KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOBOLEV UZAYLARI VE GÖMME TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arzu DOĞAN AKGÜL

Anabilim Dalı: MATEMATİK

HAZİRAN 1998

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLAR VE SOBOLEV UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARZU DOĞAN AKGÜL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 05. 06. 1998

Tezin Savunulduğu Tarih : 25. 06. 1998

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Doç.Dr.Akif Abbasov	Doç.Dr. Coşkun Tayfur	Doç. Dr.Celal Çeşmeci
(..........................)	(..........................)	(..........................)

HAZİRAN 1998

GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLAR VE SOBOLEV UZAYLARI

Arzu Doğan Akgül

Anahtar Kelimeler: Genelleşmiş Fonksiyonlar,Sobolev Uzayları,Fourier Dönüşümleri, Gömme Teoremleri

Özet: Bu çalışmada, öncelikle genelleşmiş fonksiyonlar uzayı ve özellikleri araştırılmıştır. Daha sonra $L_1(R)$ 'den olan fonksiyonlar,hızla azalan sonsuz pürüzsüz fonksiyonlar ve $L_2(R)$ 'den olan fonksiyonlar için Fourier dönüşümleri ve özellikleri incelenmiştir. Ardından, Sobolev uzayları ve özelliklerinden bahsedilmiştir. R^n 'de tanımlanmış fonksiyonlar için gömme teoremleri anlatılmıştır. Bu uzaylar için gömme teoremlerinin ispatında Fourier dönüşümleri yöntemi kullanılmış ve bu teoremler kolaylıkla ispatlanmıştır.

GENERALİZED FUNCTİONS AND IMBEEDING THEOREMS

Arzu Doğan Akgül

Keywords: Generalized Functions,Sobolev Spaces,Fourier Transformations, Imbeeding Theorems

Abstract: In this study,as a first step generalized functions space and propeties are investigated. Afterwards, Fourier transformations and properties are investigated for functions originated from $L_1(R)$ and $L_2(R)$ and rapidly descreasing infinitive smooth functions. After that, Sobolev spaces and properties are discussed. Imbeeding theorems are explained for being defined functions in R^n. Fourier transformations method is used in proved of imbeeding theorems and this theorems are easily poved.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER

Günümüzde kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisi ve bununla ilgili analiz problemlerinin çözülmesinde fonksiyonel yöntem kullanılmaktadır.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren danışmanım sayın Doç. Dr. Akif Abbasov'a,yardımlarını gördüğüm sayın Mat. Ar. Gör. Tibet Akyürek'e (K.O.Ü. Fen. Ed. Fak.), Fiz. Ar.Gör. sayın Esma Buluş 'a (K.O.Ü. Fen Bil. Enst.) ve her zaman bana destek olan aileme ve eşim Elek. Müh. Hasan Akgül'e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET ... i
ABSTRACT ... ii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR ... iii
İÇİNDEKİLER ... iv
SİMGELER. DİZİNİ ... vi
BÖLÜM 1 GİRİŞ ... 1

BÖLÜM. 2. GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLAR ... 4
2.1. Temel Fonksiyonlar ve Özellikleri ... 4
2.2. Genelleşmiş Fonksiyonlar Uzayı ... 20
2.3. D' Uzayının Tamlığı ... 22
2.4. Genelleşmiş Fonksiyonun Taşıyıcısı ... 23
2.5. Regüler Genelleşmiş Fonksiyonlar ... 27
2.6. Singüler Genelleşmiş Fonksiyon ... 34
2.7. Genelleşmiş Fonksiyonlarda Argümanın Lineer Yer Değiştirmesi ... 37
2.8. Genelleşmiş Fonksiyonların Çarpımı ... 39
2.9. Genelleşmiş Fonksiyonların Diferansiyellenmesi ... 43
2.10Genelleşmiş Fonksiyonların Düz Çarpımı ... 55
2.11Genelleşmiş Fonksiyonların Bükülmesi ... 64

BÖLÜM 3. YAVAŞ ARTIMLI GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLAR, FOURİER DÖNÜŞÜMLERİ , ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMASI ... 79
3.1. Fourier Dönüşümünün Önemli Özellikleri ... 81
3.2. Hızla Azalan Sonsuz Pürüzsüz Fonksiyonların Fourier Dönüşümü ... 88
3.3. $L_2(R)$ Uzayında Fourier Dönüşümü ... 91
3.4. Genelleşmiş Fonksiyonların Fourier Dönüşümü ... 97

BÖLÜM 4. SOBOLEV UZAYLARI..85

4.1. Sobolev Uzayları ve Özellikleri.. 85

4.2. Gömme Teoremleri...102

4.3. R^n Uzayında Tanımlanmış Fonksiyonlar İçin Gömme Teoremleri.. 104

SONUÇLAR VE ÖNERİLER.. 113

KAYNAKLAR.. 114

ÖZGEÇMİŞ.. 115

SİMGELER DİZİNİ

$C^{\infty}(R^{n})$	: Sonsuz pürüzsüz fonksiyonlar uzayı
R^{1}	: Reel sayılar kümesi
U_r	: r yarıçaplı küre
$\lVert x \rVert$	: x elemanının normu
$\mathrm{supp}\varphi$	: φ fonksiyonunun taşıyıcısı
$D(R^{n}) = C_0^{\infty}(R^{n})$	: Temel fonksiyonlar uzayı
G	: R^{n} uzayında açık ve bağlantılı bölge
$\chi(x)$	: Karakteristik fonksiyon
$\overline{D}$	: D uzayının kapanması
C(a,b)	: (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
L(a,b)	: (a,b) aralığında integrallanebilen fonksiyonlar uzayı
$L_2(a,b)$	: (a,b) aralığında karesi integrallanebilen fonksiyonlar uzayı
$L_p(a,b)$	: (a,b) aralığında $\int \lvert f \rvert^{p} dx < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı
$L_{loc}(R^{n})$	: R^{n} uzayının keyfi sınırlı alt bölgesinde integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\lVert u \rVert_{L_2(a,b)}$	: u elemanının $L_2(a,b)$ uzayında normu
(u,v)	: u ve v elemanlarının iç çarpımı
U(x,r)	: x merkezli r yarıçaplı küre
$\overline{(1,n)}$	: 1'den n'e kadar olan doğal sayılar
$D'(R^{n})$	: Genelleşmiş fonksiyonlar uzayı

$\check{f}$	: Genelleşmiş fonksiyon
$R^n \setminus G_{\check{f}}$	: genelleşmiş fonksiyonun taşıyıcısı
$\{D^\alpha f\}$	: Klasik türev
$\check{f}^{(-1)}$	: $\check{f}$ 'nın ilkeli
$f*g$	: f ve g fonksiyonlarının bükülmesi
$f_\varepsilon(x)$	: $\check{f}$ fonksiyonunun regülerizesi
$F[f]$	: f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$J = S_\infty$	: Yavaş artımlı genelleşmiş fonksiyonlar uzayı
$H_s(R^n)$	: $\forall\|\alpha\| \leq s$ için, kendileri ve α mertebeden genelleşmiş türevleri $L_2(R^n)$ uzayından olan fonksiyonlar uzayı
$H_0(R^n)$	: $L_2(R^n)$
$(f,g)_s$	: $H_s(R^n)$ uzayında skaler çarpım $\left((f,g)_s = \int_{R^n} \sum_{\|\alpha\|\leq s} \left\| D^\alpha f(x) \overline{D^\alpha g(x)} \right\| dx \right)$
$\\|f\\|_s$	: $H_s(R^n)$ uzayında norm : $\left(\\|f\\|_s = \int_{R^n} (\sum_{\|\alpha\|\leq s} \left\| D^\alpha f(x) \right\|^2) dx \right)$
J'	: J uzayının dual uzayı
H_s^*	: H_s uzayının dual uzayı
$\overline{C_0^\infty}$	: C_0^∞ uzayının dual uzayı
V_{y_1}	: y_1 elemanının içeren açık küme
$E \subset F$	: E uzayının F uzayına gömülmesi

BÖLÜM 1 GİRİŞ

Kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisi ve onunla ilgili analiz problemlerinin çözülmesinde fonksiyonel yöntem daha etkilidir. Diferansiyel denklemler için sınır problemlerinde bu yöntemin anlamı; sınır koşulları ile birlikte diferansiyel denklemin özel olarak seçilmiş bir fonksiyonel uzayda tanımlanmış bir operatörle denkleştirilmesi ve gereken bilgilerin bu operatörün özelliklerinden bulunmasıdır. Bundan dolayı diferansiyel denklemin çözülmesi fonksiyonel uzayın seçilmesine bağımlıdır. Bu yöntemin çok katkılı olması, 30'lu yıllarda Ş. L. Sobolev tarafından poliharmonik denklemlerin çözülmesinde kendini göstermişti. Bu çalışmalarda Δ^{ℓ} operatörü ile ilgili $W_p^{(\ell)}(\Omega)$ uzayı tanımlanırdı. Sobolev uzayı, ℓ mertebeye kadar tüm türevleri p mertebeden integrallenebilen (Ωda) fonksiyonlardan oluşur. Daha sonra bu uzaylar bağımsız olarak araştırılmış ve ilk gömme teoremleri Sobolev tarafından ispatlanmıştır. Gömme teoremlerini ispat ederken Sobolev, yüksek mertebeli türevlerin yardımı ile fonksiyonları integral ile ifade yöntemini kullanmıştır.

Sonraki yıllarda $W_p^{(\ell)}(\Omega)$ uzayından olan fonksiyonların n sayısından ($\Omega \subset R^n$) küçük boyutlu manifoldlarında izlerinin araştırılması için $W_p^{(\ell)}(\Omega)$ uzayları ℓ nin kesir değerlerine genişletilmiştir (S. M. Nikolsky, L. N. Slobodeskiy, Gelyardo v.s.). Bu genişletme Slobodeskiy tarafından poliharmonik denklemler için I sınır probleminin çözülebilmesi için gerekli yeterli koşulların bulunmasında uygulanmıştı.

$W_p^{(\ell)}(\Omega)$ uzayından olan fonksiyonlarda tüm argümanlar aynı koşulları sağlarlar. Bundan dolayı onlar eliptik tip denklemlerin çözülmesinde etkilidirler, fakat eliptik olmayan, örneğin parabolik tip denklemlerin çözülmesinde uygulanamazlar. Bundan dolayı, doğal olarak $W_p^{(\ell)}(\Omega)$ uzayları $W_{x_1,\ldots,x_n,p}^{(\ell_1,\ldots,\ell_n)}(\Omega) \equiv W_{x,p}^{\vec{\ell}}(\Omega)$ uzaylarına genişletildi.

Bu uzaylar öyle fonksiyonlardan oluşurlar ki, onların x_i ye göre ℓ_i mertebesine kadar tüm kısmi türevleri Ω bölgesinde p mertebeden integrallenebilirler (ℓ_i ler kesir de olabilirler). Bu uzayları kullanmakla bir çok eliptik denklemler çözülmüştür.

Sonralar L. Hermander , bu konuyu geliştirmiş ve yeni H^{ℓ} uzayları tanımlamıştır. Özel durumda bu uzaylar, Sobolev uzaylarıdır ($H^{\ell} = W_2^{l}(\Omega)$). Bu uzaylar için gömme teoremlerinin ispatında (önce $\Omega = \mathrm{R}^n$ olduğunda) Fourier dönüşümleri yöntemi sıkı kullanılmış ve bu teoremler kolayca ispatlanmıştır. Bu durumda, $\vec{W}^{1}_{x,2}(\mathrm{R}^n)$ uzayı öyle u(x) fonksiyonlarından oluşur ki, onların Fourier dönüşümü ,

$$(1+\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{2.\iota_i})$$

ağırlığı ile integrallenebilen fonksiyon olur. Bu ise,

$$\left\|u(x), W^{1}_{x,2}(\mathrm{R}^n)\right\| = \int \left|F(u)(\xi)^2\right|(1+\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{2u_i}$$

eşitliğinin doğruluğu demektir.$\Omega = \mathrm{R}^n$ halinde, $\vec{W}^{\ell}_{x,2}(\Omega)$ uzayları için gömme teoremleri Fourier dönüşümlerini kullanarak kolaylıkla ispatlanır. Ω özel tipli sınırlı bölge olduğunda ise $W^{\iota}_{x,2}(\Omega)$ uzayından olan fonksiyonlar, $W^{\iota}_{x,2}(\mathrm{R}^n)$ uzayından olan fonksiyonlara (normları saklanmak şartı ile) sürekli dönüşümün yardımı ile genişletilir ve böylece $W^{\iota}_{x,2}(\Omega)$ uzayı $W^{\iota}_{x,2}(\mathrm{R}^n)$ uzayından olan tüm fonksiyonların Ω bölgesine daralmışlarından oluşan uzayla denkleştirilebilir.

Buraya kadar ancak adi fonksiyonlardan oluşmuş uzaylar söz konusu oldu ancak diferansiyel denklemler teorisinde genelleşmiş fonksiyonlar uzayı da kullanılır. Böyle uzaylara örnek olarak $W_2^{\iota}(\Omega)$ uzayının dual uzayını verebiliriz. Bu tür uzayların özellikleri ve onlar için gömme teoremlerinin önemi büyüktür.

Bu çalışmanın birinci bölümünde genelleşmiş fonksiyonlar ve onların özellikleri, ikinci bölümde yavaş artımlı genel fonksiyonlar ve onlarla ilgili Fourier dönüşümleri ve özellikleri, üçüncü bölümde ise Sobolev uzayları , onların özellikleri ve gömme teoremleri araştırılmıştır.

BÖLÜM 2 GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLAR

2.1. Temel Fonksiyonlar ve Özellikleri

Tanım 2.1 : R^n de tanımlanmış ve

1) $\varphi \in C^\infty(R^n)$

2) $\exists r>0, \forall x \in R^n \setminus U_r$ için $\varphi(x) = 0$

koşullarını sağlayan φ fonksiyonuna Finit Fonksiyon denir. Burada

$U_r = \left\{x \in R^n \middle| \|x\| < r\right\}$, r yarıçaplı açık küre ,

$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, R^n uzayında normdur.

Tanım 2.2 : supp $\varphi = \overline{\{x \in R^n | \varphi(x) \neq 0\}} \subset U_r$ kümesine φ fonksiyonunun taşıyıcısı denir. Burada D ile R^n de finit fonksiyonlar kümesi gösterilir.

$$D(R^n) = D = \{\varphi \in C^\infty(R^n) \mid \exists r(\varphi) > 0, \forall x \in R^n \setminus U_r \text{ için } \varphi(x)=0\}$$

BuradaD nin lineerliği açıktır. Finit fonksiyona örnek olarak,

$$\omega_\varepsilon(x)=\begin{cases} c_\varepsilon e^{\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2-\|x\|^2}} & ,\|x\|<\varepsilon \\ 0 & ,\|x\|\geq\varepsilon \end{cases}$$

fonksiyonu verilebilir. Bu fonksiyona şapka fonksiyonu denir.

Tanım 2.3 : $\{\varphi_k\}$ dizisi $D(R^n)$ kümesinde bir dizi olsun.

1) $\exists$ r>0, $\forall k$, supp$\varphi_k \subset U_r$

2) $\forall\ \varphi \in D$,$\forall\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots ,\alpha_n) \in R^n$ için $\mathcal{D}^\alpha\varphi_k \overset{\rightarrow}{\rightarrow} \mathcal{D}^\alpha\varphi$, $k\to\infty$

koşulları sağlandığında $\{\varphi_k\}$ ya D de φ ye yakınsayan dizi denir.

Burada $\mathcal{D}^\alpha\varphi_k \overset{\rightarrow}{\rightarrow} \mathcal{D}^\alpha\varphi, k\to\infty$, $\{\mathcal{D}^\alpha\varphi_k\}$ dizisinin (k sonsuza giderken) $\mathcal{D}^\alpha\varphi$ fonksiyonuna tüm R^n de düzgün yakınsamasıdır.

$$\mathcal{D}^\alpha\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1.\partial x_2\ldots..\partial X_n{}^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1,\ldots,\alpha_n \quad \text{dır.}$$

Tanım 2.4: Tanım 2.3. de verilen yakınsaklıkla birlikte lineer D kümesine temel fonksiyonlar uzayı denir.

Lemma 2.1: $\varphi \in C^\infty(R^n)$ fonksiyonunun D kümesinden olması için gerek ve yeter koşul, supp φ kümesinin sınırlı olmasıdır.

Lemma 2.2: $\mathcal{D}^\beta$:D→D Diferansiyel operatör süreklidir.

İspat: $\{\varphi_k\}$ D kümesinde bir dizi olmak üzere, $\varphi_k \to \varphi$, $k\to\infty$, D uzayında olduğu kabul edilir. Tanım 1.3 e göre;

1) $\exists R>0$, $\forall$ k için supp$\varphi_k \subset U_r$

2) $\forall \alpha \in R^n$ için, $\mathcal{D}^{\alpha}\varphi_k \rightrightarrows \mathcal{D}^{\alpha}\varphi$, $k \to \infty$ (R^n' de) dır.

Bu nedenle,

1) supp $\mathcal{D}^{\alpha}\varphi_k \subset U_r$

2) $\varphi_k(x) = 0$, $\forall x \in R^n \setminus U_r$ olduğu bilindiğine göre, $\forall$ β için $\mathcal{D}^{\beta}\varphi_k \rightrightarrows 0$, $k \to \infty$ D de

Buradan, $\mathcal{D}^{\alpha}[\mathcal{D}^{\beta}(\varphi_k(x)= \mathcal{D}^{\alpha+\beta}(\varphi_k(x))] \rightrightarrows 0$, $k \to \infty$ D de

sonucu elde edilir ki bu da, diferansiyel operatörün D den D ye sürekli bir operatör olması demektir.

Lemma 2.3. $\varphi \in D(R^n)$, $\|A\| \neq 0$ olmak üzere $A: R^n \to R^n$ lineer operatör olsun Keyfi $b \in R^n$ için φ (Ax+b) fonksiyonu $D(R^n)$ ye aittir.

İspat :1) $\varphi \in C^{\infty}(R^n)$, $Ax+b \in C^{\infty}(R^n)$ ise $\varphi(Ax+b) \in C^{\infty}(R^n)$

2) φ (AX+b) nin finit fonksiyon olduğunu gösterelim. Bunun için aksi kabul edilir :

φ (Ax+b) finit olmasın yani $\forall n \in N$, $\exists \|x_n\| \geq n$, $\varphi(Ax_n+b) \neq 0$ olduğu kabul edilsin Tanım 1.1. e göre $\exists$ r>0 , $\forall$ $\|x\| > r$, $\varphi(x) = 0$ dır. $\varphi(Ax_n+b) \neq 0$ ise $\|Ax_n + b\| < r$ olur. Buradan ,

$\big|\|Ax_n\| - \|b\|\big| < r$

elde edilir. Bu eşitsizlik iki durumda incelenir :

a) $\|Ax_n\| \geq \|b\|$ ise $\|Ax_n\| - \|b\| < r$

olur ve buradan ,

$\|Ax_n\| < r + \|b\|$

eşitsizliği elde edilir.

$$\|x_n\| < \frac{1}{\|A\|}.\|Ax_n\|$$

burada son eşitsizlik kullanılırsa,

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\|A\|}(r + \|b\|)$$

elde edilir. Bu ise, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$ koşulu ile çelişir

b) $\|Ax_n\| \leq b$ ise ve bu eşitsizlik

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\|A\|}\|Ax_n\|$$

eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\|A\|}\|b\|$$

eşitsizliği elde edilir . Bu ise $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$ koşulu ile çelişir.Bu çelişkiler, önermenin iddiasının doğru olduğunu gösterir. Bu nedenle φ (Ax+b) fonksiyonu finit fonksiyondur.

Lemma 2.4: $\varphi \in D(R^n)$, $a(x) \in C^\infty(R^n)$ ve A: $R^n \to R^n$ lineer operatör olsun. Burada $\det A \neq 0$ dır.

a) $\varphi(x) \to a(x)\,\varphi(x)$ ve

b) $\varphi(x) \to \varphi$ (Ax+b) , $b \in R^n$ $\varphi(Ax+b)$

işlemleri D den D ye lineer ve süreklidirler. det A ile, A lineer operatörünün determinantı gösterilmektedir.

İspat:a) İspatı açıktır.

b) f: D→D ile $\varphi(x) \to \varphi(Ax+b)$

dönüşümü gösterilsin. f lineer operatör olduğu açıktır. Sürekliliği için, sıfırda sürekli olduğunu göstermek yeterlidir.

$\{\varphi_n\}$ dizisi, D finit fonksiyonlar uzayında sıfıra yaklaşan bir dizi olsun. D uzayında yakınsaklık tanımından , $\{\varphi_n\}$ dizisi için

1) $\exists\, r > 0\ \forall n \in N$, supp $\varphi_n \subset U_r$

2) $\forall\, \alpha \in R^n$ için $\mathcal{D}^\alpha \varphi_n \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$ için R^n

koşulları sağlanır. Bu koşulların $\{\varphi_n(Ax+b)\} \in D$ dizisi için sağlandığı gösterilir:

1) φ (Ax+b) fonksiyonu finit fonksiyon olduğu için ,

supp $\varphi_n(Ax+b) \in U_r$

elde edilir.

2) Özel olarak $\alpha=1$ için,

$\mathcal{D}$ [$\varphi_n(ax+b)$] = a(x) $\mathcal{D}$ [$\varphi_n(ax+b)$] $\rightrightarrows 0$ ($\{\varphi_n\}$ dizisinin D uzayında yakınsaklığının ikinci koşulundan.) Buradan,

$\varphi_n \to 0, n\to\infty$, D de ise $f(\varphi_n) \to 0 , n\to\infty$, D de

sonucu bulunur. Böylece f nin sürekli bir dönüşüm olduğu ispatlanmış olur.

Lemma 2.5: $\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\omega_1(\frac{x}{\varepsilon})$

İspat : Bilindiği gibi

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon e^{\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2-\|x\|^2}} & ,\|x\| < \varepsilon \\ 0 & ,\|x\| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Burada $c_\varepsilon > 0$ öyle seçilir ki, $\int_{R^n} \omega_\varepsilon(x)dx = 1$ olsun.

$$\omega_1(\frac{x}{\varepsilon}) = \begin{cases} c_1 e^{\frac{-1}{1-\left\|\frac{x}{\varepsilon}\right\|^2}} & ,\left\|\frac{x}{\varepsilon}\right\| < 1 \\ 0 & ,\left\|\frac{x}{\varepsilon}\right\| \geq 1 \end{cases}$$

$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\omega_1(\frac{x}{\varepsilon})$ eşitliğinin sağlanması için

$$c_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} c_1$$

eşitliğinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\int_{R^n} \omega_\varepsilon(x)dx = 1, \quad 0 < \varepsilon \leq 1$$

$\exists\, c_\varepsilon > 0$ öyle ki

$$\int_{U\varepsilon} c_\varepsilon \exp(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2})dx = 1$$

eşitliğinden, c_ε^{-1} çekilirse,

$$c_\varepsilon^{-1} = \int_{U_\varepsilon} \exp(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2})dx$$

eşitliği elde edilir.

$$\omega_1(\frac{x}{\varepsilon}) = \int_{U_1} c_1 \exp(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2})dx = 1$$

Buradan, c_1^{-1} çekilirse

$$c_1^{-1} = \int_{U_1} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}\right) dx$$

elde edilir. Burada $x = \frac{\xi}{\varepsilon}$ dönüşümü yapılırsa ,

$$\|x\| < 1 \Rightarrow \left\|\frac{\xi}{\varepsilon}\right\| < 1 \quad \Rightarrow \|\xi\| < \varepsilon$$

elde edilir.

$$\xi = x\varepsilon \Rightarrow d\xi = \varepsilon dx \Rightarrow \; dx = \varepsilon^{-n} d\xi$$

$$c_1^{-1} = \int_{U_1} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}\right) d\xi = \varepsilon^{-n} \int_{U_\varepsilon} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|\xi\|^2}\right) d\xi$$

$$\int_{U_\varepsilon} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|\xi\|^2}\right) dx = c_\varepsilon^{-1}$$

olduğu bilindiğine göre,

$$c_1^{-1} = \varepsilon^{-n} c_\varepsilon^{-1} \;\Rightarrow\; c_1 = \varepsilon^n c_\varepsilon \Rightarrow c_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} c_1$$

eşitliği elde edilir. Bu ise,

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \omega_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterir.

G, R^n de açık ve bağlantılı bölge olmak üzere D(G) uzayı,

$$D(G) = \{\forall \varphi \in D(R^n) \mid \; \text{supp}\varphi \subset G\}$$

ile gösterilir. $D(G)$ nin lineer bir küme ve $D(G) \subset D(R^n)$ olduğu açıktır.

Lemma 2.6.: Keyfi G bölgesi ve keyfi $\varepsilon > 0$ için $0 \leq \eta(x) \leq 1$ olacak şekilde öyle bir $\eta(x) \in C^{\infty}(R^n)$ fonksiyonu vardır ki,$x \in G_{\varepsilon}$ için $\eta(x)=1$; $x \notin G_{3.\varepsilon}$ için $\eta(x)=0$ koşulları sağlanır. Burada G_{ε} , ε yarıçaplı küreyi $G_{3.\varepsilon}$, $3.\varepsilon$ yarıçaplı küreyi göstermektedir.

İspat : $\chi(x)$, $G_{2.\varepsilon}$ bölgesinin karakteristik fonksiyonu olsun.

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, x \in G_{2.\varepsilon} \\ 0, x \notin G_{2.\varepsilon} \end{cases}$$

Bu durumda,

$$\eta(x) = \int_{R^n} \chi(y) \omega_{\varepsilon}(x-y) dy$$

fonksiyonunun aranılan fonksiyon olduğu gösterilmelidir. $\chi(x)$ fonksiyonunun özelliğinden

$$\eta(x) = \int_{G_{2.\varepsilon}} \omega_{\varepsilon}(x-y) dy$$

eşitliği elde edilir. $\omega_{\varepsilon}(x-y)$ fonksiyonu sonsuz pürüzsüz olduğu için $\eta(x)$ fonksiyonu da sonsuz pürüzsüzdür. Bilindiği gibi ω_{ε} fonksiyonu,

$$\forall \xi \in U_{\varepsilon} \text{ için } \omega_{\varepsilon}(\xi) \geq 0 \,, \quad \operatorname{supp}\omega_{\varepsilon} = U_{\varepsilon} \text{ ve } \int_{R^n} \omega_{\varepsilon}(\xi) d\xi = 1$$

özelliklerine sahiptir.

$$0 \leq \eta(x) = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_{\varepsilon}(x-y) dy = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_{\varepsilon}(y-x) d(y-x) = \int_{G_{2\varepsilon}(x)} \omega_{\varepsilon}(\xi) d\xi \leq \int_{R^n} \omega_{\varepsilon}(\xi) d\xi = 1$$

Buradan, $0 \leq \eta(x) \leq 1$ sonucu bulunur.

$U(x,\varepsilon)$, R^n de x merkezli , ε yarıçaplı bir açık küme olmak üzere, $y \notin U(x,\varepsilon)$ olsun. Bu halde $\|y-x\| > \varepsilon$ olur. ω_ε fonksiyonunun tanımına göre, $\omega_\varepsilon(x-y) = 0$ elde edilir. Bu durumda ,

$$\eta(x) = \int_{U(x,\varepsilon)} \chi(y).\omega_\varepsilon(x-y)dy$$

elde edilir. Burada, iki farklı durum incelenmelidir:

1. Durum:

$x \in G_\varepsilon$, $y \in U(x,\varepsilon)$ ise, $y \in G_{2\varepsilon}$ olur ve $G_{2\varepsilon}$ alanında $\chi(y) = 1$ olur.

$$\eta(x) = \int_{U(x,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)dy = \int_{U(x,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(y-x)d(x-y) = \int_{U(x,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(\xi)d\xi = 1$$

Buradan da $\eta(x)=1$ eşitliği elde edilir.

2. Durum:

$x \notin G_{3.\varepsilon}$ ve $y \in U(x,\in)$ ise $\|x-y\| < \varepsilon$

$y \notin G_{2\varepsilon}$ ise $\chi(y) = 0$ dır. Bu durumda

$$\eta(x)= \int_{U(x,\varepsilon)} \chi(y).\omega_\varepsilon(x-y)dy = 0 \text{ dır.}$$

Sonuç2.1: G bölgesi sınırlı ve $G' \subset G$ olsun. Bu durumda $\forall x \in G$ için $0 \le \eta(x) \le 1$; $\forall x \in G'$ için $\eta(x) = 0$ koşullarını sağlayan bir $\eta \in D(G)$ fonksiyonu vardır.

