

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ – FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARI-LİNEER PARABOLİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE
BİLİNMEYEN KATSAYININ BULUNMASI İÇİN SAYISAL
PROSEDÜRLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nimet KIRGIZ

78231

Anabilim Dalı: MATEMATİK

EKİM 1998

78231
T.C. YERLİ İZLENİM VE KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ - FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

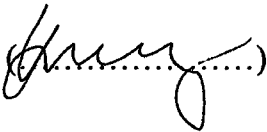
YARI-LİNEER PARABOLİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE
BİLİNMEYEN KATSAYININ BULUNMASI İÇİN SAYISAL
PROSEDÜRLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nimet KIRGIZ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 Ekim 1998
Tezin Savunulduğu Tarih : 06 Ocak 1999

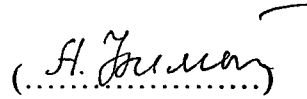
Tez Danışmanı
Yrd.Doç.Dr.
Afet FATULLAYEV



Üye
Prof. Dr.
Hüseyin BEREKETOĞLU



Üye
Prof. Dr.
Abbas AZİMOV



EKİM - 1998

YARI-LİNEER PARABOLİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KATSAYININ BULUNMASI İÇİN SAYISAL PROSEDÜRLER

Nimet Kırgız

Anahtar Kelimeler: Ters Problemler, Parabolik Denklemler, Bilinmeyen Katsayı, Sonlu Fark Denklemleri

Özet: Bu çalışmada, yarı lineer parabolik diferensiyel denklemlerde bilinmeyen kontrol fonksiyonunun bulunması için yazılı ters problemin çözümünde uygulanan sayısal çözüm prosedürleri incelenmiştir.

Bir boyutlu durumda problem ele alınmış, çözüm için uygulanan sonlu fark şemalarının özellikleri incelenmiş ve araştırılmıştır.

Farklı prosedürler kullanılarak testler üzerinde sayısal çözümler yapılmış ve bu prosedürlerin karşılaştırılmalı analizi yapılmıştır.

NUMERICAL PROCEDURES FOR THE DETERMINATION OF AN UNKNOWN COEFFICIENT IN SEMI-LINEAR PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Nimet Kırgız

Keywords: Inverse Problems, Parabolic Equations, Unknown Coefficients, Finite-Difference Equations.

Abstract: In this work, inverse problem for determining unknown control function in the semi-linear parabolic equation is investigated.

One and two dimensional cases formulation of this problem is considered and the properties of finite-difference schemes for the numerical solution is studied.

Numerical solutions for the comparative analysis of these numerical procedures are presented.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Parabolik kısmi türevli diferensiyel denklemlerde ek veriler kullanarak bilinmeyen katsayıların bulunması, uygulamalı matematiğin güncel problemlerinden biridir.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren danışmanım sayın Yrd.Doç.Dr. Afet FATULLAYEV (KO.Ü., FEN-ED. FAK., FİZİK BÖLÜMÜ), yardımlarından dolayı Fizik Bölümü araştırma görevlisi arkadaşım Emine CAN'a teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
TABLolar DİZİNİ	vi
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. YARI-LİNEER PARABOLİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KATSAYININ BULUNMASI İÇİN SAYISAL PROSEDÜRLER...	3
2.1. Birinci Çözüm Prosedürü	3
2.2. Birinci Çözüm Prosedüründeki Sonlu Fark Şemasının Yakınsaklığı	12
BÖLÜM 3. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ İÇİN İKİNCİ ÇÖZÜM PROSEDÜRÜ	27
BÖLÜM 4. SAYISAL ÇÖZÜM SONUÇLARI	30
4.1. Test Oluşturma	30
4.2. Birinci Çözüm Prosedürü ile Sayısal Çözüm	32
4.3. Bilgisayar Çözüm Sonuçları.....	37
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	48

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $\delta_x = x^* - x_{i_0}$	9
Şekil 2.2. Ω_{hr} kafesi	9
Şekil 4.1.a) I. Algoritmaya göre hatasız çözümler	38
Şekil 4.1.b) I. Algoritmaya göre hatasız çözümler	38
Şekil 4.2.a) II. Algoritmaya göre hatasız çözümler	39
Şekil 4.2.b) II. Algoritmaya göre hatasız çözümler	39
Şekil 4.3.a) I. Algoritmaya göre sabit hatalı çözüm	42
Şekil 4.3.b) II. Algoritmaya göre sabit hatalı çözüm	42
Şekil 4.4.a) I. Algoritmaya göre random hatalı çözümler	43
Şekil 4.4.b) II. Algoritmaya göre random hatalı çözümler	43

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 4.1. Gerçek çözümle hatalı çözüm arasındaki standart sapma	44
--	----



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Parabolik kısmi türevli diferensiyel denklemlerde ek veriler kullanarak, bilinmeyen katsayıların bulunması, uygulamalı matematiğin güncel problemlerinden biridir. Ters problemler denilen bu problemler, örneğin; ısı transferi problemlerinde, ısı geçiren cismin dahilinde, sıcaklık ölçümlerine bağlı olarak, cismin yüzeyinde ısı akışının değerlendirilmesi problemi; gözenekli ortamların hidrolik özelliklerini bulmak için yazılı difüzyon problemleri, sıcaklık dağılımı ölçümlerine dayanarak sıvı hız dağılımının elde edilmesi problemleri vs. dir. [12,13-33] Kaynaklarda, çok sayıda bu tür problemlerle karşılaşabiliriz.

Çoğu zaman, bilinmeyen katsayıların bulunması, çok zor fiziksel deneylerin yapılmasını gerektirmektedir. Ters problemlerin amacı, bu şekildeki, yapılması zor fiziksel problemleri, iriş verilerinin ölçülmesi kolay matematiksel problemlerle değiştirmektir.

Böyle problemlerin çözümü için çok sık kullanılan yaklaşımlar, “En Küçük Kareler Tipi” yöntemidir. Bu yaklaşımda ters problem optimizasyon problemi ile değiştirilmekte ve bilinmeyenlerin parametrik ifadelerindeki katsayılar öyle seçilmektedir ki, elde edilen çözüm, ek verileri ifade eden ölçüm sonuçları ile en iyi şekilde bağdaşmış olsun.

İkinci yaklaşım, bilinmeyen katsayıları, verilen ek koşullardan ifade ederek denklemlerde yazıp, elde edilen “lokal olmayan, klasik olmayan” denklemin çözümünden oluşmaktadır.

Ters katsayı problemlerinde ek koşullar, iç noktada ve sadece sınırlarda olmak üzere iki türlü verilebilir.

Bazı durumlarda ek koşulların iç noktalarda elde edilmesi imkansız olduğundan, sadece sınırdaki verilen koşullarda problem çözülmektedir.

Parabolik denklemler için ters katsayı problemleri, sadece zaman değişkenine bağlı katsayıların bulunması ile ifade edilmişse, (Bu katsayılara kontrol katsayıları denir.) bu problemlere kontrol problemleri denir. Bu vb. bilinmeyen kontrol katsayılarının bulunması için yazılı ters problemler, yakın geçmişte [3, 4, 8-11] yazarlar araştırılmıştır.

Bu çalışmada yarı-lineer diferensiyel denklemlerde bilinmeyen katsayıların bulunması problemi incelenmiştir.

Tezin yapısı aşağıdaki şekildedir:

2. Bölümde, problemin çözümü için uygulanan çözüm prosedürlerinden birincisi ele alınmıştır.

2.1. Alt bölümünde, birinci çözüm prosedürü aşamalarla verilmiş ve bu prosedürde uygulanan sonlu fark şeması yazılmış ve sayısal çözümün özellikleri ifade edilmiştir.

2.2. Alt bölümünde bu çözüm prosedüründeki sonlu fark şemasının yakınsaklığı formüle edilmiş ve adımlarla ispatı verilmiştir.

3. Bölümde problemin çözümü için uygulanan ikinci prosedürü ele alınmıştır.

4. Bölümde uygulanan iki farklı prosedürle sayısal çözüm sonuçları verilmiştir.

4.1. Alt bölümünde, sayısal çözüm için test oluşturulmuş, ikinci alt bölümde, yapılan test için birinci sayısal çözüm prosedürü, üçüncü alt bölümde ise, ikinci çözüm prosedürü ile sayısal çözüm prosedürü uygulanmıştır.

Dördüncü alt bölümde, uygulanan bu iki prosedürle elde edilen sayısal çözüm örnekleri üzerinde bu prosedürlerin karşılaştırmalı analizi yapılmıştır.

BÖLÜM 2

YARI-LİNEER PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BİLİNMEYEN KATSAYININ BULUNMASI İÇİN SAYISAL PROSEDÜRLER

Bu bölümde,

$$U_t = U_{xx} + p(t)U + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = (0,1) \times (0,T] \quad (2.1)$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1$$

$$U(0,t) = g_1(t)$$

$$U(1,t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

sistemini,

$$U(x^*,t) = E(t), \quad 0 < x^* < 1, 0 \leq t \leq T \quad (2.2)$$

Koşulu ile sağlayan bilinmeyen $U=U(x,t)$ ve $p(t)$ fonksiyonlarının bulunması ile ifade edilen ters problemin çözümü için uygulanan sayısal çözüm prosedürleri verilecektir.

2.1. Birinci Çözüm Prosedürü

$$V(x,t) = U(x,t)e^{\left(-\int_0^t p(s)ds\right)}, \quad r(t) = e^{\left(-\int_0^t p(s)ds\right)} \quad (2.3)$$

ve

$$U(x,t) = \frac{V(x,t)}{r(t)}, \quad p(t) = \frac{-r'(t)}{r(t)} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlansınlar.

(2.3) ile ifade edilen $(U,p) \rightarrow (V,r)$ dönüşümü, (2.1)'den $p(t)U$ terimini elimine etmemize imkan sağlar.

(2.1)'de, (2.3) ve (2.4) dönüşümleri ele alınırsa:

$$V(x, t) = U(x, t) e^{\left(-\int_0^t p(s) ds \right)}$$

$$V(x, t) = U(x, t) r(t)$$

$$U(x, t) = \frac{V(x, t)}{r(t)}$$

ve

$$r(t) = e^{-\int_0^t p(s) ds}$$

olduğundan

$$r'(t) = e^{-\int_0^t p(s) ds} (-p(t)) = r(t)(-p(t))$$

olur. Buradan

$$p(t) = \frac{-r'(t)}{r(t)}$$

bulunur.

(2.4)'den,

$$U_t(x, t) = \frac{V_t(x, t)r(t) - r'(t)V(x, t)}{(r(t))^2}$$

$$U_t(x, t) = V_t(x, t).e^{-\int_0^t p(s)ds} - p(t).e^{-\int_0^t p(s)ds} V(x, t)$$

$$U_t(x, t) = \frac{V_t(x, t)}{r(t)} + \frac{p(t)}{r(t)} V(x, t)$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{r(t)} \text{ ve } p(t)U = p(t) \frac{V(x, t)}{r(t)}$$

ifadeleri (2.1)'de yerine yazılırsa,

$$\frac{V_t(x, t)}{r(t)} + \frac{p(t)}{r(t)} V(x, t) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{r(t)} + p(t) \frac{V(x, t)}{r(t)} + f(x, t)$$

elde edilir.

Son ifadenin her iki tarafı $r(t)$ ile çarpılırsa,

$$V_t(x, t) + p(t).V(x, t) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + p(t).V(x, t) + r(t).f(x, t)$$

bulunur.

