Witzel, Bradley S., Cecil D. Mercer ve M. David Miller (2003). “Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model.” Learning Disabilities Research & Practice, 18(2): 121-131.

Witzel, Bradley S., Paul J. Riccomini ve Elke Schneider (2008). “Implementing CRA with secondary students with learning disabilities in mathematics.” Intervention in School and Clinic, 43(5): 270-276.

Yağcı, Esed ve Ayla Arseven (2010). “Gerçekçi Matematik Öğretimi Yaklaşımı.” International Conference on New Trends in Educational Their Implications: 265-268.

Yakubova, Gulnoza ve Elizabeth Hughes ve Megan Shinaberry (2016). “Learning with technology: Video modeling with concrete–representational–abstract sequencing for students with autism spectrum disorder.” Journal of autism and developmental disorders, 46(7): 2349-2362.

Yenilmez, Kürşat ve Ata, Ayla (2013). "Matematik Okuryazarlığı Dersinin Öğretmen Adaylarının Matematik Okuryazarlığı Öz yeterliğine Etkisi." The Journal of Academic Social Science Studies, 6 (2): 1803 – 1816.

Yenilmez, Kürşat, & Tevfik Avcu (2009). "İlköğretim öğrencilerinin mutlak değer konusunda karşılaştıkları zorluklar." Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, (12), 80-88.

Yenilmez, Kürşat ve Osman Bağdat (2014). "Yedinci sınıf öğrencilerinin tam sayılarla işlemler konusundaki öğrenme güçlükleri." Ed. Veysel Sönmez. I. Avrasya Eğitim Araştırmaları Kongresi. Anı Yayıncılık: 631-632.

Yenilmez, Kürşat ve Ayşegül Duman (2008). "İlköğretimde matematik başarısını etkileyen faktörlere ilişkin öğrenci görüşleri." Manas Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 19(2): 41-54.

Yeşildere, Sibel (2007). "İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel alan dilini kullanma yeterlikleri." Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi, 24(2), 61-70.

Yıldız Serdar (2019). 8. Sınıf Öğrencilerinin Pisagor Bağıntısı ile İlgili Sembolik, Görsel ve Cebirsel Sözel Temsillerin Bulunduğu Problemleri Çözme Becerilerinin İncelenmesi. Yüksek lisans tezi, T.C. Bayburt Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bayburt.

Yürekli, Ayşenur (2020). Ortaokul 7. Sınıf Öğrencilerinin Tam Sayılar Konusundaki İşlemlere Ait Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi ve Kavram Karikatürleri İle Giderilmesi. Yüksek lisans tezi, T.C. Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale.

Zengin, Şeyda (2014). Tam Sayıların Tarihçesi ve Tam Sayılar Konusunun Öğretimine İlişkin Öğretmen Görüşleri. Yüksek lisans tezi, T.C. Fırat Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

Zhang, Jiajie (1997). "The nature of external representations in problem solving." Cognitive science, 21(2), 179-217.

3. Elektronik Kaynaklar

Baykul, Yaşar (2020). İlköğretimde matematik öğretimi (Geliştirilmiş 4. Baskı). Ankara: Pegem A Yayıncılık. https://www.turcademy.com/tr/kitap/ortaokulda-matematik-ogretimi-5-8-siniflar-9786053646754/ 01.05.2021.

Creswell, John W. ve Cheryl N. Poth (2016). Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches. Sage publications. https://www.researchgate.net/profile/Rulinawaty-Kasmad/publication/342229325_Second_Edition_QUALITATIVE_INQUIRY_

RESEARCH_DESIGN_Choosing_Among_Five_Approaches/links/5ee9801992 851ce9e7ea3c5f/Second-Edition-QUALITATIVE-INQUIRY-RESEARCH-DESIGN-Choosing-Among-Five-Approaches.pdf/ 20.05.2021.

Cropley, Aarthur (2002). Qualitative research methods: An introduction for students of psychology and education. Zinatne. https://www.academia.edu/20371271/ Qualitative_ Research_Methods_An_introduction_for_students_of_psychology_and_education/ 20.05.2021.