Lemma 2.7 : $\overline{D(G)} = L_2(G)$

Yani D(G) uzayı, $L_2(G)$ uzayında her yerde yoğundur.

İspat : $f \in L_2(G)$ olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için Lebesgue integralinin mutlak sürekliliğinden, $\exists\, G' \subset G$ sınırlı alt bölgesi vardır ki, bu bölgede

$$\int_{G'/G} |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5} \tag{2.1}$$

eşitsizliği vardır. Polinomlar kümesi $L_2(G)$ uzayında her yerde yoğun olduğu için öyle bir $p(x)$ polinomu vardır ki,

$$\int_{G'} |f(x) - p(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5} \tag{2.2}$$

Yine mutlak sürekliliğe göre, $\exists\, G'' \subset G'$ sınırlı alt bölgesi vardır ki,

$$\int_{G'/G''} |p(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5} \tag{2.3}$$

$\eta \in D(G')$ olduğu kabul edilsin. Sonuca göre $x \in G'$ için $\eta(x)=1$; $x \in G''$ için $\eta(x)=0$

koşullarını sağlayan bir $\eta \in D(G')$ fonksiyonu mevcuttur. .Bu durumda $\eta(x)p(x)$ çarpımı sonsuz pürüzsüzdür.

$\| \ \|_{L_2(G)}$, $L_2(G)$ uzayında norm olmak üzere

$$\|f(x) - \eta(x).\, p(x)\|^2_{L_2(G)} = \int_G |f(x) - \eta(x).\, p(x)|^2 dx$$

(2.1) ve (2.2) eşitsizliklerinden,

$$\|f(x) - \eta(x).\, p(x)\|^2_{L_2(G)} = \int_{G'} |f(x) - \eta(x).\, p(x)|^2 dx + \int_{G/G'} |f(x)|^2 dx \le \frac{\varepsilon^2}{5} + \int_{G'} |f(x) - \eta(x).\, p(x)|^2 dx$$

$$\frac{\varepsilon^2}{5} + \int_{G'} |f(x) - \eta(x).\, p(x)|^2 dx \le \frac{\varepsilon^2}{5} + 2.\int_{G'} |f(x) - p(x)|^2 dx + 2.\int_{G'} |p(x) - \eta(x).\, p(x)|^2 dx$$

$$\|f(x)-\eta(x).p(x)\|^2_{L_2(G)} \le \frac{\varepsilon^2}{5}+2.\frac{\varepsilon^2}{5}+2.\int_{G'}|p(x)-\eta(x).p(x)|^2 dx$$

$$\le 3.\frac{\varepsilon^2}{5}+2.\int_{G''}|p(x)|^2|1-\eta(x)|^2 dx+2\int_{G'/G''}|p(x)|^2.|1-\eta(x)|^2 dx \qquad (2.4.)$$

$x \in G''$ için $\eta(x)=0$ ve $x \in G'$ için $\eta(x)=1$ koşulları (2.4) de uygulanırsa,

$$\int_{G''}|p(x)|^2.|1-\eta(x)|^2 dx = \int_{G''}|p(x)|^2 dx$$

$$\int_{G'/G''}|p(x)|^2.|1-\eta(x)|^2 dx = 0$$

son iki eşitlik (2.4) de yerine yazılırsa,

$$\|f(x)-\eta(x).p(x)\|^2_{L_2(G)} \le 3.\frac{\varepsilon^2}{5}+2.\int_{G''}|p(x)|^2 dx \le 3.\frac{\varepsilon^2}{5}+2.\frac{\varepsilon^2}{5}=\varepsilon^2$$

$$\|f(x)-\eta(x).p(x)\|^2_{L_2(G)} \le \varepsilon^2$$

elde edilir. Son eşitsizlik, $D(G)$ uzayının $L_2(G)$ uzayında her yerde yoğun olduğunun ispatıdır.

2.2.Genelleşmiş Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.5. Temel fonksiyonlar uzayında tanımlanmış her bir sürekli lineer fonksiyonele, genelleşmiş fonksiyon denir $\check{f}, \check{g}, \ldots$ ile göserilir. $D'=D'(R^n)$, tüm genelleşmiş fonksiyonlar uzayıdır.

$\forall \check{f}, \check{g} \in D'\ \forall\ \varphi_1, \varphi_2 \in D$ için

$$(\check{f}+\check{g},\varphi)=(\check{f},\varphi)+(\check{g},\varphi)$$

$(\lambda\check{f},\varphi)=\lambda(\check{f},\varphi) \quad \forall\, \lambda\in C$

eşitlikleri ile tanımlandığında D' uzayının lineer bir uzay olduğu açıktır.

Tanım.2.6: D' uzayında yakınsaklık, fonksiyonellerin zayıf yakınsaklığıdır. Bunun anlamı, $\{\check{f}_k\}$, D' uzayında bir dizi ve $\check{f} \in D'$ olmak üzere.

$\check{f}_k \to 0,\ k\to\infty\ D'$ de $\Leftrightarrow$ $\forall\varphi\in D$ için $(\check{f}_k,\varphi)\to(\check{f},\varphi)$ $k\to\infty$ D' de

Tanım.2.7: Lineer D' kümesine, Tanım (2.6.) da belirlenen yakınsaklıkla birlikte genelleşmiş fonksiyonlar uzayı denir.

2.3. D' uzayının tamlığı:

Teorem 2.1: $\{\check{f}_k\}$ D' uzayında bir dizi ve $\forall\varphi\in D$ için $(\check{f}_k,\varphi)$ sayılar dizisinin ise D' uzayında yakınsak olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$(\check{f},\varphi)=\lim_{k\to\infty}(\check{f}_k,\varphi),\ \varphi\in D$$

olarak belirlenen $\check{f}$ fonksiyoneli, D' uzayına aittir.

İspat: 1. $\check{f}$ nın lineerliği açıktır. $\forall\ \varphi,\psi\in D$ için

$$(\check{f},\alpha\varphi+\beta\psi)=\lim_{k\to\infty}(\check{f}_k,\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha\lim_{k\to\infty}(\check{f}_k,\varphi)+\beta\lim_{k\to\infty}(\check{f}_k,\psi)=\alpha(\check{f},\varphi)+\beta(\check{f},\psi)$$

2. $\check{f}$ fonksiyonelinin D uzayında sürekliliği:

$\{\varphi_\nu\}$, D uzayında bir dizi ve $\varphi_\nu\to 0$ $\nu\to\infty$ D de olsun. $(\check{f},\varphi_\nu)\to 0$ $\nu\to\infty$ (D' de) olduğu ispatlanmalıdır. İspat için aksi kabul edilir:

$\exists\, a > 0,\ a \in R$, $\forall \nu$ için $\left|(f, \check{\varphi}_\nu)\right|, \geq 2.a$ olsun. $\forall\, \nu$,

$$(\check{f}, \varphi_\nu) = \lim_{k \to \infty} (\check{f}_k, \varphi_\nu)$$

olduğundan $\exists k_\nu$ için

$$\left|(f_{k_\nu}, \check{\varphi}_\nu)\right| \geq a$$

elde edilir. Bu ise aşağıdaki lemmaya göre mümkün değildir. Bulunan çelişki, $\check{f}$ nın sürekli bir fonksiyonel olduğunu gösterir.

Lemma 2.8: $\{\check{f}_k\} \in D'$ dizisinin Teorem 2.1. deki koşulları sağladığı kabul edilsin. Ayrıca $\{\varphi_k\}$, D uzayında sıfıra yaklaşan bir dizi olsun. Bu durumda,

$$(\check{f}_k, \varphi_k) \to 0 \quad k, \to \infty \quad D' \text{ de}$$

Teorem 2.2: D' uzayı tam uzaydır.

İspat : Tamlığın tanımına göre belirlenmiş topolojide keyfi temel dizi yakınsak olmalıdır.

$\{\check{f}_k\} \subset D'$ bir Cauchy dizisi olsun. ,Cauchy dizisinin tanımına göre $\forall\, \varepsilon > 0$için

$\exists n \in N$, $\forall k, l \geq n$ için $\left|(\check{f}_k - \check{f}_l, \varphi)\right| < \varepsilon$ veya $(\check{f}_k - \check{f}_l, \varphi) \to 0$ $k,l \to \infty$ dır.

Belirtilmiş $\varphi \in D$ için $\{(\check{f}_k - \check{f}_l, \varphi)\}$, sayılardan oluşmuş Cauchy dizisidir. R^1 tam uzay olduğundan $\lim_{k \to \infty} (\check{f}_k, \varphi)$ vardır ve $\lim_{k \to \infty} (\check{f}_k, \varphi) = (\check{f}, \varphi)$ dır.

2.4.Genelleşmiş fonksiyonun taşıyıcısı

Genelleşmiş fonksiyonlar genellikle noktada değere sahip değildirler. Fakat genelleşmiş fonksiyonlar, belli bir alanda sıfır olabilirler.

Tanım 2.8 : $\forall\ \check{f}\ \in D'$ olsun. $\forall\ \varphi \in D(G)$ için $\check{f}(\varphi) = (\check{f},\varphi) = 0$. İse G kümesinde $\check{f} \equiv 0$ denir ve $\forall x \in G$ için $\check{f}(x) = 0$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.9 :G kümesinde $\forall\ \varphi \in D(G)$ için $(\check{f},\varphi) = (\check{g},\varphi)$ sağlandığında $\check{f} = \check{g}$ denir.

Lemma 2.9. : $\check{f}$ genel fonksiyonunun G kümesinde sıfır olması için gerekli ve yeterli koşul, $\check{f}$ nın G kümesinin her noktasının komşuluğunda sıfır olmasıdır.

İspat :,$\forall\varphi \in D(G)$ için, $(\check{f},\varphi)=0$ olsun. Gerekliliğin ispatı için, $\forall x \in G$ için $U(x,\varepsilon)$, x in bir komşuluğu olmak üzere, $\forall\ \varphi \in D(U(x,\varepsilon))$ için $(\check{f},\varphi)=0$ olduğu gösterilmelidir.

G kümesi açık küme olduğundan, $U(x,\varepsilon) \subset G$ ve bundan dolayı $D(U(x,\varepsilon)) \subset D(G)$ dır. Koşula göre $\forall\varphi \in D(G)$ için $(\check{f},\varphi) = 0$ olduğundan $\forall\ \varphi \in D(U(x,\varepsilon))$ için $(\check{f},\varphi) = 0$ sonucu bulunur.

Yeterliliğin ispatı için $\check{f}$ fonksiyoneli, G kümesinin her noktasının komşuluğunda sıfır olsun. Bu durumda, $\check{f}$ fonksiyonelinin G nin her bir noktasının komşuluğunda sıfır olduğu ispatlanmalıdır

$\forall\varphi \in D(G)$ olsun. D(G) nin tanımından, supp $\varphi \subset G$ dir. supp φ kompakt bir kümedir ve kompaktlığın tanımına göre, supp φ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu durumda, $U(x_k,r_k)$, k=1,...N, x_k merkezli r_k yarıçaplı açık olmak üzere, supp$\varphi \subset U(x_k,r_k)$ ve supp $\varphi \subset \bigcup_{k=1}^{n} U(x_k,r_k)$ elde edilir. Koşula göre,

$\forall\varphi \in D(U(x_k,r_k))$ için $(\check{f},\varphi) = 0$ dır.

$r_k' < r_k$ için $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup_{k=1}^{n} U(x_k, r_k')$ olduğu kabul edilsin. Lemma (2.6.) ya göre ,

$\forall\, x \in U(x_k, r_k')$ için $h_k(x) = 1$

$\forall\, x \notin U(x_k, r_k')$ için $h_k(x) = 0$

olacak şekilde bir $h_k(x)$ temel fonksiyonu seçilebilir. Burada $h(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonları,

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k(x) \tag{2.5.}$$

$$\varphi_k(x) = \frac{\varphi(x).\,h_k(x)}{h(x)} \tag{2.6.}$$

eşitlikleri ile belirlenmiştir. $\forall$ k için $h_k(x) = 1$, $x \in U(x_k, r_k')$ ve $\operatorname{supp}\varphi \in \bigcup_{k=1}^{n} U(x_k, r_k')$

olduğundan $h(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k(x) \neq 0$ dır.

$\forall\, x \in U(x_k, r_k')$ için $h_k(x) = 1$ olduğu için,$h(x) \geq 1$ olur. Hipoteze göre, $\forall$ k=1,...,N ve $\forall\varphi_k(x) \in D(U(x_k,r_k))$ için

$$(\check{f},\varphi_k(x)) = 0 \text{ dır.} \tag{2.7.}$$

Bu durumda, $\varphi(x) \in D$ ise $\varphi(x) \in C^\infty$ dur. Buradan, $\dfrac{\varphi(x)}{h(x)} \in C^\infty$ elde edilir. 2.6.koşulundan

$\varphi(x).\, h_k(x) = \varphi_k(x).\, h(x)$

elde edilir. Bu eşitlikte toplama geçilirse,

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(x).\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x).h(x) \tag{2.8.}$$

elde edilir.2.5.eşitliği, 2.8. eşitliğinde kullanılırsa,

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)$$

$$(\check{f},\varphi) = (\check{f},\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)) \tag{2.9}$$

$\check{f}$, D′ uzayında lineer fonksiyonel olduğundan (2.9) eşitliği,

$$(\check{f},\varphi) = \sum_{k=1}^{n} (\check{f},\varphi_k(x))$$

şeklinde yazılabilir. (2.7). koşuluna göre, $(\check{f},\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)) = 0$ dır. Buradan,

$(\check{f},\varphi)=0, \forall\ \varphi \in D(G)$ elde edilir.

$\check{f}$ genel fonksiyonunun sıfır olduğu civarların birleşimi $G_{\check{f}}$ ile gösterilir. Açık kümelerin keyfi birleşimleri açık olduğundan $G_{\check{f}}$ da açık kümedir.

Tanım 2.10: $R^n \backslash G_{\check{f}}$ kümesine $\check{f}$ genelleşmiş fonksiyonunun taşıyıcısı denir ve $\operatorname{supp}\check{f} = R^n \backslash G_{\check{f}}$ ile gösterilir. supp $\check{f}$ kapalı kümedir. Eğer supp $\check{f}$ sınırlı ise $\check{f}$ genelleşmiş fonksiyonu finit genelleşmiş fonksiyon olarak adlandırılır. Bu nedenle

1) $\check{f}(\varphi)=0$, $\varphi \in D \Rightarrow \operatorname{supp}\varphi \subset G_{\check{f}} \Rightarrow \operatorname{supp}\check{f} \cap \operatorname{supp}\varphi = \varnothing$;

2) $\operatorname{supp}\check{f}$ öyle noktalardan kurulmuştur ki, keyfi noktanın keyfi civarında $\check{f} \neq 0$

2.5.Regüler genelleşmiş fonksiyonlar

Tanım 2.11: $f \in L_{loc}(R^n)$ fonksiyonunun

$$(\check{f},\varphi)=\int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx \ , \ \forall\varphi \in D \qquad (2.10.)$$

formülü ile doğurdukları $\check{f}$ fonksiyonellerine regüler genelleşmiş fonksiyon denir. Burada $L_{loc}(R^n)$, R^n de keyfi sınırlı alt bölgede integrallenebilen fonksiyonlar uzayıdır.

Lemma 2.10: $f \in L_{loc}(R^n)$ olsun. Bu durumda $\forall \ \varphi \in D(R^n)$ için

$$(f,\check{\varphi}) = \int_{R^n} f(x).\varphi(x)dx \qquad (2.11.)$$

eşitliği ile tanımlanan $\check{f} \in D'$ dür.

İspat : $\check{f}$ fonksiyonelinin D uzayının elemanı olduğu gösterilmelidir.

f, R^n uzayında keyfi sınırlı alt bölgede integrallenebilen fonksiyoneldir. Bu durumda önce f(x).φ(x) çarpımının R^n de integrallenebilen fonksiyon olduğu kanıtlanmalıdır.

$$\left|(\check{f},\varphi)\right| = \left|\int_{R^n} f(x).\varphi(x)dx\right| \le \int_{R^n} |f(x).\varphi(x)|dx \le \int_{\overline{U_r}} |f(x)|.|\varphi(x)|dx \qquad (2.12)$$

Burada $\overline{U}_r$ kümesi, φ finit fonksiyonunun taşıyıcısıdır. φ(x) fonksiyonu D de sınırlı fonksiyon olduğundan, ∃ M>0 sayısı vardır ki , $|\varphi(x)| \le M$ dir. Bu eşitsizlik, (2.12) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\left|(\check{f},\varphi)\right| \le M.\int_{\overline{U}_r} |f(x)|dx$$

$f \in L_{loc}(R^n)$ olduğundan, $\int\limits_{\overline{U_r}} |f(x)|dx < \infty$ dur. Bu nedenle $\left|(\check{f}, \varphi)\right| < \infty$

Bunun anlamı ise, $f(x).\varphi(x)$ çarpımının integrallenebilen olmasıdır. (2.10) koşulu ile tanımlanan $\check{f}$ fonksiyonelinin, D' uzayında lineerliği açıktır. Sürekliliğinin gösterilmesi için ise sıfırda sürekliliğinin gösterilmesi yeterlidir: $\{\varphi_k\}$, $D(R^n)$ de bir dizi ve $\varphi_k \to 0, k \to \infty$ (D de) olsun. D de yakınsaklığın tanımına göre,

a) $\exists r>0$, $\mathrm{supp}\varphi_k \subset \overline{U_r}$, $\forall k \in N$ için

b) $\forall \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n) \in R^n$ için $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0$, ($R^n$ de)

koşulları sağlanır.

$$\left|(\check{f}, \varphi_k)\right| = \left|\int\limits_{\overline{U_r}} f(x).\varphi_k(x)dx\right| \leq \int\limits_{\overline{U_r}} |f(x).\varphi_k(x)|dx \leq \int\limits_{\overline{U_r}} |f(x)|.|\varphi_k(x)|dx$$
$$\leq \max_{\overline{U_r}} |\varphi_k(x)| \int\limits_{\overline{U_r}} |f(x)|dx \leq M \max_{\overline{U_r}} |\varphi_k(x)| \to 0, k \to \infty$$

Bu nedenle, $\check{f} \in D'$ dır.

Lemma 2.11. (Dü Bua Reyman Lemması) : $\check{f}$ regüler genelleşmiş fonksiyonunun G bölgesinde sıfır olması için gerek ve yeter koşul, onu doğuran $f \in L_{loc}(R^n)$ fonksiyonunun G de hemen hemen her yerde sıfır olmasıdır.

İspat : Yeterlilik: $f \in L_{loc}(R^n)$ fonksiyonu G de hemen hemen her yerde sıfır olsun. Bu durumda $\forall \varphi \in D(G)$ için

$(\check{f}, \varphi) = \int\limits_{R^n} f(x).\varphi(x)dx = 0$ olduğundan $\forall \varphi \in D(G)$ için $(\check{f}, \varphi) = 0$ dır.

Gereklilik: $\forall \varphi \in D(G)$ için $(\check{f}, \varphi) = \int\limits_{R^n} f(x).\varphi(x)dx = 0$ olduğu kabul edilsin.

$f \in L_{loc}(R^n)$ fonksiyonunun G de hemen hemen her yerde sıfır olması için $f(x)$ in G bölgesinden olan her noktanın belli bir civarında hemen hemen her yerde sıfır olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$\forall$ a $\in$ G olsun. G açık küme olduğundan, $\exists\, \varepsilon > 0$, $U(a,\varepsilon) \subset G$ .dır. Bunun için

$$\psi_k(x) = e^{\frac{i.(k,x)}{\varepsilon}}\, \omega_\varepsilon(x-a) \quad ,k=1,2,...,$$

fonksiyonlarını ele alalım. Burada,

$(k,x)=\sum_{i=1}^{n} k_i x_i$, $n\in N$ ve $\omega_\varepsilon(x-a)$,şapka fonksiyonudur. $\omega_\varepsilon(x-a) \in D(U(a,\varepsilon))$ ve

$e^{\frac{i.(k,x)}{\varepsilon}} \in C^\infty(R^n)$ olduğundan $\psi_k(x) \in D(U(a,\varepsilon))$ dur. $\check{f}=0$ (G de) olduğundan

$$0=(\check{f}, \psi_k(x))= \int_{R^n} f(x).\, e^{\frac{i.(k,x)}{\varepsilon}}\, \omega_\varepsilon(x-a)\, dx=0$$

elde edilir. $f(x)\ \omega_\varepsilon(x-a) \in L(R^n)$. Buradan ise $f(x)\ \omega_\varepsilon(x-a)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları

$$c_k=\frac{1}{(2\pi)^n}\int [f(x)\omega_\varepsilon(x-a)]\, e^{\frac{i.(k,x)}{\varepsilon}}\, dx \quad =0$$

eşitliği ile belirlenir. Fourier katsayılarının hepsi sıfır olduğundan

$f(x).\, \omega_\varepsilon(x-a) = 0$, hemen hemen her yerde $U(a,\varepsilon)$ da

elde edilir. $\omega_\varepsilon(x-a)$ fonksiyonu $U(a,\varepsilon)$ da sıfırdan farklı olduğundan $\forall x\in U(a,\varepsilon)$ için , $U(a,\varepsilon)$ hemen hemen her yerde $f(x) = 0$ dır. G bölgesinin her noktasının belli bir civarında hemen hemen her yerde sıfır olan bir fonksiyon G bölgesinde de hemen hemen her yerde sıfırdır. Bu nedenle, G de hemen hemen her yerde $f(x) = 0$ elde edilir.

Sonuç 2.2. Her $\check{f}$ regüler genelleşmiş fonksiyonu bir tek $f \in L_{loc}(R^n)$ fonksiyonu ile belirlenir.

İspat : $\forall \check{f}$ regüler genelleşmiş fonksiyonu f_1, $f_2 \in L_{loc}(R^n)$ fonksiyonları ile belirlensin. $\forall \varphi \in D$ için

$$(\check{f},\varphi)=\int_{R^n} f_1(x)\varphi(x)dx$$

$$(\check{f},\varphi)=\int_{R^n} f_2(x)\varphi(x)dx$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$0=\int_{R^n}[f_1(x)-f_2(x)]\varphi(x)dx$ ise R^n de hemen hemen her yerde $f_1(x)$-$f_2(x) = 0$

olduğundan hemen hemen her yerde $f_1(x)$=$f_2(x)$ dır. Bulunan sonuç varsayımla çelişkili olduğundan, her $\check{f}$ regüler genelleşmiş fonksiyonunun bir tek $f \in L_{loc}(R^n)$ fonksiyonu ile belirlendiği sonucuna ulaşılır.

Lemma 2.12. $\forall$ f, $\{f_k\} \in L_{loc}(R^n)$, (k=1,2,..N) olsun. R^n uzayının bir K kompaktında $\{f_k\}$, f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise $\{\check{f}_k\}$ dizisi $\check{f}$ genelleşmiş fonksiyonuna D' uzayında yakınsaktır.

İspat : $\forall$ f, $\{f_k\} \in L_{loc}(R^n)$, k=1,2,... ve R^n uzayının her bir kompaktında $f_k \rightrightarrows f_k \to \infty$ olduğu kabul edilsin. $\forall \varphi \in D$ ve $\{\check{f}_k\}$, $\check{f} \in D'$ için $\check{f}_k \to \check{f} \to \infty D'$ olduğu ispatlanmalıdır. suppφ kümesi, R^n uzayının kompakt alt kümesi olduğundan, kabule göre

$\forall \varepsilon>0$ için $\exists k(\varepsilon)>0$, $\forall k \geq k(\varepsilon)$ için $|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon$. $\forall \varphi \in D$ için

$$\left|(\check{f}_k(x)-\check{f}(x),\varphi(x))\right| \leq \int_{supp\varphi}|f_k(x)-f(x)||\varphi(x)|dx \leq \varepsilon \int_{supp\varphi}|\varphi(x)|dx$$

ε sayısı keyfi bir sayı olduğundan,

$(\check{f}_k - \check{f}, \varphi) \to 0,\ k \to \infty$, (D′de)

elde edilir.

Tanım 2.12: $f \in C^p(G)$ olduğunda $(f,\varphi) = \int f(x)\check{\varphi}(x)dx \in C^p(\overline{G})$

2.6.Singüler genelleşmiş fonksiyon

Tanım 2.13: Regüler olmayan genelleşmiş fonksiyona singüler genelleşmiş fonksiyon denir. En basit singüler genelleşmiş fonksiyon, Dirak'ın δ fonksiyonudur.

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0)\ ,\ \forall\ \varphi \in D \qquad (2.13)$$

Lemma 2.13. (2.13) formülü ile tanımlanan $\delta \in D'$ dür.

İspat : Yukarıda tanımlanan $\delta : D \to C$ δ fonksiyonunun lineerliği açıktır. Bu nedenle sıfırda sürekliliğinin gösterilmesi yeterlidir. $\{\varphi_k\}$, D uzayında bir dizi ve $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ D de olsun. D uzayında yakınsaklığın tanımdan,

1. $\exists\ r > 0$, supp $\varphi_k \subset U_r$, H $k \in N$ için

2. Düzgün yakınsaklığın tanımına göre, $\forall\ \alpha \in R^n$ için $\mathcal{D}^\alpha\varphi_k \rightrightarrows 0$ dır.

$\varphi_k \rightrightarrows 0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ k(\varepsilon) > 0$, $\forall\ k \geq k(\varepsilon)$ için $|\varphi_k(0)| < \varepsilon$ dur. Bu durumda,

$|(\delta(x), \varphi_k(x)| = |\varphi_k(0)| < \varepsilon$ dır.

O halde δ , D de süreklidir. D de sürekli ve lineer olduğundan $\delta \in D'$.

Lemma 2.14. (2.13). eşitliği ile tanımlanan δ fonksiyonu, singüler genelleşmiş fonksiyondur.

İspat : δ fonksiyonu , regüler genelleşmiş fonksiyon olsun. Regüler genelleşmiş fonksiyon tanımına göre $\exists$ f $\in L_{loc}(R^n)$, $\forall$ φ $\in$ D için

$$(\delta,\varphi)=\int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx \qquad (2.14.)$$

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ olmak üzere $\forall$ φ $\in$ D için $x_1\varphi \in D$ olduğu açıktır. π_1 projeksiyon fonksiyonu sonsuz pürüzsüzdür. Bu nedenle $\pi_1(x)\varphi(x) \in D$ dir.

Burada π_1: $R^n \to R^1$ gibi tanımlanır.(2.13) eşitliğinden,

$$(\delta(x),x_1\varphi(x))=\int_{R^n} f(x)x_1\varphi(x)dx=[x_1\varphi(x)]\big|_{x=0} \qquad (2.15.)$$

$$\int_{R^n}[x_1 f(x)]\varphi(x)dx=(x_1 f(x),\varphi(x)) \qquad (2.16.)$$

son iki eşitlikten,

$$(x_1.f(x),\varphi(x))=0 \qquad (2.17)$$

elde edilir. Burada $x_1.f(x)\in L_{loc}(R^n)$ dır. (2.17) eşitliğinde Dü Bua Reyman lemmasına göre $\forall\varphi\in D$ için R^n de hemen hemen her yerde $x_1 f(x)=0$ dır. $\pi_1(x)$ fonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan, R^n de hemen hemen her yerde $\pi_1(x).f(x)=0$ ise R^n de hemen hemen her yerde $f(x)=0$ dır.

$(\delta,\varphi)=\int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx=0=\varphi(0)$ ise $\varphi(0)=0$ dır.

Keyfi finit fonksiyon ise, sıfıra eşit değildir. Bu çelişki, δ nın regüler genellşmiş fonksiyon olmadığının ispatıdır. O hade δ , singüler genelleşmiş fonksiyondur.

Lemma 2.15. $\overset{\vee}{\omega}_\varepsilon(x) \to \delta(x), \varepsilon \to 0^+, D'$ de.

İspat : $\forall\varphi\in D$,

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} (\overset{\vee}{\omega_\varepsilon}(x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x))$ olduğu ispatlanmalıdır.