Sadeleştirme sonucu bu ifadeden;

$$V_t(x, t) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + r(t).f(x, t)$$

elde edilir.

$$U(x,0) = \varphi(x) \quad , r(0) = e^{\int_0^0 p(s) ds} = 1 \text{ den,}$$

$$U(x,0) = \frac{V(x,0)}{r(0)} = \frac{V(x,0)}{1}$$

$$U(x,0) = V(x,0) = \varphi(x)$$

olarak bulunur.

$$U(0,t) = g_1(t)$$

$$U(0,t) = \frac{V(0,t)}{r(t)} = g_1(t)$$

Buradan,

$$V(0,t) = r(t) \cdot g_1(t) ,$$

benzer olarak,

$$U(1,t) = g_2(t)$$

$$U(1,t) = \frac{V(1,t)}{r(t)} = g_2(t)$$

$$V(1,t) = r(t) \cdot g_2(t)$$

olarak bulunur.

(2.2)'den,

$$U(x^*,t) = \frac{V(x^*,t)}{r(t)}$$

$$V(x^*,t)=U(x^*,t).r(t)$$

$$V(x^*,t)=E(t).r(t)$$

$$r(t) = \frac{V(x^*,t)}{E(t)}$$

elde edilir.

Bütün bunlara göre (V,r) ikilisi aşağıdakileri sağlar:

$$V_t = V_{xx} + r(t).f(x,t) \quad , \quad (x,t) \in Q_T \quad (2.5)$$

$$V(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$V(0,t) = r(t).g_1(t)$$

$$V(1,t) = r(t).g_2(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

ve

$$r(t) = \frac{V(x^*,t)}{E(t)} \quad , \quad 0 < x^* < 1, 0 \leq t \leq T \quad (2.6)$$

(2.6), (2.5)'de yerine yazılırsa, V'nin aşağıdaki lokal olmayan parabolik denklemini sağladığı görülür.

$$V_t = V_{xx} + \frac{V(x^*,t)}{E(t)}.f(x,t) \quad , \quad (x,t) \in Q_T$$

$$V(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$V(0,t) = \frac{V(x^*,t)}{E(t)} \cdot g_1(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

$$V(1,t) = \frac{V(x^*,t)}{E(t)} \cdot g_2(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

Burada,

$F(x,t) = f(x,t)/E(t)$, $G_0(t) = g_1(t)/E(t)$ ve $G_N(t) = g_2(t)/E(t)$ ile işaretlenirse, (2.5) aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$V_t = V_{xx} + V(x^*,t) \cdot F(x,t) \quad , \quad (x,t) \in Q_T \quad (2.7)$$

$$V(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$V(0,t) = V(x^*,t)G_0(t)$$

$$V(1,t) = V(x^*,t)G_N(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

N pozitif tamsayı ve $h = \Delta x = 1/N$, $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$ olsun. $M > 0$ pozitif tamsayı ve $\tau = T/M$, $t_n = n\tau$, $n = 0, \dots, M$ olsunlar. (2.7) probleminin çözümü için sonlu fark şemasını yazmadan önce her $P(x) \in C^2[0,1]$ pürüzsüz fonksiyonu için aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

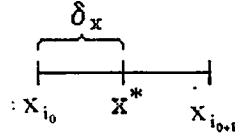
Lemma 2.1. $P(x) \in C^2[0,1]$ olsun.

$$x^* \in [X_{i_0}, X_{i_0+1}) \quad \text{ise} \quad (2.8)$$

o zaman,

$$P(x^*) = \frac{h - \delta_x}{h} P(x_{i_0}) + \frac{\delta_x}{h} P(x_{i_0+1}) + O(h^2) \quad \text{dir.} \quad (2.9)$$

Burada, $\delta_x = x^* - x_{i_0}$ dir. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1

İspat:

$$P(x_{i_0}) = P(x^*) + \Delta x P'(x^*) + O(h^2) \quad \Delta x = x_{i_0} - x^* = -\delta_x$$

$$P(x_{i_0+1}) = P(x^*) + (h - \delta_x) P'(x^*) + O(h^2) \quad \Delta x = x_{i_0+1} - x^* = h - \delta_x$$

Bu ifadeler (2.9) da yerine yazılırsa,

$$P(x^*) = \frac{h - \delta_x}{h} [P(x^*) - \delta_x P'(x^*) + O(h^2)] + \frac{\delta_x}{h} [P(x^*) + (h - \delta_x) P'(x^*) + O(h^2)]$$

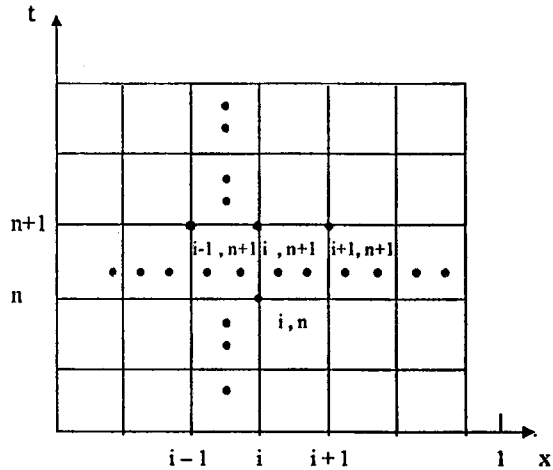
$$P(x^*) = \left(\frac{h - \delta_x}{h} + \frac{\delta_x}{h} \right) P(x^*) - \frac{h - \delta_x}{h} \delta_x P'(x^*) + \frac{\delta_x}{h} (h - \delta_x) P'(x^*) + O(h^2)$$

işlemleri ile (2.9) un sağlandığı görülür.

(2.9) ifadesi, sonlu fark şemasında $V(x^*, t)$ terimine yaklaşım için kullanılacaktır. (2.7) problemi için tam kapalı şema, denklem için yaklaşım ifadesi $\Omega_{ht} = \{(x_i, t_n)\}$ kafesi (Şekil 2.2) üzerinde,

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\tau} = \frac{V_{i+1}^n - 2V_i^n + V_{i-1}^n}{h^2} + V(x^*, t).F(x, t)$$

şeklinde alınır ve bu ifadede,



Şekil 2.2

$V_*^{n-1} = V(x^*, t)$, $F_i^n = F(x_i, t_n)$ ve $G_i(t) = (x_i, t_n)$ ile işaretlenip düzenlenirse, aşağıdaki sonlu farklar şeması elde edilir.

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\tau} = \frac{V_{i+1}^n - 2V_i^n + V_{i-1}^n}{h^2} + F_i^n V_*^{n-1} \quad (2.10)$$

$$i=(1, \dots, N-1) \quad , n \geq 1$$

$$V_i^0 = \varphi_i \quad , i=(0, 1, \dots, N)$$

$$V_i^n = G_i^n V_*^{n-1} \quad , i=0, N, n \geq 1$$

Burada, (2.9) a göre V_*^n ,

$$V_*^n = \frac{h - \delta_x}{h} V_{i_0}^n + \frac{\delta_x}{h} V_{i_0+1}^n \quad , n \geq 1 \quad (2.11)$$

olarak tanımlanmıştır.

Görüldüğü gibi (2.10)-(2.11), yarı-kapalı sonlu farklar şemasıdır. Çünkü $V(x^*, t)$ için yaklaşım ifadesinde bir önceki katmandan değerler alınmıştır. (3.5)-(3.6) şemasının hatası, hiperbolik denklemler için geriye sonlu farklar şemasından olduğu gibi $O(h^2 + \tau)$ olur. (2.10)-(2.11) nın çözümü, TDMA (Tree Diagonal Matrix Algorithm) yöntemi ile yapılabilir.

Lemma 2.2. $|V_*^n| \leq \max |V_i^n|$, $n \geq 0$ eşitsizliği sağlanmaktadır.

$$0 \leq i \leq N$$

İspat:

(2.11) ifadesinde,

$$\tilde{V}_{i_0}^n = \max \{V_{i_0}^n, V_{i_0+1}^n\} \text{ olarak alınsın.}$$

(2.11) da V_i^n 'ler yerine bu maksimum değer yazılsın.

$$\begin{aligned} |V_*^n| &\leq \left| \frac{h - \delta_x}{h} \tilde{V}_{i_0}^n \right| + \left| \frac{\delta_x}{h} \tilde{V}_{i_0}^n \right| \\ &\leq \tilde{V}_{i_0}^n \left(\frac{h - \delta_x}{h} + \frac{\delta_x}{h} \right) \\ &= \tilde{V}_{i_0}^n \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\Delta_x^+ V_i = \frac{V_{i+1} - V_i}{h} \quad \text{ve} \quad \Delta_x^- V_i = \frac{V_i - V_{i-1}}{h} \quad \text{olsun.} \quad (2.12)$$

$$\Delta_x^2 V_i = \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} \quad (1) \quad (2.13)$$

$$\Delta_x^- \Delta_x^+ V_i = \Delta_x^- \left(\Delta_x^+ V_i \right) = \Delta_x^- \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{h} \right) = \frac{\frac{V_{i+1} - V_i}{h} - \frac{V_i - V_{i-1}}{h}}{h} = \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} \quad (2)$$

(1) ve (2) den,

$$\Delta_x^2 V_i = \Delta_x^- \Delta_x^+ V_i \quad \text{olarak bulunur.}$$

$$\Delta_x^2 V_i = \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} \quad \text{ve her } \omega_i \text{ için}$$

$$\Delta_x^2 (\omega_i V_i) = \omega_i \Delta_x^2 V_i + V_{i+1} \Delta_x^2 \omega_i + \Delta_x^+ \omega_{i-1} \Delta_x^+ V_i + \Delta_x^+ \omega_{i-1} \Delta_x^+ V_{i-1} \quad (2.14)$$

olduğu, sağ ve sol taraf açık şekilde yazılıp, eşit olduğu gösterilerek bulunur.

(2.13) den,

$$\Delta_x^2(\omega_i V_i) = \frac{\omega_{i+1} V_{i+1} - 2\omega_i V_i + \omega_{i-1} V_{i-1}}{h^2} \quad \text{sol taraf elde edilir.}$$

(2.14) ün sağ tarafı açılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{i+1} V_{i+1} - 2\omega_i V_i + \omega_{i-1} V_{i-1}}{h^2} + \frac{\omega_{i+1} V_{i+1} - 2\omega_i V_{i+1} + \omega_{i-1} V_{i+1}}{h^2} + \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h} \cdot \frac{V_{i+1} - V_i}{h} \\ & + \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h} \cdot \frac{V_i - V_{i-1}}{h} = \frac{\omega_i V_{i+1} - 2\omega_i V_i + \omega_{i-1} V_{i-1}}{h^2} + \frac{\omega_{i+1} V_{i+1} - 2\omega_i V_{i+1} + \omega_{i-1} V_{i+1}}{h^2} \\ & + \frac{\omega_i V_{i+1} - \omega_i V_i - \omega_{i-1} V_{i+1} + \omega_{i-1} V_i}{h^2} + \frac{\omega_i V_i - \omega_i V_{i-1} - \omega_{i-1} V_i + \omega_{i-1} V_{i-1}}{h^2} \\ & = \frac{\omega_{i+1} V_{i+1} - 2\omega_i V_i - \omega_{i-1} V_{i-1}}{h^2} \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

Sağ ve sol tarafın eşitliğinden (2.14) gösterilmiş olur. Bu ifade yakınsaklığı göstermemiz için kullanılacaktır.

2.2. Birinci Çözüm Prosedüründeki Sonlu Fark Şemasının Yakınsaklığı

Teorem 2.1. $V \in C^{4,2}(Q_T)$ olsun. O zaman f, g verilerine, $E, d = \min\{|x^*|, |\ell - x^*|\}$ ve $T > 0$ değerlerine bağlı öyle $h_0 > 0, T_0 > 0$ değerleri var ki, her $0 < h < h_0$ ve $0 < \tau \leq \tau_0$ lar için d ve T değerleri ve V 'nin $C^{4,2}$ deki normuna bağlı,

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(x_i, t_n)| \leq C(h^2, \tau)$$

eşitsizliğini sağlayan $C > 0$ sabiti vardır.

İspat: (2.10), aşağıdaki şekilde yazılsın.