Çakıroğlu, Erdinç ve Banu Tuncay Yıldız (2007). Turkish preservice teachers' views about manipulative use in mathematics teaching. Middle East Technical University. https://shortest.link/zKU / 19.04.2021

Domino, Jadwiga (2010). The effects of physical manipulatives on achievement in mathematics in grades K-6: A metaanalysis [Unpublished doctoral dissertation]. State University of New York at Buffalo. https://www.proquest.com/docview/758939356?pq-origsite=gscholar&fromopenview=true / 08.04.2021

Franzblau, Scott G. ve Warner, L. Baxter (2001). "From Fibonacci Numbers to Fractals: Recursive Patterns and Subscript Notation." Albert A. Cuoco and Frances R. Curcio. The Roles of Reprasantation in Scholl Mathematics: National Council of Teachers of Mathematics, 186-200. https://sgm.gr/88rFN/ 15.02.2021

Goldin Gerald (2018). "Mathematical Representations." Steve Lerman. Encyclopedia of Mathematics Education. New Brunswick: Published by Roudledge, 1-6. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-030-15789-0_103.pdf/ 06.04.2021.

Goldin, Gerald ve Nina Shteingold (2001). "Systems of representations and the development of mathematical concepts." Albert A. Cuoco and Frances R. Curcio. The Roles of Reprasantation in Scholl Mathematics: National Council of Teachers of Mathematics, 1-23. https://sgm.gr/88rFN/ 15.02.2021.

Haines, Christoper, Rosalind Crouch ve John Davis (2000). "Mathematical modelling skills: A research instrument." University of Hertfordshire, Department of Mathematics Technical Report No, 55. https://sgm.gr/s2jve/ 17.03.2021

Jones, Graham A., Cynthia W. Langrall ve Craol A. Thornton, C. A. vd (2002). Elementary students' access to powerful mathematical ideas. Handbook of international research in mathematics education, 113-141. https://sgm.gr/N6Gup/ 18.05.2021.

Kilhamn, Cecillia (2011). Making sense of negative numbers. Department of Pedagogical, Curricular and Professional Studies; Institutionen för didaktik och pedagogisk profession. https://sgm.gr/8higj/ 03.04.2021.

Lehrer, Richard ve Leona Schauble (2003). “Origins and evolution of model-based reasoning in mathematics and science.” Richard Lesh and Helen M. Doerr. Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education. Londra: Lawrence Erlbaum Associates, 59-70. https://sgm.gr/DZgfQ/ 05.01.2021.

Lesh, Richard ve Helen M. Doerr (2003). “Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving.” Richard Lesh and Helen M. Doerr. Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education. Londra: Lawrence Erlbaum Associates, 3-33. https://sgm.gr/BLXfa/ 05.02.2021.

Lingefjard, Thomas (2004). “Assessing engineering student’s modeling skills.” Retrieved from http://www.cdio.org/files/ assess_model_skls.pdf/ 26.03.2020.

Milli Eğitim Bakanlığı (2009). İlköğretim matematik dersi 6- 8. sınıflar öğretim programı ve kılavuzu. http://talimterbiye.mebnet.net/Ogretim%20Programlari/ortaokul/ana.html/ 10.12.2020.

Milli Eğitim Bakanlığı (2013). Ortaokul matematik dersi (5,6,7 ve 8. sınıflar) öğretim programı. http://talimterbiye.mebnet.net/Ogretim%20Programlari/ortaokul/ana.html/ 10.12.2020.

Milli Eğitim Bakanlığı (2017). Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1,2,3,4,5,6,7 ve 8. sınıflar). http://talimterbiye.mebnet.net/Ogretim%20Programlari/ortaokul/ana.html/ 10.12.2020.

Milli Eğitim Bakanlığı (2018a). Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1,2,3,4,5,6,7 ve 8. sınıflar). https://mufredat.meb.gov.tr/Dosyalar/201813017165445MATEMAT%C4%B0K%20%C3%96%C4%9ERET%C4%B0M%20PROGRAMI%202018v.pdf/ 05.09.2021.

Milli Eğitim Bakanlığı (2018b). Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı. http://mufredat.meb.gov.tr/Dosyalar/201821102727101OGM%20MATEMAT%C4%B0K%20PRG%2020.01.2018.pdf/ 23.11.2021.

Milli Eğitim Bakanlığı (Aralık 2019). PISA 2018 Türkiye ön raporu (10). https://www.meb.gov.tr/meb_iys_ dosyalar/2019_12/03105347_PISA_2018_Turkiye_On_Raporu.pdf/ 02.01.2021.

Natioanal Council of Teachers of Mathematics (2000). https://pubs.nctm.org/view/journals/jrme/jrme-overview.xml/ 03.02.2020.

Natioanal Council of Teachers of Mathematics (2008). https://pubs.nctm.org/view/journals/jrme/jrme-overview.xml/ 11.02.2020.