$\varphi \in D$ olduğundan φ sürekli fonksiyondur. Sürekliliğin tanımına göre $\forall\eta>0$ için $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall x$, $|x|<\varepsilon_0$ olduğunda $|\varphi(x)-\varphi(0)|<\eta$ dır. Ayrıca $\forall\varepsilon>0$, $\forall x\in U_\varepsilon$ için $\varepsilon<\varepsilon_0$ ise $|x|<\varepsilon<\varepsilon_0$ dır. $\omega_\varepsilon(x)$ şapka fonksiyonunun özellikleri de kullanılarak

$$\left|\int_{R^n} \omega_\varepsilon(x).\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| \le \int_{U_\varepsilon} |\omega_\varepsilon(x)|.|\varphi(x)-\varphi(0)|dx \le \int_{U_\varepsilon} \omega_\varepsilon(x)\eta dx$$

$$\eta\int_{U_\varepsilon} \omega_\varepsilon(x).dx = \eta.1 \Rightarrow \left|\int_{R^n} \omega_\varepsilon(x).\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| \le \eta\,,\ \forall\, x\in U_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{R^n} \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \to \varphi(0), \varepsilon\to 0^+ \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\overset{\vee}{\omega_\varepsilon}(x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x))$$

elde edilir. Bu nedenle $\overset{\vee}{\omega_\varepsilon}(x) \to \delta(x), \varepsilon\to 0^+, (D'de)$

2.7.Genelleşmiş fonksiyonlarda argümanın lineer yer değiştirmesi

$f\in L_{loc}(R^n)$, $x=A.y+b$, $b\in R^n$, A ise R^n den R^n ye lineer dönüşüm olsun. O halde $\forall\ \varphi \in D$ için

$$(\check{f}(Ay+b), \varphi(y)) = \int f(Ay+b)\varphi(y)dy$$

$$= \frac{1}{|\det A|}\int_{R^n} f(x).\varphi(A^{-1}(x-b)).dx = \frac{1}{|\det A|}.(\overset{\vee}{f}(x), \varphi(A^{-1}(x-b))$$

Bu eşitlik keyfi $\check{f} \in D'$ için $\check{f}(Ay+b)$ genelleşmiş fonksiyonunun tanımı olarak belirlenir:

$\forall \check{f}$ için $(\check{f}(Ay+b),\varphi(y))=(\check{f}(x),\dfrac{\varphi(A^{-1}(x-b)}{|\det A|})$...,$\forall\varphi\in D$ (2.18)

eşitliğine $\check{f}$ genelleşmiş fonksiyonunun argümanının lineer yer değiştirmesi denir.

Lemma 2.16. $\check{f}(Ay+b)\in D'$ dır.

Tanım 2.14: $\check{f}(y+b)$ fonksiyonuna $\check{f}(y)$ genelleşmiş fonksiyonunun b vektörü kadar kaydırılmışı denir.

Örnek 2.1: $\delta(x-x_0)$, $\delta(x)$ genelleşmiş fonksiyonunun $(-x_0)$ vektörü kadar kaydırılmışıdır:

$(\delta(x-x_0),\varphi(x))=(\delta(x),\varphi(x+x_0))=\varphi(x_0)$, $\forall\ \varphi\in D$

Lemma 2.17. (2.18). eşitliği ile tanımlanan $\check{f}(y)\to\check{f}(Ay+b)$, dönüşümü D' den D' ye lineer ve süreklidir.

İspat: $\check{f}(Ay+b)$ fonksiyonelinin D de lineerliği açıktır.

$\varphi_k\to\varphi$ $k\to\infty$, (D de) olsun. $\varphi\to\varphi(A^{-1}(x-b))$ dönüşümü D den D ye sonsuz pürüzsüz olduğundan $\varphi_k(A^{-1}(x-b))\to\varphi(A^{-1}(x-b))$ (D de) olacaktır. $\check{f}$ D de sürekli olduğundan

$$(\check{f}(x),\frac{\varphi_k(A^{-1}(x-b)}{|\det A|})\to(\check{f}(x),\frac{\varphi(A^{-1}(x-b)}{|\det A|})\ k\to\infty,$$

Bu ise (2.18) eşitliğine göre ,

$(\check{f}(Ay+b),\varphi_k(y))\to(\check{f}(Ay+b),\ \varphi(y))$, $k\to\infty$ yani $\check{f}(Ay+b)\in D'$ dır.

2.8.Genelleşmiş fonksiyonların çarpımı

$\forall f \in L_{loc}(R^n)$ ve $a(x) \in C^\infty(R^n)$ için $a(x)f(x) \in L_{loc}(R^n)$ olduğu açıktır. Bu nedenle $a(x)f(x)$ fonksiyonu regüler genelleşmiş fonksiyon belirler. $\forall\ \varphi \in D$ ve $\forall \check{f} \in D'$ için

$$(a(x)\check{f}(x), \varphi(x)) = \int_{R^n} a(x)f(x)\varphi(x)dx = \int_{R^n} f(x)[a(x)\varphi(x)]dx = (\check{f}(x), a(x)\varphi(x))$$

$$(a(x)\check{f}(x), \varphi(x)) = (\check{f}(x), a(x)\varphi(x))$$

Sonuncu eşitlik, keyfi genelleşmiş $\check{f} \in D'$ fonksiyonunun sonsuz pürüzsüz $a(x)$ fonksiyonu ile çarpımı olarak tanımlanır:

$$\forall \check{f} \in D' \quad (a\check{f}, \varphi) = (\check{f}, a\varphi), \quad \varphi \in D \tag{2.19}$$

Lemma 2.18: $a(x)\check{f}(x) \in D'$ dır.

İspat : Önce $a(x)\check{f}(x)$ çarpımının D den D ye lineer ve sürekli olduğu gösterilmelidir. $a(x)\check{f}(x)$ fonksiyonunun D de lineerliği açıktır. Sürekliliğinin ispatı için sıfırda sürekliliğinin gösterilmesi yeterlidir. $\varphi(x)$ ve $a(x)\varphi(x)$ fonksiyonları D de lineer ve sürekli fonksiyonlardır. Bu nedenle D den olan keyfi yakınsak $\{\varphi_k\}$ dizisi için, $(\check{f}(x), a(x)\varphi_k(x)) \to 0$, $k \to \infty$, D de yakınsaması vardır. Bu yakınsama, (2.19) eşitliğinde uygulanırsa,

$$(a(x)\check{f}(x), \varphi(x)) \to 0,\ k \to \infty,\ \text{D de}$$

elde edilir. Bu nedenle $a(x)\check{f}(x)$ D de süreklidir. D de lineer ve sürekli olduğundan $a(x)\check{f}(x) \in D'$ dır.

Lemma 2.19. $\check{f}(x) \in D'$, $a(x) \in C^{\infty}(R^n)$ için $a(x)\check{f}(x): D' \to D'$ ye lineer ve süreklidir.

İspat : $a(x)\check{f}(x)$ genelleşmiş fonksiyonunun D' uzayında lineerliği açıktır. $\forall\{\check{f}_k\} \in D'$ dizisi, D' uzayında sıfıra yakınsayan bir dizi olsun. $a(x)\check{f}(x)$ genelleşmiş fonksiyonunun D' uzayında sürekli olması için, D' de $(a(x)\check{f}_k(x), \varphi(x)) \to 0$ $k \to \infty$, koşulu sağlanmalıdır. $a(x)\varphi(x)$, D de sürekli fonksiyondur. Bu nedenle D de yakınsak olan $\{\varphi_k\}$ dizisi için, $(\check{f}_k(x), a(x)\varphi_k(x)) \to 0$, $k \to \infty$, D' de olduğundan $(a(x)\check{f}_k(x), \varphi_k(x)) \to 0$, $k \to \infty$, D' de elde edilir.

Lemma 2.20. $\check{f}(x) \in D'$ ise $\forall \eta(x) \in C^{\infty}(R^n)$, $\eta(x)=1$, $\forall x \in U$; ve

$\operatorname{supp}\check{f} \subset U$, $\check{f}(x)=\eta(x)\check{f}(x)$ dır.

İspat : Koşula göre, $\forall x \in U$ için $\eta(x)=1$ olduğundan $\forall x \in U$ $(1-\eta(x))=0$ dır. O halde $\forall \varphi \in D$ için

$(1-\eta(x))\varphi(x)=0$, $\forall x \in \operatorname{supp}\check{f}$ Bu nedenle,

$\operatorname{supp}[(1-\eta(x))\varphi(x)] \cap U = \varnothing \Rightarrow \operatorname{supp}[(1-\eta(x))\varphi(x)] \cap \operatorname{supp}\check{f} = \varnothing$

O halde

$(\check{f}, (1-\eta(x))\varphi(x))=0$

ve çarpımın tanımına göre,

$((1-\eta(x)).\ \check{f}(x), \varphi(x)) = 0 \Rightarrow (1-\eta(x)).\ \check{f}(x) = 0 \Rightarrow \check{f}(x) = \eta(x).\ \check{f}(x)$

Örnek 2.2: $\delta \in D'$, $a(x) \in C^{\infty}(R^n)$, $\forall\ \varphi \in D$ için $\delta(x) = a(0).\delta(x)$ eşitliği doğrudur:

$(a(x)\delta(x),\varphi(x))=(\delta(x),a(x)\varphi(x))=a(0)\varphi(0)=a(0)(\delta(x),\varphi(x))=(a(0)\delta(x),\varphi(x))$

$\Rightarrow a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x)$ elde edilir.

NOT 2.1.: Keyfi genelleşmiş fonksiyonların çarpımı her zaman genelleşmiş fonksiyon olmayabilir. Örneğin,

İki lokal integrallenebilen fonksiyonun çarpımı her zaman lokal integrallenebilen olmayabilir: R^1 de

$f(x)=|x|^{-\frac{1}{2}} \in L_{loc}(R^n)$ dır. Fakat

$|x|^{-\frac{1}{2}}|x|^{-\frac{1}{2}}=|x|^{-1} \notin L_{loc}(R^n)$

elde edilir. Bu, genel olarak genel fonksiyonlar için de böyledir. L. Schwartz, asosyatif ve komutatif özelliklere sahip çarpımın (genel fonksiyonlar arasında) tanımlanamadığı ispatlanmıştır.

2.9.Genelleşmiş fonksiyonların diferansiyellenmesi

Genelleşmiş fonksiyonun türevi

$f \in C^p(R^n)$ olsun. Bu durumda $\forall\alpha \in R^n$ için $|\alpha| \le p$ olmak üzere $\forall\varphi \in D$ için kısmi integralleme formülü doğrudur:

$$(\mathcal{D}^\alpha f(x),\varphi(x))=\int_{R^n} \mathcal{D}^\alpha f(x)\varphi(x)\,dx$$

$$=(-1)^{|\alpha|}\int_{R^n} f(x)\,\mathcal{D}^{\alpha}\varphi(x)dx=(-1)^{|\alpha|}(f(x),.\mathcal{D}^{\alpha}\varphi)$$

Aşağıdaki eşitlik $\forall \check{f} \in D'$ fonksiyonunun $\mathcal{D}^{\alpha}\check{f}$ genel türevi olarak tanımlanır:

$$(\mathcal{D}^{\alpha}\check{f}(x),\varphi(x))=(-1)^{|\alpha|}(\check{f}(x),\mathcal{D}^{\alpha}\varphi(x)) \tag{2.20}$$

Lemma 2.21. $\forall \check{f} \in D'$, $\forall\varphi\in D$ için (2.20) eşitliği ile tanımlanan $\mathcal{D}^{\alpha}\check{f} \in D'$ dır.

İspat: $\mathcal{D}^{\alpha}\check{f}$ fonksiyonu , $\mathcal{D}^{\alpha}\check{f}$: $D \to C$ ile tanımlıdır. $\mathcal{D}^{\alpha}\check{f}$ fonksiyonunun D de lineerliği açıktır. Sürekliliğinin ispatı için sıfırda sürekliliğinin gösterilmesi yeterlidir. $\forall\{\varphi_k\}\subset D$ dizisi D de sıfıra yakınsayan bir dizi olsun. Diferansiyelleme işlemi D den D ye lineer ve sürekli olduğundan $\varphi_k(x)\to 0$, $k\to\infty$ D de $\Rightarrow$ $\mathcal{D}^{\alpha}\varphi_k(x)\to 0$, $k\to\infty$ D de ve $\check{f}$ fonksiyonu D de sürekli olduğundan,

$$(-1)^{|\alpha|}.(\check{f}(x),.\mathcal{D}^{\alpha}\varphi_k(x)).\to 0,\ k\to\infty \text{ D de } \Rightarrow (\mathcal{D}^{\alpha}\check{f}(x),\varphi(x))\to 0,\ k\to\infty \text{ D de}$$

elde edilir. O halde $\mathcal{D}^{\alpha}\check{f}(x)$ fonksiyonu D de lineer ve sürekli olduğu için $\mathcal{D}^{\alpha}\check{f} \in D'$ dır. **Özel halde** $\check{f}=\delta$ alındığında (2.20) koşulundan

$$(\mathcal{D}^{\alpha}\delta(x),\varphi(x))=(-1)^{|\alpha|}(\delta(x),\mathcal{D}^{\alpha}\varphi(x))=(-1)^{|\alpha|}[\mathcal{D}^{\alpha}\varphi](0),\ \forall\varphi\in D,$$

elde edilir. Klasik türev $\{\mathcal{D}^{\alpha}\check{f}\}$ genel türevi olarak ile gösterilir. Genel türevin tanımından elde edilir ki, eğer $f \in C^{p}(G)$ ise, $\mathcal{D}^{\alpha}\check{f}$ genel türevi, $\{\mathcal{D}^{\alpha}f\}$ ile aynıdır:

$$\mathcal{D}^{\alpha}\check{f}=\{\mathcal{D}^{\alpha}f\},\quad x\in G,\quad |\alpha|\le P.$$

Genelleşmiş türevin özellikleri:

1.Genel türev, D' uzayından D' uzayına lineer ve süreklidir.

Özel durumda,$\omega_{\varepsilon}(x)$ şapka fonksiyonu için,

$\mathcal{D}^{\alpha}\omega_{\varepsilon}(x) \to \mathcal{D}^{\alpha}\delta(x) \quad \varepsilon \to 0^{+} \quad D'$ de elde edilir.

2.Keyfi genelleşmiş fonksiyon sonsuz diferansiyellenebilen fonksiyondur.

3.Diferansiyelleme işleminde sıranın önemi yoktur.

$\forall \check{f} \in D', \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2\check{f}(x)) = \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1\check{f}(x))$

İspat: $\forall \varphi \in D, \forall \check{f} \in D'$ için

$(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2\check{f}(x),\varphi(x))=(-1)^{|\alpha|}(\mathcal{D}_2\check{f}(x),\mathcal{D}_1\varphi(x))=(\check{f}(x),\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(\varphi(x))$

φ , D de sürekli fonksiyon olduğundan $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\,\varphi=\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\varphi$ yazılabilir. Bu nedenle ,

$(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2\check{f}(x),\varphi(x))=(\check{f}(x),\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\varphi(x))=(-1)^{|\alpha|}(\mathcal{D}_1\check{f}(x),\mathcal{D}_2\varphi(x))=(\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1\check{f}(x)),\varphi(x))$

$\Rightarrow \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2\check{f}(x))=\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1\check{f}(x))$ elde edilir.

4. $\forall \check{f} \in D'$, $a(x) \in C^{\infty}(R^{n})$ için Leibniz koşulu sağlanır.

$$\frac{\partial.(a.\check{f})}{\partial.x_1} = a.\frac{\partial \check{f}}{\partial.x_1} + \check{f}.\frac{\partial.a}{\partial.x_1}$$

İspat : $\forall \varphi \in D$ için

$$(\frac{\partial(a\check{f})}{\partial x_1},\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(a\check{f},\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}) = (-1)^{|\alpha|}(\check{f},a\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}) = (-1)^{|\alpha|}(\check{f},\frac{\partial a\varphi}{\partial x_1} - \varphi\frac{\partial a}{\partial x_1})$$

$$= -(\check{f},\frac{\partial a\varphi}{\partial x_1}) + (\check{f},\varphi\frac{\partial a}{\partial x_1}) = (\frac{\partial \check{f}}{\partial x_1},a\varphi) + (\check{f}\frac{\partial a}{\partial x_1},\varphi) = (a\frac{\partial \check{f}}{\partial x_1},\varphi) + (\check{f}\frac{\partial a}{\partial x_1},\varphi)$$

$$= (a\frac{\partial \check{f}}{\partial x_1} + \check{f}\frac{\partial a}{\partial x_1},\varphi)$$

5. $\forall x \in G$ için $\check{f}(x) = 0$ ise $\mathcal{D}^\alpha \check{f} = 0$, $\forall x \in G$ Bu durumda supp $\mathcal{D}^\alpha \check{f} \subset$ supp $\check{f}$

İspat: $\forall\ \varphi \in D(G)$ ise $\mathcal{D}^\alpha \varphi \subset D(G)$ Bu nedenle $(\mathcal{D}^\alpha \check{f}, \varphi) = (-)^{|\alpha|} 1\ (\check{f}, \mathcal{D}^\alpha \varphi) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{D}^\alpha \check{f} = 0, \forall x \in G$

6. $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ serisinin lokal integrallenebilen $u_k(x)$ fonksiyonlarından oluştuğu kabul edilsin ve bu seri, keyfi kompaktda düzgün yakınsak olsun. O halde S(x) ,keyfi defa diferansiyellenebilir ve bulunan seriler D' uzayında yakınsaktırlar.

İspat: $S_p(x) = \sum_{k=1}^{p} u_k(x)$ olsun. Varsayıma göre $\forall r > 0$ için $|x| \leq r$ de

$S_p(x) \rightrightarrows S(x)$, $p \to \infty$

düzgün yakınsaması vardır. Lemma 2.15. e göre

$\check{S}_p(x) \to \check{S}(x) \quad p \to 0^+$

olduğu açıktır. Genel türevin sürekliliğinden, $\mathcal{D}^\alpha \check{S}_p \to \mathcal{D}^\alpha \check{S}$, $p \to \infty$

$$\mathcal{D}^\alpha \check{S}_p = \mathcal{D}^\alpha \sum_{k=1}^{p} \check{u}_k(x) \to \sum_{k=1}^{\infty} D^\alpha \check{u}_k(x) = \mathcal{D}^\alpha \check{S} \quad , D' \text{ de}$$

6. özellikten çıkan sonuç ise şöyledir:

$$\forall\ k\ , |a_k| \leq A|k|^m + B \quad (\text{m, sabitlenmiştir.}) \qquad (2.21)$$

ise bu durumda

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikx} = S^{(m+2)}(x) \qquad (2.22)$$

trigonometrik serisi $D'(R^1)$ de yakınsaktır.

İspat: (2.21) eşitsizliğine göre

$$S(x)=\frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{a_k}{(ik)^{m+2}}.e^{ikx}$$

serisi her bir $K \subset R^1$ kompaktında düzgün yakınsaktır. Gerçekten de

$$|S(x)| \leq \frac{|a_0||x^{m+2}|}{(m+2)!}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|a_k|}{|ik|^{m+2}}.|e^{ikx}| = \frac{|a_0||x^{m+2}|}{(m+2)!}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|a_k|}{|k|^{m+2}}. \leq$$

$$\frac{(A+B)|x|^{m+2}}{(m+2)!}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{A|k|^m+B}{|k|^{m+2}}=\frac{(A+B)|x|^{m+2}}{(m+2)!}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{A}{|k|^2}+\frac{B}{|k|^{m+2}}\right) < c(r)$$

$\forall\ r > 0$, $\forall\ x \in R^1$ $|x| \leq r$ de $S^{(m+2)}(x)$ serisi , S(x) in (m+2). Dereceden türevi olduğundan $D'(R^1)$ de yakınsaktır ve $S^{(m+2)}(x)$, (2.22) eşitliği ile aynıdır.

Genelleşmiş fonksiyonun ilkeli

$n = 1$ olsun. Keyfi sürekli $f(x)$ fonksiyonu $f^{-1}(x)$ ilkeline sahiptir :

$$f^{-1}(x) = \int f(x)dx + c, \quad \left[f^{-1}(x)\right]' = f(x) \text{ dır.}$$

Sürekli f(x) fonksiyonları için doğru olan bu eşitlik, keyfi genelleşmiş fonksiyonun ilkelinin tanımı olarak verilebilir:

Tanım 2.15: $\forall \check{f}, \check{f}^{(-1)} \in D'$ genelleşmiş fonksiyonları

$$(\check{f}^{(-1)}(x), \varphi'(x)) = -(\check{f}(x), \varphi(x)) \tag{2.23}$$

koşulunu sağladıklarında $\check{f}^{-1}$ genelleşmiş fonksiyonuna $\check{f}$ nın ilkeli denir.

(2.23) den görüldüğü gibi $\check{f}^{(-1)}$ tüm φ lerde değil sadece onların türevlerinde tanımlanır. Aşağıdaki teorem $\check{f}^{(-1)}$ yi tüm D ye genişletir öyle ki, $\check{f}^{(-1)}$ D de sürekli ve lineer olsun.

Teorem 2.3. Keyfi genelleşmiş fonksiyon sabit toplam kesinliği ile $\check{f}^{(-1)}$ ilkeline sahiptir ve bu ilkel,

$$(\check{f}^{(-1)}, \varphi) = -(\check{f}, \psi) + (c, \varphi)\ ,\ \varphi \in D \tag{2.24}$$

formülü ile tanımlanır. Burada c keyfi sabit, ψ ise (2.26) eşitliği ile belirlenecek olan temel fonksiyondur.

İspat: Önce $\check{f}$ genelleşmiş fonksiyonunun $\check{f}^{(-1)}$ ilkelinin olduğu kabul edilir.

$\forall \varphi \in D(R')$ için

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \omega_\varepsilon(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \qquad \forall \varphi \in D(R^1) \tag{2.25}$$

şeklinde yazılabilir. Burada ,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\varphi(t) - \omega_\varepsilon(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \right] dt \tag{2.26}$$

(2.25).eşitliğine $\overset{\vee}{f}^{(-1)}$ fonksiyoneli ile tesir edilirse,

$$(\overset{\vee}{f}^{(-1)},\varphi)=(\overset{\vee}{f}^{(-1)},\psi')+(\overset{\vee}{f}^{(-1)},\omega_\varepsilon)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi$$

(2.23.)eşitliği kullanılarak,

$$(\overset{\vee}{f}^{(-1)},\varphi)=-(\check{f},\psi)+c\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi \quad , \quad \forall\,\varphi\in D \tag{2.27}$$

bulunur. Burada $c=(\overset{\vee}{f}^{(-1)},\omega_\varepsilon)$ dır. Böylece eğer $\check{f}$ nın ilkeli varsa bu ilkel, (2.24) formülü ile belirlenir.

Tersinin ispatı için (2.26) ve (2.27) ile belirlenmiş $\overset{\vee}{f}^{(-1)}$ fonksiyonelinin $\check{f}$ nın ilkeli olduğu gösterilmelidir. Önce $\overset{\vee}{f}^{(-1)}$ fonksiyonelinin D de lineer ve sürekliliği kanıtlansın. Lineerliği açıktır. Sürekliliğinin ispatı için sıfırda sürekiliğinin gösterilmesi yeterlidir. $\{\varphi_k\}\subset D$,sıfıra yaklaşan dizi olsun. $\exists\, r>0$,$|x|>r$ için $\varphi_k(x)=0$ α için $\varphi_k^{(\alpha)}\rightrightarrows 0$, $k\to\infty$, olduğu bilinmektedir. Bu durumda $|x|>\max(r,\varepsilon)$ ise

$$\psi_k(x)=\int_{-\infty}^{x}\left[\varphi_k(t)-\omega_\varepsilon(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_k(\xi)d\xi\right]dt=0$$

$\forall\,\alpha$ için $\varphi_k^{(\alpha)}\rightrightarrows 0$, $k\to\infty$ olduğundan $\psi_k^{(\alpha)}\rightrightarrows 0$, $k\to\infty$ (D de) dır. Bundan dolayı ve $\check{f}$ D de sürekli olduğu için

$$(\overset{\vee}{f}^{(-1)},\varphi_k)=-(\check{f},\psi_k)+c\int\varphi_k(\xi)d\xi\to 0\,, \qquad k\to\infty$$

elde edilir. Bu nedenle $\overset{\vee}{f}^{(-1)}\in D'$ dır.

(2.26) eşitliğinde φ yerine φ' yazılır ve $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(\xi)d\xi=0$, $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(t)dt=\varphi(x)$ olduğu gözönüne alınırsa, $\varphi=\psi$ bulunur. Bu nedenle

$(\check{f}^{(-1)},\varphi)=-(\check{f}^{(-1)},\varphi)$ dır.

O halde (2.24) ile tanımlanan $\check{f}^{(-1)}$, $\check{f}$ fonksiyonelinin ilkelidir.

Sonuç 2.3. $u'=\check{f}$, $\check{f}\in D'(R^1)$ diferansiyel denkleminin çözümü vardır ve $u=\check{f}^{(-1)}+c$ şeklindedir. Burada $\check{f}^{(-1)}$ herhangi bir ilkel ve c ,keyfi sabittir.

Özel durumda eğer $\check{f}$ sürekli ise, $u'=\check{f}$ denkleminin D' den olan herhahgi bir çözümü klasiktir. Örneğin $u'=0$ denkleminin D' de genel çözümü keyfi sabittir. Benzer olarak $\check{f}$ genelleşmiş fonksiyonunun n. dereceden ilkeli olan $\check{f}^{(-n)}$ fonkiyonunu da tanımlamak mümkündür: $((\check{f}^{(-n)})^{(n)}=\check{f}$ gibi) İspatlanan teorem $\check{f}^{(-k)}$ için yazılırsa,

$$\left[\check{f}^{(-1)}(x)\right]'=\check{f}(x),\ldots,\left[\check{f}^{(-n)}(x)\right]'=\check{f}(x)$$

bulunur. Bu nedenle $\check{f}^{(-n)}$ vardır ve (n-1) dereceli polinom toplamı kesinliği ile tektir.

Örnek 2.3.: f(x) öyle bir fonksiyon olsun ki, $f\in C^1(x\le x_0)$, , ve $f\in C^1(x\ge x_0)$ olduğu kabul edilsin. O halde

$$f'(x)=\{f'(x)\}+[f]_{x_0}\delta(x-x_0) \tag{2.28}$$

olduğu ispatlanmalıdır. Burada $[f]_{x_0}$, f(x) fonksiyonunun x_0 noktasındaki sıçrayışıdır. $[f]_{x_0}=f(x_0+0)-f(x_0-0)$, $\forall\ \varphi\in D$ ise bu durumda,

$$(f',\varphi)=-(f,\psi')=-\int_{R^1} f(x).\varphi'(x)dx=-\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx-\int_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

$$=[-f(x_0-0)\varphi(x_0)+f(x_0+0)\varphi(x_0)]+\int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx+\int_{x_0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

Burada

$$f(x_0-0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \quad \text{ve} \quad f(x_0+0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) \quad \text{dır.}$$

$$(f',\varphi)=([f]_{x_0}\,\delta(x-x_0),\,\varphi(x_0))+\int_{R^1}\{f'(x)\}\varphi(x)dx=([f]_{x_0}\,\delta(x-x_0)+\{f'(x_0)\}\,,\varphi(x_0))$$

Özel halde θ Hevisayd fonksiyonu ise yani

$$\theta(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

ise, o halde $x_0=0$ $[\theta]_o=0$, $\{\theta'\}=0$ dır. Bu nedenle $\theta'(x)=\delta(x)$

2.10.Genelleşmiş Fonksiyonların Düz Çarpımı

Tanım 2.16: $f(x)\in L_{loc}(R^n)$,$g(y)\in L_{loc}(R^m)$ olduğu kabul edilsin. Fubini teoremine göre $f(x).g(y)\in L_{loc}(R^{n+m})$ olduğu açıktır. Bu nedenle $f(x)g(y)$, $D(R^{n+m})$ de aşağıdaki formülle regüler genelleşmiş fonksiyon belirler.

$$(\check{f}(x)\check{g}(y),\varphi(x,y))=\int_{R^{n+m}} f(x)g(y)\varphi(x,y)dxdy=\int_{R^n} f(x)\int_{R^m} g(y)\varphi(x,y)dxdy, \quad \text{yani}$$

$$(\check{f}(x)\check{g}(y),\varphi(x,y))=\int_{R^n} f(x)((\check{g}(y),\varphi(x,y))dx=(\check{f}(x),(\check{g}(y),\varphi(x,y))) \qquad (2.29)$$

Öte yandan,

$(\check{g}(y)\check{f}(x),\varphi(x,y))=\int_{R^{n+m}} g(y)f(x)\varphi(x,y)dydx=\int_{R^m} g(y)\int_{R^n} f(x)\varphi(x,y)dxdy$, yani

$$(\check{g}(y)\check{f}(x),\varphi(x,y))=\int_{R^m} g(x)((\check{f}(y),\varphi(x,y))dy=(\check{g}(y)(\check{f}(x),\varphi(x,y))) \qquad (2.30)$$

(2.29) eşitliği, $\check{f}(x)\in D'(R^n)$ ve $\check{g}(y)\in D'(R^m)$ genelleşmiş fonksiyonlarının düz çarpımı olarak tanımlanır.

$$(\check{f}(x)\check{g}(y),\varphi(x,y))=(\check{f}(x),(\check{g}(y),\varphi(x,y))),\ \forall\ \varphi(x,y)\in D(R^{n+m}) \qquad (2.31)$$

$\check{f}(x)\check{g}(y)\in D'(R^{n+m})$ olduğunu ispatlamak için, önce aşağıdaki lemma verilmelidir.

