KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAMMA HALKALARI ÜZERİNDE TÜREVLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülcan ÖZKUM

AnaBilim Dalı: MATEMATİK

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Muharrem SOYTÜRK

ŞUBAT 2000

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAMMA HALKALARI ÜZERİNDE TÜREVLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülcan ÖZKUM

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 11 Şubat 2000

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Mart 2000

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Yard.Doç.Dr.Muharrem SOYTÜRK	Prof.Dr.Kazım KAYA	Doç.Dr.Neşet AYDIN

ŞUBAT 2000

TÜREVLİ GAMMA HALKALARI

Gülcan ÖZKUM

Anahtar kelimeler: Gamma Halkası, Türev, Asal Halka.

Özet: Bu çalışmamız esas olarak üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılan, halkayla ilgili genel bilgiler ve üzerinde çalıştığımız konuyla ilgili önceden yapılan çalışmalar özet halinde ispatsız verilmiştir.
İkinci bölümde ise Gamma Halkaları ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiş, daha sonra türevli Γ-halkalarının komütatifliği incelenip, halka teoride bilinen bazı sonuçlar sırasıyla (σ,τ)-türevli, simetrik bi-türevli, ortogonal türevli Γ-halkalarında ve modül değerli (σ,τ)-türevli halkalarda ispatlanmıştır.
Üçüncü bölümde de yine halka teoride bilinen bazı sonuçlar asal Γ-halkaları üzerinde tek yanlı idealler ve türevler ve Γ-halkaları üzerinde modül değerli (σ,τ)-türevler üzerine genelleştirilmiştir.

GAMMA RINGS WITH DERIVATIONS

Gülcan ÖZKUM

Key Words: Gamma Ring, Derivation, Prime Ring.

Abstract: This study consist of three chapters. The first chapter provides a general introduction about rings which will form the basis of the following chapters and gives a review of the literature.
The second chapter starts with a general definition and theorem of Gamma Rings. It also gives a detailed analysis of commutative property of Γ-rings with derivation and some of the known results of the ring theory are applied on Γ-rings with (σ,τ)-derivation symmetric bi-derivation, orthogonal derivation and rings with module valued (σ,τ)-derivation.
In the final chapter, some of the known results of the ring theory are generalized on prime Γ-rings, one-sided and derivations and Γ-rings with module valued (σ,τ)-derivation.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmada Gamma Halkaları Üzerinde Türevler incelenmiştir.

Bu çalişmayı yöneten ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Muharrem SOYTÜRK'e içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

$\forall$: Her
$\exists$: En az bir
Z : Tam sayılar kümesi
Q : Rasyonel sayılar kümesi
$\Rightarrow$: Gerek koşul
$\Leftarrow$: Yeter koşul
$\Leftrightarrow$: Gerek ve yeter koşul
$\in$: Bir kümenin elemanı olma
$\subset$: Alt küme
$\cup$: Birleşim
Σ : Toplam sembolü
$\times$: Kartezyen çarpımı
$\oplus$: Direkt toplam sembolü
P^c : P'nin tümleyeni
$Ann_r\, U$: U'nun sağ sıfırlayanlarının kümesi
$Ann_l\, U$: U'nun sol sıfırlayanlarının kümesi
Ker θ : θ dönüşümünün çekirdeği
r(A) : A'nın radikali
Char R : R halkasının karakteristiği

BÖLÜM 1. GİRİŞ

R bir halka ve d, σ, τ, R üzerinde toplamsal dönüşümler olsun. Bu durumda $\forall x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ise d ye R de bir türev, $d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ ise d'ye R de bir (σ,τ)-türev denir.

$D : R \times R \to R$ bi-toplamsal dönüşüm olmak üzere $\forall x, y \in R$ için $D(x,y) = D(y,x)$ ve $D(xy,z) = D(x,z)y + xD(y,z)$ eşitliklerini sağlıyorsa bu durumda D ye, R de bir simetrik bi-türev ve $f : R \to R$, $f(x) = D(x,x)$ şeklinde tanımlanan f dönüşümüne de D nin izi denir. $C(R) = \{a \in R \mid ax = xa, \forall x \in R \text{ için}\}$, $C_{\sigma,\tau}(R) = \{c \in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c, \forall x \in R \text{ için}\}$ kümelerine sırasıyla R nin merkezi ve (σ,τ)-merkezi denir. R nin merkezi Z ile gösterelim.

R bir yarı-asal halka ve d ile g, R nin $\forall x, y \in R$ için $d(x)Rg(y) = 0 = g(y)Rd(x)$ sağlanacak şekilde türevleri ise d ve g ye ortogonal türevler denir. $(0) \neq X$ bir R-bimodül olmak üzere $d : R \to X$ toplamsal dönüşümü $\forall a, b \in R$ için $d(ab) = d(a)\sigma(b) + \tau(a)d(b)$ eşitliğini sağlıyorsa d ye modül değerli (σ,τ)-türev denir.

R bir halka ve d, d_1, d_2, R nin türevleri olmak üzere $d(R) \subset Z$, $d_1d_2(R) \subset Z$, $d^2(R) \subset Z$ ve $[d(R),d(R)] \subset Z$ koşullarından herhangi biri varken R nin komütatif olduğu değişik yazarlar tarafından gösterildi. Daha sonra bu özelliklerde R yerine R nin U ideali ,U Lie ideali , d yerine de (σ,τ)-türev alınarak sonuçlar genelleştirildi.

D_1, D_2 bir R halkasında simetrik bi-türevler ve d_1, d_2 onların izleri olmak üzere $\forall x \in R$ için $D_1(d_2(x),x) = 0$ ise $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ olduğu ve $B : R\times R \to R$ simetrik bi-toplamsal dönüşüm ve f, B nin izi iken $\forall x \in R$ için $d_1d_2(x) = f(x)$ ise $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ olduğu gösterildi (Soytürk, 1994).

Tezimizin 2.1 kesiminde daha önce Nobusawa (1964) ve Barnes (1966) tarafından tanımlanan ve üzerinde çalışılan Gamma Halkaları ele alınmıştır.

Yukarıda bahsedilen sonuçları genelleştiren Soytürk, M. (1994, D. Tezi) nin yaptığı çalışmalar aşağıda özet olarak verilmiş ve bunlar tezimizin ikinci bölümünün kalan kısmını oluşturmuştur.

(A): M bir asal Γ-halkası, char $M \neq 2$ ve $0 \neq d : M \to M$ türev, $(0) \neq U$, M nin bir ideali, Z M nin merkezi olsun. Buna göre,

(1) $d(U) \subset Z$ ise M komütatiftir.

(2) Char $M \neq 2, 3$, $d(U) \subset U$ ve $d^2(U) \subset Z$ ise M komütatiftir.

(3) Char $M \neq 2, 3$, d_1 ve d_2, M nin $d_1d_2(U) \subset Z$, $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde türevleri ve $a \in M$ olsun. $[d_1(U),a]_\gamma \subset Z$, $\forall \gamma \in \Gamma$ ise $a \in Z$ dir.

(4) Char $M \neq 2, 3$, $0 \neq d_1, d_2$ M nin $d_1d_2(U) \subset Z$, $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde türevleri ise M komütatiftir.