Natioanal Council of Teachers of Mathematics (2021).Nctm.org. https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PS SM_Executi veSummary. pdf/ 18.03.2021.

National Library of Virtual Manipulatives (2021). Nlvm.usu.edu. http://nlvm.usu.edu/ 01.04.2021.

Organisatiın for Economic Co-operation Development (2013). PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solvingand Financial Literacy, OECD Publishing. doi: https://sgm.gr/nYVuc/ 20.02.2021.

Struik, Dirk J. (2012). *A Concise History of Mathematics*. Courier Corporation. USA, Dover Publications. https://sgm.gr/ahdN8/ 08.03.2021.

Türk Dil Kurumu. (2021). Türk Dil Kurumu. https://sozluk.gov.tr/ /01.01.2021.

Tomic, Welko ve Jo M. Nelissen (1998). “Representations in mathematics education, “Hearken. Erıc document reproduction, 1-48. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED428950.pdf /05.02.2021.

EKLER

Ek-1: Belirtke Tablosu

NO	İŞLEM	AÇIKLAMA	MATEMATİK ÖĞRETİM PROGRAMINDAKİ İLGİLİ KAZANIM
1	(-3)+(+2)	– İşaretleri farklı iki tam sayının toplamında yapıların hatalara diğer durumlara göre daha çok rastlanması.	**M.7.1.1.1.** Tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapar, ilgili problemleri çözer.
2	(–4)–(–5)	– Tam sayıya ait olan eksi (–) işareti ile çıkarma işlemine ait olan eksi (–) işaretinin işlevinin anlaşılmaması ve/veya farkında olunmaması. – Yan yana gelen iki eksi (-) işaretinin işlevinin anlaşılmaması ve/veya farkında olunmaması.	
3	–2 –7	– İki tam sayı arasında tek eksi (-) işareti olan işlemlerde pozitif tam sayının işaretinin gizliğinin farkında olunmaması. – Çıkarma işlemi olarak belirtilen eksi (–) işaretinin çıkan sayıya ait olduğunun düşünülmesi. – Negatif tam sayıdan pozitif tam sayının çıkarılma.	
4	(+4) . (–2)	– Çarpma ve bölme işlemlerinde tam sayıların işaretlerinin dikkate alınmadan işlem yapılması ve/veya işlemin sonucunun işaretinin belirlenmesinde hata yapılması. – İşlemlerin sadece sembolik- dilbilimsel temsillerle öğrenilmesi. – Çarpma veya bölme işlemlerindeki sayı işaretlerinin aynı ve farklı olma durumları.	**M.7.1.1.3.** Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerini yapar.
5	(–2) . (–5)		
6	(+10) : (–2)		
7	(–20) : (–5)		

Ek-2: Pilot Çalışma için Geliştirilen Ön Anket

Değerli Öğretmenim,

Kocaeli Üniversitesi Eğitim Bilimleri Eğitim Programları ve Öğretim Programında Yüksek lisans öğrencisiyim. Yüksek lisans tezim kapsamında ortaokul matematik dersinde "Tam Sayılar" konusunun öğretimi ile ilgili bir çalışma yürütüyorum. Aşağıda tam sayıların öğretimini nasıl ele aldığınızla ilgili sorular bulunmaktadır. Forma vereceğiniz yanıtlar sadece bu araştırmanın amacı doğrultusunda kullanılacak, üçüncü kişilerle *kesinlikle* paylaşılmayacaktır. Araştırmaya verdiğiniz katkılardan dolayı teşekkür eder, sağlıklı günler dilerim.

Çağlar Çankaya

Kocaeli Üniversitesi Eğitim Programları ve Öğretim

Yüksek Lisans Öğrencisi

1. Tam sayılarla toplama işleminin öğretimini nasıl ele alıyorsunuz? (derse girişi nasıl yaptığınız, ne tür örnekler verdiğiniz, somut materyal (sayma pulları gibi) kullanıp kullanmadığınız, bireysel/grup çalışması yapıp yapmadığınız, ne tür yöntemler kullandığınız, vs.)

2. Tam sayılarla çıkarma işleminin öğretimini nasıl ele alıyorsunuz? (derse girişi nasıl yaptığınız, ne tür örnekler verdiğiniz, somut materyal (sayma pulları gibi) kullanıp kullanmadığınız, bireysel/grup çalışması yapıp yapmadığınız, ne tür yöntemler kullandığınız, vs.)