Lemma 2.22. $\forall\ \check{g}(y)\in D'(R^m)$ ve $\forall\ \varphi(x,y)\in D(R^{n+m})$ için

$\psi(x)=(\check{g}(y),\varphi(x,y))\in D(R^n)$ öyle ki, $\forall\alpha$ için

$$D^\alpha\psi(x)=(\check{g}(y),D_x^\alpha\varphi(x,y)) \qquad (2.32)$$

$\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$, ;$D(R^{n+m})$ de $\Rightarrow \psi_k(x)\to 0$, $k\to\infty$ $D(R^n)$ de

Lemma 2.22 ye göre (2.31) eşitliğinin sağ tarafı $\forall$ $\check{f}(x)$, $\check{g}(y)$ genelleşmiş fonksiyonları için belirlenmiş olur. Yani (2.31) eşitliği, $D(R^{n+m})$ de bir fonksiyonel belirler. Bunun dışında $\check{f}(x)$ ve $\check{g}(y)$ lineer olduklarından, (2.30) eşitliği de $D(R^{n+m})$ de lineer fonksiyonel belirler. $\forall$ $\{\varphi_k\}\subset D(R^{n+m})$ de yakınsak bir dizi olmak üzere lemma 2.22 ye göre

$\psi_k(x)=(\check{g}(y),\varphi_k(x,y))\to 0$ $k\to\infty$ $D(R^n)$ de olduğundan,

$(\check{f}(x),\psi_k(x))\to 0$, $k\to\infty$ $(D(R^{n+m})$ de $)$

Bu nedenle $\check{f}(x)\check{g}(y)$ $D(R^{n+m})$ de süreklidir. O halde $\check{f}(x)\check{g}(y) \in D'(R^{n+m})$

Lemma 2.23. $\forall \check{g} \in D'(R_y^m)$ ve $\varphi \in D(R^{n+m})$ için

a) $\psi(x) = \left(\check{g}(y), \varphi(x,y)\right) \in D(R_x^n)$,

öyle ki, $\forall \alpha$ için

$$\textbf{b)}\ \mathcal{D}^{\alpha}\ \psi(x) = (\check{g}(y),\ \mathcal{D}_x^{\alpha}\ \varphi(x,y)) \tag{2.33}$$

Bundan başka, $\varphi_k \to 0, k \to \infty$, ($D(R^{n+m})$ de) olduğunda

$\psi_k(x) = (\check{g}(y), \varphi_k(x,y)) \to 0,\ k \to \infty$ ($D(R^n)$ de) dır.

İspat: Her bir belirtilmiş $x \in R_x^n$ için $\varphi(x,y) \in (R_y^m)$ olduğundan $\psi(x), R_x^n$'de tanımlanmıştır. $\psi(x)$'in tüm R_x^n uzayında sürekliliği ispatlanmalıdır:

$x \in R_x^n$ noktası belirtilir ve $x_k \to x,\ k \to \infty$ olduğu kabul edilirse,

$$\varphi(x_k, y) \to \varphi(x,y), \quad k \to \infty \qquad (D(R_y^m)\text{ de}) \tag{2.34}$$

Bunun nedeni ise, $\varphi \in D(R^{n+m})$ ise $\varphi(x_k, y)\left(\in D(R_y^m)\right)$ fonksiyonlarının taşıyıcılarının k'dan bağımsız olarak sınırlı olmalarıdır ve $\forall \beta$ için

$$\mathcal{D}_y^{\beta}\varphi(x_k, y) \rightrightarrows \mathcal{D}_y^{\beta}\varphi(x,y), \qquad k \to \infty, \quad (R_y^m\text{ de})$$

$\check{g}(y)$ fonksiyoneli $D(R_y^m)$'de sürekli olduğundan (2.34) eşitliğinden

$$\psi(x_k) = \left(\check{g}(y),\ \varphi(x_k, y)\right) \to \left(\check{g}(y),\ \varphi(x,y)\right) = \psi(x),\ k \to \infty$$

elde edilir. Bu ise, $\psi(x)$ fonksiyonunun sürekliliğinin ispatıdır. (2.33) formülünün ispatı:

$x \in R_x^n$ belirtilmiş olsun. $h_i = (0,\dots,h,\dots,0)$ ile gösterilir. O halde

$$\chi_h^{(i)}(y) = \frac{1}{h}\left[\varphi(x+h_i,y) - \varphi(x,y)\right] \rightrightarrows \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_i}, \quad h \to 0, \ (D(R_y^m) \text{ de}) \qquad (2.35)$$

Bunun sebebi ise, $\varphi \in D(R^{n+m})$ olduğundan $\chi_h^{(i)}$ $(\in D(R_y^m))$ fonksiyonlarının taşıyıcılarının h 'dan bağımsız olarak sınırlı olmalarıdır ve $\forall\beta$ için

$$\mathcal{D}^\beta \chi_h^{(i)}(y) = \frac{1}{h}[\mathcal{D}_y^\beta \varphi(x+h_i,y) - \mathcal{D}_y^\beta \varphi(x,y)] \rightrightarrows \mathcal{D}_y^\beta \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_i}, \quad h \to 0, \ (R_y^m)$$

$\check{g} \in D'(R_y^m)$ olduğundan ve (2.35) eşitliğinden

$$\frac{\psi(x+h_i) - \psi(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\left(\check{g}(y), \varphi(x+h_i)\right) - \left(\check{g}(y), \varphi(x,y)\right)\right] =$$

$$= \left(\check{g}(y), \frac{\varphi(x_i+h) - \varphi(x,y)}{h}\right) = \left(\check{g}, \chi_h^{(i)}\right) \to \left(\check{g}(y), \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_i}\right), \quad h \to 0$$

Bu ise (2.33) formülünün $\alpha = (0,\dots,1,\dots,0)$ halinde doğru olduğunu gösterir:

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} = \left(\check{g}(y), \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_i}\right), \quad i = \overline{1,n}$$

Benzer yolla (2.33) formülünün keyfi α için de doğru olduğunu göstermek mümkündür.

$\varphi \in D(R^{n+m})$ olduğundan $\forall \alpha$ için $\mathcal{D}_x^{\alpha} \varphi \in D(R^{n+m})$ 'dır. Buradan ise (2.33)'e göre, $\mathcal{D}^{\alpha} \psi(x)$ fonksiyonunun da $\forall \alpha$ için R_x^n uzayında sürekliliği bulunur. Böylece, $\psi \in C^{\infty}(R_x^n)$ 'dır. Ayrıca $\psi(x), R_x^n$ 'de finittir. Bunun nedeni ise,

$|x| > r \Rightarrow \varphi(x,y) = 0$

dolayısıyla

$$\psi(x) = \left(\check{g}(y), \varphi(x,y)\right) = 0, \quad |x| > r$$

olmasıdır. Bu nedenle $\psi \in D(R_x^n)$ 'dır. Lemmanın sonuncu iddiası ispatlanır:

$\varphi_k(x,y) \to 0$, $k \to \infty$ $(D(R^{n+m})$ de) olsun. Bu halde $\psi_k(x) \to 0$ k,∞ $D(R_x^n)$ 'de olduğu ispatlanmalıdır. $\varphi_k(x,y)$ fonksiyonlarının taşıyıcıları R^{n+m} 'de sınırlı olduklarından (k 'dan bağımsız), $\psi_k(x)$ 'lerin de taşıyıcıları R^n 'de sınırlıdırlar (k 'dan bağımsız). Bundan dolayı ancak

$\mathcal{D}^{\alpha} \psi_k(x) \rightrightarrows 0, k \to \infty$, (R_x^n) de

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bunun için, aksi kabul edilir. O halde ,

$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \exists \alpha_0 \quad$ ve $\quad \exists \{x_k\}$,

$\left|D^{\alpha_0} \psi_k(x_k)\right| \geq \varepsilon_0, \qquad k = 1,2,\ldots$

ψ_k 'ların taşıyıcıları sınırlı olduklarından (k 'dan bağımsız) (2.34), $\{x_k\}$ dizisi de R_x^n 'de sınırlıdır. Bundan dolayı, Bolzeno-Weierstrass teoremine göre,

$\exists \{x_{k_i}\}, \exists x_0 \in R_x^n, \quad x_{k_i} \to x_0, \quad i \to \infty$

Bu durumda ise,

$$D_x^{\alpha_0} \varphi_{k_i}(x_{k_i}, y) \to 0, \quad i \to \infty, \quad (D(R_y^m) \text{ de})$$

elde edilir. Buradan ise, $\check{g} \in D'(R_y^m)$ olduğundan ve (2.33) formülünden

$$D^{\alpha_0}\psi_{k_i}(x_{k_i}) = \left(\check{g}(y),\, D_x^{\alpha_0}\varphi_{k_i}(x_{k_i}, y)\right) \to 0, \qquad i \to \infty$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik, (2.35)'e zıttır. Yani $\exists\varepsilon_0 > 0$, $\exists\alpha_0$ ve $\exists\{x_k\}$

$$\left|D^{\alpha_0}\psi_k(x_k)\right| \le \varepsilon_0, \qquad k = 1,2,\dots\ .$$

Düz çarpımın diğer özellikleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

$\check{f}(x) \in D'(R^n)$ ve $\check{g}(y) \in D'(R^m)$ olsun. $\check{f}(x)\check{g}(y)$ düz çarpımı ile birlikte $\check{g}(y)\check{f}(x)$ düz çarpımını da tanımlamak mümkündür: $\forall\ \varphi(x,y) \in D(R^{n+m})$ için

$$(\check{g}(y)\check{f}(x), \varphi(x,y)) = (\check{g}(y), (\check{f}(x), \varphi(x,y))) \tag{2.36}$$

1. Düz çarpım işlemi değişmelidir (komutatif) .

$$\check{f}(x)\check{g}(y) = \check{g}(y)\check{f}(x) \tag{2.37}$$

Düz çarpımın komutatifliğinin ispatı için önce bu komutatiflik,

$$\varphi_k(x,y) = \sum_{l=1}^{k} u_l(x)v_l(y) \quad , \quad u_l(x) \in D(R^n),\ v_l(y) \in D(R^m) \tag{2.38}$$

fonksiyonu için gösterilir.

$$(\check{f}(x)\check{g}(y), \varphi_k(x,y)) = (\check{f}(x)\check{g}(y), \sum_{l=1}^{k} u_l(x)v_l(y)) =$$

$$= (\check{f}(x), (\check{g}(y), \sum_{l=1}^{k} u_l(x)v_l(y))) = (\check{f}(x), \sum_{l=1}^{k} u_l(x)(\check{g}(y), v_l(y))) =$$

$$=\sum_{l=1}^{k}(\check{g}(y),v_l(y))(\check{f}(x),u_l(x))=(\check{g}(y),\sum_{l=1}^{k}v_l(y)(\check{f}(x),u_l(x)))=$$

$$=(\check{g}(y)\check{f}(x),\sum_{l=1}^{k}u_l(x)v_l(y))=(\check{g}(y)\check{f}(x),\sum_{l=1}^{k}u_l(x)v_l(y) \Rightarrow \check{f}(x)\check{g}(y)=\check{g}(y)\check{f}(x)$$

O halde (2.37) eşitliği (2.38) şeklinde olan temel fonksiyonlar için doğrudur.

Lemma 2.24. $\forall\ \varphi \in D(R^{n+m})$ için (2.38) şeklinde olan öyle $\varphi_k(x,y)$ $(k=1,2,3,...)$ temel fonksiyonlar dizisi vardır ki, $\varphi_k(x,y)$ dizisi $D(R^{n+m})$ de $(k\to\infty)$ $\varphi(x,y)$ fonksiyonuna yakınsaktır.

$\forall\ \varphi \in D(R^{n+m})$ olsun. Bu lemmaya göre, (2.38) eşitliğini sağlayan öyle bir $\{\varphi_k\}\in D(R^{n+m})$ vardır ki ($k\to\infty$ için) bu dizi φ fonksiyonuna yakınsaktır.

$\check{f}(x)\check{g}(y)$ ve $\check{g}(y)\check{f}(x)$ düz çarpımlarının $D(R^{n+m})$ de sürekliliği ve (2.37) nin (2.38) şeklindeki φ_k fonksiyonlarında doğruluğu kullanılarak,(2.37) eşitliğinin tüm $D(R^{n+m})$ de doğruluğu bulunur.

$$(\check{f}(x)\check{g}(y),\varphi(x,y))=\lim_{k\to\infty}(\check{f}(x)\check{g}(y),\varphi_k(x,y))=\lim_{k\to\infty}(\check{g}(y)\check{f}(x),$$

$$\varphi_k(x,y))=(\check{g}(y)\check{f}(x),\varphi(x,y))\Rightarrow\check{f}(x)\check{g}(y)=\check{g}(y)\check{f}(x)$$

2. Düz çarpım işlemi $\check{f}$ ya göre $D'(R^n)$ den $D'(R^{n+m})$ ye, $\check{g}$ ya göre $D'(R^m)$ den $D'(R^{n+m})$ ye lineer ve süreklidir.

İspat: $\forall\ \check{f},\check{f}_1 \in D'(R^n)$, $\check{g}\in D'(R^m)$, $\forall\ \varphi \in D(R^{n+m})$, $\forall\lambda,\mu \in C$ için

$$((\lambda\check{f}(x)+\mu\ \check{f}_1(x))\check{g}(y),\varphi(x,y))=(\lambda(\check{f}(x)\check{g}(y))+\mu(\check{f}_1(x)\check{g}(y)),\varphi(x,y))$$

olduğundan düz çarpım işlemi $\check{f}$ ya göre $D'(R^n)$ den $D'(R^{n+m})$ ye lineerdir. Düz çarpımın $\check{f}$ ya göre sürekliliğinin ispatı için $\forall\ \{\check{f}_k\}\subset D'(R^n)$ dizisinin yakınsak olduğu kabul edilsin ve $\forall\ \varphi \in D(R^{n+m})$ olsun. Lemma 2.22 ye göre $\psi(x)=(\check{g}(y),\varphi(x,y))\in D(R^n)$ dır. (2.31) eşitliği kullanılarak $D'(R^{n+m})$ de

$$(\check{f}_k(x)\check{g}(y),\varphi(x,y))=(\check{f}_k(x),(\check{g}(y),\varphi(x,y)))=(\check{f}_k(x),\psi(x))\to 0\ ,\ k\to\infty$$

bulunur. O halde $\check{f}(x)\check{g}(y)$ düz çarpımı $\check{f}$ ya göre $D'(R^n)$ den $D'(R^{n+m})$ ye lineer ve sürekli fonksiyoneldir.

Düz çarpımın $\check{g}$ fonksiyonuna göre lineer ve sürekliliği de aynı şekilde ispatlanır.

3.Düz çarpım işlemi birleşmelidir (asosyatif).

Eğer $\check{f}\in D'(R^n)$, $\check{g}\in D'(R^m)$ ve $\check{h}\in D'(R^k)$ ise,

$$\check{f}(x)[\check{g}(y)\check{h}(x)]=[\check{f}(x)\check{g}(y)]\check{h}(x)$$

İspat: $\varphi(x,y,z)\in D(R^{n+m+k})$ ise

$$(\check{f}(x)[\check{g}(y)\check{h}(z)],\varphi(x,y,z))=(\check{f}(x),(\check{g}(y)\check{h}(z),\varphi(x,y,z))=$$

$$(\check{f}(x),(\check{g}(y),(\check{h}(z),\varphi(x,y,z))))=(\check{f}(x)\check{g}(y),(\check{h}(z),\varphi(x,y,z)))=$$

$$([\check{f}(x)\check{g}(y)]\check{h}(z),\varphi(x,y,z))$$

4.Düzçarpımın diferansiyellenmesi :

$$D_x^{\alpha}[\check{f}(x)\check{g}(y)]=D^{\alpha}\check{f}(x)\check{g}(y) \tag{2.39}$$

olduğu ispatlanmalıdır.

$\forall\varphi\in D(R^{n+m})$ ve, $\forall\check{f}\in D'(R^n)$, $\check{g}(y)\in D'(R^m)$ için

$(D_x^\alpha[\check{f}(x)\check{g}(y)],\varphi(x,y))=(-1)^{|\alpha|}(\check{f}(x)\check{g}(y),D_x^\alpha\varphi(x,y))=$

$(\check{g}(y),(D_x^\alpha\check{f}(x),\varphi(x,y))=(D_x^\alpha\check{f}(x)\check{g}(y),\varphi(x,y))$

5. Düz çarpımın çarpımı : Düz çarpımın $a(x)\in C^\infty(R^n)$ fonksiyonu ile çarpımı

$$a(x)[\check{f}(x)\check{g}(y)]=a(x)\check{f}(x)\check{g}(y) \tag{2.40}$$

eşitliği ile tanımlanır. $\varphi(x,y)\in D(R^{n+m})$ ise bu durumda

$(a(x)[\check{f}(x)\check{g}(y)],\varphi(x,y))=(\check{f}(x)\check{g}(y),a(x)\varphi(x,y))=(\check{f}(x),(\check{g}(y),a(x)\varphi(x,y))$

$=(\check{f}(x),a(x)(\check{g}(y),\varphi(x,y))=(a(x)\check{f}(x),(\check{g}(y),\varphi(x,y)))=(a(x)\check{f}(x)\check{g}(y),\varphi(x,y))$

Son eşitlikten ise (2.40) elde edilir.

6.Düz çarpımın kaydırılması: $\forall\ \check{f}(x)\in D'(R^n)$ ve $\check{g}(y)\in D'(R^m)$ için

$$(\check{f}\check{g})(x+h,y)=\check{f}(x+h)\check{g}(y) \tag{2.41}$$

Gerçekten de eğer $\varphi\in D(R^{n+m})$ ise

$((\check{f}\check{g})(x+h,y),\varphi(x,y))=(\check{f}(x)\check{g}(y),\varphi(x-h,y))=(\check{g}(y),(\check{f}(x)\varphi(x-h,y))$

$=(\check{g}(y),(\check{f}(x+h),\varphi(x,y)))=(\check{g}(y)\check{f}(x+h),\varphi(x,y))\Rightarrow(\check{f}\check{g})(x+h,y)=\check{f}(x+h)\check{g}(y)$

Tanım 2.17. $\forall \check{f}(x) \in D'(R^n)$, $\check{1}(y) \in D'(R^m)$ için $\check{f}(x)\check{1}(y)$ biçiminde olan fonksiyona y den bağımsız genelleşmiş fonksiyon denir.

Burada $\check{1}(y)$, $1(y): R^m \to 1$ lokal integrallenebilen fonksiyonun doğurduğu regüler genelleşmiş fonksiyondur. Bu fonksiyon, şu kurala bağımlıdır :

$\varphi \in D(R^{n+m})$ ve $\forall \check{f} \in D'(R^n)$ için

$$(\check{f}(x)\check{1}(y),\varphi(x,y))=(\check{f}(x),(\check{1}(y),\varphi(x,y))=(\check{f}(x),\int \varphi(x,y)dy),$$

$$(\check{f}(x)\check{1}(y),\varphi(x,y))=(\check{1}(y)\check{f}(x),\varphi(x,y))=((\check{1}(y),(\check{f}(x),\varphi(x,y)))=\int (\check{f}(x),\varphi(x,y))dy$$

$$\Rightarrow(\check{f}(x)\check{1}(y),\varphi(x,y))=(\check{f}(x),\int \varphi(x,y)dy)=\int (\check{f}(x),\varphi(x,y))dy \qquad (2.42)$$

2.11..Genelleşmiş Fonksiyonların Bükülmesi

$f(x), g(x) \in L_{loc}(R^n)$ öyle fonksiyonlar olsunlar ki,

$$h(x)=\int_{R^n} |g(y)f(x-y)dy|$$

olarak belirlenen h(x) fonksiyonu R^n uzayında bir K kompaktında lokal integrallenebilen olsun. Bu durumda

$$(f*g)(x)=\int_{R_y^n} f(y)g(x-y)dy$$

fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının bükülmesi denir.

$z = x - y$ olsun.

$$dy = \left|\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)\right| dz \text{ ve } \left|\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)\right| = 1$$

olduğundan, dy=dz bulunur. Bu nedenle

$$\int_{R^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{R^n} f(x-z)g(z)dz = (g * f)(x)$$

Bu ise, bükülmenin simetrikliği demektir:

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

f*g ve $|f| * |g| = h$ bükülmeleri aynı zamanda vardırlar ve $|(f * g)(x)| \le h(x)$ hemen hemen her yerde (R^n de) . $h(x) \in L_{loc}(R^n)$ olduğu için $(f*g)(x) \in L_{loc}(R^n)$ dır. f*g, regüler genelleşmiş fonksiyon doğurur : Fubini teoremine göre, $\forall\ \varphi \in D(R^n)$ için

$$(f \overset{\vee}{*} g, \varphi) = \int_{\xi} (f * g)(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_{\xi} (\int_{y} g(y)f(\xi - y)dy)\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\xi} (\int_{y} g(y)f(\xi - y))\varphi(\xi)dyd\xi = \int_{y} g(y)(\int_{\xi} f(\xi - y)\varphi(\xi)d\xi)dy$$

Sonuncu integralde $x = \xi - y$ dönüşümü kullanılır.

$$(f \overset{\vee}{*} g, \varphi) = \int_{R^{2n}} f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy, \varphi \in D(R^n) \qquad (2.43)$$

h(x) fonksiyonunun lokal integrallenebileceği üç hal incelenirse,

1.Hal: $f \in L_{loc}(R^n)$, g(y) finit fonksiyon ve $\sup pg(y) \subset U_{r_1}(y)$ olsun.

$$\int_{U_r} h(x) = \int_{U_r}[\int_{R^n}|g(y)f(x-y)dy|]dx =$$

$$= \int_{U_r}[\int_{U_{r_1}}|g(y)f(x-y)dy]dx| = \int_{U_{r_1}}|g(y)|[\int_{U_r}|f(x-y)|dx]dy$$

$$x - y = \xi \Rightarrow dx = d\xi, x \in U_r, y \in U_{r_1} \Rightarrow \xi \in U_{r+r_1} \Rightarrow$$

$$\int_{U_r(x)} h(x)dx = \int_{U_{r_1}(y)} |g(y)| \int_{U_{r+r_1}(\xi)}|f(\xi)d\xi|dy = \int_{U_{r_1}(y)} |g(y)|dy \int_{U_{r+r_1}(\xi)}|f(\xi)d\xi|$$

g(y) sınırlı ve f,lokal integrallenebilen olduğundan $\exists\, M_1 > 0$,

$$\int_{U_{r_1}(y)}|g(y)|dy < M_1 \quad \text{ve} \quad \int_{U_{r+r_1}(\xi)}|f(\xi)|d\xi < \infty \;\Rightarrow\; \int_{U_r(x)} h(x)dx < \infty \;\Rightarrow\; h(x) \in L_{loc}(R^n)$$

2. Hal: n=1 ve $x < 0$ için $f(x) = g(x) = 0 \Rightarrow$

$$\int_{-R}^{R} h(x)dx = \int_{-R}^{R}[\int_{R_y^n}|g(y)f(x-y)dy|dx = \int_0^R[\int_0^x|g(y)||f(x-y)|dy]dx =$$

$$= \int_0^R[\int_y^x|g(y)||f(x-y)|dy]dx = \int_0^R|g(y)|[\int_y^R|f(x-y)|dx]dy =$$

$$= \int_0^R|g(y)|[\int_0^R|f(\xi)|d\xi]dy = \int_0^R|g(y)|dy\int_0^R|f(\xi)|d\xi < \infty$$

$\Rightarrow h(x) \in L_{loc}(R^n)$ dır.

3.Hal: f(x), g(y) $\in$ $L(R^n)$ olsun. Burada $L(R^n)$, R^n de integrallenebilen fonksiyonlar uzayıdır.

$$\int_{R_x^n} h(x)dx = \int_{R_x^n}[\int_{R_y^n}|g(y)f(x-y)|dy]dx = \int_{R_y^n}|g(y)|\int_{R_x^n}|f(x-y)|dxdy = \int_{R_y^n}|g(y)|\int_{R_\xi^n}|f(\xi)|d\xi dy$$

$$= \int_{R_y^n}|g(y)|dy\int_{R_\xi^n}|f(\xi)|d\xi < \infty \Rightarrow h(x) \in L_{loc}(R^n)$$

$$\int_{R_x^n} h(x)dx = \int_{R_x^n}[\int_{R_y^n}|g(y)f(x-y)|dy]dx = \int_{R_y^n}|g(y)|\int_{R_x^n}|f(x-y)|dxdy = \int_{R_y^n}|g(y)|\int_{R_\xi^n}|f(\xi)|d\xi dy$$

$$= \int_{R_y^n}|g(y)|dy\int_{R_\xi^n}|f(\xi)|d\xi < \infty \Rightarrow h(x) \in L_{loc}(R^n)$$

Tanım 2.18. $\{\eta_k\} \subset D(R^n)$, (k=1,2,...) aşağıdaki koşulları sağladığında R^n de 1 e yakınsayan bir dizidir denir. Öyle ki,

1) $\forall M \subset R^n$ kompaktı için $\exists n \in N$, $\forall k \geq n$, $\forall x \in M$ için $\eta_k(x)=1$;

2) $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, $\exists c_\alpha > 0$, $\forall k, \forall x \in R^n$ için

$$|D^\alpha \eta_k(x)| \leq c_\alpha$$

Örnek2.4.: $\eta(x) \in D(R^n)$, $\eta(x) = 1$, $x \in U_1$ olsun. O halde

$$\eta_k(x) = \eta(\frac{x}{k}) \ , \ k = 1,2,\ldots$$

eşitliği ile belirlenen $\{\eta_k(x)\} \subset D(R^n)$ dizisi R^n uzayında 1 e yakınsayacaktır.

Lemma 2.25. $\forall f(x)$, $g(y) \in L(R^n)$, $\forall \varphi\ (x+y) \in D(R^n)$ için (2.43).formülü,

$$(f \overset{\vee}{*} g, \varphi) = \lim_{k\to\infty}(\overset{\vee}{f}(x)\overset{\vee}{g}(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) \tag{2.44}$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Burada $\eta_k(x,y) \in D(R^{2n})$ (k=1,2,3,...) , R^{2n} de 1 e yakınsayan keyfi dizidir.

İspat: $\eta_k(x,y)$ dizisinin özelliğine göre $\forall k$ için $\eta_k(x,y) < c_0$ dır.

$$|f(x)g(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y)| \leq c_0|f(x)g(y)\varphi(x+y)| \in L(R^{2n})$$

Bunun dışında R^{2n} de, hemen hemen her yerde

$$f(x)g(y)\varphi(x+y)\,\eta_k(x,y)\to f(x)g(y)\varphi(x+y),\ k\to\infty$$

olduğu açıktır. Lebesgue teoremine göre,

$$\int_{R^{2n}} f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy = \lim_{k\to\infty}\int_{R^{2n}} f(x)g(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y)dxdy$$

bulunur. (2.43) ve (2.44) eşitlikleri kullanılarak, $\forall \check{f},\check{g}\in D'(R^n)$ için bükülmenin tanımı verilir:

$\check{f}$ ve $\check{g}$ öyle genelleşmiş fonksiyonlar olsunlar ki, onların düz çarpımı $D(R^n)$ den olan keyfi $\varphi(x+y)$ şeklindeki fonksiyonlara aşağıdaki şekilde genişletilebilir:

$$(\check{f}(x)\check{g}(y),\varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty}(\check{f}(x)\check{g}(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y))$$

vardır ve bu limit $\{\eta_k\}$ dizisine bağlı değildir. Burada $\forall k\ \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\in D(R^{2n})$

Tanım 2.19: $\check{f}*\check{g}$ bükülmesi, $\forall\ \varphi\in D(R^n)$ için

$$(\check{f}*\check{g},\varphi)=(\check{f}(x)\check{g}(y),\varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty}(\check{f}(x)\check{g}(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)) \tag{2.45}$$

fonksiyoneline denir.

Lemma 2.26. $\forall\check{f}(x),\check{g}(y)\in D'(R^n)$, $\forall\varphi\in D(R^n)$ için $\check{f}*\check{g}\in D'(R^n)$ dır.

İspat: $\check{f}*\check{g}:\ D'(R^n)\to C$ ile tanımlanır.