(B): M bir asal Γ-halkası, d M nin bir (σ,τ)-türevi,$(0) \neq U$ M nin bir ideali ve $a \in M$ olsun. Buna göre,

(1) $a\Gamma d(U) = 0$ (veya $d(U)\Gamma a = 0$) ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

(2) $d(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

(3) Char $M \neq 2$ ve $d^2(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

(4) $d(U) \subset Z$ ise M komütatiftir.

(5) Char $M \neq 2, 3$, $d(U) \subset U$ ve $d^2(U) \subset Z$ ise M komütatiftir.

(C) : M bir asal Γ-halkası, char $M \neq 2$, D_1 ve D_2 simetrik bi-türevler, d_2 D_2 nin izi olsun. Buna göre,

(1) $\forall x \in M$ için $D_1(d_2(x),x) = 0$ ise D_1 veya $D_2 = 0$ dır.

(2) M, bir yarı asal Γ-halkası, char $M \neq 2$, D simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun. $\forall x \in M$ için $D(d(x),x) = 0$ ise $D = 0$ dır.

(3) Char $M \neq 2, 3$, D_1 ve D_2 simetrik bi-türevler ve B, M nin simetrik bi-toplamsal dönüşümü ve d_1, d_2, f sırayla D_1, D_2 ve B nin izleri olsunlar. Eğer $\forall x \in M$ için $d_1d_2(x) = f(x)$ ise $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

(4) M bir yarı asal Γ-halkası, char $M \neq 2, 3$, D simetrik bi-türev, B M nin simetrik bi-toplamsal dönüşümü ve d, f sırasıyla D ve B nin izleri olmak üzere $d(d(x)) = f(x)$, $\forall x \in M$ ise $D = 0$ dır.

(D) : M bir yarı asal Γ-halkası, char $M \neq 2$ ve $d, g : M \to M$ iki türev olsun.

1) d ile g nin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır.

   i) $dg = 0$

   ii) $dg + gd = 0$

   iii) dg türev

   iv) $\forall x \in M$ için $(dg)(x) = a\alpha x + x\beta b$ olacak şekilde $a, b \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ vardır.

   v) M nin aşağıdaki koşullarını sağlayan U_1, U_2 idealleri vardır.

      a) $U_1 \cap U_2 = (0)$ dir ve $U_1 \oplus U_2$, M nin essential idealidir.

      b) $d : M \to U_1$ ve $g : M \to U_2$

      c) d nin $U_1 \oplus U_2$ ye kısıtlanması, $d_1 : U_1 \to U_1$ türev ve $0_2 : U_2 \to U_2$ sıfır dönüşüm olmak üzere $d_1 \oplus 0_2$ dir. $d_1 = 0$ ise $d = 0$ dır.

      d) g nin $U_1 \oplus U_2$ ye kısıtlanması, $0_1 : U_1 \to U_1$ sıfır dönüşüm, $g_2 : U_2 \to U_2$ türev olmak üzere $0_1 \oplus g_2$ dir. $g_2 = 0$ ise $g = 0$ dır.

(E) : R, karakteristiği 2 ve 3 den farklı olan bir asal halka ve d, R nin bir (σ,τ)-türevi, $U \neq (0)$, R nin bir ideali olsun. Buna göre $d(U) \subset U$ ve $d^2(U) \subset Z$ ise R komütatiftir.

(F) : R bir halka, $X \neq (0)$ bir R-bimodül, $d : R \to X$ bir (σ,τ)-türev, $U \neq (0)$, R nin bir ideali olsun.

$x \in X$, $a \in R$ için $xRa = 0$ ise $x = 0$ veya $a = 0$ (G1)

$x \in X$, $a \in R$ için $aRx = 0$ ise $a = 0$ veya $x = 0$ (G2)

diyelim.

1) $a \in R$ için (G1) (veya (G2)) sağlanıyor ve $d(U)a = 0$ (veya $ad(U) = 0$) ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

2) (G1) sağlanıyor ve $[X,U] \subset C(X)$ ise R komütatiftir.

3) (G1) sağlanıyor ve $[X,U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}(X)$ ise R komütatiftir.

4) X, 2-torsion free, $d_1 : R \to X$ bir (σ,τ)-türev, $d_2 : R \to R$, $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde bir türev olsun. Eğer (G1) sağlanıyorsa ve $d_1 d_2(U) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

5) X, 2-torsion free, $d : R \to X$ bir (σ,τ)-türev olsun. Eğer (G1) sağlanıyor ve $a \in U$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in Z$ veya $d = 0$ dır.

6) X, 2-torsion free, $d : R \to X$ bir (σ,τ)-türev olsun. Eğer (G1), (G2) sağlanıyor ve $a \in U$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}(X)$ ise $a \in Z$ veya $d = 0$ dır.

Son bölümde ise kendi yaptığımız çalışmalar aşağıdaki şekilde sunulmuştur.

M, char $M \neq 2$ olan bir asal Γ-halkası, $(0) \neq U$ sağ ideal ve $0 \neq d$, M nin bir türevi ve $L = Ann_t U$ olmak üzere,

1- M nin d(U) ile üretilen alt halkasının M nin sıfırdan farklı hiçbir sağ idealini kapsamaması için gerek ve yeter koşul $d(U) \subseteq L$ olmasıdır.

2- $0 \neq \delta$, M nin ikinci bir türevi olmak üzere $\delta d(U) = 0$ ise $d(U) \subseteq L$, $\delta(U) \subseteq L$ dır.

M bir Γ-halkası, X M-bimodül ve $(0) \neq U$ bir ideal olmak üzere

(G_1) $x \in X$, $a \in R$ için $x\Gamma M\Gamma a = 0$ ise $x = 0$ veya $a = 0$

(G_2) $x \in X$, $a \in R$ için $a\Gamma M\Gamma x = 0$ ise $a = 0$ veya $x = 0$

koşulları tanımlansın.

3- (i) Eğer (G_1) (veya (G_2)) varsa M asaldır.
(ii) Eğer (G_1) (veya (G_2)) var ve X, 2-torsion free ise M de 2-torsion free dir.

4- (G_1) (veya (G_2)) var ve $\forall x \in X$, $a \in M$ için $x\Gamma U\Gamma a = (0)$ (veya $a\Gamma U\Gamma x = (0)$) ise $x = 0$ veya $a = 0$ dır.

5- $d : M \to X$ bir (σ,τ)-türev olsun ve (G_2) sağlansın.
(i) $d(U) = (0)$ ise $d = 0$ dır.
(ii) $a \in M$ için $a\Gamma d(U) = (0)$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

6- M komütatif olmayan Γ-halkası, $(0) \neq X$, 2 torsion free bir M-modül olsun ve (G_1) sağlansın. $d_1 : R \to X$ bir (σ,τ)-türev, $d_2 : M \to M$, $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde bir türev olsun. Bu durumda $d_1 d_2(U) = (0)$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

7- M bir Γ-halkası, $(0) \neq X$, bir M-bimodül ve (G_1) sağlansın. Bu durumda $0 \neq d : M \to X$ bir (σ,τ)-türev olmak üzere $d(U) \subset C(X)$ ise M komütatiftir.

1.1. Genel Bilgiler

Tanım 1.1.1: R bir halka, A, B ve P, R'nin idealleri olsun.
Bu taktirde $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P ye asal ideal denir.

Teorem 1.1.2: (Mc.Coy, 1964, Theorem 4.3) R bir halka ve P, R'nin bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

i) P asal idealdir,

ii) $\forall a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir,

iii) $\forall a, b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir,

iv) U ve V, R'nin iki sol (sağ) ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ ise $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

Tanım 1.1.3: R bir halka olsun. R üzerinde (0) ideali asal ideal ise R'ye asal halka denir.