3. Tam sayılarla çarpma işleminin öğretimini nasıl ele alıyorsunuz? (derse girişi nasıl yaptığınız, ne tür örnekler verdiğiniz, somut materyal (sayma pulları gibi) kullanıp kullanmadığınız, bireysel/grup çalışması yapıp yapmadığınız, ne tür yöntemler kullandığınız, vs.)

4. Tam sayılarla bölme işleminin öğretimini nasıl ele alıyorsunuz? (derse girişi nasıl yaptığınız, ne tür örnekler verdiğiniz, somut materyal (sayma pulları gibi) kullanıp kullanmadığınız, bireysel/grup çalışması yapıp yapmadığınız, ne tür yöntemler kullandığınız, vs.)

Ek-3: Final Anket Formu

TAM SAYILARIN ÖĞRETİMİYLE İLGİLİ ANKET FORMU

Değerli Öğretmenim,

Kocaeli Üniversitesi Eğitim Bilimleri Eğitim Programları ve Öğretim Programında Yüksek lisans öğrencisiyim. Yüksek lisans tezim kapsamında ortaokul matematik dersinde "Tam Sayılar" konusunun öğretimi ile ilgili bir çalışma yürütüyorum. Aşağıdaki formda tam sayılarla ilgili çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yer almaktadır. Bu işlemler belirlenirken, tam sayıların öğrenilmesinde öğrencilerin yaşadıkları sorunlarla ilgili yapılan araştırmaların sonuçları dikkate alınmıştır. <u>Bu sorunlar aşağıda sıralanmaktadır.</u>

- Tam sayıya ait olan eksi (−) işareti ile çıkarma işlemine ait olan eksi (−) işaretinin işlevinin anlaşılmaması ve/veya farkında olunmaması.
- Yan yana gelen iki eksi (−) işaretinin işlevinin anlaşılmaması ve/veya farkında olunmaması.
- İki tam sayı arasına tek işaret yazılan işlemlerde pozitif tam sayının işaretinin gizliğinin farkında olunmaması.
- Negatif tam sayıların yön belirttiğinin anlaşılmaması nedeniyle küçük tam sayıdan büyük tam sayıyının çıkarıldığı işlemlerin yapılamaması.
- Çarpma ve bölme işlemlerinde tam sayıların işaretlerinin dikkate alınmadan işlem yapılması ve/veya işlemin sonucunun işaretinin belirlenmesinde hata yapılması.

Aşağıda yer alan işlemlerin öğretimini (yüz yüze eğitimde) ***nasıl ele aldığınızı*** ortaya koymak amacıyla her durum için sorular hazırlanmıştır. Forma vereceğiniz yanıtlar sadece bu araştırmanın amacı doğrultusunda kullanılacak, üçüncü kişilerle *kesinlikle* paylaşılmayacaktır. Araştırmaya verdiğiniz katkılardan dolayı teşekkür eder, sağlıklı günler dilerim.

Çağlar Çankaya

Kocaeli Üniversitesi Eğitim Programları ve Öğretim

Yüksek Lisans Öğrencisi

<u>Mezuniyet Durumu</u>	**<u>Mezun Olduğunuz Okul</u>**		**<u>Hizmet Yılı</u>**	
☐ Lisans	☐ Eğitim Fakültesi	☐ 1-5	☐ 6-10	☐ 11-15
☐ Lisansüstü	☐ Fen Edebiyat Fakültesi	☐ 16-20	☐ 21-25	☐ 25 ve üstü
☐ Lisansüstü devam ediyor	☐ Diğer (Yazınız): ……………………………………………… *(Fen- Edebiyat Fakültesi veya diğer seçeneğini işaretleyen katılımcılar için)* *Pedagojik formasyon eğitimi:* ◯*Aldım* ◯*Almadım*			

ANKET SORULARI

(Her bir işlem için isteğiniz kadar sayfa kullanabilirsiniz)

1. **(-3)+(+2)** işleminin çözümünü nasıl ele aldığınızı aşağıda yer alan sorular bağlamında açıklayınız.
    - İşlemin öğretimine nasıl başlıyorsunuz?
    - Somut materyallerden (sayma pulları gibi) yararlanıyor musunuz? Yanıtınızın nedenlerini (somut materyal kullanma/kullanmama gerekçelerini) yazınız.
    - İşlemin çözümünü nasıl yaptığınızı gösteriniz.
    - Öğrenciler bu çözümü anlamakta/anlamlandırmakta zorlanırsa nasıl yardımcı oluyorsunuz?