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(R^n)$ $\forall \lambda, \mu \in C$ için $\check{f} * \check{g}$ bükülmesini lineerliği açıktır. Süreliliğinin ispatı için sıfirda sürekliliğinin gösterilmesi yeterlidir.

$\{\varphi_\nu\}$, $D(R^n)$ de $(\nu \to \infty)$ sıfira yakınsayan bir dizi olsun. Bu durumda $\forall k_0 \in N$ için

$\eta_{k_0}(x,y)\varphi_\nu(x+y) \to 0$, $\nu \to \infty$ $(D(R^{2n})$ de)

$\check{f}(x)\check{g}(y) \in D'(R^{2n})$ olduğundan

$(\check{f}(x)\check{g}(y), \eta_{k_0}(x,y)\varphi_\nu(x+y)) \to 0$, $\nu \to \infty$, $D'(R^n)$ de

Bu nedenle $\check{f} * \check{g}$,$D(R^n)$ de sürekli yani $\check{f} * \check{g} \in \varphi(x+y) \in D(R^n)$ dır.

Not 2.2. (2.45) eşitliğinin sağ tarafi keyfi $\check{f}, \check{g}$ genelleşmiş fonksiyonları için belirlenmemiştir. Dolayısıyla bükülme her zaman yoktur.

Örnek2.4: $\forall \check{f} \in D'(R^n)$ için $\check{f} * \delta$ vardır ve $\check{f} * \delta = \check{f}$ dır.

$\check{f} * \delta = \delta * \check{f} = \check{f}$

İspat. $\forall \varphi(x+y) \in D(R^n)$ ve $\{\eta_k\} \subset D(R^{2n})$, R^{2n} de $k \to \infty$ için 1 e yakınsayan dizi olsun. Bu durumda $\eta_k(x,y)\varphi(x) \to \varphi(x)$, $k \to \infty$, $D(R^n)$ de olduğu açıktır. Düz çarpımın tanımı da kullanılarak,

$$(\check{f} * \delta, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (\check{f}(x)\delta(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (\check{f}(x),(\delta(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y))$$

$$= (\check{f}(x), \lim_{k\to\infty} (\delta(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (\check{f}(x), \lim_{k\to\infty} (\eta_k(x,0)\varphi(x+0)) = (\check{f}(x), \varphi(x))$$

$$\Rightarrow \check{f} * \delta = \check{f}$$

sonucu elde edilir.

Genelleşmiş fonksiyonlarda bükülmenin özellikleri:

1. $\check{f}*\check{g}:\ D' \to D'$ ile tanımlanan bükülme işlemi $\check{f}$ ve $\check{g}$ fonksiyonlarına göre lineerdir. Örneğin, $\forall \check{f},\ \check{g},\ \check{f}_1 \in D'(R^n)$ için $\check{f}*\check{g}$ ve $\check{f}*\check{f}_1$ bükülmelerinin varlığı şartıyla, $\forall\ \lambda,\ \mu \in C$ için

$$(\lambda\check{f}+\mu\check{f}_1)*\check{g}=\lambda(\check{f}*\check{g})+\mu(\check{f}_1*\check{g})$$

eşitliği, bükülmenin tanımından ve $\check{f}(x)\check{g}(y)$ düz çarpımının $\check{f}$ ve $\check{g}$ fonksiyonlarına göre lineerliğinden yazılabilir.

2. $\check{f}*\check{g}:\ D'\to D'$ işlemi $\check{f}$ ya ve $\check{g}$ ya göre her zaman sürekli değildir. Örneğin,

$$\forall\ \varphi \in D(R^1),\ \exists k_0 \in N,\ \forall k \geq k_0\quad k_0 \notin \operatorname{supp}\varphi$$

$$\Rightarrow (\delta(x-k),\varphi(x))=(\delta(x),\varphi(x+k))=\varphi(k)=0$$

olduğundan $\delta(x-k)\to 0,\ k\to\infty,\ D'(R^1)$ de. Fakat

$\check{1}(y)\delta(x-k)=\check{1}\not\to 0$ dır. Gerçekten de

$$(\check{1}(y)*\delta(x-k),\varphi(x+y))=(\check{1}(y)\delta(x-k),\varphi(x+y))=(\delta(x-k),(\check{1}(y),\varphi(x+y)))$$

$$=(\delta(x-k),\int\varphi(x+y)dy)=\int(\delta(x-k),\varphi(x+y))dy=\int(\delta(x),\varphi(x+y+k))dy$$

$$=\int\varphi(x+y)d(y+k)=\int\varphi(y')dy'=(\check{1}(y),\varphi(y))=(\check{1}(y+x),\varphi(y+x))$$

$$\Rightarrow \check{1}(y)*\delta(x-k)=\check{1}(y)$$

bükülmesi $\check{1}(y) \not\to 0$ olduğundan $\check{1}(y)$ fonksiyonuna göre sürekli değildir. Süreklilik olması için $\check{1}(y)\delta(x-k) \to \check{0}$ $(k\to\infty)$ olmalıydı. Bu nedenle $\forall$ $\check{f}(x)$, $\check{g}(y) \in D'(R^n)$ için $\check{f} * \check{g}$ bükülmesi her zaman sürekli değildir.

3. Bükülmenin komutatifliği: Eğer $\check{f} * \check{g}$ varsa $\check{g} * \check{f}$ da vardır ve

$$\check{f} * \check{g} = \check{g} * \check{f} \tag{2.46}$$

şeklindedir. (2.46) eşitliği, bükülmenin tanımından ve düz çarpımın komutatifliğinden elde edilir. $\forall \varphi \in D(R^n)$ için

$$(\check{f} * \check{g}, \varphi) = (\check{f}(x)\check{g}(y), \varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (\check{f}(x)\check{g}(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y))$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\check{g}(y)\check{f}(x), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (\check{g} * \check{f}, \varphi)$$

$\Rightarrow \check{f} * \check{g} = \check{g} * \check{f}$ elde edilir.

4.Bükülmenin diferansiyellenmesi: $\check{f} * \check{g}$ bükülmesi varsa ,$\forall |\alpha| \geq 1$ için $D^\alpha \check{f} * \check{g}$ ve $\check{f} * D^\alpha \check{g}$ bükülmeleri de vardır ve aşağıdaki gibidir:

$$D^\alpha \check{f} * \check{g} = D^\alpha (\check{f} * \check{g}) = \check{f} * D^\alpha \check{g} \tag{2.47}$$

Bu eşitliği her bir birinci dereceli türev için ispatlamak yeterlidir. $\forall \varphi \in D(R^n)$ ve $\forall k, \eta_k(x,y) \in D(R^{2n}), R^{2n}$ de 1 e yakınsayan keyfi dizi olsun.

$\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \in D(R^{2n})$ ve R^{2n} de $\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \to 1$, $k \to \infty$

$\check{f} * \check{g}$ bükülmesinin varlığı kullanılarak,

$$(D_j(\check{f} * \check{g}),\varphi) = -(\check{f} * \check{g}, D_j\varphi) = -\lim_{k\to\infty}(\check{f}(x)\check{g}(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial x_j})$$

$$= -\lim_{k\to\infty}(\check{f}(x)\check{g}(y), \frac{\partial(\eta_k(x,y)\varphi(x+y))}{\partial x_j} - \varphi(x+y)\frac{\partial\eta_k(x,y)}{\partial x_j})$$

$$= -\lim_{k\to\infty}(\check{f}(x)\check{g}(y), \frac{\partial(\eta_k(x,y)\varphi(x+y))}{\partial x_j}) + \lim_{k\to\infty}(\check{f}(x)\check{g}(y), \varphi(x+y)\frac{\partial\eta_k(x,y)}{\partial x_j}$$

$$= \lim_{k\to\infty}(\frac{\partial \check{f}(x)\check{g}(y)}{\partial x_j}, \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) + \lim_{k\to\infty}(\check{f}(x)\check{g}(y), \varphi(x+y)[\eta_k(x,y) + \frac{\partial\eta_k(x,y)}{\partial x_j}])$$

$$-\lim_{k\to\infty}(\check{f}(x)\check{g}(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (\frac{\partial \check{f}(x)\check{g}(y)}{\partial x_j}, \varphi(x+y))$$

$$\Rightarrow D_j(\check{f}(x)\check{g}(y)) = D_j(\check{f}(x))\check{g}(y)$$

sonucu bulunur. (2.47) formülünün ikinci denkliği ise birinciden ve bükülmenin komutatifliğinden elde edilir.

$$D_j(\check{f}(x)\check{g}(y)) = D_j(\check{g}(y))\check{f}(x) = D_j\check{g}(y)\check{f}(x) = D_j\check{f}(x)\check{g}(y)$$

Ayrıca (2.47) eşitliğinden,

$$D^\alpha \check{f} = D^\alpha(\check{f} * \delta) = \delta * D^\alpha \check{f}, \forall \check{f} \in D'(R^n) \qquad (2.48)$$

elde edilir.

Not 2.3. $D^{\alpha}\check{f}*\check{g}$ ve $\check{f}*D^{\alpha}\check{g}$ bükülmelerinin varlığı $\check{f}*\check{g}$ bükülmesinin ve $D^{\alpha}\check{f}*\check{g}=\check{f}*D^{\alpha}\check{g}$ denkliğinin varlığı için yeterli değildir.

Örnek 2.6: $\theta(x)\in C^1(R^1\backslash 0)$, $\theta(x)\in L_{loc}(R^1)$ olarak tanımlanan $\theta(x)$ Hevisayd fonksiyonu, regüler genelleşmiş fonksiyon belirler. Bu fonksiyon, $\check{\theta}(x)$ ile gösterilir.

$$(\check{\theta}'(x),\varphi(x))=\int\theta'(x)\varphi(x)dx=-\int\theta(x)\varphi'(x)dx$$

$x\leq 0\Rightarrow\theta(x)=0$ olduğundan,

$$(\check{\theta}'(x),\varphi(x))=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)dx=-\lim_{x\to\infty}(\varphi(x)-\varphi(0))$$

$\varphi\in D(R^1)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to\infty}(\varphi(x))=0\Rightarrow(\check{\theta}'(x),\varphi(x))=\varphi(0)=(\delta(x),\varphi(x))$

$\Rightarrow\check{\theta}'(x)=\delta(x)$

$\Rightarrow\check{\theta}'(x)*\check{1}(y)=\delta(x)*\check{1}(y)=\check{1}(y)$ dır. Fakat

$\check{\theta}(x)*\check{1}'(y)=\check{\theta}(x)*\check{0}=\check{0}$ ve

$\check{\theta}'(x)*\check{1}(y)\neq\check{\theta}(x)*\check{1}'(y)$ olduğundan $\check{\theta}(x)*\check{1}(y)$ bükülmesi yoktur.

$$(\check{1}',\varphi)=-(\check{1},\varphi')=-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(x)dx=\lim_{k\to\infty}(\varphi(k)-\varphi(-k))-\int_{-\infty}^{\infty}1'(x)\varphi(x)dx=\check{0}\Rightarrow\check{1}'=\check{0}$$

5. Bükülme genelde asosyatif değildir.

$(\check{\theta} * \check{\delta'}) * \check{1} = \check{1}$,

Örnek (2.4.) e göre $\check{f} * \delta = \check{f}$ olduğundan

$\check{\theta} * \check{\delta'} = \check{\theta'} * \delta = \check{\theta'}$ ve $\check{\theta'} * \check{1} = \check{1}$ bulunur.

$\check{\theta} * (\check{\delta'} * \check{1}) = \check{\theta} * \check{0} = \check{0}$

$(\check{\theta} * \check{\delta'}) * \check{1} \neq \check{\theta} * (\check{\delta'} * \check{1})$

ise bükülme asosyatif değildir.

6.Bükülmenin kaydırılması : $\check{f} * \check{g}$ bükülmesi varsa $\check{f}(x+h) * \check{g}(x)$ bükülmesi de vardır. Öyle ki,

$$\check{f}(x+h) * \check{g}(x) = (\check{f} * \check{g})(x+h) \quad , h \in R^n \qquad (2.49)$$

İspat : $\forall k$, $\eta_k(x,y)$, $D(R^{2n})$ den olan ve R^{2n} de 1 e yaklaşan keyfi dizi olsun. O halde $\forall\, h \in R^n$ için $\eta_k(x\text{-}h,y)$ dizisi de R^{2n} de 1 e yaklaşan keyfi dizidir. Kaydırma ve bükülmenin tanımı kullanılarak, $\forall \varphi \in D(R^n)$ için

$$((\check{f} * \check{g})(x+h), \varphi(x+y)) = ((\check{f} * \check{g})(x), \varphi(x+y-h))$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\check{f}(x)\check{g}(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y-h)) = \lim_{k\to\infty} (\check{g}(y), (\check{f}(x), \eta_k(x,y)\varphi(x+y-h)))$$

$$=\lim_{k\to\infty}(\check{g}(y),(\check{f}(x+h),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)))=\lim_{k\to\infty}(\check{f}(x+h)\check{g}(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y))$$

$$=(\check{f}(x+h)*\check{g}(x),\varphi(x+y))\Rightarrow(\check{f}*\check{g})(x+h)=\check{f}(x+h)*\check{g}(x)$$

elde edilir.

Teorem 2.4. $\check{f}$ keyfi, $\check{g}$ ise finit genelleşmiş fonksiyonlar ise $\check{f}*\check{g}\in D'(R^n)$ vardır

$$(\check{f}*\check{g},\varphi)=(\check{f}(x)*\check{g}(y),\eta(y)\varphi(x+y)) \ , \ \varphi\in D(R^n) \tag{2.50}$$

Burada $\eta\in D(R^n)$ fonksiyonu $\check{g}$ fonksiyonunun taşıyıcısı civarında 1 e eşittir.

Bu durumda bükülme, $\check{f}$ ve $\check{g}$ fonksiyonlarına göre ayrı ayrı süreklidir :

1) Eğer $\check{f}_k\to\check{0}, k\to\infty$ (D' de) ise $\check{f}_k*\check{g}\to\check{0}, k\to\infty$

2) Eğer $\check{g}_k\to\check{0}, k\to\infty$ (D' de) ve $\exists r>0, \forall k, \operatorname{supp}\check{g}_k\subset U_r$ ise $\check{f}_k*\check{g}_k\to\check{0}, k\to\infty$

Lemma 2.27. $\check{f}\in D'(R^n), \forall\psi\in D(R^n)$ olsun. O halde $\check{f}*\check{\psi}$ var ve

$$\check{f}*\check{\psi}=(\check{f}(y),\psi(x-y))\in C^\infty(R^n) \tag{2.51}$$

İspat: ψ finit olduğundan teorem (2.4.) e göre $\check{f}*\check{\psi}$ vardır. (2.50) eşitliğine göre $\forall\varphi\in D(R^n)$ için,

$$(\check{f}*\check{\psi},\varphi)=(\check{f}(y)\check{\psi}(\xi),\eta(\xi)\varphi(y+\xi))=(\check{f}(y),(\psi(\xi),\eta(\xi)\varphi(y+\xi)))$$
$$=(\check{f}(y),\int\psi(\xi)\eta(\xi)\varphi(y+\xi)d\xi)$$

$\forall\xi\in\text{supp}\psi$ için $\eta(\xi)\to 1$ (R^n de) Son eşitlikte $y+\xi=x \Rightarrow \xi=x-y \Rightarrow d\xi=dx$ değişken değiştirmesi yapılır:

$$(\check{f}(y), \int \psi(\xi)\eta(\xi)\varphi(y+\xi)d\xi) = (\check{f}(y), \int \psi(x-y)\varphi(x)dx)$$

$$= \int (\check{f}(y), \psi(x-y)\varphi(x))dx = ((\check{f}(y), (\psi(x-y)), \varphi(x))$$

$$\Rightarrow (\check{f} * \check{\psi}, \varphi) = ((\check{f}(y), \psi(x-y)), \varphi(x))$$

$$\Rightarrow \check{f} * \check{\psi} = (\check{f}(y), \psi(x-y)), \forall\varphi\in D(R^n)$$

olduğu ispatlandı.

Son eşitliğin sağ tarafının sonsuz pürüzsüzlüğü ise, Lemma (2.22) deki gibi ispatlanır.

Tanım 2.20.: $\omega_\varepsilon(x)$, şapka fonksiyon olsun. bu durumda sonsuz pürüzsüz olan ve

$$f_\varepsilon(x) = (\check{f} * \check{\omega}_\varepsilon) = (\check{f}(y), \omega_\varepsilon(x-y))$$

eşitliği ile belirlenen $f_\varepsilon(x)$ fonksiyonuna $\check{f}$ genelleşmiş fonksiyonunun regülerizesi denir.

Önceden, $\check{\omega}_\varepsilon(x) \to \delta(x)$, $\varepsilon\to 0^+$ D' de olduğu ispatlandı. Buradan, $\check{f} * \check{\omega}_\varepsilon$ bükülmesinin $\check{\omega}_\varepsilon$ fonksiyonuna göre sürekliliği ve $\check{f} * \delta = \check{f}$ eşitliği kullanılarak,

$$\check{f}_\varepsilon(x) \to \check{f}(x), \varepsilon\to 0^+, D' \text{ de} \tag{2.52}$$

bulunur. Böylece her bir genelleşmiş fonksiyon, kendi regülerizesinin zayıf limitidir.

Teorem 2.5 $\forall \check{f}$ genelleşmiş fonksiyonu, temel fonksiyonların zayıf limitidir. Yani $D(R^n)$, $D'(R^n)$ uzayında her yerde yoğundur.

İspat: $f_\varepsilon(x)$, $\check{f}$ genelleşmiş fonksiyonunun regülerizesi ve $\eta_\varepsilon(x) \in D'(R^n)$ olsun. Burada $\eta_\varepsilon(x)$ ler $U_{\frac{1}{\varepsilon}}(x)$ açığında 1' e eşit temel fonksiyonlardır. O halde $\eta_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x)$ temel fonksiyonlar dizisi $D'(R^n)$ de $\varepsilon \to 0^+$ için $\check{f}$ ya yaklaşır.

Bunun nedeni ise, (2.52) koşuluna göre $\forall \varphi \in D'(R^n)$ için,

$$\lim_{\varepsilon \to \infty}(\eta_\varepsilon \check{f}_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+}(\check{f}_\varepsilon, \eta_\varepsilon \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+}(\check{f}_\varepsilon, \varphi) = (\check{f}, \varphi)$$

olmasıdır.

Not 2.4: D', tam uzay olduğundan bu teoremin tersi çıkıyor. Lokal integrallenebilen fonksiyonların zayıf limiti D' den olan genelleşmiş fonksiyondur.

BÖLÜM.3. YAVAŞ ARTIMLI GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLAR, FOURİER DÖNÜŞÜMÜ, ÖZELLİKLERİ ve UYGULAMASI

Bilindiği gibi, Fourier dönüşümünün komplex formülü,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(x-t)}dt \tag{3.1}$$

şeklindedir. (3.1) eşitliği iki kısma ayrıldığında,

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt \tag{3.2}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \tag{3.3}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.2) eşitliği, tüm R de mutlak integrallenebilen f(x) fonksiyonları için doğrudur. (3.1) eşitliği ile her bir $f\in L_1(R)$ fonksiyonuna tüm R de belirlenmiş bir $g(\lambda)$ fonksiyonu karşılık gelir.

Tanım 3.1.:

a) (3.2) ile belirlenen $g(\lambda)$ ya f(x) in Fourier dönüşümü denir.
b) (3.3) formülüne ise f(x) in ters Fourier dönüşümü denir. (3.3) de integral, yalnız sınır değer anlamında vardır.

(3.3) ün doğruluğu için, $f\in L_1(R)$ koşulunun dışında, örneğin, Dini koşulunu sağlaması gerekir.

Teorem 3.1. $f \in L_1(R)$ için

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx \equiv 0 \qquad (3.4)$$

ise R uzayında hemen hemen her yerde $f(x) = 0$.

İspat: $f \in L_1(R)$ için (3.4) koşulu sağlansın. Bu durumda,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)e^{-i\lambda(x+t)}d(x+t) = e^{-i\lambda t}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x}dx = 0$$

$$\forall \lambda, t \in R \text{ için } e^{-i\lambda t} \neq 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x}dx = 0 \qquad (3.5)$$

elde edilir.

$$\varphi(x) = \int_0^{\xi} f(x+t)dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\int_0^{\xi} f(x+t)dt\right)\right|dx$$

$f \in L_1(R)$ olduğundan Fubini teoremine göre,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\int_0^{\xi} f(x+t)dt\right)\right|dx = \int_0^{\xi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)dx\right|dt = \int_0^{\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t)|d(x+t)dt$$

$$\leq M\int_0^{\xi} dt = M\xi < \infty, \qquad \forall \xi \in R$$

Fubini teoreminin sonucuna göre, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\xi} f(x+t)d(x+t)$ vardır yani $\varphi(x) \in L_1(R)$'dir.

$$g_{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\xi} f(x+t)dt\right)e^{-i\lambda x}dx = \int_0^{\xi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x}dx\right)dt$$

$f(x+t) \in L_2(R^1) \Rightarrow$ Fubini teoremi kullanılır.

$$g_\varphi(\lambda)=\int_0^{\xi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x}dx\right)dt=0$$

bulunur. $\varphi(x)$, diferansiyellenebilir olduğundan Dini koşulları sağlanır. Bu durumda

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_\varphi(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

$$g_\varphi(\lambda)\equiv 0 \Rightarrow \varphi(x)=0 \Rightarrow \int_0^{\xi} f(x+t)dx=0 \Rightarrow$$

hemen hemen her yerde $f(x)=0$'dır.

3.1. Fourier Dönüşümünün Önemli Özellikleri

f nin Fourier dönüşümü yani $g,F[f]$ ile gösterilir. Başka deyişle F ile $L_1(R)$ de oluşan ve her bir $f\in L_1(R)$'ye karşı onun Fourier dönüşümünü, $F[f]$ yi belirleyen lineer operatör gösterilir. $F, L_1(R)$'yi her zaman $L_1(R)$'ye dönüştürmez.

Lemma 3.1. $\{f_n\}\subset L_1(R)$, $L_1(R)$'de yakınsak bir dizi ise $\{g_n\}=\{F[f_n]\}$ dizisi tüm reel eksende düzgün yakınsaktır.

İspat: $\{f_n\}\subset L_1(R)$, $L_1(R)$ de $f\in L_1(R)$ ye yakınsayan bir dizi olsun. $L_1(R)$, tam metrik uzay olduğundan bu uzaydaki yakınsak her dizi Cauchy dizisidir. Bu nedenle $\{f_n\}$ dizisi $L_1(R)$ de Cauchy dizisidir yani

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-f_m(x)|dx\to 0,\qquad m,n\to\infty.$$

$$|g_n(\lambda)-g_m(\lambda)|\le\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)-f_m(x)||e^{-i\lambda x}|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)-f_m(x)|dx\to 0$$

$$\Rightarrow |g_n(\lambda)-g_m(\lambda)|\to 0\qquad (n,m\to\infty,\ R\text{ de})$$

Bu nedenle $\{g_n(\lambda)\}$, $\forall\lambda \in R$ için Cauchy dizisidir. R tam uzay olduğundan $\{g_n(\lambda)\}$, R de yakınsaktır. $\{g_n(\lambda)\}$ dizisinin R de $g(\lambda)$ ya düzgün yakınsak olması $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n(\varepsilon) > 0,\ \forall n > n(\varepsilon)$ için $|g_n(\lambda) - g(\lambda)| < \varepsilon$ demektir.

$$|g_n(\lambda) - g(\lambda)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)e^{-i\lambda x}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)e^{-i\lambda x}dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|dx$$

$\{f_n\}$, $L_1(R)$ de yakınsak dizi olduğundan

$$\int |f_n(x) - f(x)|dx \to 0, \quad n \to \infty \quad (L_1(R) \text{ de}) \Rightarrow |g_n(\lambda) - g(\lambda)| \to 0, \quad n, m \to \infty\,(R\text{de})$$

yani, $\{g_n(\lambda)\}$, tüm R de düzgün yakınsaktır.

Lemma 3.2. $|f| \in L_1(R)$ ise $g(\lambda)$, R de sürekli ve sınırlı fonksiyondur. Öyle ki $g(\lambda) \to 0,\ |\lambda| \to \infty$.

İspat: $|f| \in L_1(R)$ ise

$$|g(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||e^{-i\lambda x}|dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty,$$

yani $g(\lambda)$ R de sınırlıdır.

$g(\lambda)$ nın sürekliliğinin ve $|\lambda| \to \infty$ iken $g(\lambda) \to 0$ olduğunun ispatı için öncelikle $f \in L_1(R)$ fonksiyonunun (a, b) aralığının karakteristik fonksiyonu olduğu kabul edilir.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b 1dx = b-a$$

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_a^b 1e^{-i\lambda x}dx = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}.$$ Bu halde $g(\lambda)$ nın sürekliliği açıktır.

$$|g(\lambda)| = \frac{\left|e^{-i\lambda a} - e^{-ib\lambda}\right|}{|i\lambda|} \le \frac{1}{|\lambda|} \to 0, \ |\lambda \to \infty|.$$

F operatörü lineer olduğundan keyfi basamak fonksiyonunun da Fourier dönüşümü $|\lambda| \to \infty$ da sıfıra yaklaşan sürekli fonksiyondur. Basamak fonksiyonlar $L_1(R)$'de her yerde yoğun olduklarından, $\forall f \in L_1(R)$ için öyle $\{f_n\}$ basamak farklar dizisi var ki, $f_n \to f$, $n \to \infty$ $L_1(R)$ de. O halde Teorem 3.2'ye göre $g_n = F[f_n]$, $n = 1,2,\ldots$ dizisi tüm R'de $g = F[f]$ Fourier dönüşümüne düzgün yakınsar. Bu durumda limit fonksiyonu $F[f]$'de R'de süreklidir ve $|\lambda| \to \infty$ için $g(\lambda) \to 0$'dır:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n(\varepsilon) > 0, \ \left|g(\lambda) - g_{n(\varepsilon)}(\lambda)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists r > 0, \ \forall |\lambda| > r \text{ için } \left|g_{n(\varepsilon)}(\lambda)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|g(\lambda)| \le \left|g_n(\lambda) - g_{n(\varepsilon)}(\lambda)\right| + \left|g_{n(\varepsilon)}(\lambda)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad |\lambda| > r \text{ olduğunda } \varepsilon \text{ keyfi}$$

olduğundan $\lim_{|\lambda| \to \infty} g(\lambda) = 0$ bulunur.

Lemma 3.3. $|f| \in L_1(R) \Rightarrow g = F[f]$, tüm R'de düzgün süreklidir.

İspat: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$,

$$|g(\lambda_1) - g(\lambda_2)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda_1 x}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda_2 x}dx\right| =$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[e^{-i\lambda_1 x}-e^{-i\lambda_2 x}\right]dx\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\left|e^{-i\lambda_1 x}-e^{-i\lambda_2 x}\right|dx$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||\lambda_1-\lambda_2|\left|\max e^{-i\xi x}\right|dx \le |\lambda_1-\lambda_2|\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx \le \mu|\lambda_1-\lambda_2| < \mu\delta$$

$$\delta \le \frac{\varepsilon}{\mu} \Rightarrow \delta\mu < \varepsilon \Rightarrow \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R,$$

$$|\lambda_1-\lambda_2| < \delta \Rightarrow |g(\lambda_1)-g(\lambda_2)| < \varepsilon$$

Bu nedenle $g(\lambda)$, tüm R 'de düzgün süreklidir.

Lemma 3.4. B, $|\lambda| \to \infty$ için $g(\lambda) \to 0$ koşulunu sağlayan ve tüm R 'de düzgün sürekli olan fonksiyonlar kümesi olsun. Bu durumda

$$F: L_1(R) \to B$$
$$f \to F[f]$$

operatörü için $\|F\| = 1$ ve $\ker F = 0$ olur. Burada $\ker F$, F 'in çekirdeğidir.

İspat: $\forall g \in B$ için $\|g\|_B = \sup_{\lambda \in R}|g(\lambda)|$ olsun. $\|g\|_B$ 'nin B 'de norm oluşturduğu açıktır.

a) $\|g\|_B = \sup_{\lambda\in R}|g(\lambda)| = \sup_{\lambda\in R}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx\right| \le$

$$\sup \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = \sup\|f\|_{L_1} = \|f\|_{L_1} \Rightarrow \|g\|_B \le \|f\|_{L_1}$$

b) Ayrıca, $\|g\|_B = \|F[f]\|_B = \|F\|\|f\|_{L_1} \le \|f\|_{L_1} \Rightarrow \|F\| \le 1$ 'dir.