Uyarı 1.1.4: R'nin bir asal halka olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in R$ için $aRb = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır.

Tanım 1.1.5: R bir halka ve Q, R'nin bir ideali olsun. Her $A \subset R$ ideali için $A^2 \subseteq Q$ olduğunda $A \subseteq Q$ oluyorsa Q ya R nin yarı-asal ideali denir.

Teorem 1.1.6: (Mc.Coy, 1964, Theorem 4.12) R bir halka ve Q, R nin bir ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

i) P yarı-asal idealdir,

ii) $\forall a \in R$ için $aRa \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur,

iii) $\forall a \in R$ için $(a)^2 \subseteq Q$ ise $a \in Q$ dur,

iv) U, R de bir sol (sağ) ideal ve $U^2 \subseteq Q$ ise $U \subseteq Q$ dur.

Tanım 1.1.7: R bir halka olsun. $\forall a \in R$ için $na = 0$ olacak şekildeki pozitif n tamsayılarının en küçüğüne R halkasının karakteristiği denir ve char $R = n$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.8: R bir halka olsun. $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak şekilde bir n tamsayısı varsa a ya nilpotent eleman denir. $a^n = 0$ fakat $a^{n-1} \neq 0$ ise n ye a nın nilpotentlik indeksi denir.

Tanım 1.1.9: R bir halka ve A, R nin bir ideali olsun. A nın her elemanı nilpotent ise A ya nil ideal denir.

Tanım 1.1.10: B, R nin bir ideali olmak üzere $B^n = (0)$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayı varsa B ye nilpotent ideal denir.
Ayrıca her nilpotent ideal nil olduğu halde bunun tersi her zaman geçerli değildir.

Tanım 1.1.11: Sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan halkaya yarı asal halka denir.

Tanım 1.1.12: Bir R halkasının yarı-asal olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in R$ için $aRa = 0$ olduğunda $a = 0$ olmasıdır.

Tanım 1.1.13: R bir halka ve A, R nin bir alt kümesi olsun.
$r(A) = \{r \in R \mid ar = 0, \forall a \in A \text{ için}\}$
$l(A) = \{r \in R \mid ra = 0, \forall a \in A \text{ için}\}$
kümelerine sırasıyla A kümesinin sağ ve sol sıfırlayanları kümesi denir.

Lemma 1.1.14: (Herstein,1976, Corrollary 1) R bir yarı-asal halka ve A, R nin bir ideali olsun. Bu durumda $r(A) = l(A)$ dır.

Önerme 1.1.15: (Herstein, 1968, Lemma 2.1.1) R bir asal halka olsun. Bu durumda R nin sıfırdan farklı her sağ (sol) idealinin sağ (sol) sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 1.1.16: R bir halka ve $0 \neq n$ bir tamsayı olsun. $\forall x \in R$ için $nx = 0$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa R ye n-torsion free halka denir.

Önerme 1.1.17: (Herstein, 1969, Lemma 1.1) R bir halka ve $(0) \neq \rho$, R nin bir sağ ideali olsun.
$\forall a \in \rho$ için $a^n = 0$ olacak şekilde sabit bir n tamsayısı varsa bu durumda R nin sıfırdan farklı bir nilpotent ideali vardır.

Tanım 1.1.18: R bir halka ve X, R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $C_R(X) = \{a \in R \mid xa = ax, \ \forall x \in X\}$ kümesine X in R deki merkezleştiricisi denir. $C_R(R)$ ye ise R halkasının merkezi denir ve Z ile gösterilir.

Önerme 1.1.19: (Herstein, 1976, Lemma 1.1.6) R bir asal halka olsun. $a \in R$ olmak üzere, a R nin sıfırdan farklı bir sağ idealini merkezleştiriyorsa $a \in Z$ dir.

Tanım 1.1.20: R bir halka olmak üzere $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesine komütatör çarpımı denir ve $[x,y]$ ile gösterilir. Ayrıca $[[x,y],z] = [x,[y,z]] + [y,[z,x]]$ eşitliğine Jacobi özdeşliği denir.

Uyarı 1.1.21: (Brauer Trick) Bir G toplamsal grubu iki özalt grubunun birleşimi olarak yazılamaz.

Tanım 1.1.22: R bir halka ve U, R nin bir ideali olsun. R nin her $I \neq (0)$ ideali için $U \cap I \neq (0)$ ise U ya R nin bir essential ideali denir.

Tanım 1.1.23: Bir R halkasının toplamsal bir U alt grubu için $[U,R] \subseteq U$ ise U ya R nin bir Lie ideali denir. Bu tanıma göre her ideal bir Lie ideal fakat tersi her zaman geçerli değildir.

1.2. Materyal

Bu bölümde kullandığımız bazı makaleleri, özet halinde ispatsız olarak sunacağız.

1.2.1.Türevli halkalar

Posner, E., 1957

Tanım 1.2.1.1: R bir halka ve $d : R \rightarrow R$ bir dönüşüm olsun.

$\forall x, y \in R$ için aşağıdaki koşulları sağlayan d'ye R'de bir türev denir.

i) $d(x + y) = d(x) + d(y)$

ii) $d(x \cdot y) = d(x)y + xd(y)$

Lemma 1.2.1.2: R bir asal halka, d R'de bir türev ve $a \in R$ olsun.

Bu durumda $\forall x \in R$ için $ad(x) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lemma 1.2.1.3: R bir asal halka ve $p, q, r \in R$ olsun. Bu durumda $\forall a \in R$ için $paqar = 0$ ise p, q, r lerden en az biri sıfırdır.

Teorem 1.2.1.4: R, char $R \neq 2$ olarak şekilde bir asal halka ve d_1, d_2 R nin iki türevi olsun. Bu durumda d_1d_2 türevse $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Lemma 1.2.1.5: R bir asal halka ve d, R nin bir türevi olsun. $\forall a \in R$ için $ad(a) - d(a)a = 0$ ise $d = 0$ veya R komütatiftir.

Teorem 1.2.1.6: R bir asal halka ve d, R nin bir türevi olsun. Bu durumda, $\forall a \in R$ için $ad(a) - d(a)a \in Z$ ise R komütatiftir.

Lee, P. H. ve Lee, T. K., 1983

Teorem 1.2.1.7: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka ve $d \neq 0$, R nin bir türevi $U \neq (0)$ R nin bir Lie ideali olsun. Eğer $d^2(U) \subseteq Z$ ise $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 1.2.1.8: d ve δ, char $R \neq 2$ olan bir asal R halkasının türevleri ve U, R nin bir Lie ideali olsun. $d\delta(U) \subseteq Z$ ise $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 1.2.1.9: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka ve $d \neq 0$, R nin bir türevi, U R nin bir Lie ideali olsun. $a \in R$ için $ad(U) \subseteq Z$ ise $a = 0$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Awtar, R., 1983

Teorem 1.2.1.10: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka ve U, R nin bir Lie ideali olsun. Eğer R nin $d \neq 0$ türevi için $d^2(U) \subseteq Z$ ise $a = 0$ veya $U \subseteq Z$ dir.

Teorem 1.2.1.11: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka ve $U \not\subset Z$, R nin bir Lie ideali olsun. Eğer R nin d ve δ türevleri için $\delta d(U) \subset Z$ ise $d = 0$ veya $\delta = 0$ dır.