2. **(–4)–(–5)** işleminin çözümünü nasıl ele aldığınızı aşağıda yer alan sorular bağlamında açıklayınız.
    - İşlemin öğretimine nasıl başlıyorsunuz?
    - Somut materyallerden (sayma pulları gibi) yararlanıyor musunuz? Yanıtınızın nedenlerini (somut materyal kullanma/kullanmama gerekçelerini) yazınız.
    - İşlemin çözümünü nasıl yaptığınızı gösteriniz.
    - Öğrenciler bu çözümü anlamakta/anlamlandırmakta zorlanırsa nasıl yardımcı oluyorsunuz?

3. –2 –7 işleminin çözümünü nasıl ele aldığınızı aşağıda yer alan sorular bağlamında açıklayınız.

- İşlemin öğretimine nasıl başlıyorsunuz?
- Somut materyallerden (sayma pulları gibi) yararlanıyor musunuz? Yanıtınızın nedenlerini (somut materyal kullanma/kullanmama gerekçelerini) yazınız.
- İşlemin çözümünü nasıl yaptığınızı gösteriniz.
- Öğrenciler bu çözümü anlamakta/anlamlandırmakta zorlanırsa nasıl yardımcı oluyorsunuz?

4. (+4) . (–2) işleminin çözümünü nasıl ele aldığınızı aşağıda yer alan sorular bağlamında açıklayınız.

- İşlemin öğretimine nasıl başlıyorsunuz?
- Somut materyallerden (sayma pulları gibi) yararlanıyor musunuz? Yanıtınızın nedenlerini (somut materyal kullanma/kullanmama gerekçelerini) yazınız.
- İşlemin çözümünü nasıl yaptığınızı gösteriniz.
- Öğrenciler bu çözümü anlamakta/anlamlandırmakta zorlanırsa nasıl yardımcı oluyorsunuz?

5. **(–2) . (–5)** işleminin çözümünü nasıl ele aldığınızı aşağıda yer alan sorular bağlamında açıklayınız.
   - İşlemin öğretimine nasıl başlıyorsunuz?
   - Somut materyallerden (sayma pulları gibi) yararlanıyor musunuz? Yanıtınızın nedenlerini (somut materyal kullanma/kullanmama gerekçelerini) yazınız.
   - İşlemin çözümünü nasıl yaptığınızı gösteriniz.
   - Öğrenciler bu çözümü anlamakta/anlamlandırmakta zorlanırsa nasıl yardımcı oluyorsunuz?

6. **(+10) : (–2)** işleminin çözümünü nasıl ele aldığınızı aşağıda yer alan sorular bağlamında açıklayınız.
   - İşlemin öğretimine nasıl başlıyorsunuz?
   - Somut materyallerden (sayma pulları gibi) yararlanıyor musunuz? Yanıtınızın nedenlerini (somut materyal kullanma/kullanmama gerekçelerini) yazınız.
   - İşlemin çözümünü nasıl yaptığınızı gösteriniz.
   - Öğrenciler bu çözümü anlamakta/anlamlandırmakta zorlanırsa nasıl yardımcı oluyorsunuz?

7. **(–20) : (–5)** işleminin çözümünü nasıl ele aldığınızı aşağıda yer alan sorular bağlamında açıklayınız.
   - İşlemin öğretimine nasıl başlıyorsunuz?
   - Somut materyallerden (sayma pulları gibi) yararlanıyor musunuz? Yanıtınızın nedenlerini (somut materyal kullanma/kullanmama gerekçelerini) yazınız.
   - İşlemin çözümünü nasıl yaptığınızı gösteriniz.
   - Öğrenciler bu çözümü anlamakta/anlamlandırmakta zorlanırsa nasıl yardımcı oluyorsunuz?

Ek-4: Etik Kurul İzni

Evrak Tarih ve Sayısı: 06.04.2021-E.43829

T.C.
KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
Sosyal ve Beşeri Bilimler Etik Kurulu

Sayı : E-10017888-044-43829
Konu : Çağlar ÇANKAYA

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 22.03.2021 tarihli, 36622 sayılı ve "Eğitim - Öğretim İşleri (Genel)" konulu yazı

Sosyal ve Beşeri Bilimler Etik Kurulu'nun 05/04/2021 tarih ve 2021/05 nolu toplantısında alınan 3 sıra sayılı kararı aşağıda sunulmuştur.