Adım 1: $e_i^n = V_i^n - V(x_i, t_n)$ olsun. O zaman bu ifade, (2.10) de yerine yazılsın.

$$V_i^n = e_i^n + V(x_i, t_n)$$

$$\frac{e_i^n - e_i^{n-1}}{\tau} + \frac{V(x_i, t_n) - V(x_i, t_{n-1})}{\tau} = \Delta_x^2 e_i^n + \Delta_x^2 V(x_i, t_n) + F_i^n (e_*^{n-1} + V(x_*, t_{n-1}))$$

$$\frac{e_i^n - e_i^{n-1}}{\tau} = \Delta_x^2 e_i^n + F_i^n e_*^{n-1} + \Delta_x^2 V(x_i, t_n) + F_i^n V(x_*, t_{n-1}) - \frac{V(x_i, t_n) - V(x_i, t_{n-1})}{\tau}$$

Burada,

$$\varepsilon_i^n = \Delta_x^2 V(x_i, t_n) + F_i^n V(x_*, t_{n-1}) - \frac{V(x_i, t_n) - V(x_i, t_{n-1})}{\tau} \quad \text{ile işaretlenirse}$$

$$\frac{e_i^n - e_i^{n-1}}{\tau} = \Delta_x^2 e_i^n + F_i^n e_*^{n-1} + \varepsilon_i^n$$

(2.15)

bulunur.

$e_i^n = V_i^n - V(x_i, t_n)$ ifadesine sınır koşulları uygulansın.

$$V_i^0 = e_i^0 + V(x_i, 0) = \varphi_i$$

$$e_i^0 = \varphi_i - V(x_i, 0)$$

$V(x_i, 0) = \varphi_i$ olduğundan

$$e_i^0 = 0 \quad \text{bulunur.}$$

$$V_i^n = G_i^n V_*^{n-1}, \quad i=0, N$$

$$e_i^n + V(x_i, t_n) = G_i^n (e_*^{n-1} + V(x_*, t_{n-1}))$$

$$e_i^n = G_i^n e_*^{n-1} + G_i^n V(x_*, t_{n-1}) - V(x_i, t_n)$$

Burada,

$$\bar{\tau}_i^n = G_i^n V(x_*, t_{n-1}) - V(x_i, t_n) \quad \text{ile işaretlenirse,}$$

$$e_i^n = G_i^n e_*^{n-1} + \bar{\tau}_i^n \quad \text{elde edilir.}$$

Bulunan ifadeler yazılırsa,

$$\frac{e_i^n - e_i^{n-1}}{\tau} = \Delta_x^2 e_i^n + F_i^n e_*^{n-1} + \varepsilon_i^n, \quad i=(1, \dots, N), N \geq 1 \quad (2.16)$$

$$e_i^0 = 0$$

$$e_i^n = G_i^n e_*^{n-1} + \bar{\tau}_i^n, \quad i=0, N, n \geq 1$$

elde edilir.

Lemma 2.3 $V \in C^{4,2}(\bar{Q}_T)$ ve veriler pürüzsüz olsun. O zaman öyle $K > 0$ sabiti ve $C_0 = C_0(\|V\|_{C^{4,2}})$ vardır ki, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmaktadır.

$$\max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} |\varepsilon_i^n| \leq C_0(h^2 + \tau), \quad \max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} |\bar{\tau}_i^n| \leq C_0(h^2, \tau) \quad (2.17)$$

$$\max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} |G_i^n| \leq K, \quad \max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} |F_i^n| \leq K \quad (2.18)$$

$$\text{İspat: } \varepsilon_i^n = \Delta_x^2 V(x_i, t_n) + F_i^n V(x_*, t_{n-1}) - \frac{V(x_i, t_n) - V(x_i, t_{n-1})}{\tau}$$

$V(x_i, t_{n-1})$, (x_i, t_n) noktasında Taylor serisine açılırsa,

$$V(x_i, t_{n-1}) = V(x_i, t_n) - \tau V'(x_i, t_n) + \frac{\tau^2}{2} V''(x_i, t_n) - \frac{\tau^3}{3!} V'''(x_i, t_n) + O(\tau^4)$$

ve buradan,

$$\frac{V(x_i, t_n) - V(x_i, t_{n-1})}{\tau} = V' - \frac{\tau}{2} V'' + \frac{\tau^2}{3!} V''' - O(\tau^3) \quad (*)$$

Benzer şekilde,

$$\Delta_x^2 V(x_i, t_n) = \frac{V(x_{i+1}, t_n) - 2V(x_i, t_n) + V(x_{i-1}, t_n)}{h^2}$$

ifadesindeki $V(x_{i+1}, t_n)$ ve $V(x_{i-1}, t_n)$ ler, (x_i, t_n) noktasında sırasıyla Taylor serisine açılırsın;

$$V(x_{i+1}, t_n) = V(x_i, t_n) + hV'(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2} V''(x_i, t_n) + \frac{h^3}{3!} V'''(x_i, t_n) + O(h^4)$$

$$V(x_{i-1}, t_n) = V(x_i, t_n) - hV'(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2} V''(x_i, t_n) - \frac{h^3}{3!} V'''(x_i, t_n) + O(h^4)$$

Bu açılımlar $\Delta_x^2 V(x_i, t_n)$ de yerine yazılır ve burada $V=V(x_i, t_n)$ ile işaretlenirse,

$$\Delta_x^2 V(x_i, t_n) = \frac{V + hV' + \frac{h^2}{2} V'' + \frac{h^3}{3!} V''' + O(h^4) - 2V + V - hV' + \frac{h^2}{2} V'' - \frac{h^3}{3!} V''' + O(h^4)}{h^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \frac{h^2}{2} V'' + O(h^4)}{h^2} \\
&= V'' + O(h^2) \tag{**}
\end{aligned}$$

(*) ve (**) dan elde edilen sonuçlar ε_i^n de yerine yazılınsın.

$$\varepsilon_i^n = V_{xx}(x_i, t_n) + O(h^4) + F_i^n V(x_*, t_{n-1}) - V_i(x_i, t_n) + O(\tau)$$

(1.7) den,

$$V_{xx}(x_i, t_n) + F_i^n V(x_*, t_{n-1}) - V_i(x_i, t_n) = 0 \quad \text{olduğu görülür.}$$

Sonuç olarak $\varepsilon_i^n = O(h^2) + O(\tau)$ bulunur ve

$$\max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} |\varepsilon_i^n| \leq C_o (h^2 + \tau) \quad \text{gösterilmiş olur.}$$

$$0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M$$

$$\bar{\tau}_i^n = G_i^n V(x_*, t_{n-1}) - V(x_i, t_n), \quad i=0, N$$

$$(2,7) \text{ ye öre, } G_i^n V(x_*, t_{n-1}) = V(x_i, t_n)$$

Bu $\bar{\tau}_i^n$ de yerine yazılırsa,

$$\bar{\tau}_i^n = V(x_i, t_n) - V(x_i, t_n) = 0$$

olacağı açıktır.

$$\max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} |\bar{\tau}_i^n| \leq C_o (h^2, \tau) \text{ yazılabilir.}$$

$$0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M$$

(2.18) eşitsizlikleri, F, G ve E≠0 verilerinin pürüzsüzlüğü kullanılarak gösterilebilir.

$$G_0(t) = g_1(t) / E(t)$$

$$G_N(t) = g_2(t) / E(t)$$

Burada $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ sınırlı, $E(t) \neq 0$ olduğundan $g_1(t)/E(t)$ ve $g_2(t)/E(t)$ sınırlıdır.

$$\max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} |G_i^n| \leq K \quad \text{yazılabilir.}$$

Benzer şekilde,

$F(x,t) = f(x,t) / E(t)$ ve burada $f(x,t)$ sınırlı, $E(t) \neq 0$ olduğundan $f(x,t)/E(t)$ sınırlıdır.

$$\max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} |F_i^n| \leq K \quad \text{olduğu görülür.}$$

Adım 2: $\omega(x) = 1 + Q\{(x - x^*)^2\}$ ile tanımlansın. Burada $Q > 0$ pozitif sabit olarak seçilsin.

$$e_i^n = \omega_i y_i^n, \quad i = (0, 1, \dots, N), \quad 0 \leq n \leq M \quad \text{olsun.} \quad (2.19)$$

(2.11) dan,

$$\begin{aligned} e_*^n &= \frac{h - \delta_x}{h} \omega_{i_0} y_{i_0}^n + \frac{\delta_x}{h} \omega_{i_0+1} y_{i_0+1}^n \\ &= y_*^n + Q y_{**}^n \end{aligned} \quad (2.20)$$

Burada,

$$y_{**}^n = \frac{h - \delta_x}{h} \delta_x^2 y_{i_0}^n + \frac{\delta_x}{h} (h - \delta_x)^2 y_{i_0+1}^n \quad \text{dir.} \quad (2.21)$$

Lemma 2.4. (2.21) ifadesinde,

$$\tilde{y}_{i_0}^n = \max \{y_{i_0}^n, y_{i_0+1}^n\} \text{ alınsın.}$$

Bu maksimum değer, (2.21) de y_i^n ler yerine yazılsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} y_{**}^n &\leq \left| \frac{h - \delta_x}{h} \delta_x^2 \tilde{y}_{i_0}^n \right| + \left| \frac{\delta_x}{h} (h - \delta_x)^2 \tilde{y}_{i_0}^n \right| \\ &\leq \tilde{y}_{i_0}^n \left(\frac{h - \delta_x}{h} \delta_x^2 + \frac{\delta_x}{h} (h - \delta_x)^2 \right) \\ &= \tilde{y}_{i_0}^n \left[\delta_x^2 - \frac{\delta_x^3}{h} + \delta_x h - 2\delta_x^2 + \frac{\delta_x^3}{h} \right] \\ &= \tilde{y}_{i_0}^n (-\delta_x^2 + \delta_x h) \\ &= \tilde{y}_{i_0}^n \frac{h^2}{4} \leq h^2 \max |y_i^n| \end{aligned}$$

$$y_{**}^n \leq h^2 \max |y_i^n| \text{ olduğu görülür.}$$

Burada,

$$F(\delta_x) = -\delta_x^2 + \delta_x h \text{ ile işaretlensin.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \delta_x} = -2\delta_x + h$$

$$-2\delta_x + h = 0$$

$$\delta_x = \frac{h}{2}$$

Bu değer $F(\delta_x)$ de yerine yazılsın.

$$F(\delta_x) = -\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}h = -\frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{2} = \frac{-h^2 + 2h^2}{4} = \frac{h^2}{4}$$

(2.19) ve (2.20) dönüşümleri, (2.16) da kullanılırsa,

$$\frac{\omega_i y_i^n - \omega_i y_i^{n-1}}{\tau} = \omega_i \Delta_x^2 y_i^n + F_i^n (y_*^{n-1} + Qy_{**}^{n-1}) + \varepsilon_i^n$$

ifadesi elde edilir.

Burada $\Delta_x^2 \omega_i y_i^n$ değeri (2.14) dan yerine yazılırsa,

$$\frac{\omega_i y_i^n - \omega_i y_i^{n-1}}{\tau} = \omega_i \Delta_x^2 y_i^n + y_{i+1} \Delta_x^2 \omega_i + \Delta_x^+ \omega_{i-1} \Delta_x^+ y_i + \Delta_x^+ \omega_{i-1} \Delta_x^+ y_{i-1} + F_i^n (y_*^{n-1} + Qy_{**}^{n-1}) + \varepsilon_i^n$$

bulunur.