Bergen, J. ,Herstein, I. N. ve Kerr, W. J., 1981

Teorem 1.2.1.12: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka ve $U \not\subset Z$, R nin bir Lie ideali olsun. Bu durumda $[M,R] \subset U$ fakat $[M,R] \not\subset Z$ olacak şekilde R nin bir M ideali vardır.

Teorem 1.2.1.13: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka ve $U \not\subset Z$ nin bir Lie ideali olsun. Bu durumda $C_R(U) = Z$ dir.

Teorem 1.2.1.14: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka ve U, R nin bir Lie ideali olsun. Bu durumda $C_R([U, U]) = C_R(U)$ dur.

Teorem 1.2.1.15: R bir asal halka ve U, R nin bir Lie ideali ve $d \neq 0$, R nin bir türevi olsun. Bu durumda $d(U) = 0$ ise $U \subset Z$ dir.

Teorem 1.2.1.16: R bir asal halka ve U, R nin bir Lie ideali ve $d \neq 0$, R nin bir türevi olsun. Bu durumda $d(U) \subset Z$ ise $U \subset Z$ dir.

Teorem 1.2.1.17: R bir asal halka ve $U \not\subset Z$, R nin bir Lie ideali ve $d \neq 0$, R nin bir türevi olsun. Bu durumda $t \in R$ için $td(U) = 0$ ($d(U)t = 0$) ise $t = 0$ dır.

Teorem 1.2.1.18: R bir asal halka ve U, R nin bir Lie ideali ve $0 \neq d$, R nin bir türevi olsun. Bu durumda $d^2(U) = 0$ ise $U \subset Z$ dir.

Teorem 1.2.1.19: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka, $U \not\subset Z$, R nin bir Lie ideali ve δ, d R nin $\delta d(U) = 0$ olacak şekilde türevleri ise bu durumda $\delta = 0$ veya $d = 0$ dır.

1.2.2. (σ,τ)-Türevli halkalar

Tanım 1.2.2.1: $d : R \to R$ bir dönüşüm ve $\sigma, \tau : R \to R$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x, y \in R$ için $d(x + y) = d(x) + d(y)$ ve $d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ eşitlikleri sağlanıyorsa d ye R nin bir (σ,τ)-türevi denir.

$$C_{\sigma,\tau} = \{c \in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c, \forall x \in R \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye ise R halkasının (σ,τ)-merkezi denir.

Ayrıca $\forall x, y \in R$ için $[x,y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x$ olmak üzere $\forall x, y, z \in R$ için

$$[[x,y]_{\sigma,\tau}, z]_{\sigma,\tau} = [x,[y,z]]_{\sigma,\tau} + [[x,z]_{\sigma,\tau}, y]_{\sigma,\tau}$$

dır.

Hirano, Y. ve Tominaga, H., 1984

Burada, $(x,y)_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) \pm \tau(y)x$ olarak alınmıştır. Ayrıca σ ve τ, R nin iki otomorfizmidir.

Önerme 1.2.2.2: R bir asal halka, $d \neq 0$ R nin bir $(\sigma,1)$-türevi ve $U \neq 0$, R nin bir ideali olsun. Bu durumda $[u',u] = 0$, $\forall u \in U$ olması için gerek ve yeter koşul R nin komütatif olmasıdır.

Önerme 1.2.2.3: R bir asal halka, $d \neq 0$, R nin bir (σ,τ)-türevi ve $U \neq 0$, R nin bir ideali olsun. Bu durumda $[u',u]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall u \in U$ ise bu taktirde R komütatif ve $\sigma = \tau$ dur.

Teorem 1.2.2.4: R bir asal halka, char $R \neq 2$, $d \neq 0$, R nin bir (σ,τ)-türevi ve $U \neq (0)$, R nin bir ideali olsun. Bu durumda $[u',u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$, $\forall u \in U$ olması için gerek ve yeter koşul $[u',u]_{\sigma,\tau} = 0$, $\forall u \in U$ olmasıdır.

Kandamar, H. ve Kaya, K., 1992

Lemma 1.2.2.5: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka, $0 \neq d$, R nin bir (σ,τ)-türevi, $U \neq (0)$, R nin bir Lie ideali olsun. Bu durumda $d(U) = 0$ ise $U \subset Z$ dir.

Lemma 1.2.2.6: $U \not\subset Z$, R nin bir Lie ideali, $d \neq 0$, R nin bir (σ,τ)-türevi olsun. $t \in R$ için $td(U) = 0$ $(d(U)t = 0)$ ise $t = 0$ dır.

Lemma 1.2.2.7: $d(U) \subset Z$ ise $U \subset Z$ dir.

Lemma 1.2.2.8: U, R nin $d(U) \subset U$ ve $d^2(U) = 0$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali ise $U \subset Z$ dir.

Lemma 1.2.2.9: $a \in R$ ve $U \not\subset Z$, R nin bir Lie ideali olsun. Bu durumda $[U,a] \subset Z$ ise $a \in Z$ dir.

Teorem 1.2.2.10: Eğer $[U,d(U)] \subset Z$ ise $U \subset Z$ dir.

Aydın, N., Kaya, K., 1992

R bir asal halka, d, R nin bir (σ,τ)-türevi, $U \neq (0)$, R nin bir ideali olsun.

Lemma 1.2.2.11: $d(U) \subset Z$ ise R komütatiftir.

Lemma 1.2.2.12: $a \in R$ için $ad(U) = 0$ $(d(U)a = 0)$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lemma 1.2.2.13: $d(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

Teorem 1.2.2.14: char $R \neq 2$ ve $d \neq 0$ iken $a \in R$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in Z$ dir.

Lemma 1.2.2.15: char $R \neq 2$ ve $d \neq 0$ olsun. $a \in R$ için $ad(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a = 0$ veya R komütatiftir.

Lemma 1.2.2.16: char $R \neq 2$ ve $d \neq 0$ olsun. $a \in R$ için $[d(R),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ dir.

Kaya. K., 1991

Lemma 1.2.2.17: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka, $0 \neq d$, R nin bir (σ,τ)-türevi, $U \neq (0)$, R nin bir ideali olsun. Bu durumda $a \in U$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ dir.

Teorem 1.2.2.18: $0 \neq d_1 : R \to R$ bir (σ,τ)-türev ve $0 \neq d_2 : R \to R$ bir türev olsun. $U \neq (0)$, R nin bir ideali ve $d_2(U) \subset U$ iken $d_1d_2(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R komütatiftir.

Teorem 1.2.2.19: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka ve U, R nin bir (σ,τ)-sağ Lie ideali olsun. Eğer $[U,U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dur.

1.2.3. Modül değerli (θ,φ)-türevler

Tanım: R bir halka ve X bir sol R-modül ve $d : R \to X$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer;

$\forall x, y \in R$ için $d(xy) = xd(y) + yd(x)$ ifadesi sağlanıyorsa d ye bir sol türev, $\forall x \in R$ için $d(x^2) = 2xd(x)$ ifadesi gerçekleşiyorsa d'ye bir sol Jordan türev denir.

X bir R-bimodül ise bu durumda $\forall x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ifadesi sağlanıyorsa d'ye bir türev,

$\forall x \in R$ için $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$ ifadesi gerçekleniyorsa d'ye bir Jordan türev denir.