Öyle bir f bulunmalıdır ki, $\|f\|_{L_1} \le 1$, $\|F[f]\|_B = 1$ ve

$$f(x) = \begin{cases} 0.5, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

olsun.

$$\|f\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-1}^{1} 0.5 dx = 1$$

$$F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-1}^{1} 0.5 e^{-i\lambda x} dx = \frac{\sin\lambda}{\lambda} \Rightarrow |F[f]| = \left|\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right|, |\sin\lambda| \le |\lambda| \Rightarrow \left|\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right| < 1$$

$$\sup_{\lambda} |F[f]| = \sup_{\lambda} \left|\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right|, \quad \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\sin\lambda}{\lambda} = 1 \Rightarrow \|F\| = 1.$$

c) $\forall f_1, f_2 \in L_1(R)$ ve $F[f_1] - F[f_2] \equiv 0$ olsun. F, lineer operatör olduğundan $F[f_1 - f_2] \equiv 0 \Rightarrow$ Teorem (3.1)'e göre $f_1 - f_2 = 0hhh_y \Rightarrow \ker F = 0$ elde edilir. ■

Lemma 3.5. f, her bir sonlu aralıkta mutlak sürekli ve $f' \in L_1(R)$ ise

$$F[f'] = i\lambda F[f]$$

İspat: Sonlu aralıkta mutlak sürekli fonksiyon,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

şeklinde ifade edilir. f' mutlak integrallenebilir olduğundan $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ve $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ var ve bu limitler yalnız sıfır olabilirler.

$$F[f'](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx = f(x) e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + (i\lambda)\int e^{-i\lambda x} f(x) dx =$$

$$= i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = i\lambda F[f]$$

Eğer $f, f^{(k-1)}$ mutlak sürekli ve $f, \ldots, f^{(k)} \in L_1(R)$ ise benzer yolarla

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f] \tag{3.6}$$

olduğu ispatlanır. ■

(3.6) eşitliği $(i\lambda)^k$ ya bölünür ve Fourier dönüşümünün her zaman sonsuzlukta sıfıra yaklaştığı gözönüne alınırsa,

$$\left|f^{(k)}\right| \in L_1(R) \Rightarrow (3.6) \Rightarrow$$

$$\left|F[f]\right| = \frac{\left|F[f^{(k)}]\right|}{|\lambda|^k} \to 0, \quad |\lambda| \to \infty$$

olur. Bu durumda $F[f]$, sonsuzlukta $\frac{1}{|\lambda|^k}$'dan daha hızlı sıfıra yaklaşır. Böylece f'nin L_1'den olan türevleri çoğaldıkça, f'nin Fourier dönüşümü sonsuzlukta sıfıra daha hızla yaklaşır.

Lemma 3.6. f'' var ve $f'' \in L_1(R)$ olsun. O zaman $F[f]$ mutlak integrallenebilen fonksiyondur.

$$F[f''] = (i\lambda)^2 F[f] \Rightarrow \left|F[f]\right| = \frac{\left|F[f'']\right|}{|\lambda|^2}, \quad |\lambda| \to \infty \Rightarrow \frac{\left|F[f'']\right|}{|\lambda|^2} \to 0$$

Lemma 3.7. $|f(x)|$, $|xf(x)| \in L_1(R)$ ise $g = F[f]$ diferansiyellenebilen fonksiyondur ve onun diferansiyeli,

$$g'(\lambda) = F[-ixf(x)] \tag{3.7}$$

şeklindedir.

İspat: $g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$.

$g'(\lambda) = -i\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\lambda x}xdx$, $|xf(x)| \in L_1(R)$ olduğundan

$$|g'(\lambda)| = \left|-i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\lambda x}dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|dx < +\infty \Rightarrow g'(\lambda) \in L_1(R)\text{'dir.}$$

$$g'(\lambda) = \int -ixf(x)e^{-i\lambda x}dx = F[-ixf(x)]$$

i) Eğer her f için $|f(x)|, |xf(x)|, \ldots, |x^p f(x)| \in L_1(R) \Rightarrow g^{(p)}(\lambda)$ vardır ve

$g^{(k)}(\lambda) = F[(-ix)^k f(x)], \quad k = \overline{1,p}$

ii) $\forall p \in N$ için $|x^p f(x)| \in L_1(R) \Rightarrow g \in C^\infty(R)$

3.2. Hızla Azalan Sonsuz Pürüzsüz Fonksiyonların Fourier Dönüşümü

J, sonsuz pürüzsüz öyle fonksiyonlar kümesidir ki, her $f \in C^\infty(R^n)$ ve $\forall p,q \in N$ için öyle $c_{p,q} \geq 0$ sabitleri vardır ki,

$$|x^p f^{(q)}(x)| < c_{pq} \tag{3.7}$$

koşulları sağlanır.

Burada J a hızla azalan sonsuz pürüzsüz fonksiyonlar uzayı denir.

Teorem 3.2. $f \in J$ ise $g = F[f] \in J$.

İspat: İspat için önce (3.7) eşitsizliği var ise $\forall p,q \in N$ için $x^p f^{(q)}(x) \in L_1(R)$ olduğu gösterilir. (3.7), $\forall p,q \in N$ için doğru olduğundan

$$|x^p f^{(q)}(x)| = \frac{|x^{p+2} f^{(q)}(x)|}{|x^2|} \leq \frac{c_{p+2,q}}{x^2}$$

$x^p f^{(q)}(x)$ fonksiyonu, $\frac{1}{x^2}$ 'den daha hızlı azalır. Bu nedenle $x^p f^{(q)}(x) \in L_1(R)$ 'dır.

$\forall p,q \in N$ için (6. ii)) özelliğine göre $F[f] \in C^{\infty}$.

$\forall q \in N (p=0$ iç in$)$, $f^{(q)} \in L_1(R)$ olduğundan Lemma (3.2) ye göre, $g = F[f]$, sonsuzlukta $\frac{1}{|\lambda|^q}$ 'dan daha hızlı sıfıra yaklaşır.

$$g^{(p)}(\lambda) = F[(-ix)^p f(x)] = (-i)^p F[x^p f(x)]$$

$$F[(x^p f(x))^q] = (i\lambda)^q F[x^p f(x)]$$

$$(i\lambda)^q g^{(p)}(\lambda) = (i\lambda)^q (-i)^p F[x^p f(x)] = (-i)^p F[(x^p f(x))^{(q)}]$$

$x^p f^{(q)}(x) \le c_{pq}$ olduğundan son eşitlikteki fonksiyonların her biri integrallenebilen fonksiyonun Fourier dönüşümü gibi bir D_{pq} sabiti ile sınırlanabilir. Böylece, $f \in J \Rightarrow g = F[f] \in J$ 'dır. Bu teoremin tersi de doğrudur. Eğer $g = F[f] \in J$ ise, $f \in J$ 'dur.

$$f^*(x) = F[g(\lambda)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \Rightarrow f^*(x) \in J \text{ 'dır.}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int g(\lambda) e^{-i\lambda(-x)} d\lambda = \frac{1}{2\pi} f^*(x) \in J$$

$g \in J \Rightarrow f = F^{-1}[g] \in J$ 'dur.

Böylece, Fourier dönüşümünün J uzayını J uzayına dönüştürdüğü ispatlanmış oldu.

Lemma 3.8. $f \in J$ ve $\int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x) dx = 0$ $\forall p \ge 0$ olsun. Bu durumda $f(x) \equiv 0$'dır.

3.3. Fourier dönüşümü ve fonksiyonların bükülmesi

Bilindiği gibi $f_1, f_2 \in L_1(R)$ olduğunda f_1 ve f_2 nin

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi$$

bükülmesi vardır. Burada $f(x) \in L_1(R)$ dir.

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int f_1(\xi) f_2(\eta) d\xi d\eta \right|$$

$f_1, f_2 \in L_1(R)$ olduğundan Fubini teoremine göre

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty}\int f_1(\xi) f_2(\eta) d\xi d\eta \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\eta) d\eta d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(\eta)| d\eta < \infty$$

$\Rightarrow f(x) \in L_1(R)$ 'dir.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi = f_1 * f_2$$

$f \in L_1(R)$ olduğundan f 'in Fourier dönüşümü vardır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi \right\} e^{-i\lambda x} dx =$$

$\Rightarrow$ Fubini teoremine göre ve $x - \xi = \eta$ degisken değiştirmesi yapılarak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi \right\} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi) e^{-i\lambda x} dx \right\} d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta)e^{-i\lambda(\eta+\xi)}d\eta\right\}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta)e^{-i\lambda\eta}d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$$

$$\Rightarrow F[f_1 * f_2] = F[f_1]F[f_2] \tag{3.8}$$

Böylece, Fourier dönüşümü ile bükülmenin ilişkisi daha basit olan çarpma ilişkisine dönüştürülür.

Fourier dönüşümünün uygulanmasında önemli bir rol oynayan şu özellik verilir:
Bilindiği gibi Fourier dönüşümü diferansiyel işlemini bağımsız değişkene çarpma işlemine dönüştürür. Verilen denklem sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem ise,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)'} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = \varphi(x) \Rightarrow$$

$$F[y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y] = F[\varphi] \Rightarrow$$

$$F[y^{(n)}] + a_1 F[y^{(n-1)}] + \ldots + a_{n-1}F[y'] + a_n F[y] = F[\varphi]$$

$$\Rightarrow (i\lambda)^n F[y] + a_1 (i\lambda)^{n-1} F[y] + \ldots + a_{n-1}(i\lambda)F[y] + a_n F[y] = F[\varphi] \Rightarrow$$

$$[(i\lambda)^n + a_1(i\lambda)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(i\lambda) + a_n]F[y] = F[\varphi].$$

3.4. $L_2(R)$ Uzayında Fourier Dönüşümü

$f \in L_1[-\pi,\pi]$ olsun. O halde onun Fourier katsayılar dizisi,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \qquad n \in Z$$

eşitliği ile belirlenir. Eğer $f \in L_2[-\pi,\pi]$ ise, onun Fourier katsayıları

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty$$

koşulunu sağlar.

Bu durumda $L_2[-\pi,\pi]$ den l_2 ye bir dönüşüm bulunur. Öyle ki bu dönüşüm lineerdir ve Parseval özdeşliği sağlanır:

$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx \tag{3.9}$$

Tüm R de belirlenmiş fonksiyonlar ve onların Fourier dönüşümleri araştırılır. $L_2(R) \not\subset L_1(R)$ olduğundan $L_2(R)$ den olan fonksiyonlar için bilinen anlamda Fourier dönüşümü belirlenemeyebilir. Fakat $L_2(R^1)$'den olan her f fonksiyonu için Fourier dönüşümü farklı şekilde belirlenebilir. Bu durumda Parseval eşitliğinin (3.9) benzeri olan başka bir eşitlik ispatlanarak aşağıdaki teorem bulunur:

Planşerel Teoremi: $\forall f \in L_2(R)$ ve $\forall N$ için

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^{N} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

eşitliği ile belirlenen $g_N(\lambda) \in L_2(R')$'dir ve $g_N(\lambda)$ fonksiyonlarının yakınsadığı öyle bir $g(\lambda) \in L_2(R)$ fonksiyonu vardır ki

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)|^2\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx \tag{3.10}$$

Burada $g(\lambda) \in L_2(R)$ fonksiyonuna $f \in L_2(R)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir. Eğer $f, L_1(R)$ uzayına ait ise $g = F[f]$'dır.

İspat: Teoremin ispatı, 2 kısımdan oluşur: Önce (3.10), J sınıfından olan dönüşümler için ispatlanır. Daha sonra, $\bar{J} = L_2(R)$ olduğundan tüm $L_2(R)$ uzayına limit kullanılarak geçilir.

1. $f_1, f_2 \in J$ olsun. $J \subset L_1(R)$ olduğundan onlar için $F[f_1]$ ve $F[f_2]$ Fourier dönüşümleri vardır. $g_1 = F[f_1]$, $g_2 = F[f_2]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\right\}\overline{f_2(x)}dx$$

Fubini teoremine göre $\left|g_1(\lambda)\overline{f_2(x)}e^{i\lambda x}\right| \in L_1(R^2)$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[g_1(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f_2(x)e^{-i\lambda x}dx}\right]d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}d\lambda$$

Son eşitlikte $f = f_1 = f_2$ ve $g = g_1 = g_2$ yazılırsa, $f \in J$ için

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)|^2 d\lambda$$

elde edilir.

2 a) $f \in L_2(R)$ ve $\exists a \in R, \forall x \notin (-a,a)$ için $f(x) = 0$ olsun.

$f \in L_2(-a,+a) \subset L_1(-a,+a) \Rightarrow f \in L_1(R) \Rightarrow$

$g = F[f]$ vardır.

$D(R) \subset J$ ve $\overline{D(R)} = L_2(R)$ (bkz. Lemma 2.7) $\overline{J} = L_2(R)$ 'dır. Burada $\overline{J} = L_2(R)$ olduğundan $(-a,a)$ dışında sıfır olan $\exists\{f_N\} \subset J$ vardır ki, $\forall f \in L_2(R)$ için

$f_N \to f \qquad (L_2(R)$ de)

$f_N \to f \qquad (L_2(-a,a)$ da)

$\{f_N\}$ dizisi ve f finit fonksiyon olduğundan (taşıyıcıları $(-a,+a)$ aralığındadır)

$f_N \to f \qquad (L_1(-a,a) \Rightarrow f_n \to f(L_1(R)) \Rightarrow$

$g_N \overset{\to}{\to} g \qquad (R$'de)

$\forall N$ için $\{f_N\} \subset J \Rightarrow \{g_N\} \subset J$, $\bar{J} = L_2(R) \Rightarrow \{g_N\} \in L_2(R)$ ve $\{g_N\}$, $L_2(R)$'de Cauchy dizisidir. Bu nedenle yakınsaktır: $\exists g \in L_2(R)$ öyle ki,

$g_N(\lambda) \to g(\lambda), \quad (L_2(R)$ de)

ispatın birinci kısmına göre

$$\|f_N\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_N\|_{L_2}^2$$

Buradan limite geçilir:

$$\|f\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|g\|_{L_2}^2$$

elde edilir.

b) $\forall f \in L_2(R)$ için

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \geq N \\ 0, & |x| < N \end{cases}$$

olsun.

$\{f_N\} \in L_2(-N,+N) \subset L_1(-N_1+N) \Rightarrow \{f_N\} \in L_1(-N_1+N)$

$\Rightarrow \{f_N\} \in L_1(R) \Rightarrow \{g_N\} = F[f_N]$ vardır.

$$g_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_N(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

ispatının (2a) kısmına göre $\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$, $\forall N, M > N(\varepsilon)$ için

$$\|f_N - f_M\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_N - g_M\|^2 \Rightarrow$$

$$\|f_N - f_M\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_N - g_M\|_{L_2}^2 \Rightarrow$$

$f_N \to f \quad L_2(R) \Rightarrow \{f_n\}$, Cauchy dizisidir.

$$\Rightarrow \|f_N - f_M\| \to 0, \quad N, M \to \infty \Rightarrow$$

$$\|g_N - g_M\| \to 0, \quad N, M \to \infty.$$

$\{g_n\}$, Cauchy dizisidir.

Bu nedenle $\exists g(\lambda) \in L_2(R)$, $g_n \to g$ ($L_2(R)$ de), $N \to \infty$

$$\|f_N\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_N\|_{L_2}^2 \Rightarrow \|f\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2}\|g\|_{L_2}^2$$

$\Rightarrow$ (3.10), $\forall f \in L_2$ için doğrudur.

3. $f \in L_2(R) \cap L_1(R) \Rightarrow g = [f]$ var $\Rightarrow$

$f_N \to f \qquad L_1(R)$ de $\Rightarrow g_N \Rightarrow g\, R^1$ de

limitinin tekliğinden R de hemen hemen her yerde

$g_N \to g, \qquad N \to \infty$

Sonuç 3.1. (3.10) eşitliğinden $\forall f_1, f_2 \in L_2(R)$ için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}d\lambda$$

elde edilir.

İspat: f_1 ve f_2 nin Fourier dönüşümleri sırasıyla g_1 ve g_2 ise (f_1+f_2)'nin Fourier dönüşümü, g_1+g_2'dir:

$$g(\lambda) = \lim_{N\to\infty} g_N(\lambda) = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}(f_1(x)+f_2(x))e^{-i\lambda x}dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N} f_1(x)e^{-i\lambda x}dx + \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f_2(x)e^{-i\lambda x}dx = g_1(\lambda)+g_2(\lambda)$$

ispat için (3.10) eşitliğinde f yerine (f_1+f_2) yazılır:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|g_1(\lambda)+g_2(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty}|f_1(x)+f_2(x)|^2 dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|g_1(\lambda)|^2 d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|g_2(\lambda)|^2 d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\operatorname{Re} g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|f_1(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty}|f_2(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty}2\operatorname{Re} f_1(x)\overline{{}_2(x)}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx$$

elde edilir.

(3.10) eşitliği Fourier dönüşümü yapıldığında L_2 normunun değişmemesi demek ise, sonuncu eşitlik L_2 de skaler çarpımın değişmemesi demektir.

3.5. Genelleşmiş Fonksiyonların Fourier Dönüşümü

J uzayının dual uzayı olan J''da Fourier dönüşümünü belirlemek için, öncelikle Fourier dönüşümünün J yi kendisine dönüştürdüğü ve bu dönüşümün birebir ve örten olduğu hatırlanmalıdır. Burada, $J \subset L_2(R)$ olduğundan $J' \supset L_2'(R) \cong L_2(R)$ dir.

Tanım 3.2.

$$(\check{g}, \psi) = 2\pi(\check{f}, \varphi), \quad \psi = F[\varphi] \tag{3.11}$$

formülü ile belirlenen $\check{g} \in J'$ genelleşmiş fonksiyonuna $\check{f} \in J'$ genelleşmiş fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir. (3.11) formülü,

$(F[\check{f}], \psi) = 2\pi(\check{f}, \varphi) = 2\pi(\check{f}, F^{-1}[\varphi])$

şeklinde de yazılabilir.

$F\colon J \to J$ dönüşümü birebir ve örten olduğundan (3.11) eşitliği, tüm J de tanımlanmış bir fonksiyonel tanımlar. Burada $\check{g}$ nın lineerliği ve sürekliliği kolaylıkla ispatlanabilir. O halde $F[\check{f}] \in J'$ dır. Mutlak integrallenebilen fonksiyonların J' uzayına ait oldukları açıktır. Onlar için Fourier dönüşümünün her iki tanımı da aynıdır (yani klasik fonksiyon gibi Fourier dönüşümü ve genelleşmiş fonksiyon gibi Fourier dönüşümü). Gerçekten de eğer $f \in J, \varphi \in J, g = F[f]$, $\psi = F[\varphi]$ ise, Planşerel teoremine göre

$$2\pi(f, \varphi) = (F[f], F[\varphi]) = (g, \psi) \tag{3.12}$$

Buradan ise her iki tarafta limite geçerek (3.12)'nin $\forall f \in L_1(R)$ için de doğru olduğu bulunur. J de yakınsaklık,aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\forall \alpha.\beta..x^{\beta}D^{\alpha}\varphi_k \rightrightarrows ..x^{\beta}D^{\alpha}\varphi, k \to \infty \Rightarrow \{\varphi_k\} \subset J, \varphi \in J, \varphi_k \to \varphi, k \to \infty J \text{ de} \tag{3.13}$$

Lemma 3.4. $D \subset J$ dır ve J 'da yakınsaklık, D de yakınsaklıktan bulunur.

İspat: $\{\varphi_k\}, \varphi \in D$ için $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ (D de) ise sup pφ_k'ların hepsi genellikle sınırlı olduklarından (3.13) koşulu $\forall \alpha, \beta$ için doğrudur. Bu nedenle $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ (J da)'dır.

Lemma 3.5. D uzayı, J uzayında her yerde yoğundur. Yani,

$$\forall \varphi \in J, \ \exists \{\varphi_k\} \subset D, \quad \varphi_k \to \varphi, \quad k \to \infty, \quad (J \text{ da}).$$

İspat: D uzayına ait olan ve

$$\varphi_k(x) = \varphi(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right), \quad k = 1,2,\ldots$$

(burada $\eta \in D$ ve $\eta(x) = 1, |x| < 1$ olduğunda) eşitliği ile belirlenen $\varphi_k(x)$ fonksiyonları J 'da $\varphi(x)$ fonksiyonuna yakınsar ($k \to \infty$).

Teorem 3.3. Diferansiyelleme $\mathcal{D}^\alpha \varphi(x)$ ve argümanın lineer yer değiştirmesi işlemi $\varphi(Ay + b)$, $\det A \neq 0$, işlemi J 'den J ye süreklidirler.

İspat: J uzayında yakınsaklık tanımı kullanılarak kolaylıkla ispatlanabilir.

Diğer taraftan, sonsuz pürüzsüz fonksiyona çarpma işlemi J yi J ye dönüştürmeyebilir. Örneğin,

$$e^{-|x|^2} e^{|x|^2} = 1 \notin J$$

Tanım 3.3. θ_M, öyle $a(x) \in C^{\infty}(R^n)$ fonksiyonları kümesidir ki, θ_M'den olan her bir $a(x)$ fonksiyonu tüm türevleri ile birlikte $|x| \to \infty$'da polinomlardan yavaş artar. Yani $\forall \alpha, \exists c_\alpha > 0, \exists m_\alpha \in N, \forall a \in \theta_M$

$$|D^\alpha a(x)| \leq c_\alpha (1+|x|)^{m_\alpha} \tag{3.14}$$

Lemma 3.6. $a \in \theta_M$ fonksiyonuna çarpma işlemi J den J ye süreklidir.

İspat: Önce $a \in \theta_m \in J$ için $a\varphi \in J$ olduğu, daha sonra $a\varphi\colon J \to J$ dönüşümünün sürekliliği ispatlanır:

$\forall \varphi \in J$ olduğundan $\forall p, q \in N$ için $\exists c > 0, \forall x$,

$$|x^p \varphi^{(q)}(x)| \leq c_{p,q}$$

dır. Son eşitlikte φ yerine $a\varphi$ yazılarak

$$|x^p (a(x)\varphi(x))^{(q)}| \leq c_{p,q}$$

olduğu gösterilmelidir. Burada

$$(a(x)\varphi(x))^{(q)} = \sum c_{p,l} a(x)^{(l)} \varphi(x)^{(q-l)}$$

$$|x^p (a(x)\varphi(x))^{(q)}| = \sum |c_{p,l} a(x)^{(l)} x^p \varphi(x)^{(q-l)}| = I \tag{3.15}$$

$a(x) \in \theta_M \Rightarrow$ Tanım (3.3) den

$$|a(x)^{l)}| \leq k_1 (1+|x|)^{m_l} \tag{3.16}$$

(3.15) ve (3.16) den

$$I \leq \sum c_{p,l}\left|a(x)^{(l)}\right|\left|x^p\varphi^{(q-l)}(x)\right| \leq \sum c_{p,l}k_l(1+|x|)^{m_l}\left|x^p\varphi(x)^{(q-l)}\right| \leq$$
$$\leq M\sum\left|x^p\varphi^{(q-l)}(x)\right| + \left|x^p x^{m_l}\varphi^{(q-l)}(x)\right| \leq M\sum c_{p,q-l} + c_{p+m_l,q-l} \leq c'_{p,q}$$

Burada M, polinomlardaki katsayıların maksimumudur.

$$I = \left|x^p(a(x)\varphi(x))^{(q)}\right| \leq c'_{p,q}$$

olduğundan $a(x)\varphi(x) \in J$ dır.

$a\varphi: J \to J$ sürekliliğinin ispatı için,
$\forall\{\varphi_k\} \subset J, \varphi_k \to 0\ k \to \infty$ (J de) $\Rightarrow a\varphi_k \to 0, k \to \infty$ (J de) olduğu ispatlanmalıdır: $\varphi_k \to 0, k \to \infty$, (J de) olsun. J de yakınsaklık tanımına göre $\forall \alpha, \beta$,

$$x^\beta \mathcal{D}^\alpha \varphi_k \Rightarrow 0,\ k \to \infty (\text{J de})$$

dır. $\alpha = 0$ için

$$\left|a(x)(x^\beta\varphi_k)\right| \leq k(1+|x|)^{m_0}x^\beta\varphi_k \leq k\left(|x|^\beta\varphi_k + |x|^{m_0+\beta}\varphi_k\right)$$

$\left|x^\beta\right|\varphi_k \to 0,\ k \to \infty$ ve $|x|^{m_0+\beta}\varphi_k \to 0,\ k \to \infty$ (J de) olduğundan

$$\left|a(x^\beta\varphi_k)\right| \leq k\left(|x|^\beta\varphi_k + |x|^{m_0+\beta}\varphi_k\right) \to 0 \Rightarrow \left|a(x^\beta\varphi_k)\right| \to 0, \quad k \to \infty \quad (\text{J'de})$$

Tanım 3.4: J temel fonksiyonlar uzayında tanımlanmış sürekli lineer fonksiyonele yavaş artımlı genelleşmiş fonksiyon denir. Yavaş artımlı genelleşmiş fonksiyonlar kümesi, $J' = J'(R^n)$ ile gösterilir. J', lineer kümedir ve burada yakınsaklık, fonksiyonellerin zayıf yakınsaklığı gibi tanımlanır:

$\forall\{\check{f}_k\} \subset J'$, $\check{f} \in J$,

$\check{f}_k \to \check{f}$, $k \to \infty \Leftrightarrow \forall\varphi \in J$, $(\check{f}_k, \varphi) \to (\check{f}, \varphi)$, $\quad k \to \infty$

Tanım3.5: J' lineer kümesine bu yakınsaklıkla birlikte yavaş artımlı genelleşmiş fonksiyonlar uzayı denir.

Lemma 3.7. Tanım (3.4) ve (3.5)'den, $J' \subset D'$ olduğu ve J''da yakınsaklıktan D' da yakınsaklık çıktığı sonucu elde edilir.

İspat: Eğer $\check{f} \in J$ ise $\check{f} \in D^*$ dır. Çünkü $D \subset J$ ve D'de yakınsaklıktan J'da yakınsaklık çıkar. Bunun dışında eğer $\check{f}_k \to 0$, $k \to \infty$ (J''da) ise, o halde

$$(\check{f}_k, \varphi) \to 0, \quad k \to \infty, \quad \forall\varphi \in D \subset J$$

Demek ki, $\check{f}_k \to 0$, $k \to \infty$ (J''da).

Teorem 3.4. (L. Schvartz). j uzayında lineer f fonksiyonelinin J''a ait olması için gerekli ve yeterli koşul, $\exists c > 0, \exists p \in N \cup \{0\}$, $\forall\varphi \in J$

$$\left|\left(\check{f}, \varphi\right)\right| \le c\|\varphi\|_p \tag{3.17}$$

olmasıdır. Burada

$$\|\varphi\|_{p,x} = \sup_{|\alpha| \le p, \gamma \in R^n} \left(1 + |x|^p\right)\left|D^\alpha \varphi(x)\right|$$

dır.

İspat: Yeterlilik:

J'da lineer $\check{f}$ fonksiyoneli herhangi bir $c > 0$ ve $p \ge 0$ için (3.17) koşulu sağlansın. O halde $\check{f} \in J'$ olduğu ispatlanmalıdır.

$\forall\{\varphi_k\} \subset J$, için $\varphi_k \to 0, k \to \infty$ (J da) olsun. Bu durumda

$$\|\varphi_k\|_p \to 0, \quad k \to \infty \Rightarrow$$

$\left|(\check{f}, \varphi_k)\right| \le c\|\varphi_k\|_p \to 0, \ k \to \infty \Rightarrow \check{f}$, J 'da süreklidir. Yani $\check{f} \in J'$ 'dır.

Gereklilik: $f \in J'$ olsun. $\exists c > 0$ ve $\exists p \ge 0$, (3.17) koşulunun sağlandığı ispatlanmalıdır. İspat için, aksi farz edilir. böylece, $c > 0$ ve $p \ge 0$ yoktur. O halde

$$\exists\{\varphi_k\} \subset J, \quad \left|\left(\check{f}, \varphi_k\right)\right| \ge k\|\varphi_k\|_k \tag{3.18}$$

Burada

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k}, \quad k = 1,2,\ldots$$

dizisi J da ($k \to \infty$ için) sıfıra yakınsar. Bunun nedeni ise, $k \ge |\alpha|$ ve $k \ge |\beta|$ olduğunda

$$\left|x^\beta D^\alpha \psi_k(x)\right| = \frac{\left|x^\beta D^\alpha \varphi_k(x)\right|}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k} \le \frac{1}{k}$$

olmasıdır. Buradan ve $\check{f} \in J'$ olduğundan

$$(\check{f}, \psi_k) \to 0, \quad k \to \infty$$

Diğer taraftan (3.18) eşitsizliğinden,

$$\left|\left(\check{f},\psi_k\right)\right| = \frac{\left|\left(\check{f},\varphi_k\right)\right|}{\sqrt{k}\left\|\varphi_k\right\|_k} \geq \frac{k\left\|\varphi_k\right\|_k}{\sqrt{k}\left\|\varphi_k\right\|_k} = \sqrt{k}$$

$$\Rightarrow \left|\left(\check{f},\psi_k\right)\right| \geq \sqrt{k}$$

elde edilir. Bu ise, $\check{f} \in J$ olmasıyla yani $(\check{f},\psi_k) \to 0$ ile çelişir. Bu nedenle (3.17)'yi sağlayan $\exists c > 0, \exists p \in N \cup \{0\}$ vardır.