Her iki taraf ω_i ile bölünürse, aşağıdaki ifade bulunur.

$$\frac{y_i^n - y_i^{n-1}}{\tau} = \Delta_x^2 y_i + \frac{F_i^n}{\omega_i} (y_*^{n-1} + Qy_{**}^{n-1}) + \frac{\varepsilon_i^n}{\omega_i} + y_{i+1} \frac{\Delta_x^2 \omega_i}{\omega_i} + \Delta_x^2 y_i \frac{\Delta_x^+ \omega_{i-1}}{\omega_i} + \Delta_x^+ y_{i-1} \frac{\Delta_x^+ \omega_{i-1}}{\omega_i}$$

$$i=(1, \dots, N-1), 1 \leq n \leq M \quad (2.22)$$

$$e_i^0 = 0$$

$$\omega_i y_i^0 = 0$$

$$y_i^0 = \frac{0}{\omega_i}$$

$$y_i^0 = 0, \quad i = (0, \dots, N) \quad (2.23)$$

$$e_i^n = G_i^n e_*^{n-1} + \bar{\tau}_i^n, \quad i = 0, N$$

$$\omega_i y_i^n = G_i^n e_*^{n-1} + \bar{\tau}_i^n$$

$$y_i = \frac{G_i^n}{\omega_i} (y_*^{n-1} + Q y_{**}^{n-1}) + \frac{\bar{\tau}_i^n}{\omega_i}, \quad i = 0, N, n \geq 1 \quad (2.24)$$

$$\text{Adım 3: } \lambda > 0 \text{ ve } y_i^n = e^{\lambda t_n} z_i^n, \quad i = (0, \dots, N), 1 \leq n \leq M \text{ olsun} \quad (2.25)$$

(2.25), (2.22) de yerine yazılısın.

$$\begin{aligned} \frac{e^{\lambda t_n} z_i^n - e^{\lambda t_{n-1}} z_i^{n-1}}{\tau} &= e^{\lambda t_n} \Delta_x^2 z_i^n + e^{\lambda t_{n-1}} \frac{F_i^n}{\omega_i} (z_*^{n-1} + Q z_{**}^{n-1}) + \frac{\varepsilon_i^n}{\omega_i} + e^{\lambda t_n} z_{i+1}^n \frac{\Delta_x^2 \omega_i}{\omega_i} \\ &+ e^{\lambda t_n} z_i^n \Delta_x^+ \frac{\Delta_x^+ \omega_{i-1}}{\omega_i} + e^{\lambda t_n} \Delta_x^+ z_{i-1}^n \frac{\Delta_x^+ \omega_{i-1}}{\omega_i}, \quad i = (1, \dots, N), 1 \leq n \leq M \end{aligned}$$

Her iki taraf $e^{\lambda t_n}$ ile bölümsün.

$$\begin{aligned} e^{-\lambda \tau} \frac{z_i^n - z_i^{n-1}}{\tau} &= \Delta_x^2 z_i^n + e^{-\lambda \tau} \frac{F_i^n}{\omega_i} (z_*^{n-1} + Q z_{**}^{n-1}) + e^{-\lambda t_n} \frac{\varepsilon_i^n}{\omega_i} - \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\tau} z_i^n + z_{i+1}^n \frac{\Delta_x^2 \omega_i}{\omega_i} \\ &+ \Delta_x^+ z_i^n \frac{\Delta_x^+ \omega_{i-1}}{\omega_i} + \Delta_x^+ z_{i-1}^n \frac{\Delta_x^+ \omega_{i-1}}{\omega_i}, \quad i = (1, \dots, N), 1 \leq n \leq M \quad (2.26) \end{aligned}$$

bulunur.

(2.23) ve (2.24) e, (2.25) dönüşümü uygulansın.

$$y_i^0 = e^{\lambda_0} z_i^0 = 0$$

Buradan,

$$z_i^0 = \frac{0}{e^{\lambda_{i_0}}}$$

$$z_i^0 = 0 \quad , i = (0, \dots, N) \quad (2.27)$$

olarak bulunur.

$$y_i^n = \frac{G_i^n}{\omega_i} (y_{**}^{n-1} + Qy_{**}^{n-1}) + \frac{\bar{\tau}_i^n}{\omega_i}$$

$$e^{\lambda_{i_n}} z_i^n = \frac{G_i^n}{\omega_i} e^{\lambda_{i_{n-1}}} (z_{**}^{n-1} + Qz_{**}^{n-1}) + \frac{\bar{\tau}_i^n}{\omega_i}$$

$$z_i^n = \frac{G_i^n}{\omega_i} \frac{e^{\lambda_{i_{n-1}}}}{e^{\lambda_{i_n}}} (z_{**}^{n-1} + Qz_{**}^{n-1}) + \frac{\bar{\tau}_i^n}{\omega_i} e^{-\lambda_{i_n}}$$

$$z_i^n = e^{-\lambda_{i_n}} \frac{G_i^n}{\omega_i} (z_{**}^{n-1} + Qz_{**}^{n-1}) + e^{-\lambda_{i_n}} \frac{\bar{\tau}_i^n}{\omega_i} \quad , i = 0, N, \quad n \geq 1 \quad (2.28)$$

olarak bulunur.

Lemma 2.5. Tüm $i = (0, \dots, N)$ şer için aşağıdaki eşitsizlikler tanımlanmıştır.

$$\left| \frac{\Delta_x^2 \omega_i}{\omega_i} \right| \leq 2Q \quad , \quad \left| \frac{\Delta x^- \omega_{i-1}}{\omega_i} \right| \leq 2Q \quad (2.29)$$

$$\left| \frac{\Delta x^+ \omega_i}{\omega_i} \right| \leq 2Q \quad (2.30)$$

$$\left| \frac{1}{\omega_i} \right| \leq 1 \quad (2.31)$$

$\frac{h}{2} \leq x^* \leq 1 - \frac{h}{2}$ için gerçektir.

İspat:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\Delta_x^2 \omega_i}{\omega_i} \right| &= \left| \frac{\omega_{i+1} - 2\omega_i + \omega_{i-1}}{h^2 \omega_i} \right| = \left| \frac{1 + Q(x_{i+1} - x^*)^2 - 2(1 + Q(x_i - x^*)^2) + 1 + Q(x_{i-1} - x^*)^2}{h^2 \omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{1 + Q(x_{i+1}^2 - 2x_{i+1}x^* + x^{*2}) - 2 - 2Q(x_i^2 - 2x_i x^* + x^{*2}) + 1 + Q(x_{i-1}^2 - 2x_{i-1}x^* + x^{*2})}{h^2 \omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Q(x_{i+1}^2 - 2x_{i+1}x^* + x^{*2} - 2x_i^2 + 4x_i x^* - 2x^{*2} + x_{i-1}^2 - 2x_{i-1}x^* + x^{*2})}{h^2 \omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Q(x_{i+1}^2 + x_{i-1}^2 + 2x^*(2x_i - x_{i+1} - x_{i-1})) - 2x_i^2}{h^2 \omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Q[(x_{i+1}^2 - x_i^2) + (x_{i-1}^2 - x_i^2) + 2x^*(x_i - x_{i+1} + x_i - x_{i-1})]}{h^2 \omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Q[(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i) + (x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} + x_i) + 2x^*(-h + h)]}{h^2 \omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Q[h(x_{i+1} + x_i) + (-h)(x_{i-1} + x_i)]}{h^2 \omega_i} \right| = \left| \frac{Q[h(x_{i+1} + x_i - x_{i-1} - x_i)]}{h^2 \omega_i} \right| = \left| \frac{Qh(x_{i+1} - x_{i-1})}{h^2 \omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Qh2h}{h^2 \omega_i} \right| = \left| \frac{2h^2 Q}{h^2 \omega_i} \right| = \left| \frac{2Q}{\omega_i} \right| \leq 2Q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\Delta x^+ \omega_{i-1}}{\omega_i} \right| &= \left| \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h\omega_i} \right| = \left| \frac{1 + Q(x_i - x^*) - 1 - Q(x_{i-1} - x^*)^2}{h^2\omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Q(x_i^2 - 2x_i x^* + x^{*2}) - Q(x_{i-1}^2 - 2x_{i-1} x^* + x^{*2})}{h\omega_i} \right| = \left| \frac{Q(x_i^2 - 2x_i x^* + x^{*2} - x_{i-1}^2 + 2x_{i-1} x^* - x^{*2})}{h\omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Q[(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i-1}) + 2x^*(x_{i-1} - x_i)]}{h\omega_i} \right| = \left| \frac{Q[h(x_i + x_{i-1}) + 2x^*(-h)]}{h\omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Qh(x_i + x_{i-1} - 2x^*)}{h\omega_i} \right| \leq \left| \frac{2Q}{\omega_i} \right| \leq 2Q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\Delta x^+ \omega_i}{\omega_i} \right| &= \left| \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{h\omega_i} \right| = \left| \frac{1 + Q(x_{i+1} - x^*) - 1 - Q(x_i - x^*)^2}{h\omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Q(x_{i+1}^2 - 2x_{i+1} x^* + x^{*2} - x_i^2 + 2x_i x^* - x^{*2})}{h\omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Q[(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i) + 2x^*(x_i - x_{i+1})]}{h\omega_i} \right| = \left| \frac{Q[h(x_{i+1} + x_i) + 2x^*(-h)]}{h\omega_i} \right| \\
&= \left| \frac{Qh(x_{i+1} + x_i - 2x^*)}{h\omega_i} \right| = \left| \frac{Q(x_{i+1} - x^*) + (x_i - x^*)}{\omega_i} \right| \leq \left| \frac{2Q}{\omega_i} \right| \leq 2Q
\end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{\omega_i} \right| = \left| \frac{1}{1 + Q(x_i - x^*)^2} \right| = \left| \frac{1}{1 + Qd^2} \right| \leq 1$$

Adım 4: Bu adımda tüm $0 < h \leq h_0$, $0 < T \leq T_0$ için $h_0 = h_0(d, K) > 0$, $\tau_0 = \tau_0(d, K) > 0$ şeklinde tanımlayalım.

Öyle ki,

$$\max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} |z_i^n| \leq C_0(h^2 + \tau) \quad (2.32)$$

$0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M$

$|z_i^n|$ lerin maksimumu (i^*, n^*) ile işaretlensin ve $z_{i^*}^{n^*} > 0$ olsun. Bu takdirde iki durum vardır:

Durum 1: i^* sınır noktası olsun ve $M^* = z_{i^*}^{n^*}$ olarak gösterilsin. (2.27), (2.28), lemma 2.1, lemma 2.2 ve (2.31) den yararlanarak herhangi bir $\lambda > 0$ için

$$M^* \leq \frac{K(1 + Qh^2)}{1 + Qd^2} M^* + C_0(h^2 + \tau) \quad (2.33)$$

Burada C_0 , sadece V ve T ye bağlıdır.

$$M^* = z_{i^*}^{n^*} > 0$$

$$M^* = e^{-\lambda\tau} \frac{G_i^n}{\omega_i} (z_*^{n-1} + Qz_{**}^{n-1}) + e^{-\lambda\tau_n} \frac{\bar{\tau}_i^n}{\omega_i}$$

$$M^* \leq \left| e^{-\lambda\tau} \frac{G_i^n}{\omega_i} z_*^{n-1} \right| + \left| e^{-\lambda\tau} \frac{G_i^n}{\omega_i} z_{**}^{n-1} \right| + \left| e^{-\lambda\tau_n} \frac{\bar{\tau}_i^n}{\omega_i} \right|$$

$$\leq \frac{KM^*}{1 + Qd^2} + \frac{KQh^2 M^*}{1 + Qd^2} + C_0(h^2 + \tau)$$

$$\leq \frac{K(1+Qh^2)}{1+Qd^2} M^* + C_0(h^2 + \tau)$$

$$Q = \frac{2K}{d^2} \quad \text{ve} \quad h \leq \frac{d}{\sqrt{2K}} \quad \text{seçilirse}$$

$$1 - K + Q(d^2 - Kh^2) \geq 1 \quad \text{bulunur.}$$

$$M^* \leq \frac{K(1+Qh^2)}{1+Qd^2} M^* + C_0(h^2 + \tau)$$

$$M^* - \frac{K(1+Qh^2)}{1+Qd^2} M^* + C_0(h^2 + \tau)$$

$$M^* \left(1 - \frac{K(1+Qh^2)}{1+Qd^2} \right) \leq C_0(h^2 + \tau)$$

$$M^* \left(\frac{1+Qd^2 - K(1+Qh^2)}{1+Qd^2} \right) \leq C_0(h^2 + \tau)$$

$$M^* \left(\frac{1-K+Q(d^2 - Kh^2)}{1+Qd^2} \right) \leq C_0(h^2 + \tau)$$

$$M^* \leq \frac{C_0(h^2 + \tau) \cdot (1+Qd^2)}{1-K+Q(d^2 - Kh^2)} = \frac{\bar{C}_0(h^2 + \tau)}{1-K+Q(d^2 - Kh^2)} \leq \bar{C}_0(h^2 + \tau) \quad (2.34)$$