Bresar, M. ve Vukman, J., 1990

Önerme 1.2.3.1: R bir halka ve X, 2-torsion free sol R-modül olsun. $D : R \to X$ sol Jordan türevi ise bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

1) $D(ab + ba) = 2aD(b) + 2bD(a)$
2) $D(aba) = a^2D(b) + 3abD(a) - baD(a)$
3) $D(abc + cba) = (ac + ca)D(b) + 3abD(c) + 3cbD(a) - baD(c) - bcD(a)$
4) $(ab - ba)aD(a) = a(ab - ba)D(a)$
5) $(ab - ba)(D(ab) - aD(b) - bD(a)) = 0$

Lemma 1.2.3.2: R bir halka, X, 2-torsion free sol R-modül olsun. $D : R \to X$ dönüşümü sıfırdan farklı bir sol Jordan türevi olsun. Eğer $D(a) \neq 0$ olacak şekilde bir $a \in R$ varsa bu durumda $\forall x \in R$ için $(a(ax - xa) - (ax - xa)a)^2 = 0$ dır.

Lemma 1.2.3.3: R bir halka, X, 2-torsion ve 3-torsion free sol R-modül ve $D : R \to X$, sıfırdan farklı bir sol Jordan türevi olsun. Bu durumda $\forall a \in R$ için $a^2 = 0$ ise $D(a) = 0$ dır.

Lemma 1.2.3.4: R bir halka, X, 2-torsion free ve 3-torsion free R-bimodül ve $D : R \to X$ dönüşümü sıfırdan farklı bir sol Jordan türevi olsun. Bu durumda R komütatiftir.

Teorem 1.2.3.5: R bir halka, X, 2-torsion free ve 3-torsion free sol R-modül olsun. $\forall a \in R$ ve $\forall x \in X$ için $aRx = 0$ ise bu durumda $a = 0$ veya $x = 0$ özelliği bulunsun. Eğer $D : R \to X$'e sıfırdan farklı bir sol Jordan türevi bulunabiliyorsa bu durumda R komütatiftir.

Sonuç 1.2.3.6: R, karakteristiği 2 ve 3 den farklı bir asal halka olsun. Bu durumda $D : R \to R$ sıfırdan farklı bir sol Jordan türevi bulunabiliyorsa R komütatiftir.

Not: R herhangi bir halka ve R' 2-torsion free bir halka olsun. $f : R \to R'$ içine bir dönüşüm olmak üzere,
f ye Jordan homomorfizm denir ancak ve ancak her $a, b \in R$ için $f(a + b) = f(a) + f(b)$ ve $f(ab + ba) = f(a)f(b) + f(b)f(a)$ eşitlikleri sağlanıyorsa.

Sonuç 1.2.3.7: R, karakteristiği 2 ve 3 den farklı bir asal halka ve $f : R \to R$, $D : R \to R$ dönüşümler olsun. Bu durumda D toplamsal bir dönüşüm olmak üzere f ile D, $\forall x \in R$ için $D(x^2) = D(x)f(x) + xD(x)$ ve $D(x)f(x) = xD(x)$ eşitliklerini sağlarsa $D = 0$ dır.

$g: R \to R$ bir Jordan homomorfizm ve $\forall x \in R$ için $(ag(x) - xa)g(x) = x(ag(x) - xa)$ olacak şekilde bir $a \in R$ varsa bu durumda $\forall x \in R$ için $ag(x) = xa$ dır.

Önerme 1.2.3.8: R bir halka, X bir sol R-modül ve $D : R \to X$ bir sol türev olmak üzere,

i) $\forall a \in R$, $x \in X$ için $aRx = 0$ iken $a = 0$ veya $x = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $D \neq 0$ ise R komütatiftir.

ii) $X = R$ bir yarı asal halka olsun. Bu durumda $D : R \to Z(R)$ dönüşümü bir türevdir.

Sonuç 1.2.3.9: R bir halka, X bir sol R-modül ve $D : R \to X$ bir Jordan sol türevi olsun. $\forall a \in R, x \in X$ için $ax = 0$ iken $a = 0$ veya $x = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $D \neq 0$ ise R komütatiftir

Bresar, M ve Vukman, J.

Tanım: R ve T iki halka ve $\theta, \varphi : T \to R$ homomorfizmler olsun. X bir R-bimodül olsun. $\forall a, b \in T$ için $d(ab) = d(a)\varphi(b) + \theta(a)d(b)$ şartını sağlayan $d : T \to X$ toplamsal dönüşümüne (θ,φ)-türev denir. $\forall a \in T$ için $d(a^2) = d(a)\varphi(a) + \theta(a)d(a)$ şartını sağlayan d'ye bir Jordan (θ,φ)-türev denir.

Teorem 1.2.3.10: T bir halka, R komütatif olmayan bir halka olsun. $\theta, \varphi : T \to R$ homomorfizmler ve X bir 2-torsion free R-bimodül olsun. φ'nin üzerine ve $\forall x \in X$, $a \in R$ için $xRa = 0$ olduğunda $x = 0$ veya $a = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $d : T \to X$ Jordan (θ,φ)-türevi bir (θ,φ)-türevdir.

Teorem 1.2.3.11: R, char $R \neq 2$ olacak şekilde bir komütatif asal halka olsun. Bu durumda θ ve φ, R'nin iki endomorfizmi olmak üzere R'nin her d Jordan (θ,φ)-türevi bir (θ,φ)-türevdir.

Ayrıca $\theta \neq \varphi$ ise bu durumda $\forall a \in R$ için $d(a) = \lambda(\varphi(a) - \theta(a))$ olacak şekilde R nin F kesirler cisminde bir λ elemanı vardır.

1.2.4. Simetrik bi-türevler

R bir halka ve $D(.,.) : R \times R \to R$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\forall x, y \in R$ için $D(x,y) = D(y,x)$ eşitliği sağlanıyorsa D ye simetrik dönüşüm denir.
Ayrıca $\forall x, y, z \in R$ için $D(x+y,z) = D(x,z) + D(y,z)$ ve $D(x,y+z) = D(x,y) + D(x,z)$ eşitlikleri sağlanıyorsa D ye bi-toplamsal dönüşüm denir.

Tanım: R bir halka, D bir simetrik dönüşüm olmak üzere $\forall x \in R$ için $f(x) = D(x,x)$ ile tanımlanan $f : R \to R$ dönüşümüne D nin izi denir.

Tanım: R bir halka ve $D(.,.) : R \times R \to R$ simetrik bi-toplamsal dönüşüm olsun. bu durumda $\forall x, y, z \in R$ için $D(xy,z) = D(x,z)y + xD(y,z)$ eşitliği sağlanıyorsa D'ye simetrik bi-türev denir.
Bu durumda f dönüşümünün çift olduğu ve $\forall x, y \in R$ için $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2D(x,y)$ olduğu görülebilir.

Vukman, J., 1989

Teorem 1.2.4.1: R, char $R \neq 2$ olacak şekilde komütatif olmayan bir asal halka olmak üzere $D(.,.) : R \times R \to R$ ve d sırasıyla simetrik bi-türev ve onun izi olsun. Bu durumda d, R de commutting ise $D = 0$ dır.

Teorem 1.2.4.2: R, char $R \neq 2, 3$ olan komütatif olmayan bir asal halka olsun. $D(.,.) : R \times R \to R$ ve d sırasıyla simetrik bi-türev ve onun izi olsun. Bu durumda d, R de centralizing ise $D = 0$ dır.