BÖLÜM 4 SOBOLEV UZAYLARI

4.1. Sobolev Uzayları ve Özellikleri

En basit Sobolev uzayı $H_0(R^n) = L_2(R^n)$ 'dir.

Bilindiği gibi, f öyle ölçülebilen fonksiyondur ki, onun için

$$\int_{R^n} |f(x)|^2 dx < \infty;$$

$$\|f\|_0 = \left(\int_{R^n} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}; \quad (f,g)_0 = \int_{R^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

$\forall s \in N$ için $H_s(R^n)$ uzayı,

$$H_s(R^n) = \left\{ f \in L_2(R^n) \middle| \forall |\alpha| \le s, \quad D^\alpha f \in L_2(R^n) \right\}$$

olarak belirlenir. Burada $\mathcal{D}^\alpha f$, f 'nin α mertebeden genelleşmiş fonksiyon anlamında türevidir. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ dir.

Bu uzayda skaler çarpım ve norm

$$(f,g)_s = \int_{R^n} \sum_{|\alpha| \le s} D^\alpha f(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx, \quad \|f\|_s^2 = \int_{R^n} \left(\sum_{|\alpha| \le s} |D^\alpha f(x)|^2 \right) dx$$

formülü ile belirlenir.

Teorem 4.1 : $H_s(R^n)$, tam uzaydır.

İspat: $\{f_\nu\}, \nu = 1,2,\ldots$, H_s 'de Cauchy dizisi olsun. $H_s(R^n)$ uzayının tanımına göre $\forall |\alpha| \le s$ için $\{\mathcal{D}^\alpha f_\nu\}$, $L_2(R^n)$ 'de Cauchy dizisidir: $\| \mathcal{D}^\alpha f_n - \mathcal{D}^\alpha f_m \|_s^2 \to 0, n, m \to \infty$

$$\left\|D^{\alpha}f_n - D^{\alpha}f_m\right\|_s^2 = \int_{R^n}\sum_{|\alpha|\le s}\left|D^{\alpha}f_n - D^{\alpha}f_m\right|^2 dx =$$

$$= \int_{R^n}\left(|f_n - f_m| + |f_n' - f_m'| + \ldots + |D^s f_n - D^s f_m|\right)^2 dx \le \int_{R^n}|f_n - f_m|^2 dx + \int_{R^n}|f_n' - f_m'|dx + \ldots +$$

$$+ \int_{R^n}\left|D^s f_n - D^s f_m\right|^2 dx$$

$\{f_\nu\}, H_s(R^n)$ 'de Cauchy dizisi olduğundan,

$$\int_{R^n}|f_n - f_m|^2 dx \to 0, \quad \int_{R^n}|f_n' - f_m'|^2 dx \to 0, \ldots, \int_{R^n}\left|D^s f_n - D^s f_m\right|^2 dx \to 0$$

$\Rightarrow \left\|D^{\alpha}f_n - D^{\alpha}f_m\right\|_s \to 0,\ L_2(R^n)$ de $\Rightarrow \{D^{\alpha}f_\nu\}, L_2$ 'de Cauchy dizisidir.

Burada $\alpha = 0$ için $\|f_n - f_m\|_s \to 0$ $L_2(R^n)$'de olduğundan $\{f_\nu\}, L_2(R^n)$'de Cauchy dizisidir. $L_2(R^n)$, tam uzay olduğundan $\forall|\alpha| \le s$ için $\exists g_\alpha \in L_2(R^n)$,

$\mathcal{D}^{\alpha}f_\nu \to g_\alpha, \quad (L_2(R^n)$ de)

Burada, $H_s(R^n)$ uzayının tamlığının gösterilmesi için, önce, $g_\alpha = \mathcal{D}^{\alpha}g \quad (g = g_0)$ olduğu ispatlanmalıdır:

Gerçekten de $f_\nu \to g, (L_2$'de) olduğundan $L_2 \subset D'$ olduğundan $f_\nu \to g$ (D'de)'dır. Diferansiyelleme işlemi D''den D''ye lineer sürekli olduğundan $\mathcal{D}^{\alpha}f_\nu \to \mathcal{D}^{\alpha}g$, ($D'$'de) bulunur. Öte yandan $\mathcal{D}^{\alpha}f_\nu \to g_\alpha$, ($L_2$ de) ve, $L_2 \subset D'$ olduğundan, $\mathcal{D}^{\alpha}f_\nu \to g_\alpha$ (D'de). Limitin tekliğinden $\forall|\alpha| \le s$ için $g_\alpha = \mathcal{D}^{\alpha}g$ bulunur. $\forall|\alpha| \le s$ için $\mathcal{D}^{\alpha} g \in L_2$ olduğundan $g \in H_s(R^n)$'dır. Bundan başka $\forall|\alpha| \le s$ için $\mathcal{D}^{\alpha}f_\nu \to \mathcal{D}^{\alpha}g$ ($L_2(R^n)$ de) olduğundan, $f_\nu \to g$ ($H_s(R^n)$ de) bulunur. Yani, $H_s(R^n)$, tam uzaydır.

$H_s \subset L_2 \subset J'$ olduğundan, $\forall f \in H_s$ için onun Fourier dönüşümü vardır.

Lemma 4.1. $f \in H_s(R^n)$ olması için gerek ve yeter koşul, $f \in J'$ ve $\forall |p| \le s$ için $(2\pi i\xi)^p F[f] \in L_2$ olmasıdır.

İspat: $f \in H_s(R^n)$ olsun. $H_s \subset J'$ olduğundan $f \in J'$'dır. Öte yandan $f \in H_s(R^n) \Rightarrow \forall |p| \le s$ için $f^{(p)} \in L_2(R^n)$'dır. Buradan, Planşeral teoremine göre, $\forall |p| \le s$ için $F[f^{(p)}] \in L_2(R^n)$'dır. $F[f^{(p)}] = (i\xi)F[f]$ olduğu bilindiğinden, $(i\xi)^p F[f] \in L_2(R^n)$ veya $(2\pi i\xi)^{(p)} F[f] \in L_2(R^n)$'dır.

Tersinin ispatı için, $f \in J'$ ve $\forall |p| \le s$ için $(2\pi i\xi)^p F[f] \in L_2(R^n)$ olduğu kabul edilir. $(2\pi i\xi)^p F[f] \in L_2(R^n) \Leftrightarrow F[f^{(p)}] \in L_2(R^n) \Rightarrow f^{(p)} \in L_2(R^n) \Rightarrow f \in H_s(R^n)$ bulunarak Lemma ispatlanmış olur.

$F[\mathcal{D}^{\alpha} f] = (2\pi i\xi)^p F[f]$ olduğundan, Planşerel teoremine göre, $H_s(R^n)$ için aşağıdaki norm belirlenir:

$$\|f\|_s^2 = \sum_{|\alpha| \le s} \left\|(2\pi i\xi)^p F[f](\xi)\right\|_{L_2}^2 = \int_{R^n} \sum_{|p| \le s} \left|(2\pi i\xi)^p\right|^2 \left|F[f](\xi)\right|^2 dx$$

$\|f\|_s^2 = \int_{R^n} \sum \left|D^p f\right|^2 dx \Rightarrow \forall |p| \le s$ için Planşerel teoremine göre,

$$\left(2\pi \int_{R^n} \sum_{|p| \le s} \left|D^p f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\sum_{|p| \le s} \int_{R^n} \left|F[D^p f]\right|^2 d\xi\right)^{1/2} = \left(\sum_{|p| \le s} \int \left|(2\pi i\xi)^p F[f]\right|^2 d\xi\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{|p| \le s} \int_{R^n} \left|(2\pi i\xi)^p\right|^2 \left|F[f]\right|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

$\rho^2 = |\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ olsun. Kolaylıkla ispatlanabildiği gibi öyle $0 < c < C$ sabitleri vardır ki,

$$c \sum_{|\alpha| \leq s} \left|(2\pi i\xi)^p\right|^2 \leq (1+\rho^2)^s \leq C \sum_{|\alpha| \leq s} \left|(2\pi i\xi)^p\right|^2 \tag{4.1}$$

Bu nedenle, $H_s(R^n)$ uzayında yeni norm belirlenebilir ve bu norm, (4.1) koşuluna göre önceki norma denk olacaktır.

$$\|f\|_s^2 = \int_{R^n} (1+|\rho|^2)^s |F[f](\xi)|^2 \, d\xi$$

veya $\|f\|_s^2 = \left\|(1+|g|^2)^{s/2} F[f](\xi)\right\|_{L_2}$

Sonuncu normdan görüldüğü gibi H_s uzayı $\forall s \in R$ için de tanımlanabilir:

$f \in H_s \Leftrightarrow f \in J'$ ve $(1+\rho^2)^{s/2} F(f) \in L_2$.

Teorem 4.2. $\forall s \in R$ için $H_s(R^n)$, tam uzaydır.

İspat: $\{f_\nu\} \subset H_s(R^n)$'de Cauchy dizisi olsun. O halde $H_s(R^n)$'in tanımına göre, $\left\{(1+\rho^2)^{s/2} F[f_\nu](\xi)\right\}$, $L_2(R^n)$'de Cauchy dizisidir. Buradan ve $L_2(R^n)$ tam uzay olduğundan $\exists f \in L_2(R^n)$,

$$(1+\rho^2)^{s/2} F[f_\nu](\xi) \to f(\xi), \qquad (L_2(R^n)\text{'de})$$

$g = (1+\rho^2)^{-s/2} f$ olsun. $g \in J'$ olduğu gösterilmelidir:

$\forall \varphi \in J$ için

$$|(g,\varphi)| = \left|\int g(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\int (1+\rho^2)^{-s/2} f(x)\varphi(x)dx\right| \le \int |\varphi(x)(1+\rho^2)^{-s/2}||f(x)|dx$$

$$\le \left(\int |\varphi(x)(1+\rho^2)^{-s/2}|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

$(1+\rho^2)^{-s/2} \in \theta_M$ olduğundan θ_M'ye çarpma işlemi J'den J'ye, J''den J''ye sürekli olduğundan $\varphi(1+\rho^2)^{-s/2} \in J$'dır.

$J \subset L_2 \Rightarrow \left(\int \varphi(x)(1+\rho^2)^{-s/2} dx\right) < \infty$'dır $\Rightarrow |(g,\varphi)| < \infty$ olur. $\Rightarrow g \in J'$' dır.

Burada θ_M, öyle sonsuz pürüzsüz fonksiyonlar sınıfıdır ki, (R^n de), türevleri polinomlarla majorantlanabilir. Bilindiği gibi, θ_M'den olan fonksiyonlara çarpma işlemi, J''den J''ye ve J'dan J'ye sürekli dönüşümdür. Bundan dolayı $\exists T \in J'$, $F[T] = g$'dir.

$f = (1+\rho^2)^{s/2} g = (1+\rho^2)^{s/2} F[T] \in L_2(R^n)$ ve $T \in J' \Rightarrow T \in H_s(R^n)$'dir. O halde, $f_\nu \to T$, ($H_s(R^n)$ de) olduğu gösterilmelidir.

$$f_\nu \to T, \quad (H_s(R^n) \text{ de}) \Leftrightarrow \int_{R^n} (1+\rho^2)^s |F[f_\nu] - F[T]|^2 d\xi = 0$$

$$\int_{R^n} (1+\rho^2)^s |F[f_\nu] - F[T]|^2 d\xi = \int_{R^n} (1+\rho^2)^s |F[f_\nu] - g|^2 d\xi =$$

$$= \int_{R^n} (1+\rho^2)^s \left|F[f_\nu] - (1+\rho^2)^{-s/2} f\right|^2 d\xi = \int_{R^n} \left|(1+\rho^2)^{s/2} F[f_\nu] - f\right|^2 d\xi \to \int_{R^n} |f - f|^2 d\xi = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow T \in H_s(R^n)$ ve $\{f_\nu\}$ dizisi, $H_s(R^n)$'de T'ye yakınsar.

Tanım 4.1. $\forall s \in R$ için $H_s(R^n)$'de skaler çarpım,

$$(f,g)_s = \left((1+|\xi|^2)^{s/2} F[f](\xi),\ (1+|\xi|^2)^{s/2} \overline{F[g](\xi)}\right)_{L_2}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu çarpımla H_s uzayı Hilbert uzayı oluşturur.

Teorem 4.3. $H_s(R^n)$, ayrılabilen uzaydır.

İspat: Önce, $H_s(R^n)$'in Hausdorff uzayı olduğu ispatlanmalıdır.

$H_s(R^n)$, lineer uzay olduğundan $\forall y_1, y_2 \in H_s$ için Vy_1 ve $Vy_2 \subset H_s(R^n)$ açık alt kümelerinin, $y_1 \in Vy_1, y_2 \in Vy_2$ ve $Vy_1 \cap Vy_2 = \varnothing$ olacak şekilde bulunabileceği gösterilmelidir. Burada $\forall y_1, y_2 \in H_s$, $y_1 = 0$, $y_2 = y \neq 0$ olsun. İspat için, $V_0 \cap V_y \neq 0$ olduğu kabul edilir. Burada

$$V_0^{(n)} = \left\{ x \in H_s(R^n) \Big| \|x\| < \frac{1}{n} \right\}, \quad n = \overline{1,\infty},$$

$$V_y^{(m)} = \left\{ x \in H_s(R^n) \Big| \|y - x\| < \frac{1}{m} \right\}, \quad m = \overline{1,\infty}.$$

Kabule göre, $\forall n, m \in N$ için $V_0^{(n)} \cap V_y^{(m)} \neq 0$ Bu eşitsizlikte limite geçilirse,

$$V_0^{(n)} \cap \lim_{m\to\infty} V_y^{(m)} \neq 0 \tag{4.2}$$

olur.

$V_y^{(m)} \supset V_y^{(m+1)} \supset \ldots$ ise $\lim\limits_{m\to\infty} V_y^{(m)} = y$'dır. (4.2) eşitsizliğine göre,

$$V_0^{(n)} \cap y \neq \varnothing \Rightarrow y \in V_0^{(n)} \Leftrightarrow \|y\|_s < \frac{1}{n}$$

Bu eşitsizlik, $\forall n$ için doğru olduğundan,

$$\|y\|_s \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{4.3}$$

Norm tanımına göre,

$$\|y\|_s \geq 0 \tag{4.4}$$

(4.3) ve (4.4) eşitsizliklerinden, $\|y\|_s = 0$ bulunur. $\|y\|_s = 0 \Rightarrow y = 0$.

Bu ise, $y_2 = y \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $H_s(R^n)$, Hausdorff uzayıdır.

Teorem 4.4. $H_s(R^n)$ uzayı $C_0^\infty(R^n)$ uzayının $\|\cdot\|_s$ normuna göre kapanmasıdır.

İspat 1) $u \in H_s$ olsun. Bilindiği gibi

$u \in H_s(R^n) \Leftrightarrow V(\xi) = F[u](\xi)(1+\rho^2)^{s/2} \in L_2(R^n)$ dır.

Bundan dolayı ve L_2 normuna göre $\overline{C_0^\infty} = L_2$ olduğundan $\exists\{W_k(\xi)\} \in C_0^\infty$,

$W_k(\xi) \to v(\xi), \quad k \to \infty, \quad (L_2(R^n)$ de)

$v_k(\xi) = \dfrac{W_k(\xi)}{(1+\rho^2)^{s/2}} \in C_0^\infty \Rightarrow W_k(\xi) = v_k(\xi)(1+\rho^2)^{s/2}$ dır.

Son eşitlikten ve $\overline{C_0^\infty} = L_2$ olduğundan,

$v_k(\xi)(1+\rho^2)^{s/2} \to v(\xi), \quad k \to \infty, (L_2(R^n)$ de)

$C_0^\infty \subset J \Rightarrow v_k(\xi) \in J$ dır.

Fourier dönüşümü, $F: J \to J$ izomorfizm olduğundan $u_k = F^{-1}(v_k) \in J$ öyle ki, $\|u_k - u\|_s \to 0, \ (k \to \infty)$ dır:

$$\|u_k - u\|_s^2 = \int_{R^n} (1+\rho^2)^s |F[u_k - u](\xi)|^2 d\xi = \int_{R^n} (1+\rho^2)^s |F[u_k](\xi) - F[u](\xi)|^2 d\xi =$$

$$\int_{R^n} \left|(1+\rho^2)^{s/2} F[u_k](\xi) - (1+\rho^2)^{s/2} F[u](\xi)\right|^2 d\xi \to 0, \quad k \to \infty$$

O halde $\|u_k - u\|_s \to 0$ $(k \to \infty)$ dır. Yani, $\forall u \in H_s$ için $\exists \{u_k\} \subset C_0^\infty \subset J$, $u_k \to u$, $k \to \infty$ (H_s de) olduğundan $\bar{J} = H_s$ dır.

2) $\overline{C_0^\infty} = J$ ($\|\cdot\|_s$ normuna göre) olduğu ispatlanır:

$\|\cdot\|_s$ in tanımına göre,

$$s_1 > s \Rightarrow \|\cdot\|_{s_1} > \|\cdot\|_s, \quad \forall s, s_1 \in R.$$

Bundan dolayı $l \in N, l > s$ için

$$\overline{C_0^\infty} = J \quad (\|\cdot\|_l \text{ normuna göre})$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$v \in J$ ve $v_\varepsilon(x) = h(\varepsilon x)v(x)$ olsun. Burada, $h \in C_0^\infty$, $|x| < 1$ için $h(x) = 1$, $\Rightarrow v_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(R^n)$ dır.

$$\|v_\varepsilon - v\|_l^2 = \|h(\varepsilon x)v(x) - v(x)\|_l^2 = \|v(x)(1 - h(\varepsilon x))\|_l^2 \qquad h(x) = 1 \quad |x| < 1$$

olduğundan,

$$h(\varepsilon x) = 1, |x\varepsilon| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \sup h(\varepsilon x) = \left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup ph(\varepsilon x) = R \Rightarrow 1 - h(\varepsilon x) = 0, \quad \varepsilon \to 0$$

$$\|v(x)(1-h(\varepsilon x))\|_1^2 = \int_{R^n}\sum_{|\alpha|\le 1}\left(D^\alpha[v(x)(1-h(\varepsilon x))]\right)^2 dx \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

$s = 0$ için $H_0(R^n) = L_2(R^n)$ dır.

$$\|v(x)(1-h(\varepsilon x))\|_{L_2}^2 = \int_{R^n} v^2(x)(1-h(\varepsilon x))^2 dx = \left|(v^2(x),(1-h(\varepsilon x))^2\right|$$

$$\le \|v^2\|_{L_2}\|(1-h(\varepsilon x))^2\|_{L_2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\|(1-h(\varepsilon x))^2\|_{L_2}^2 = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{R^n}(1-h(\varepsilon x))^4 dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\varepsilon}} dx + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\left(\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\varepsilon}} dx + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} dx\right) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\left[\left(-\frac{1}{\varepsilon}+N\right)+\left(N-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] = 0$$

Bu nedenle $\overline{C_0^\infty} = J$ ($\|\cdot\|_1$ normuna göre) dır. $1 > s$ olduğundan $\overline{C_0^\infty} = J$ ($\|\cdot\|_1$ normuna göre) olur.

1) ve 2) den elde edilen sonuçlara göre $\overline{C_0^\infty} = H_s$ dır.

Teorem 4.5. $u \in H_s(R^n)$ ve $v \in H_{-s}(R^n)$ ise,

$$\exists\{u_k\},\{v_k\} \subset C_0^\infty(R^n), \qquad \|u_k - u\|_s \to 0, \quad \|v_k - v\|_{-s} \to 0, \quad k \to \infty \text{ ve}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{R^n} u_k(x)\overline{v_k(x)}dx$$

vardır. Bunun dışında,

$$\left|\int_{R^n} u(x)\overline{v(x)}dx\right| \le \|u\|_s\|v\|_{-s}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: $\int\limits_{R^n} u_k(x)\overline{v_k(x)}dx = (2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n} F[u_k](\xi)\overline{F[v_k](\xi)}d\xi =$

$(u_k, v_k \in C_0^\infty \subset L_2 \Rightarrow u_k, v_k \in L_2 \Rightarrow$ Planşerel teoremine göre $F[u_k], F[v_k] \in L_2$ vardır)

$$= (2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n}(1+\rho^2)^{s/2}F[u_k](\xi)(1+\rho^2)^{-s/2}\overline{F[v_k](\xi)}d\xi$$

olduğundan ve $L_2(R^n)$'de

$$(1+\rho^2)^{s/2}F[u_k](\xi) \to (1+\rho^2)^{s/2}F[u](\xi), \quad k\to\infty,$$
$$(1+\rho^2)^{-s/2}F[v_k](\xi) \to (1+\rho^2)^{-s/2}F[v](\xi), \quad k\to\infty,$$

olduğundan son eşitlikte limite geçerek,

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{R^n} u_k(x)\overline{v_k(x)}dx = (2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n} F[u](\xi)\overline{F[v](\xi)}d\xi$$

bulunur. Burada,

$$\left|\int\limits_{R^n} F[u](\xi)F[v](\xi)d\xi\right| = \left|\int\limits_{R^n} F[u](\xi)(1+\rho^2)^{s/2}\overline{F[v](\xi)}(1+\rho^2)^{-s/2}d\xi\right| \le$$

$$\le\left(\int\limits_{R^n}|F[u](\xi)|^2(1+\rho^2)^s d\xi\right)^{1/2}\left(\int\limits_{R^n}|F[v](\xi)|^2(1+\rho^2)^{-s}d\xi\right)^{1/2} =$$

$$= \|u\|_s\|v\|_{-s} < \infty$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{R^n} u_k(x)\overline{V_k(x)}dx$ vardır.

$$\left|\int\limits_{R^n} u(x)\overline{v(x)}dx\right| = \left|(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n} F[u](\xi)\overline{F[v](\xi)}dx\right| =$$

$$\left|(2\pi)^{-n}\int_{R^n} F[u](\xi)(1+\rho^2)^{s/2}\overline{F[v](\xi)(1+\rho^2)^{-s/2}}d\xi\right| \le$$

$$\le \int_{R^n}|F[u](\xi)|(1+\rho^2)^{s/2}d\xi\int_{R^n}|F[v](\xi)|(1+\rho^2)^{-s/2}d\xi = \|u\|_s\|v\|_{-s}.$$

Teorem 4.6. $u \in H_s(R^n)$ ise,

$$\|u\|_s = \sup_{v\in C_0^\infty}\left\{\frac{\int_{R^n} u(x)\overline{v(x)}dx}{\|v\|_{-s}}\right\}$$

İspat: Koşula göre $u \in H_s \Rightarrow u \in L_2$, $v \in C_0^\infty \Rightarrow v \in L_2$ ' dır.

$$\int u(x)\overline{v(x)}dx = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} F[u](\xi)\overline{F[v](\xi)}d\xi$$

$$u_1(\xi) = F[u](\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2},\ v_1(\xi) = F[v](\xi)(1+|\xi|^2)^{-s/2}$$

olsun. O halde $u_1, v_1 \in L_2(R^n)$ 'dır. Bu fonksiyonların tanımına göre,

$\|u\|_s = \|u_1\|_0$, $\quad \|v\|_s = \|v_1\|_0$ 'dır.

$$|(u_1,v_1)| \le \|u_1\|_{L_2}\|v_1\|_{L_2}$$

$$\left|\int_{R^n} u_1(\xi)\overline{v_1(\xi)}d\xi\right| \le \|u_1\|_0\|v_1\|_0 \Rightarrow \|u_1\|_0 \ge \frac{|(u_1,v_1)|}{\|v_1\|_0}$$

$\forall v \in C_0^\infty$ olduğundan,

$$\|u_1\|_0 \ge \sup_{v_1\in C_0^\infty}\left\{\frac{|(u_1,v_1)|}{\|v_1\|_0}\right\} \tag{4.5}$$

Özel durumda $u_1 = v_1$ olduğunda

$$\|u_1\|_0 = \frac{|(u_1, u_1)|}{\|u_1\|_0}$$

Burada $\|u_1\|$, (4.5)'daki kümenin elemanlarından biri olduğundan,

$$\|u_1\|_0 \le \sup\left\{\frac{|(u_1, v_1)|}{\|v_1\|_0}\right\} \tag{4.6}$$

(4.5) ve (4.6) eşitsizliklerinden

$$\|u_1\|_0 = \sup_{v_1 \in C_0^\infty}\left\{\frac{|(u_1, v_1)|}{\|v_1\|_0}\right\}\text{'dır.}$$

Bu eşitlik, $\forall v \in C_0^\infty$ için gösterilmelidir.

$$\|u\|_{L_2} \le \sup_{v \in C_0^\infty}\left\{\frac{|(u, v)|}{\|v_1\|_{L_2}}\right\}$$

$\overline{C_0^\infty} = L_2(R^n)$ olduğundan $\exists\{u_k\} \in C_0^\infty$, $u_k \to u$, $k \to \infty$ (L_2 de) ise, L_2 uzayında normun sürekliliğinden,

$$\|u_k\|_{L_2} \to \|u\|_{L_2}, \quad \|u_k\|_{L_2} = \sup\left\{\frac{|(u_k, v)|}{\|v\|_{L_2}}\right\}, \quad k = \overline{1, \infty}$$

Burada limite geçilirse, skaler çarpımın limitinin sürekliliğinden,

$$\|u\|_{L_2} \le \sup_{v\in C_0^\infty}\left\{\frac{|(u,v)|}{\|v\|_{L_2}}\right\}, \qquad v \neq 0$$

bulunur.

Teorem 4.7. H_s^* uzayına ait olan l elemanı

$$l(u) = \int_{R^n} u(x)\overline{v(x)}dx$$

şeklindedir. Burada $v \in H_{-s}$ ve

$\|l\| = \|v\|_{-s}$ dır.

İspat: $A_s(u) = (1+\rho^2)^{s/2}F[u](\xi)$ olsun. Eğer $u \in H_s$ ise, $A_s u \in L_2$ ve

$\|A_s u\|_0 = \|u\|_s$ dır.

$A_s : H_s \to L_2$ izometri olduğundan H_s^* uzayına ait olan l fonksiyoneli için L_2^* uzayından olan bir eleman vardır. $L_2^* = L_2$ olduğundan, $\exists w \in L_2$,

$$\|w\|_0 = \|l\|, \text{ ve} \tag{4.7}$$

$$l(u) = (w,u) = \int_{R^n} w(\xi)A_s u d\xi = \int_{R^n} w(\xi)(1+\rho^2)^{s/2}F[u](\xi)d\xi$$

Burada v, H_{-s} uzayından olan öyle fonksiyondur ki,

$$F[v](\xi) = (1+\rho^2)^{s/2}w(\xi) \Rightarrow v(\xi) = F^{-1}\left[(1+\rho^2)^{s/2}w(\xi)\right]$$

$$v(x) = \int_{R^n} w(\xi)(1+\rho^2)^{s/2} e^{-i\xi x} d\xi$$

$$v \in H_{-s} \Leftrightarrow v \in J^1 \text{ ve } \int_{R^n} |F[v](\xi)|^2 (1+\rho^2)^{-s} d\xi < \infty$$

$$\int_{R^n} |F[v](\xi)|^2 (1+\rho^2)^{-s} d\xi = \int_{R^n} |w(\xi)|^2 (1+\rho^2)^{s} (1+\rho^2)^{-s} d\xi = \int_{R^n} |w(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

$$\Rightarrow F[v](\xi)(1+\rho^2)^{-s/2} \in L_2(R^n) \Rightarrow v \in H_{-s}$$

$$\|v\|_{-s}^2 = \int_{R^n} |F[v](\xi)|^2 (1+\rho^2)^{-s} d\xi = \int_{R^n} |w(\xi)|^2 d\xi = \|w\|_0^2$$

$\|v\|_{-s}^2 = \|w\|_0^2$ ve (4.8) eşitliğinden,

$$\|v\|_{-s}^2 = \|1\|$$

elde edilir.