Durum 2: (i^*, j^*) iç nokta olsun ve

$$h \leq \min \left\{ \frac{1}{2Q}, \frac{d}{\sqrt{2K}} \right\} \quad \text{seçilsin.} \quad (2.35)$$

Ayrık maksimum prensibinden ve (2.26) dan takip edilebilir ki,

$$\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\tau}M^* \leq K(M^* + Qh^2M^*) + 2QM^* + C_0(h^2 + \tau) \quad (2.36)$$

$\tau \leq \tau_0$ olması için $\lambda = 2\{K(1+Q) + 2Q + 1\}$ ve $\tau_0 > 0$ seçilirse

$$e^{-\lambda\tau_e} \geq e^{-\lambda\tau} \geq e^{-\lambda\tau_0} = \frac{1}{2} \quad \text{veya} \quad \tau \leq \tau_0 = \frac{\ln 2}{\tau} \quad (2.37)$$

$$\lambda e^{-\lambda\tau_e} - \{K(1+Qh^2) + 2Q\} \geq 1 \quad (2.38)$$

$M^* \leq C_0(h^2+\tau)$ olduğu bulunur.

Burada C_0, V, T, K ve d 'ye bağlıdır.

Adım 5: (2.32) ve (2.25) den kolaylıkla görülebilir ki,

$$\max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} |y_i^n| \leq C(h^2+\tau) \quad (2.39)$$

$0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M$

Burada $C < 0, V, K, d, T > 0$ 'a bağlıdır.

Sonuç olarak, (2.19) ve (2.39) dan,

$$\max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} |e_i^n| \leq C(h^2+\tau) \quad \text{olduğu görülür.} \quad (2.40)$$

$0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M$

Teorem 2.1'in ispatı tamamlanmış olur.

BÖLÜM 3

PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ İÇİN İKİNCİ ÇÖZÜM PROSEDÜRÜ

Eğer $p(t)$ ve $U(x,t)$, (2.1)-(2.2) ters probleminin çözümü ise o zaman,

$$E_t = U_{xx} \Big|_{x=x^*} + p(t)E(t) + f(x,t) \quad (3.1)$$

sağlanmalıdır. Buradan,

$$p(t) = \frac{E_t - U_{xx} \Big|_{x=x^*} - f(x,t)}{E(t)} \quad (3.2)$$

yazabiliriz Bu ifadeyi yeniden (2.1)'de yerine yazarsak,

$$U_t = U_{xx} + \left(\frac{E_t - U_{xx} \Big|_{x=x^*} - f(x,t)}{E(t)} \right) U + f(x,t) , \quad (3.3)$$

$$U(x,0) = \varphi(x) \quad (3.4)$$

$$U(0,t) = g_1(t) \quad (3.5)$$

$$U(1,t) = g_2(t) \quad (3.6)$$

standart başlangıç sınır değer problemini elde etmiş oluruz.

Bu problemi sayısal olarak çözebiliriz. Elde edilen sayısal çözümleri (3.2)'nin sağ tarafında U yerine yazarsak, $p(t)$ için yaklaşık çözüm elde etmiş oluruz.

(3.3)-(3.6) sistemini tekrar sonlu farklar yöntemi ile çözeceğiz.

$$\Omega_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_n) : x_i = ih, t_n = \tau n, i = \overline{0, N}, n = \overline{0, M}, h = 1/M, \tau = T/M \right\}$$

kafesi üzerinde sonlu fark şeması aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} + k(U_i^n)U_i^{n+1} + f_i^{n+1} \quad (3.7)$$

Burada,

$$k(U_i^n) = \left(\frac{E_{i+1} - E_i}{\tau} - \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} - f_i^n \right) / E_{n+1}, \quad i = \overline{2, N-1} \quad n = \overline{2, M-1}$$

dir.

$$U_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N} \quad (3.8)$$

$$U_0^n = g_1(t_n), \quad n = \overline{1, M} \quad (3.9)$$

$$U_N^n = g_2(t_n), \quad n = \overline{1, M} \quad (3.10)$$

(3.7)'de aynı değişkenlerin katsayılarını toplayıp denklemini tekrar düzenlersek,

$$\left(-\frac{1}{h^2} \right) U_{i-1}^{n+1} - \left(-\frac{2}{h^2} - \frac{1}{\tau} - k(U_i^n) \right) U_i^{n+1} + \left(-\frac{1}{h^2} \right) U_{i+1}^{n+1} = - \left(-\frac{U_i^n}{\tau} - f_i^{n+1} \right)$$

elde edilir.

Her iki tarafı -1 ile çarparsak, aşağıdaki ifade bulunur.

$$\frac{1}{h^2} U_{i-1}^{n+1} - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau} + k(U_i^n) \right) U_i^{n+1} + \frac{1}{h^2} U_{i+1}^{n+1} = - \left(\frac{U_i^n}{\tau} + f_i^{n+1} \right)$$

Burada katsayılar,

$$A_i = \frac{1}{h^2},$$

$$C_i = \frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau} + k(U_i^n),$$

$$B_i = \frac{1}{h^2}$$

ve

$$F_i = \frac{U_i^n}{\tau} + f_i^{n+1}$$

olarak alınıp yazılırsa,

$$A_i U_{i-1} - C_i U_i + B_i U_{i+1} = -F_i$$

elde edilir.

Sınır koşullarını, TDMA yöntemini uygulamaya uygun biçimde aşağıdaki şekilde yazalım:

$$U_1^{n+1} = \mathcal{H}_1^{n+1} U_2^{n+1} + \mu_1^{n+1}$$

$$U_N^{n+1} = \mathcal{H}_2^{n+1} U_{N-1}^{n+1} + \mu_2^{n+1}$$

Burada,

$$\mathcal{H}_1^{n+1} = 0 \quad , \quad \mathcal{H}_2^{n+1} = 0$$

$$\mu_1^{n+1} = g_1(t_{n+1}) \quad , \quad \mu_2^{n+1} = g_2(t_{n+1})$$

dir.

BÖLÜM 4

SAYISAL ÇÖZÜM SONUÇLARI

4.1. Test Oluşturma

Problemin çözümünün doğruluğunu kontrol için test oluşturalım.

$$U_t = U_{xx} + p(t)U + f(x,t) \quad (4.1)$$

$$U(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (4.2)$$

$$U(0,t) = \mu_1(t) \quad , \quad 0 < t < T \quad (4.3)$$

$$U(1,t) = \mu_2(t) \quad , \quad 0 < t < T$$

probleminde,

$$U(x,t) = t \sin x + 1$$

$$p(t) = t^2$$

olarak alınsın.

Başlangıç ve sınır koşullarını $U(x,t)$ fonksiyonuna uygulayarak, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ ve $\mu_2(t)$ değerlerini bulalım.

$$U(x,0) = 0 \cdot \sin x + 1 = 1 = \varphi(x)$$

$$U(0,t) = t \cdot \sin 0 + 1 = 1 = \mu_1(t) \quad (4.4)$$

$$U(1,t) = t \cdot \sin(1) + 1 = \mu_2(t)$$

$U(x,t)$ fonksiyonunun, (4.1) için gerekli olan türevlerini alalım.

$$U_t(x,t) = (t \sin x + 1)' = \sin x$$

$$U_x(x,t) = t \cos x$$

$$U_{xx}(x,t) = -t \sin x$$

Bulunanları (4.1)'de yerine yazarsak,

$$\sin x = -t \sin x + t^2(t \sin x + 1) + f(x,t)$$

$$\sin x = -t \sin x + t^3 \sin x + t^2 + f(x,t)$$

elde edilir. Buradan,

$$f(x,t) = \sin x + t \sin x - t^3 \sin x - t^2$$

$$f(x,t) = \sin x (1 + t - t^3) - t^2$$

olarak bulunur.

Şimdi de aynı problemde $f(x,t) = \sin x (1 + t - t^3) - t^2$ ve (4.4) sınır ve başlangıç koşullarını sağlayan ve önceden bildiğimiz $U(x,t)$ fonksiyonunu bulalım.

Problemi istenen şekilde yazalım.

$$U_t = U_{xx} + p(t)U + \sin x (1+t-t^3)-t^2 \quad (4.5)$$

$$U(x,0) = 1, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (4.6)$$

$$U(0,t) = 1, \quad 0 < t < T \quad (4.7)$$

$$U(1,t) = t \sin(1) + 1, \quad 0 < t < T \quad (4.8)$$

ve ek koşul,

$$U(x^*,t) = t \sin(x^*) + 1 \quad (4.9)$$

verilsin.

4.2. Birinci Çözüm Prosedürü ile Sayısal Çözüm

(4.5)-(4.9) problemine,

$$U(x,t) = \frac{V(x,t)}{r(t)}, \quad r(t) = e^{\int_0^t p(s) ds}, \quad p(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)}$$

dönüşümlerini uygulayalım.

$f(x,t) = \sin x (1 + t - t^3) - t^2$ olarak alıp, dönüşümlere göre (4.5)'i tekrar düzenleyelim.

$$V_t = V_{xx} + r(t) [\sin x (1 + t - t^3) - t^2] \quad (4.10)$$

Başlangıç koşuluna dönüşümü uygularsak,

$$U(x,0) = \frac{V(x,0)}{r(0)}$$

$U(x,0) = 1$, $r(0) = 1$ olduğundan

$V(x,0) = 1$ olarak,

sınır koşullarına dönüşümleri uygularsak da,

$$U(0,t) = \frac{V(0,t)}{r(t)} = 1 \quad \text{den,}$$

$V(0,t) = r(t)$ olarak,

$$U(1,t) = \frac{V(1,t)}{r(t)} = t \sin(1) + 1 \quad \text{den ise sağ sınır koşulu,}$$

$V(1,t) = r(t)t \sin(1) + r(t)$ olarak bulunurlar.

(4.9)'a dönüşümleri uygularsak,

$$U(x^*, t) = \frac{V(x^*, t)}{r(t)}$$

$$t \sin(x^*) + 1 = \frac{V(x^*, t)}{r(t)}$$

$$V(x^*, t) = r(t) t \sin(x^*) + r(t) \quad (4.11)$$

olarak ek koşul elde edilir.

Buradan,

$$r(t) = \frac{V(x^*, t)}{t \sin(x^*) + 1}$$

olarak ifade edilir.

Dönüşümleri uygulayarak elde ettiğimiz başlangıç, sınır koşulları ve ek koşula göre (4.5)-(4.9) problemini tekrar düzenlersek, problemi aşağıdaki şekilde ifade ederiz.

$$V_t = V_{xx} + V(x^*, t) F(x, t) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad T > t > 0 \quad (4.12)$$

$$V(x, 0) = 1 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0 \quad (4.13)$$

$$V(0, t) = \frac{V(x^*, t)}{t \sin(x^*) + 1} \quad , \quad 0 < t < T \quad (4.14)$$

$$V(l, t) = \frac{V(x^*, t)}{t \sin(x^*) + 1} (t \sin(l) + 1), \quad 0 < t < T \quad (4.15)$$

Burada $F(x, t) = \frac{\sin x(1 + t - t^3) - t^2}{t \sin(x^*) + 1}$ dir.