Teorem 1.2.4.3: R, char $R \neq 2$ olacak şekilde bir asal halka olsun. $D_1(.,.) : R \times R \to R$ ve $D_2(.,.) : R \times R \to R$ simetrik bi-türevler ve d_2, $\forall x \in R$ için $D_1(d_2(x),x) = 0$ olacak şekilde D_2'nin izi olsun. Bu taktirde $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

Teorem 1.2.4.4: R, 2-torsion free yarı asal bir halka olsun. D simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun. Bu durumda $\forall x \in R$ için $D(d(x),x) = 0$ sağlanıyorsa $D = 0$ dır.

Teorem 1.2.4.5: R, char $R \neq 2, 3$ olan bir asal halka, $D_1(.,.) : R\times R \to R$ ve $D_2(.,.) : R\times R \to R$ simetrik bir türevler olsun. d_1, d_2 ve f sırasıyla D_1, D_2 ve B nin izleri olmak üzere $\forall x \in R$ için $d_1(d_2(x)) = f(x)$ olacak şekilde bir $B(.,.) : R\times R \to R$ simetrik bi-toplamsal dönüşümünün varolduğunu kabul edelim. Bu taktirde $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

Teorem 1.2.4.6: R, 2-torsion free ve 3 torsion free yarı-asal halka olsun. $D(.,.) : R\times R \to R$ simetrik bi-türev, $B(.,.) : R\times R \to R$ simetrik bi-toplamsal dönüşüm ve d ve f sırasıyla D ve B nin izleri olmak üzere $\forall x \in R$ için $d(d(x)) = f(x)$ sağlansın. Bu durumda $D = 0$ dır.

1.2.5. Ortogonal türevler

Tanım: R yarı-asal bir halka, d ve g R'de iki türev olsun. Bu durumda $\forall x, y \in R$ için $d(x)Rg(y) = 0 = g(y)Rd(x)$ eşitlikleri sağlanıyorsa d ile g'ye ortogonal türevler denir.

Not: R_1 ve R_2 asal halkalar olmak üzere $R = R_1 \oplus R_2$ olsun. Bu durumda R yarı-asaldır. Ayrıca $0 \neq d_1$, R_1 üzerinde bir türev olmak üzere $\forall(r_1,r_2) \in R$ için $d(r_1,r_2) = (d_1(r_1),0)$ R de sıfırdan farklı bir türevdir. Bu durumda 0_2, R_2 de sıfır dönüşümü olmak üzere d ye d_1 ve 0_2 türevlerinin direkt toplamıdır denir ve $d = d_1 \oplus 0_2$ şeklinde gösterilir.

Aynı şekilde $0 \neq g_2$, R_2 üzerinde bir türev olmak üzere $\forall(r_1,r_2) \in R$ için $g(r_1,r_2) = (0,g_2(r_2))$ şeklinde tanımlanan g de R de sıfırdan farklı bir türevdir. Bu durumda 0_1, R_1 de sıfır dönüşüm olmak üzere g ye 0_1 ve g_2 türevlerinin direkt toplamıdır denir ve $g = 0_1 \oplus g_2$ şeklinde gösterilir.

Bresar, M. ve Vukman, J., 1989

Teorem 1.2.5.1: R, 2-torsion free yarı-asal halka olsun. d ve g, R de türevler olmak üzere, d ile g'nin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden birisinin sağlanmasıdır.

i) $dg = 0$

ii) $dg + gd = 0$

iii) $\forall x \in R$ için $d(x)g(x) = 0$ dır.

iv) $\forall x \in R$ için $d(x)g(x) + g(x)d(x) = 0$ dır.

v) dg bir türev

vi) $\forall x \in R$ için $(dg)(x) = ax + xb$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır.

vii) Aşağıdakiler sağlanacak şekilde R'de U_1 ve U_2 idealleri vardır.

a) $U_1 \cap U_2 = (0)$ dır ve $U_1 \oplus U_2$, R nin bir essential idealidir.

b) $d : R \to U_1$ ve $g : R \to U_2$ içine iki dönüşümdür.

c) $d_1 : U_1 \to U_1$ bir türev ve $0_2 : U_2 \to U_2$ bir sıfır türev olmak üzere d'nin $U_1 \oplus U_2$ ye kısıtlaması $d_1 \oplus 0_2$ şeklinde bir direkt toplamdır. Ayrıca $d_1 = 0$ ise $d = 0$ dır.

d) $0_1 : U_1 \to U_1$ sıfır türev ve $g_2 : U_2 \to U_2$ bir türev olmak üzere g'nin $U_1 \oplus U_2$ ye kısıtlaması $0_1 \oplus g_2$ şeklinde bir direkt toplamdır. Ayrıca $g_2 = 0$ ise $g = 0$ dır.

Sonuç 1.2.5.2: R, char $R \neq 2$ olan bir asal halka olsun. Bu durumda R nin d ve g türevleri Teorem 1.2.5.1 in denk koşullarından birini sağlıyorsa $d = 0$ veya $g = 0$ dır.

Sonuç 1.2.5.3: R, 2-torsion free yarı asal bir halka olsun. R nin bir d türevi $\forall x \in R$ için $d(x)^2 = 0$ koşulunu sağlıyorsa $d = 0$ dır.

Sonuç 1.2.5.4: R, 2-torsion free yarı asal bir halka ve d, R nin bir türevi olsun. Her $x \in R$ için $d^2(x) = ax + bx$ olacak şekilde $a, b \in R$ varsa $d = 0$ dır.

Sonuç 1.2.5.5: R, 2-torsion free yarı asal bir halka ve d, R nin bir türevi olsun. Bu durumda d^2 türevse $d = 0$ dır.

Teorem 1.2.5.6: R, 2-torsion free yarı asal bir halka ve d, g R nin $d^2 = g^2$ bir türevi olacak şekilde türevleri olsun. Bu durumda $d + g$ ve $d - g$ türevleri ortogonaldir. Böylece R nin $U_1 \oplus U_2$ essential ideali ve U_1 üzerinde $d = g$ ve U_2 üzerinde $d = -g$ olacak şekilde U_1 ve U_2 idealleri vardır.

Sonuç 1.2.5.7: R, 2-torsion free bir asal halka ve d, g R nin türevleri olsun. $d^2 = g^2$ ise bu durumda $d = g$ veya $d = -g$ dir.

Teorem 1.2.5.8: R, 2-torsion free yarı asal bir halka ve d, g R nin türevleri olsun. **$\forall x \in R$ için $d(x)^2 = g(x)^2$ ise bu durumda d + g ve d - g ler ortogonaldir. Böylece R** nin, $U_1 \oplus U_2$ essential ideal ve U_1 üzerinde d = g ve U_2 üzerinde d = - g olacak şekilde U_1 ve U_2 idealleri vardır.

Sonuç 1.2.5.9: R, char R $\neq$ 2 olan bir asal halka ve d ve g, R nin türevleri olsun. Bu durumda $\forall x \in R$ için $d(x)^2 = g(x)^2$ ise d = g veya d = - g dir.

1.2.6. Asal halkalarda tek yanlı idealler ve türevler

R bir asal halka olmak üzere $(0) \neq I$, R'nin iki yanlı ideali ve d bir türevi olsun. Bu durumda,

(A) Eğer $d^3 \neq 0$ ise bu durumda d(I) ile üretilen alt halka R'nin sıfırdan farklı bir idealini içerir.