Teorem 4.8. $u \in H_s(R^n)$ ve $u_h(x), u$ fonksiyonunun ortalaması olsun. O halde

$$\|u_h - u\|_s \to 0, h \to 0$$

İspat: $u_h(x), u$ nun ortalaması yani, $u_h(x) = (u_* w_h)(x)$ olduğundan onun Fourier dönüşümü,

$$F[u_h](\xi) = F[u](\xi) F[w_h](\xi)$$

şeklindedir. Burada,

$$F[w_h](\xi) = F[w](h\xi) \quad \text{dır} \tag{4.8}$$

$$F[w_h](\xi) = \int_{R^n} w_h(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{h^n} \int_{R^n} w\left(\frac{x}{h}\right) e^{-i\xi x} dx = \int_{R^n} w\left(\frac{x}{h}\right) e^{-i(h\xi)\left(\frac{x}{h}\right)} d\left(\frac{x}{h}\right) \tag{4.9}$$

$\frac{x}{h} = y$ olsun. O halde

$$F[w_h](\xi) = \int_{R^n} w(y) e^{-ih\xi y} dy = F[w](h\xi) \text{ dır.}$$

$F[w]$ sürekli olduğundan, $F[w](h\xi)$ fonksiyonları h 'a göre düzgün sınırlıdırlar ve

$$F[w](h\xi) \to f[w](0), h \to 0 \text{ ve}$$

$$F[w](0) = \int_{R^n} w(y) e^{-i0y} dy = \int_{R^n} w(y) dy = 1$$

Bu yakınsaklık, her bir kompakta düzgün yakınsaklıktır. O halde, Lebusgue integralinin özelliklere göre,

$$\|u_h - u\|_s = \int_{R^n} |F[u_h](\xi) - F[u](\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi =$$

$$= \int_{R^n} |F[u](\xi) F[w_h](\xi) - F[u](\xi)|^2 (1 + |\xi^2|)^s d\xi =$$

$$= \int_{R^n} |F[u](\xi)|^2 |F[w_h](\xi) - 1|^2 (1 + |\xi^2|)^s d\xi \leq$$

$$\leq \sup_{\xi \in R^n} |F[w](h\xi) - 1|^2 \int_{R^n} |F[u](\xi)|^2 (1 + |\xi^2|)^s d\xi$$

$$\leq M \sup_{\xi \in R^n} |F[w](h\xi) - 1|^2 \to 0$$

$$\|u_h - u\|_s \to 0, h \to 0$$

Not 4.1: (4.10) formülündeki $e^{-i(h\xi)y}$ fonksiyonu sürekli olduğundan (ξ ye göre) $F[w](h\xi)$, her bir kompaktda düzgün süreklidir. Bu durumda $w(y) = w_1(y)$ dır. Yani, 1 yarıçaplı kürenin dışında $w(y) = 0$ dır. Bu nedenle y,1 yarıçaplı kürede değerler alırsa, ξy çifti, kompktda değerler alır. Bunların anlamı ise, $F[w](h\xi) \to 1$yakınsaklığının her bir kompaktda düzgün olmasıdır yani $F[w](h\xi) \Rightarrow 1$.

Not 4.2: $F[w](h\xi)$ fonksiyonları h'a göre düzgün sınırlıdırlar:

Gerçekten de,

$$|F[w](h\xi)| = \left|\int_R w(y)e^{-iy(h\xi)}dy\right| \leq \int_R |w(y)||e^{-iy(h\xi)}|dy$$

$$\leq \int_R |w(y)e^{-iy(h\xi)}dy| = 1 \text{ dır.}$$

Teorem 4.9. Sobolev'in Gömme Teoremi:

Eğer $u \in H_s(R^n)$, $s > k + \frac{n}{2}$ ise, $u \in C^k$ dır. Öyle ki,

$$\|u\|_{C^k} \leq A\|u\|_s$$

ve A, u'ya bağımlı değildir.

İspat: ispat, 2 kısımdan oluşur:

1) $u \in c_0^\infty(R^n)$ olsun. O halde, $\forall \alpha$,

$$\mathcal{D}^\alpha u(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{R^n} (i\xi)^\alpha F[u](\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

ve bundan dolayı $|\alpha| \leq k$ olduğunda

$$|\mathcal{D}^\alpha u(x)| \leq (2\pi)^{-n}\int_R |F[u](\xi)|(1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\xi^2|)^{-s/2}\xi^\alpha d\xi \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-n}\left[\int_{R^n}|F[u](\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right]^{1/2}\left[\int_{R^n}|\xi^\alpha|^2(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right]^{1/2}$$

Burada $s > k + \frac{n}{2}, |\alpha| \le k \Rightarrow |\alpha| < s - \frac{n}{2}$ ve

$$\int_{R^n} |\xi^\alpha|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi = \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{|\alpha|} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi$$

$$= \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{|\alpha|-s} d\xi = \int_{R^n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|}} \le \int_{R^n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n}{2}}} d\xi < \infty \text{ dır.}$$

Bu nedenle

$$|D^\alpha u(x)| \le (2\pi)^{-n} \left[\int_{R^n} |F[u](\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi \right]^{1/2} \left[\int_{R^n} |\xi|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi \right]^{1/2} \le \|u\|_s A$$

$\Rightarrow \|u\|_{c^k} \le A \|u\|_s$ dır.

Burada $\|u\|_{c^k[0,1]} = \max\limits_{[0,1]} |u(x)| + \max\limits_{[0,1]} |u'(x)| + \ldots + \max\limits_{[0,1]} |u^{(k)}(x)|$ dır.

2) $u \in H_s(R^n)$ olsun. Teorem (4.4)' e göre,

$\exists \{u_m\} \in C_0^\infty(R^n), \|u_m - u\|_s \to 0, m \to \infty$

Teoremin birinci kısmında ispatlandığına göre,

$\|u_m - u_m\|_{c^k} \le A \|u_m - u_m\|_s$ dır.

Bu nedenle $\exists v \in C^k, u_m \to v(C^k$ da$)$, $m \to \infty$. Ayrıca,

$u(\varphi) = \lim\limits_{m \to \infty} \int_{R^n} u_m(x)\varphi(x)dx = \int_{R^n} v(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in c_0^\infty(R^n)$

o halde ,hemen hemen her yerde $u(x) = v(x)$ ve

$\|u\|_{c^k} \leq A\|u\|_s$ dır.

Yani u fonksiyonu, ölçüsü sıfır olan kümede değiştirilerek k mertebeden türevleri sürekli olan fonksiyonlar haline getirilebilir.

4.2. Gömme Teoremleri

$\Phi \subset E \cap F$ ve Φ,E ve F de her yerde yoğun olsun. Yani, $\overline{\Phi} = E$, $\overline{\Phi} = F$ olsun. (Genel olarak sonsuz pürüzsüz fonksiyonlar kümesi, Φ ile gösterilir).

$\forall \varphi \in \Phi$ için

$$\|\varphi\|_F \leq c\|\varphi\|_E, \quad c \text{, sabit} \tag{4.10}$$

eşitsizliği doğru olsun.

$I: E \to F$ öyle operatör olsun ki, I her bir $\varphi \in E \cap \phi$ fonksiyonunu $I(\varphi) = \varphi \in F \cap \Phi$ ye dönüştürsün. (4.10) eşitsizliğine ve $\overline{\Phi} = E$ koşuluna göre, lineer I operatörü tüm E ye sürekli genişletilebilir. Bu durumda her bir $\varphi \in E$, $I(\varphi) \in F$ e dönüşmüş olur. O halde E, F ye gömülmüştür denir.

I gömme operatörünün özelliklerinin (süreklilik, tam süreklilik gibi) ispatı, gömme teoremlerini oluşturur.

Burada araştırılacak olan uzaylar D' veya D'_Ω uzayının alt kümeleri olduğundan gömme, aşağıdaki gibi de anlaşılabilir:

E ve F, R lineer topoloji uzayının alt kümeleri olsunlar. Bu durumda E nin F ye gömülmesi, kümelerdeki gibi E nin F ye ait olması gibi anlaşılır, yani $E \subset F$. Bu halde I, tüm E uzayında tanımlanmış olur ve o, $I: R \to R$ birim operatörünün E ye daralmışı olur.

Burada gereken halde gömmenin her iki tanımı aynı olacaktır.

Teorem 4.10. E ve F Banach uzayları R lineer topoloji uzayının alt kümeleri olsunlar. Öyle ki, $\|\cdot\|_E$ ve $\|\cdot\|_F$ normalarına göre yakınsaklıktan, R de yakınsaklık elde edilir. Bunu dışında $\Phi = E \cap F$ kümesi E ve F de her yerde yoğundur. O halde $E \subset F$ koşulu ve (4.10) eşitsizliği denktirler.

İspat: (4.10) eşitsizliği doğru olsun ve $u \in E$, keyfi eleman olsun. Bu durumda $u \in F$ olduğu ispatlanır:

$\overline{\Phi} = E$ ise $\exists \{u_n\} \subset \phi$, $\forall u \in E$ için, $u_n \to u$, (E de), $n \to \infty$ olduğundan ve (4.10) koşulundan $\{u_n\}$, F de de Cauchy dizisidir. ($\{u_n\} \subset \Phi, \Phi \subset F \Rightarrow \{u_n\} \subset F$), yani F de yakınsaktır. Teoremin şartına göre $u_n \to u$, R' de, $n \to \infty$ dır.

Bundan dolayı $\{u_n\}$ dizisinin limiti F uzayında da u dur. O halde $u \in F$ dir. Yani $E \subset F$'dir.

Yeterliliğin ispatı için $E \subset F$ olduğu kabul edilir.

$I: \varphi \in E \to \varphi \in F$ I, birim operatör olsun. I' nın kapalı operatör olduğu ispatlanır:

Bu operatör, tüm E de tanımlandığından, Banach teoremine göre, sürekli olacaktır. Süreklilik ise, (4.10) eşitsizliğine denktir. Kapalılığın ispatı için,

$$\|u_n\|_E \to 0 \text{ ve } \quad n \to \infty \Rightarrow \|I(u_n) - u\|_F = \|u_n - u\|_F \to 0, \quad n \to \infty$$

olduğu kabul edilir. O halde

$u_n \to 0$ E'de ve $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ F de, $I(u_n) \to I(0)$ ve $I(u_n) \to u, F$' de $\Rightarrow u = I(0) = 0$'dır.

Yani I operatörü kapalıdır. Yani $E \subset F$ olması ise (4.10) koşulu sağlanır. Bu ise, teoremin ispatıdır.

Bilindiği gibi $H^n(\Omega)$ ve $C(\Omega)$' daki topolojiler $D'(\Omega)$ daki topolojiden güçlüdürler. Bundan dolayı ($R = D'$ veya $R = D'(\Omega)$) olduğunda Teorem (4.7), $H^n(\Omega)$ ve $C(\Omega)$ uzaylarına uygulanabilir.

Böylece $E \subset F$, bir uzayın diğerine topolojisi ile birlikte bir uzayın diğerine aitliği gibi veya (4.10) koşulunun sağlanması gibi anlaşılır. $H^n(\Omega)$ uzayları için gömme teoremlerinde Fourier dönüşümleri kullanılmaz çünkü $u \in H^n(\Omega)$ fonksiyonları tüm R^n de belirlenmemişlerdir.

4.3. R^n Uzayında Tanımlanmış Fonksiyonlar İçin Gömme Teoremleri:

1. H_μ uzayının H_ν ve C uzaylarına gömülmesi.

Teorem 4.11. H_μ uzayının H_ν 'ye gömülmesi için,

$$\nu(\xi)\mu^{-1}(\xi) < C \qquad C\text{, sabit} \tag{4.11}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir.
Burada $\mu(\xi)$ ve $\nu(\xi)$, ağırlık fonksiyonlardır. Onların sürekli olması ve örneğin, $\mu(\xi)$ için

$$\mu(\xi)\mu^{-1}(\eta) \le c(1+|\xi-\eta|)^l$$

koşulunun (herhangi bir c ve l sabitleri için) sağlanması farz edilir.

İspat: Teorem (4.10)'a göre, (4.11) koşulunun

$$\|u\|_\nu \le c\|u\|_\mu, \quad u \in C_0^\infty, \tag{4.12}$$

koşuluna denk olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$\nu(\xi) \le c\mu(\xi)$ olsun. O halde,

$$\nu^2(\xi) \le c^2\mu^2(\xi)$$

eşitsizliği $\forall u \in C_0^\infty$ için $|F[u](\xi)|^2$ ile çarpılır ve integrali alınırsa,

$$\int_{R^n} |F[u](\xi)|^2 \nu^2(\xi)d\xi \le c^2 \int_{R^n} |F[u](\xi)|^2 \mu^2(\xi)d\xi \Rightarrow \|u\|_\nu \le c\|u\|_\mu$$

elde edilir. Yeterliliğin ispatı için, (4.12) koşulunun varlığı kabul edilir. $\forall u \in C_0^\infty$ için

$$\|u\|_\nu \le c\|u\|_\mu \Leftrightarrow \int_{R^n} |F[u](\xi)|^2 \nu^2(\xi)d\xi \le c\int_{R^n} |F[u](\xi)|^2 \mu^2(\xi)d\xi$$

Son eşitsizlikte $h(\xi) = F[u](\xi)\mu(\xi)$ yazılırsa,

$$\int_{R^n} \nu^2(\xi)\mu^{-2}(\xi)|h(\xi)|^2 d\xi \le c\int_{R^n} |h(\xi)|^2 d\xi$$

elde edilir.

1) u, C_0^∞ da değiştiği zaman, $\overline{\{h(\xi)\}} = L_2(R^n)$ olduğu ispatlanmalıdır:

$w \in L_2(R^n)$ olsun. $\overline{C_0^\infty} = L_2$ olduğundan, $\exists\{w_n\} \subset C_0^\infty$, $w_n \to w, n \to \infty$ (L_2'de)..
$\forall_n$ için $\{w_n\} \in C_0^\infty$ ise $w_n(\xi).\mu^{-1}(\xi) \in C_0^\infty$ olduğundan, $\forall_n$ için $\exists\{u_n\} \subset H_s$

$$F[u_n](\xi) = w_n(\xi)\mu^{-1}(\xi) \Rightarrow F[u_n](\xi)\mu(\xi) = w_n(\xi)$$

Ayrıca $\{u_n\} \subset H_s, \overline{C_0^\infty} = H_s$ olduğundan, $\forall_n$ için

$$\exists\{u'_{n,m}\} \subset C_0^\infty,\ u'_{n,m} \to u_n, \quad m \to \infty \ H_s\text{'de} \tag{4.13}$$

Bu nedenle, (4.13) koşulundan görüldüğü gibi, $\exists\{u'_{m(n)}\} \subset C_0^\infty$,

$$F[u'_{m(n)}](\xi)\mu(\xi) \to w(\xi), (L_2)\text{'de, } m \to \infty$$

Burada, $\{F[u'_{m(n)}](\xi)\mu(\xi)\} \subset \{h(\xi)\}$ olduğu açıktır.

O halde, $\{\overline{h(\xi)}\} = L_2(R_n)$ dır.

2) (4.13) koşulu tüm $L_2(R^n)$ uzayında doğru olduğundan, $w(\xi) \in L_2$,

$$w(\xi) \to v(\xi)\mu^{-1}(\xi)w(\xi) \in L_2$$

dönüşümü, L_2 den L_2'ye lineer ve süreklidir (sınırlıdır). O halde bu lineer dönüşümün normu,

$$\left(\int_{R^n} v^2(\xi)\mu^{-2}(\xi)d\xi\right)^{1/2} = \left\|v(\xi)\mu^{-1}(\xi)\right\|_{L_2}$$

eşitliği ile belirlenir. Bu nedenle,

$$\int_{R^n} \nu^2(\xi)\mu^{-2}(\xi)d\xi < \infty$$

$\nu^2(\xi)\mu^{-2}(\xi) > 0,\ \forall\xi \in R^n$ ve integralleme tüm R^n boyunca olduğundan $\nu(\xi)\mu^{-1}(\xi)$ sınırlıdır yani, $\nu(\xi)\mu - 1(\xi) < c$ dir.

Teorem 4.12. H_μ uzayının $C(R^n)$ uzayına gömülmesi için,

$$\int_{R^n} \eta^{-2}(\xi)d\xi = A^2 < \infty \tag{4.14}$$

koşulunun sağlanması gerekli ve yeterlidir.

Yani, keyfi $u \in H_\mu$ fonksiyonunun ölçüsü sıfır olan kümede değiştirmekle sürekli olması için (4.14) koşulunun sağlanması gerekli ve yeterlidir.

İspat: Teorem (4.10)'a göre, (4.14) koşulunun

$$\max_{X}|u(x)| \le c\|u\|_\mu, u \in C_0^\infty \tag{4.15}$$

koşuluna denk olduğunu ispatlamak gerekli ve yeterlidir.

İspat için, önce, (4.14) koşulunun doğru olduğu kabul edilir. Ters Fourier dönüşümünün tanımına göre,

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} F[u](\xi)e^{i(\xi,x)}d\xi$$

formülüne Schwarz eşitsizliği uygulanır ve (4.14) koşulu da gözönüne alınırsa,

$$|u(x)| \le (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} |F[u](\xi)\mu(\xi)|\mu^{-1}(\xi)d\xi \le$$

$$\le (2\pi)^{-n/2}\left(\int_{R^n} |F[u](\xi)\mu|(\xi)^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{R^n} |\mu^{-1}(\xi)^2| d\xi\right)^{1/2} \le A^2\|u\|_\mu, \quad u \in C_0^\infty$$

elde edilir. Yani (4.15) koşulu sağlanır. Bu nedenle (4.13) doğru ise $H_\mu \subset C(R^n)$ dır. Yeterliliğin ispatı için, (4.15) koşulunun sağlandığı kabuıl edilir. Özel durumda,

$|u(0)| \le c\|u\|_\mu$ Yani,

$\delta(x): u(x) \to u(0)$

δ fonksiyonu H_μ de süreklidir. Bu nedenle $\delta \in (H_\mu)^*$

$(H_\mu)^* = H_{\frac{1}{\mu}}$ olduğundan $\delta \in H_{\frac{1}{\mu}}$ ve $F[\delta] = 1, \delta \in H_{\frac{1}{\mu}} \subset L_{\frac{1}{\mu}}; F{:}\, L_{\frac{1}{\mu}} \to L_{\frac{1}{\mu}}$ izomorfizm olduğundan $F[\delta] \in L_{\frac{1}{\mu}}$ dır. Yani $1 \in L_{\frac{1}{\mu}}$ ise $\mu^{-1}(\xi) \in L_2(R^n)$ dir. Bu ise, teoremin yeterliliğin ispatıdır.

Bu teoremden, özel durumda aşağıdaki sonuç bulunur (Sabolev'in gömme teoremi):

$w_2^1(R^n) \subset C$ olması için gerekli ve yeterli koşul,

$1 > \frac{n}{2}$ olmasıdır. $w_2^{(1)}(R^n) = H_\mu, \mu = (1+|\xi|)^{1/2}$ ye dır.

Böyle μ için (4.14) koşulu, $\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{-1} d\xi < \infty$ olması demektir. Bu eşitsizlik ise, $1 > \frac{n}{2}$ olduğunda doğrudur.

2) H_μ uzayının L_p ye gömülmesi

$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ olduğunda $L^*_{p'}=L_p$ dır. Yani, $u \in L_p$, $\varphi \in L_{p'}$ ise Hölder eşitsizliğinden,

$$|u(\varphi)|=\left|\int_{R^n} u(x)\varphi(x)dx\right| \le \left(\int_{R^n} |u(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_{R^n} |\varphi(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'} = \|u\|_p \|u\|_{p'} < \infty$$

$$\Rightarrow u(\varphi)=\int_{R^n} u(x)\varphi(x)dx < \infty$$

elde edilir.

Lemma 4.2. $L_p(R^n)=\left\{u \in D' \middle| |u(\varphi)| \le c\|\varphi\|_{p'}, \varphi \in D, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right\}$

İspat: **1)** $u \in L_p(R^n)$ ve $\forall \varphi \in D(R^n)$ olsun. $\forall p' > 0$ için $\varphi \in L_{p^1}$ olduğu açıktır. Hölder eşitsizliğine göre,

$$|u(\varphi)|=\left|\int_{R^n} u(x)\varphi(x)dx\right| \le \left(\int_{R^n} |u^p(x)|dx\right)^{1/p}\left(\int_{R^n} |\varphi^{p'}(x)|dx\right)^{1/p} \le \|u\|_p \|\varphi\|_{p'} = c\|\varphi\|_{p'}$$

2) Tersinin ispatı için, $u \in D'$ öyle fonksiyon olsun ki, $\forall \varphi \in D(R^n)$ için

$$|u(\varphi)| \le c\|\varphi\|_p \tag{4.16}$$

koşulunun varlığı kabul edilsin. $\overline{D}=L_{p'}(R^n)$ olduğundan ve (4.16) koşulundan

$$|u(\varphi)| \le c\|\varphi\|_p, \quad \forall \varphi \in L_{p'}(R^n) \text{ için} \tag{4.17}$$

O halde, $u \in L^*_{p'}$, $L^*_{p'}=L_p$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ olduğundan, $u \in L_p$ dır. Bu ise, lemmanın ispatıdır.

μ_r^2, $1 \le r \le 2$, öyle lokal integrallenebilen $\beta(\xi)$ fonksiyonlar uzayı olsun ki, onlar için

$$\left(\int_{R^n} |\beta(\xi) F[\varphi](\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \le c\|\varphi\|_r, \quad \varphi \in C_0^\infty \tag{4.17}$$

koşulu sağlansın. (4.17) koşulunu sağlayan c sabitlerinin en küçüğü, $\mu_r^2(\beta)$ ile gösterilir.

Teorem 4.13 H_μ uzayının L_p ye $(p \ge 2)$ gömülmesi için, $\mu^{-1}(\xi) \in \mu_{p'}^2$ koşulunun sağlanması gerekli ve yeterlidir.

Not 4.3. $p = \infty$ olduğunda $p' = 1$ ve $\mu_1^2 = L_2$ dır. Bu durumda Teorem (4.12), Teorem (4.13)'ün limit halidir.

İspat: 1) Yeterliliğin ispatı için, $\mu^{-1}(\xi) \in \mu_{p'}^2$ olduğu kabul edilir.

$\forall u \in H_\mu$ ve $\forall \varphi \in C_0^\infty$ olsun. Schwartz eşitsizliğine göre,

$$|u(\varphi)| \le \left| \int_{R^n} u(x)\overline{\varphi(x)}dx \right| = \left| \int_{R^n} F[u](\xi)\overline{F[\varphi](\xi)}d\xi \right| =$$

$$= \left| \int_{R^n} [F[u](\xi)\mu(\xi)][\mu^{-1}(\xi)\overline{F[\varphi]}(\xi)]d\xi \right| \le \left[\int_{R^n} \mu^{-2}(\xi)|F[\varphi](\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \|u\|_\mu$$

$$\Rightarrow \|u\|_p = \sup_{\varphi \in C_0^\infty} \frac{|u(\varphi)|}{\|\varphi\|_{p'}} \le c\|u\|_\mu$$

Bu ise, $H_\mu \subset L_p$ demektir.

2) Gerekliliğin ispatı için,

$$\|u\|_p \le c\|u\|_\mu, \quad u \in H_\mu \tag{4.18}$$

olduğu kabul edilir. Bu durumda belirtilmiş $\forall\varphi \in C_0^\infty$ için $l_\varphi(u) = u(\varphi)$ fonksiyoneli H_μ 'de sürekli olacaktır: Hölder eşitsizliğine göre,

$$\left|l_\varphi(u)\right| = \left|u(\varphi)\right| = \left|\int_{R^n} u(x)\overline{\varphi(x)}dx\right| \le \left(\int_{R^n}\left|u(x)\right|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_{R^n}\left|\varphi(x)\right|^{p'} dx\right)^{1/p'} \tag{4.19}$$

$\forall p' > 0$ için $\varphi \in C_0^\infty \Rightarrow \in L_{p'}$ dır. O halde (4.19) koşuluna göre,

$\left|l_\varphi(u)\right| \le \|\varphi\|_{p'}\|u\|_p \le [c\|\varphi\|_{p'}\|u\|_\mu$ olur.

Sonuncu eşitsizlikten görüldüğü gibi, bu fonksiyonelin normu $[c\|\varphi\|_{p'}]$ 'yü aşmıyor.

Öte yandan l_p fonksiyonelinin normu $\|\varphi\|_{\mu^{-1}}$ 'e eşittir. Bunun nedeni ise, Schwartz eşitsizliğine göre,

$$\left|l_u(u)\right| = \left|\int_{R^n} F[u](x)\overline{F[\varphi](x)}dx\right| = \left|\int_{R^n}\left[\mu(x)F[u](x)\right]\left[\mu^{-1}(x)\overline{F[\varphi]}(x)\right]dx\right|$$

$$\le\left(\int_{R^n}\left|[\mu(x)F[u]\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{R^n}\left|\mu^{-1}(x)\overline{F[\varphi](x)}\right|^2 dx\right)^{1/2} = \|\varphi\|_{\mu^{-1}}\|u\|_\mu$$

ve $u = (\mu^{-1})^2\varphi(x)$ ise

$$\left|l_\varphi(u)\right| = \left|\int_{R^n} u(x)\overline{\varphi(x)}dx\right| = \left|\int_{R^n}\left[\mu^{-1}\overline{\varphi(x)}\right]^2 dx\right| \le \int_{R^n}\left|\mu^{-1}\overline{\varphi(x)}\right|^2 dx = \|\varphi\|_{\mu^{-1}}$$

olur. O halde,

$$\left(\int_{R^n}\mu^{-2}(\xi)\left|F[\varphi](\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \le c\|\varphi\|_{p'}, \qquad \varphi \in C_0^\infty$$

Bu ise, μ_r^2 uzayının tanımına göre, $\mu^{-1} \in \mu_{p'}^2$ demektir.

Not 4.4. Teorem (4.12) ve Teorem (4.13) tekrar edilirse sırasıyla

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{m/2} \mu^{-1}(\xi) \in L_2(R^n) \quad \text{ve} \quad \left(1+|\xi|^2\right)^{m/2} \mu^{-1}(\xi) \in \mu_{p'}$$

koşullarının $H_\mu \subset C^m$ ve $H_\mu \subset W_p^{(m)}$ gömmeleri için gerekli ve yeterli koşul olduğu görülür.

KAYNAKLAR

1. VLADİMİROV, V. C.,1979. Mathematical Phisic Equations. M.Nauku, Russian

2. KOLOMOGROV, A. N., FOMİN,S.V.,1981. Theory of Functions and Elements of Functional Analysis. M. Nauka ,Russian

3. SCHWARTZ, L.,1956.Variedades Analiticals Complejas -Equationes Diferanciels Parciales Elipticas.Universidad Nacional de Colombia Depertmanto De Matematicas Y Estadistica, BOGOTA D.E. COLOMBİA

4. YEGAROV, Y.V.,1985. Differantial Equationes with Partial Darivative. Moscov Government Universty., Russion.

5. GELFAND ,İ.M.,ŞİLOV, G.Y.,1958. Genelleşmiş Fonksiyonlar ve Onlar Üzerinde İşlemler.M.Fizmatgiz.

6. HÖRMANDER, L., 1963. Linear Partial Differantial Operatörs. Spinger.VERAL

7. VLADİMİROV,V. S., 1976. Generalized Functions of Mathematical Phisic.M. Nauka.

8. VOLEVİÇ, L.R., PANEYAH, B.P.,1965. Some Generalized Function Spaces and Imbeeding Theorems.Uspehi Mathematices.kih Nauk, C.x.x. , 1(121).RUSSİAN.

9. ADAMS, R.A.,1975. Sobolev Spaces. Nev York San Fransisko London A Subsidiary of Harcourd Brace Jovanovich,Publishers.513.88(02)=20 . USA.

10. RUDİN,W., 1921. Functional Analysis.Libriary of Congress Cataloging in Publication Data, QA320. R83 515'7 71-39686,USA.

11. SİLVERMAN,R.A.,1970. Russian Publications in the Methematical Sciens. Introductory Real Analysis. Libriary of Congres Catalog Number 72-116459, Russian.

12. ROYDEN, H.L.,1963. Real Analysis,Macmillan.

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Gebze'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Gebze'de tamamladı. 1990 yılında girdiği Anadolu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1994 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı. 1995 yılında S.T.F.A. Anadolu Teknik Lisesinde, 1996 yılında Tuzla Yunus Emre İlköğretim Okulu'nda matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 1997 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi Olarak göreve başladı.