V_i^n olarak $V(x_i, t_n)$ 'nin yaklaşımını kabul edersek, (4.12) denklemini için tam kapalı şema,

$$\Omega_{ht} = \left\{ (x_i, t_n) : x_i = (i-1)h, t_n = (n-1)\tau, h = 1/(N-1), \tau = T/(M-1), i = \overline{0, N}, n = \overline{0, M} \right\} \quad (4.16)$$

olarak tanımlanarak, aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} = \frac{V_{i+1}^{n+1} - 2V_i^{n+1} + V_{i-1}^{n+1}}{h^2} + V_i^n \frac{\sin(x_i)(1 + t_{n+1} - t_{n+1}^3) - t_{n+1}^2}{t_{n+1} \sin(x_i) + 1} \quad (4.17)$$

$$V_i^1 = 1, \quad i = \overline{0, N} \quad (4.18)$$

$$V_i^n = 1, \quad n = \overline{1, M} \quad (4.19)$$

$$V_N^n = (t_n \sin(l) + 1) \frac{V_i^{n-1}}{t_n \sin(x_i) + 1}, \quad n = \overline{1, M} \quad (4.20)$$

(4.17)-(4.20) sonlu farklar şemasının çözümü TDMA (Tree Diagonal Matrix Algorithm) yöntemi ile yapılacağına göre, (4.17)'yi üç noktalı şema şeklinde yazalım.

(4.17) denkleminde aynı değişkenlerin katsayılarını toplayıp, düzenleyelim.

$$\left(-\frac{1}{h^2} \right) V_{i-1}^{n+1} - \left(-\frac{2}{h^2} - \frac{1}{\tau} \right) V_i^{n+1} + \left(-\frac{1}{h^2} \right) V_{i+1}^{n+1} = - \left(-\frac{V_i^n}{\tau} - V_i^n \frac{\sin(x_i)(1 + t_{n+1} - t_{n+1}^3) - t_{n+1}^2}{t_{n+1} \sin(x_i) + 1} \right)$$

Her iki tarafı -1 ile çarpıp düzenlersek,

$$\frac{1}{h^2} V_{i-1}^{n+1} - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right) V_i^{n+1} + \frac{1}{h^2} V_{i+1}^{n+1} = - \left(\frac{V_i^n}{\tau} + V_i^n \frac{\sin(x_i)(1 + t_{n+1} - t_{n+1}^3) - t_{n+1}^2}{t_{n+1} \sin(x_{i^*}) + 1} \right)$$

Burada katsayılar,

$$A_i = \frac{1}{h^2},$$

$$C_i = \frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau},$$

$$B_i = \frac{1}{h^2}$$

ve

$$F_i = \left(\frac{V_i^n}{\tau} + V_i^n \frac{\sin(x_i)(1 + t_{n+1} - t_{n+1}^3) - t_{n+1}^2}{t_{n+1} \sin(x_{i^*}) + 1} \right)$$

olarak alınıp tekrar yazılırsa,

$$A_i V_{i-1} - C_i V_i + B_i V_{i+1} = -F_i$$

elde edilir.

Sınır koşullarını, TDMA yöntemini uygulamaya uygun biçimde aşağıdaki şekilde yazalım.

$$V_1^{n+1} = \mathcal{H}_1^{n+1} V_2^{n+1} + \mu_1^{n+1}$$

$$V_N^{n+1} = \mathcal{H}_2^{n+1} V_{N-1}^{n+1} + \mu_2^{n+1}$$

Burada,

$$\mathcal{H}_1^{n+1} = 0 \quad , \quad \mu_1^{n+1} = 0$$

$$\mathcal{H}_2^{n+1} = 0 \quad , \quad \mu_2^{n+1} = (t_n \sin(1) + 1) \frac{V_i^{n-1}}{t_n \sin(x_i) + 1}$$

dir.



4.3. Bilgisayar Çözüm Sonuçları

Örnek 1: Önce, yapılan çözüm şemalarının yaklaşım şemaları olduğunu kontrol etmek için farklı zaman ve uzay adımları kullanılarak sayısal çözümler yapılmıştır.

Bu sonuçlar Şekil 4.1.a,b) ve Şekil 4.2.a,b) de gösterilmiştir. Şekillerde düz eğri ile gerçek $p(t)$ çözümü, sembollü eğrilerle ise yaklaşık çözüm sonuçları gösterilmiştir.

Şekil 4.1.a) da zaman adımı sabit tutulmuş, uzay adımı değiştirilerek yapılan çözüm sonuçları verilmiştir. Şekil 4.1.b) de ise uzay adımı sabit tutulmuş, farklı zaman adımlarına göre çözüm sonuçları verilmiştir.

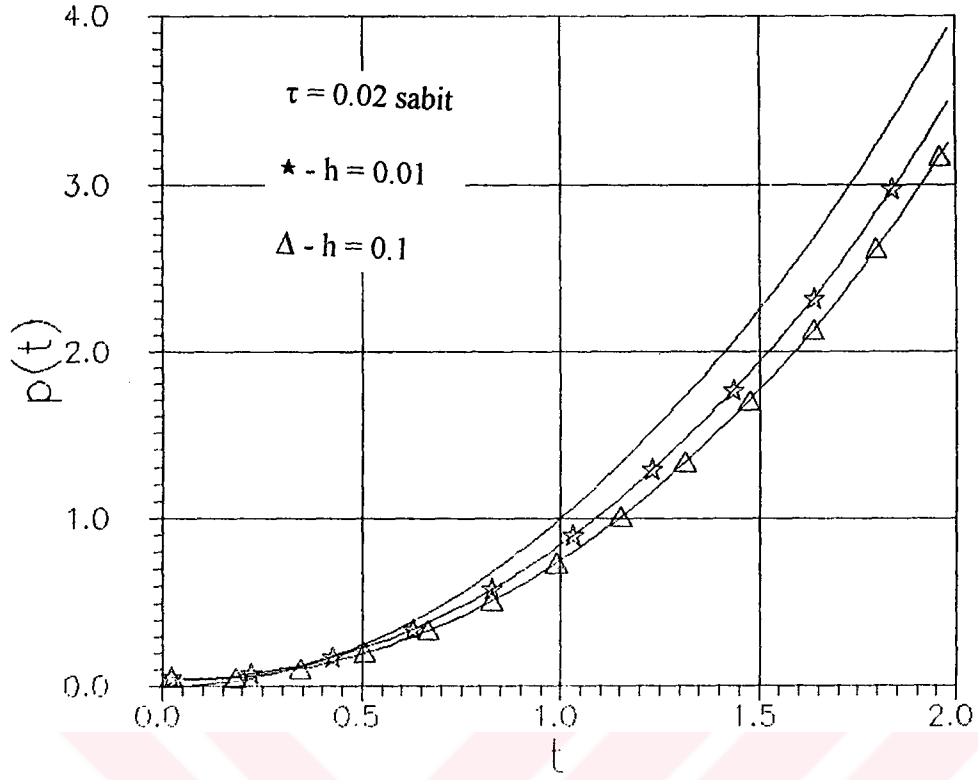
II. Algoritmaya göre de benzer işlemler yapılmış ve sayısal çözüm sonuçları Şekil 4.2.a) ve Şekil 4.2.b) de verilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi adımların küçülmesi, yaklaşık ve gerçek çözümlerin birbirine yaklaşmasını sağlamaktadır. Bu da, yapılan şemaların yaklaşım şeması olduklarını göstermektedir.

Örnek 2: Bu örnekte $p(t)$ fonksiyonunun bulunması için kullanılan $E(t)$ ölçüm sonucu üzerine hatalar (ölçüm cihazının hata payı) eklenmiş ve yapılan şemaların bu hatalara karşı duyarlılığı araştırılmıştır.

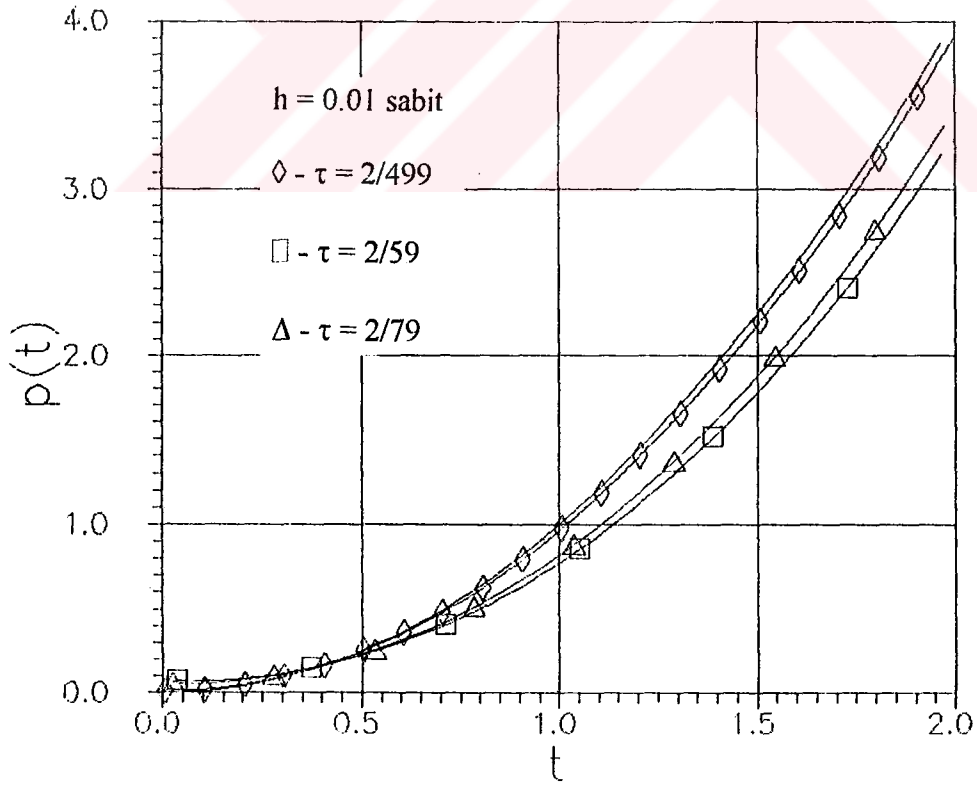
Şekil 4.3.a) ve Şekil 4.3.b) de $\tilde{E}(t) = E(t)(1 + \delta(t, a))$ alınarak,

- 1) $\delta(t, a) = \delta = \text{const}$ ve
- 2) $\delta(t, a)$ $(-a, a)$ aralığı üzerinde eşit dağılımlı rastgele fonksiyonlar olduğu durumlar için çözümler yapılmıştır.