(B) Char $R \neq 2$ ve δ, $\delta d(I) = 0$ olacak şekilde R'nin bir türevi ise bu durumda ya $d = 0$ veya $\delta = 0$ dır.

(C) $\forall x \in I$ için $d(x)^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in Z^+$ varsa bu durumda $d = 0$ dır.

şıklarından herbiri gerçeklenmektedir.

Fakat I'nın bir sağ ideal olması durumunda üstteki sonuçlardan hiçbirisi gerçeklenmez. Bu durumda $d(I)I = 0$ şartında problem çıkmaktadır.
Bu şart aşağıdaki makalenin ana konusudur.

Bu çalışma boyunca R bir asal halka, $0 \neq d$ R nin bir türevi, $(0) \neq U$ bir sağ ideali $L = Ann_L U = \{x \in R \mid xU = 0\}$ olarak gösterilen sol sıfırlayanları kümesi olarak alınacaktır. Ayrıca burada L nin bir sol ideal olduğu görülür.

Bresar, M., 1994

Lemma 1.2.6.1: d, R'nin bir türevi, $(0) \neq U$ sağ ideali olsun. $L = Ann_L U$ ve Q, R nin quationlarının Martindale halkası olsun.Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

i) $d(U) \subseteq L$

ii) $d(U)^2 = 0$

iii) $d(U)a = 0$ olacak şekilde $\exists 0 \neq a \in R$ vardır.

iv) $d = [q,0]$ olmak üzere $qU = 0$ olacak şekilde $\exists q \in Q$ vardır.

Burada $d = [q,0]$ ile $\forall x \in R$ için $d(x) = [q,x] = qx - xq$ ifade edilmektedir. Yani d, bir Kharchenko iç türevidir.

Teorem 1.2.6.2: Char $R \neq 2$ olsun. Bu durumda R'nin $d(U)$ ile üretilen alt halkasının R'nin sıfırdan farklı hiçbir sağ idealini içermemesi için gerek ve yeter koşul $d(U) \subseteq L$ olmasıdır.

Teorem 1.2.6.3: Char $R \neq 2$ ve $(0) \neq U$ Rnin bir sağ ideali olsun. $0 \neq d$, R nin bir türevi ve $0 \neq \delta$ diğer bir türevi olsun.

Bu durumda $\delta d(U) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $d(U) \subseteq L$, $\delta(U) \subseteq L$ olmasıdır.

BÖLÜM 2

TÜREVLİ GAMMA HALKALARI - TÜREVLİ HALKALAR

2.1. Gamma Halkaları

Bu kesimde daha önce Nobusawa (1964), Barnes (1968) tarafından Gamma Halkaları üzerinde yapılan çalışmalar ele alınmıştır.

Gamma Halkası kavramı ilk olarak 1964 yılında Nobua Nobusawa tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.1.1: M elemanları a, b, c,.......... lerle gösterilen bir toplamsal grup Γ da elemanları γ, β, α,.......larla gösterilen diğer bir toplamsal grup olsun.
Farzedelim ki $\forall a, b \in M$ ve $\forall \gamma, \beta \in \Gamma$ için $a\gamma b$, M' nin bir elemanı olarak $\gamma a\beta$ da Γ nın bir elemanı olarak tanımlansın.
Eğer $\forall a_1, a_2, a, b_1, b_2, b, c \in M$ ve $\forall\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma, \beta \in \Gamma$ için

1) $(a_1 + a_2)\gamma b = a_1\gamma b + a_2\gamma b$,

   $a(\gamma_1 + \gamma_2)b = a\gamma_1 b + a\gamma_2 b$,

   $a\gamma(b_1 + b_2) = a\gamma b_1 + a\gamma b_2$,
2) $(a\gamma b)\beta c = a\gamma(b\beta c) = a(\gamma b\beta)c$,
3) Eğer herhangi a, b $\in$ M için $a\gamma b = 0$ ise $\gamma = 0$

koşulları sağlanıyorsa bu taktirde M' ye bir Γ-halkası denir.
Daha sonra 1966 yılında Wilfred E. Barnes yukarıdaki tanımdaki bazı koşulları kaldırarak Barnes anlamında Gamma Halkası tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir.

Tanım 2.1.2: $M = \{a, b, c, ...\}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta, \alpha_1, ...\}$ toplamsal değişmeli gruplar ve $\forall a, b, c \in M$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için

i) $a\alpha b \in M$,

ii) $(a + b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$,

$a(\alpha + \beta)b = a\alpha b + a\beta b$,

$a\alpha(b + c) = a\alpha b + a\alpha c$

iii) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$

koşulları sağlanıyorsa M'ye bir Γ-halkası denir.

Bu anlamda Gamma Halkasına bir örnek verelim.

Örnek: X ve Y toplamsal değişmeli gruplar, $M = \mathrm{Hom}(X,Y)$, $\Gamma = \mathrm{Hom}(Y,X)$

ve $M \times \Gamma \times M \to M$ olsun.

$(a,\alpha,b) \to a\alpha b$

Burada $a\alpha b$ ile dönüşümler arasındaki bileşke işlemi alınmaktadır. Bu işleme göre M bir Gamma Halkasıdır.

Gerçekten;

$\forall a, b, c \in M$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için

i) $\forall x \in X$ ve $\forall y \in Y$ için

$X \xrightarrow{b} Y \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{a} Y$

$a\alpha b : X \to Y$

$(a\alpha b)(x + y) = (a\alpha)(b(x + y))$ (Bileşke işleminin tanımından)

$= (a\alpha)(b(x) + b(y))$ (Fonksiyonlardaki toplamanın tanımından)

$= (a\alpha)(b(x)) + (a\alpha)(b(y))$

$= (a\alpha b)(x) + (a\alpha b)(y)$

$\Rightarrow a\alpha b \in M = \mathrm{Hom}(X,Y)$

ii) $\forall x \in X$ için

$[(a + b)\alpha c](x) = [(a + b)\alpha](c(x))$

$= (a + b)(\alpha(c(x)))$

$= a(\alpha(c(x))) + b(\alpha(c(x)))$

$= (a\alpha)(c(x)) + (b\alpha)(c(x))$

$= (a\alpha c)(x) + (b\alpha c)(x)$

$= (a\alpha c + b\alpha c)(x)$

$\Rightarrow (a + b)\alpha c \;= a\alpha c + b\alpha c$

$[a(\alpha + \beta)b](x) = [a(\alpha + \beta)](b(x))$

$= a[(\alpha + \beta)(b(x))]$

$= a[\alpha(b(x)) + \beta(b(x))]$

$= a(\alpha(b(x))) + a(\beta(b(x)))$

$= (a\alpha b + a\beta b)(x)$

$\Rightarrow \quad (\alpha + \beta)b = a\alpha b + a\beta b$

$[a\alpha(b + c)](x) = a\alpha(b + c)(x)$

$= a\alpha(b(x) + c(x))$

$= a\alpha b(x) + a\alpha c(x)$

$= (a\alpha b + a\alpha c)(x)$

$\Rightarrow \quad a\alpha(b + c) = a\alpha b + a\alpha c$

iii) $\forall x \in X$ için

$[(a\alpha b)\beta c](x) = (a\alpha b)\beta(c(x))$

$= (a\alpha b)\beta(c(x)))$

$= a\alpha[b(\beta(c(x)))]$

$= a\alpha[(b\beta c)(x)]$

$= [a\alpha(b\beta c)](x)$

$\Rightarrow \quad (a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$

Tanım 2.1.3: M bir Γ-halkası, $\varnothing \neq A \subset M$ toplamsal bir alt grup ve $A\Gamma M = \{a\alpha b \mid a \in A,\, b \in M,\, \alpha \in \Gamma\}$ olmak üzere $A\Gamma M \subset A$ ise A'ya M'nin bir sağ ideali denir.