Bilgilerinize arz/rica ederim.

Karar No 3: Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğünün 22/03/2021 tarih ve 36622 sayılı yazısı görüşüldü. Eğitim Programları ve Öğretim Yüksek Lisans Programı öğrencisi Çağlar ÇANKAYA'nın, Doç. Dr. Fatma Belgin ÖZAYDINLI'nın danışmanlığında yürüttüğü "Tam Sayılar Konusunun Öğretiminde Somut-Temsili-Soyut (CRA) Modelinin Kullanım Kapsamı" başlıklı yüksek lisans tezi kapsamında yapacağı anketin uygulanmasında, bilimsel araştırma ve yayın etiği açısından bir sakınca olmadığına oy birliği ile karar verildi.

Prof.Dr. İbrahim ŞİRİN
Kurul Başkanı

Mevcut Elektronik İmzalar

Prof.Dr. İBRAHİM ŞİRİN (Sosyal ve Beşeri Bilimler Etik Kurulu - Kurul Başkanı) 06.04.2021 16:52

Belge Doğrulama Kodu :*BE6LAFDH2* Belge Doğrulama Adresi :https://ebys.kocaeli.edu.tr/enVision/Validate_Doc.aspx

Sosyal ve Beşeri Bilimler Etik Kurulu Kocaeli Üniversitesi Umuttepe Yerleşkesi 41380, Kocaeli
Tel:+90 (262) 303 10 01 Faks:+90 (262) 303 10 33
E-Posta :rekiletisim@kocaeli.edu.tr Elektronik Ağ :http://www.kocaeli.edu.tr
Kep Adresi: kocaeliuniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi için: Pelin ÜNALDI DOLGUN
Raportör
Telefon No: 303 10 49

EK-5: MEB İzni

T.C.
KOCAELİ VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-99332089-605.01-25525418 25/05/2021
Konu : Araştırma İzni
(Çağlar ÇANKAYA)

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : Kocaeli Üniversitesinin 19.04.2021 tarih ve 48548 sayılı yazısı.

Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Eğitim Programları ve Öğretimi yüksek lisans öğrencisi Çağlar ÇANKAYA'nın "Tam Sayılar Konusunun Öğretiminde Somut-Temsili-Soyut (CRA) Modelinin Kullanım Kapsamı" konulu araştırma çalışmasını İlimiz ortaokullarında uygulama talebi, Üniversitenin ilgi yazıları ile bildirilmektedir.

Adı geçenin söz konusu çalışmasına esas olmak üzere, ekte sunulan çalışmayı İlimiz ortaokullarında, *çevrimiçi* olarak uygulama talebi komisyonumuzca uygun görülmüş olup, Türkiye Cumhuriyeti Anayasası, Millî Eğitim Temel Kanunu ile Türk Millî Eğitiminin genel amaçlarına uygun olarak, 6698 sayılı Kişisel Verilerin Korunması Kanununa ve yürürlükteki diğer tüm düzenlemelerde belirtilen hüküm, esas ve amaçlara aykırılık teşkil etmeyecek şekilde, denetimleri ilgili okul, ilçe millî eğitim müdürlükleri tarafından gerçekleştirilmek üzere, gönüllülük esasına göre, anket çalışmasının İlçe Milli Eğitim Müdürlükleri ve Okul Müdürlüklerinin denetimi, gözetimi ve sorumluluğunda yapması Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde olurlarınıza arz ederim.

Fehmi Rasim ÇELİK
Milli Eğitim Müdürü

OLUR
25/05/2021

Abdul Rauf ULUSOY
Vali a.
Vali Yardımcısı

Adres : Körfez Mah. Ankara Karayolu Cad. No:129 Valilik Binası B Blok
Telefon No : 0 (262) 300 58 71
E-Posta: stratejigelistirme41@meb.gov.tr
Kep Adresi : meb@hs01.kep.tr
Belge Doğrulama Adresi : https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys
Bilgi için: İbrahim TURAN
Unvan : Veri Hazırlama ve Kontrol İşletmeni
İnternet Adresi: www.kocaelimem.meb.gov.tr Faks:2623211554

ÖZGEÇMİŞ

Eğitim Düzeyi	Lisans: Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi/ İlköğretim Matematik Öğretmenliği (2010- 2014) Yüksek Lisans: Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Eğitim Programları ve Öğretim Tezli Yüksek Lisans Programı (2017-2021)
Meslek	Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir ortaokulda ilköğretim matematik öğretmeni (2014-…)