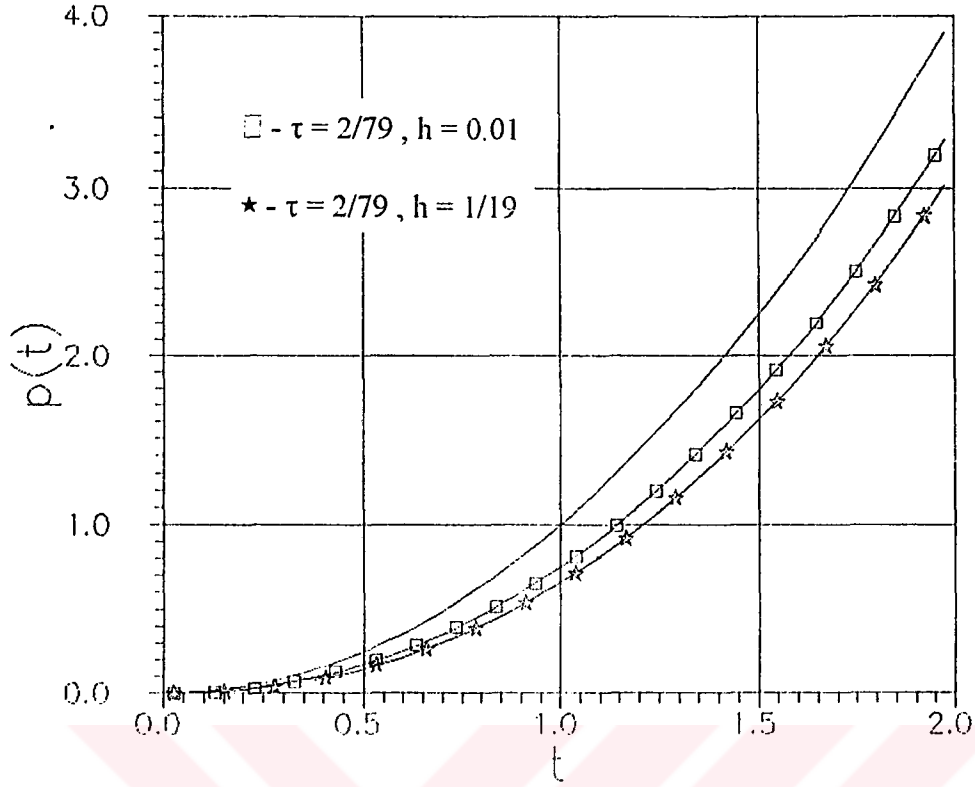
1. Durum için sonuçlar Şekil 4.3.a) ve Şekil 4.3.b) de verilmiştir. 4.3.a) Şekli ile aynı zaman ve uzay adımlarıyla yapılan Şekil 4.1.b) deki *'la gösterilmiş çözüm karşılaştırıldığında yaklaşık çözümlerde Şekil 4.3.a) da az bir kötüleşme görülmüştür.



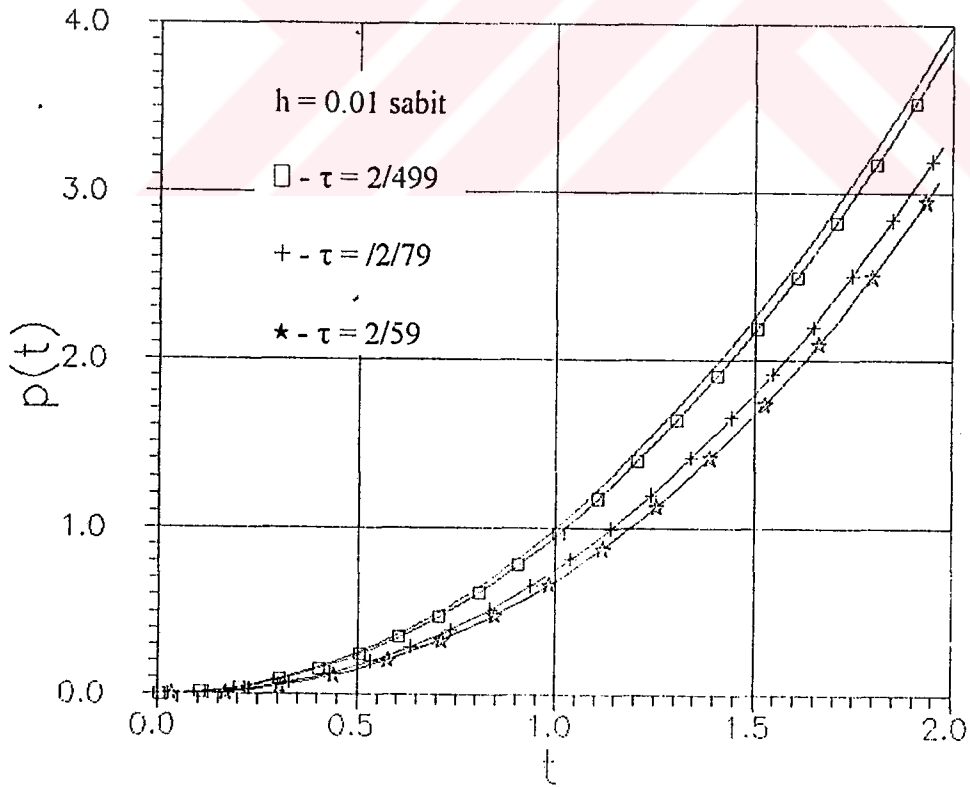
Şekil 4.1.a) I. Algoritmaya göre hatasız çözümler.



Şekil 4.1.b) I. Algoritmaya göre hatasız çözümler.



Şekil 4.2.a) II. Algoritmaya göre hatasız çözümler.



Şekil 4.2.b) II. Algoritmaya göre hatasız çözümler.

1. Durum için sonuçlar Şekil 4.3.a) ve Şekil 4.3.b) de verilmiştir. 4.3.a şekli ile aynı zaman ve uzay adımlarıyla yapılan Şekil 4.1.b) deki *'la gösterilmiş çözüm karşılaştırıldığında yaklaşık çözümlerde Şekil 4.3.a)'da az bir kötüleşme görülmüştür.

Aynı durum, II. Algoritma ile yapılan çözümler içinde söylenebilir. Bu durumda Şekil 4.3.b) ve Şekil 4.2.b)'deki + ile gösterilmiş çözümler karşılaştırılmıştır. Şekil 4.3.b)'de az bir kötüleşme görülmüştür.

2. Durum için yapılan sayısal çözüm sonuçları Şekil 4.4.a)'da verilmiştir. * ile gösterilen çözümler $\delta(t,0.01)$, \square ile gösterilen çözümler ise $\delta(t,0.001)$ hataları ile yapılan çözümlere karşı gelmektedir. Şekilden görüldüğü gibi bu durumda elde edilen sayısal çözüm sonuçları daha kötüleşmekte ve gerçek çözüme belli bir integral normuna göre yaklaşmaktadır.

Beklendiği gibi a değerinin küçülmesi ile daha iyi yaklaşım elde edilmektedir.

Benzer çözüm sonuçları II. Algoritma için Şekil 4.4.b)'de verilmiştir.

Örnek 3: Bu örnekte I. ve II. çözüm algoritmalarının random hatalara göre duyarlıklarını karşılaştırmak için eşit zaman ve uzay adımlarına göre bir dizi sayısal çözümler yapılmıştır. Bu sayısal çözüm sonuçları Tablo 4.1'de verilmiştir.

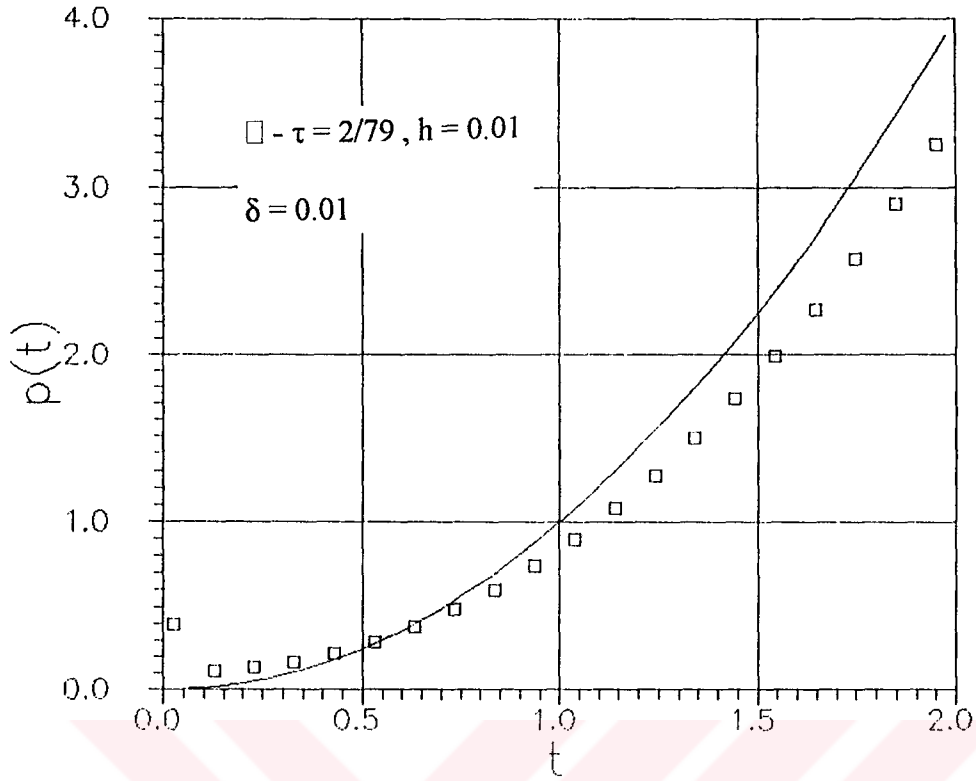
Tablodan görüldüğü gibi, çok küçük hatalara karşı I. ve II. Algoritmanın duyarlılığı çok fark göstermezken, büyük hatalara karşı II. Algoritma, I. Algoritmaya göre daha az duyarlılık göstermiştir.

Örnek 4: Bu örnekte I. ve II. Çözüm algoritmaları ile özdeş olarak sıfır başlangıç koşulu, sıfırdan farklı sınır koşulu olan bir problem çözümü yapılmıştır. Böyle bir problemi, test oluşturma bölümünde yapıldığı gibi uygun sağ taraf ve katsayılar seçildiğinde, $U(x,t)=t.\sin x$ fonksiyonu çözüm olarak sağlayabilir.

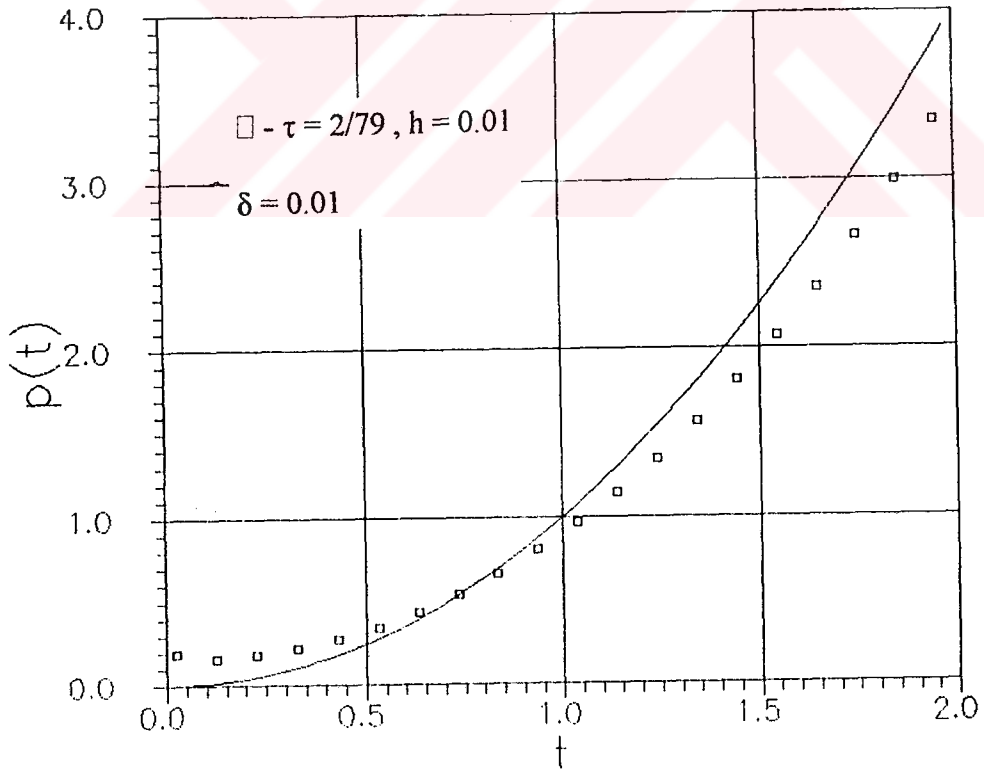
I. Algoritma ile çözüm yapıldığında, bu algoritmanın şemasından (2.10) görüldüğü gibi özdeş olarak sıfır çözümü elde edilecektir. Yani şema bu şekildeki problemler üzerinde yaklaşım sağlamayacaktır.

Aynı problem II. çözüm algoritması ile çözülebilir ve gerçek çözüme istenilen yaklaşım sağlanabilir. Böylece yapılan sayısal örnekler I. algoritmanın, II. algoritmaya göre h ve τ 'nin daha büyük değerleri için yakınsak olduğunu; II. algoritmanın ise I. algoritmaya göre bazı problemlerin çözümlerinde daha iyi performans gösterdiğini, ölçüm hatalarına göre daha az duyarlı olduğunu ortaya koymuştur.

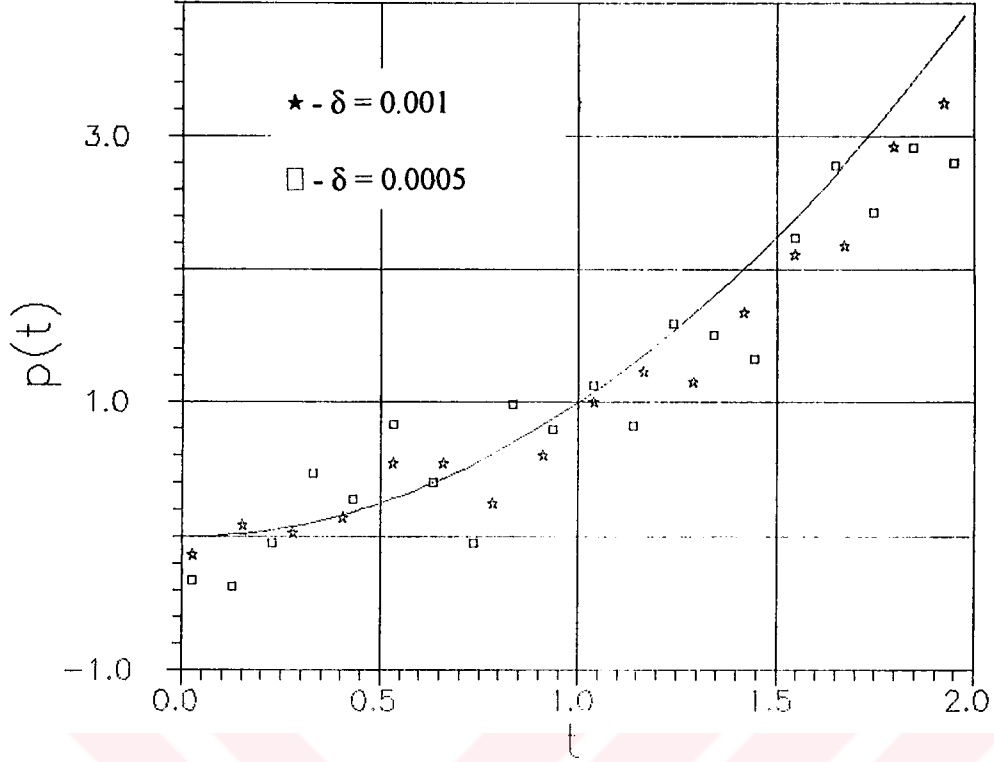




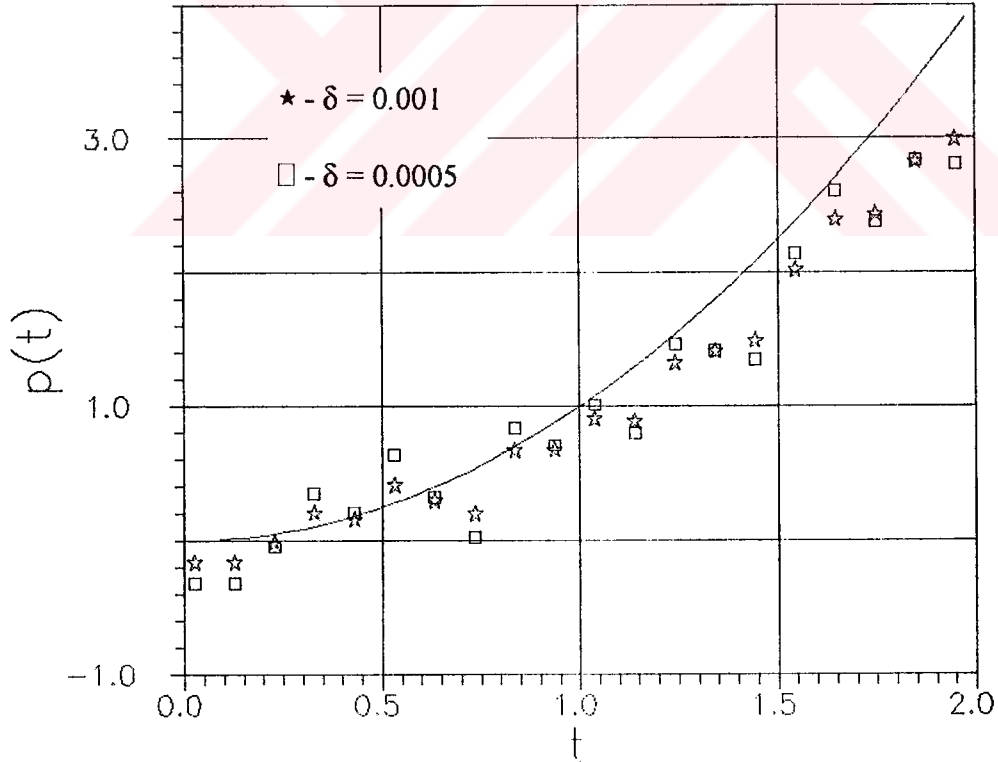
Şekil 4.3.a) I. Algoritmaya göre sabit hatalı çözüm.



Şekil 4.3.b) II. Algoritmaya göre sabit hatalı çözüm.



Şekil 4.4.a) I. Algoritmaya göre random hatalı çözümler.



Şekil 4.4.b) II. Algoritmaya göre random hatalı çözümler.

Tablo 4.1. $P_G(t_i) = t_i^2$ – Gerçek, $P_y(t_i)$ – Çözüm sonucu elde edilen

Gerçek çözümle hatalı çözüm arasındaki standart sapma: $\frac{\sum_{i=1}^M (P_G(t_i) - P_y(t_i))^2}{M}$

RANDOM HATA	GERÇEK ÇÖZÜMLE HATALI ÇÖZÜM ARASINDAKİ STANDART SAPMA	
	I. ALGORİTMAYA GÖRE	II. ALGORİTMAYA GÖRE
0.005	2.99E-01	2.79E-01
0.01	3.7441E-01	3.65E-01
0.025	8.916668E-01	6.350840E-01
0.05	2.7224	1.63033
0.1	10.09	5.454

KAYNAKLAR

- [1] Cannon JR 1984 The One-Dimensional Heat Equation Encyclopedia of Mathematics and its Applications 23 (Reading, MA: Addison-Wesley)
- [2] Cannon JR and Lind Y 1998 Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations inverse problems 4 35-45
- [3] Cannon JR and Lin Y 1990 An inverse problem of finding a parameter in a semi-linear heat equation J. Math. Anal. Appl. 145 470-84
- [4] Cannon JR, Lin Y and Wang S 1992 Determination of source parameter in parabolic equations Meccanica 27 85-94
- [5] Cannon JR and Y in H 1989 On a class of non-classical parabolic problems J. Diff Eq. 79 266-88
- [6] Friedman A 1964 Partial Differential Equations of Parabolic Type (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall)
- [7] Ladyzenskaja OA, Solonnikov VA and Ural'tseva NN 1968 Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type (AMS Trans. Math. Monograph 23 Providence, RI : AMS)
- [8] Lin Y 1991 An inverse problem for a class of quasilinear parabolic equations SIAM J. Math. Anal. 22 146-56
- [9] Prilepko AI and Orlovskii DG 1985 Determination of the evolution parameter of an equation and inverse problems of mathematical physics Diff. Eq. 21 119-29 ; 1985 Determination of the evolution parameter of an equation and inverse problems of mathematical physics Diff. Eq. 21 694- 701
- [10] Prilepko AI and Salo'ev VV 1987 Solvability of the inverse boundary value problem of finding a coefficient of a lower order term in a parabolic equation Diff. Eq. 23 136-43
- [11] Wang S and Lin Y 1989 A finite difference solution to an inverse problem for determining a control function in a parabolic partial differential equation inverse Problems 5 631-40
- [12] B.F. Jones, Determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Part I: existence and uniqueness, Jour. Of Math. And Mech. 11, No.6 (1962)
- [13] _____ , Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations, CPAM XVI (1963)

- [14] J. Douglas and B.F. Jones, Determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Part II: Jour. Of Math. Mech. 11, No.6 (1962)
- [15] J.R. Cannon, J.Douglas and B.F. Jones, Determination of the diffusivity in an anisotropic medium, Int. J. Eng. Sci. 1 (1963)
- [16] J.R. Cannon, Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation, Duke Math. J. 30 No.2 (1963)
- [17] _____, Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data, SIAM J. Num. Anal. 5, No.2 (1968)
- [18] J.R. Cannon and P. DuChateau, Determining unknown coefficients in a nonlinear heat conduction problem, SIAM JAP 24, No. 3 (1973)
- [19] _____, Determination of the conductivity of an isotropic meolium, JMAA 48, No.3 (1974)
- [20] _____, An inverse problem for an unknown source term in a heat equation, JMAA 75, No.2 (1980)
- [21] _____, An inverse problem for a nonlinear diffusion equation, SIAM JAP 39, No.2 (1980)
- [22] A. Lorenzi, An inverse problem for a semilinear parabolic equation Ann. Mat. Pura. Appl. 84, No.4 (1982)
- [23] B.M. Budak and A.D. Iskenderov, On a class of converse boundary value problems with unknown coefficients, Dokl Akdad Nauk SSSR 176, No.1 (1967)
- [24] G.R. Richter, An inverse problem for the steady state diffusion equation, SIAM JAP 41, No.2 (1981)
- [25] E.M. Arnold, Coefficient identification for a divergence form partial differential equation, SIAM JAP 49, No.3 (1989)
- [26] M. Pilant and W.Rundell, An inverse problem for a nonlinear elliptic differential equation, SIAM JMA
- [27] _____, An inverse problem for a nonlinear elliptic differential equation, SIAM JMA
- [28] A.I. Prilepko and D.G. Orlovskii, Determination of the evolution parameter of an equation and inverse problems of mathematical physics, Diff. Urav. 21, No.1 (1985)
- [29] G. Chavent and P. Lemannier, Identification de la nonlinearite d'une equation parabolique quasilineaire, Appl. Math. And Opt. 1, No.2 (1974)

- [30] F. Colonius and K. Kunisch, Output least squares stability in elliptic systems, preprint.
- [31] S. Zachmann, P. Du Chateau and A. Klute, Calibration of the Richards flow equation for a draining column by parameter estimation, *SSSA Jour.* 45, No.6 (1981)
- [32] U. Hornung, Identification of nonlinear soil parameters from an input-output experiment, in *Prog. Sci. Comput*, Birkhäuser Boston, Cambridge, MA, 1983
- [33] J.R. Cannon and P.C. Du Chateau, Determination of unknown coefficients in parabolic operators from overspecified initial boundary data, *J. Heat Transfer*, 100 (1978), pp. 503-507



ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Kilis'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini, Bozüyük'de tamamladı. 1990 yılında girdiği Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1994 yılında mezun oldu. Aynı yıl, Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı bir lisede matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 1995 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.



TC. YEREL YÖNETİMLER KURULU
DOKÜMANLAR VE İZLENİMLER BİREKİ