Aynı şekilde $M\Gamma A = \{b\alpha a \mid b \in M,\, a \in A,\, \alpha \in \Gamma\}$ olmak üzere $M\Gamma A \subset A$ ise A'ya M'nin bir sol ideali denir.

Eğer A, M'nin hem sağ hem de sol ideali ise yani iki yanlı ideali ise bu durumda A'ya kısaca M'nin bir ideali denir.

Tanım 2.1.4: $a \in M$ olsun. a ile üretilen esas ideal yani (a), a'yı içeren tüm ideallerin arakesitidir ve bu ideal $n \in Z$, $x, y, u, v \in M$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ olmak üzere $na + x\alpha a + a\beta y + u\gamma a\delta v$ biçimindeki tüm sonlu toplamların kümesidir.

Tanım 2.1.5: A ve B, M'nin sağ (sol yada iki yanlı) idealleri olsun.
Bu durumda $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ ye A ile B'nin toplamı denir ve A + B, M'nin sağ idealidir.

Not: $i \in I$ olmak üzere A_i ler M Γ-halkasının sağ (sol yada iki yanlı) idealleri iseler bu durumda $\bigcap_{i \in I} A_i$ de M'nin sağ (sol yada iki yanlı) idealidir.

Not: A, M'nin bir sağ ideali, $\bar{B}$, M'nin bir sol ideali ve $\varnothing \neq S \subset M$ ise bu taktirde

$$SA = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i \alpha_i a_i \mid s_i \in S,\ \alpha_i \in \Gamma,\ a_i \in A,\ n \in N^+ \right\}$$

M'nin bir sağ idealidir. Ayrıca BS, M'nin sol idealidir ve BA, M'nin idealidir.

Not: M bir Γ-halkası ve A, M'nin bir ideali olsun. Bu durumda $M/A = \{x + A \mid x \in M\}$ kümesi,

$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$ ve $(x + A)\alpha(y + A) = (x\alpha y) + A$

işlemlerine göre bir Γ-halkasıdır.

Eğer halkamız Nobusawa anlamında bir Γ-halkası ise bu taktirde M/A, Nobusawa anlamında bir Γ-halkası olarak tanımlanamaz. Çünkü $\alpha(x+A)\beta$ yı Γ da olacak şekilde tanımlayamayız. Ayrıca 3) den

$(x + A)\, \gamma\, (y + A) = 0 + A$ $\quad ,\forall x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$\Rightarrow \quad x\gamma y + A = 0 + A$ $\quad ,\forall x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$\Rightarrow \qquad x\gamma y \in A \qquad ,\forall x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

olması $\gamma = 0$ olmasını gerektirmez.

Not: $M\Gamma M \subset M$ olduğundan M kendisinin bir idealidir.

Tanım 2.1.6: M ve N, Γ-halkaları ve θ, M' den N içine bir dönüşüm olsun. Şayet $\forall x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$ ve $\theta(x\alpha y) = \theta(x)\alpha\theta(y)$

şartları sağlanıyorsa θ' ya bir Γ-homomorfizm denir. Şayet θ, 1-1 ve örtense θ'ya bir Γ-izomorfizm denir.

Not: M ve N, Γ-halkaları ve $\theta : M \rightarrow N$'ye bir Γ-homomorfizm olsun. Bu durumda $\text{Ker}\,\theta = \{x \in M \mid \theta(x) = 0\}$ M'nin bir idealidir.

Not: Daha genel olarak $B \subset N$ bir sağ (sol veya iki yanlı) ideal ise $\theta^{-1}(B) = \{x \in M \mid \theta(x) \in B\}$ olmak üzere $\theta^{-1}(B)$ de M'nin sağ (sol veya iki yanlı) idealidir.

Not: Benzer olarak $\theta: M \rightarrow N$'ye örten Γ-homomorfizm ve A, M'nin sağ (sol veya iki yanlı) ideali ise bu taktirde,

$\theta(A) = \{\theta(a) \mid a \in A\}$, N nin sağ (sol veya iki yanlı) idealidir.

Teorem 2.1.7: A, M Γ-halkasının bir ideali ve $\theta : M \rightarrow M/A$'ya doğal dönüşüm olsun. Bu taktirde θ, çekirdeği A olan örten bir Γ-homomorfizmdir.

Tersine N bir Γ-halkası olmak üzere $\theta: M \rightarrow N$' ye çekirdeği A olan örten bir Γ-homomorfizm ise bu taktirde M/A, N'ye Γ-izomorfiktir.

Teorem 2.1.8: M ve N, Γ-halkaları, $\theta : M \rightarrow N$'ye örten Γ-homomorfizm , Ker $\theta = A$ olsun. Bu durumda B', N'nin bir idealidir ancak ve ancak $\theta^{-1}(B') = B$, M'nin A' yı kapsayan bir idealidir.

Yine bu taktirde M/B, N/B' ve $(M/A)/(B/A)$ ların tümü Γ-izomorfiktir.

Teorem 2.1.9: M bir Γ-halkası, A ve B, M'nin idealleri ve $\theta : M \rightarrow M/B$ kanonik Γ-homomorfizmi olsun.

Bu durumda $A + B = \theta^{-1}(\theta(A))$ ve $(A + B)/B = A/A \cap B$ dir.

2.1.1. Asal idealler ve radikal

M bir Γ-halkası ve P, M' nin bir ideali olsun.
$\forall A, B \subset M$ ideali için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P'ye M'nin asal ideali denir.

Not: (0) ideali asal olan Γ-halkasına asal Γ-halkası denir.

Teorem 2.1.1.1: P, M Γ-halkasının bir ideali olsun. Bu durumda P nin asal olması için gerek ve yeter koşul $(a)(b) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: P asal ideal olsun. Bilindiği gibi $a, b \in M$ için (a) ve (b), M'nin idealleridir.
Bu durumda $(a)(b) \subseteq P$ iken P asal olduğundan $(a) \subseteq P$ veya $(b) \subseteq P$ dir.
Buradan $a \in (a)$ ve $b \in (b)$ olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ dir.
$\Leftarrow$: $(a)(b) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olsun.
A ve B, M'nin $AB \subseteq P$ olacak şekilde idealleri ve $A \not\subset P$ olsun. Bu taktirde $a \in A$ ve $a \notin P$ olacak şekilde bir $a \in M$ vardır. Ayrıca herhangi bir $b \in B$ için
$(a)(b) \subseteq AB \subset P \Rightarrow (a)(b) \subseteq P$ dir.
Kabulümüzden dolayı $a \notin P$ olduğundan $b \in P$ dir.Buradan P asal bulunur.

Teorem 2.1.1.2: M, Nobusawa koşullarını sağlayan bir Γ-halkası ve P, M'nin bir ideali olsun. Bu durumda P asaldır ancak ve ancak $a\Gamma b \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa. Veya
P asaldır ancak ve ancak $a \notin P$ ve $b \notin P$ iken $\exists \alpha \in \Gamma$ için $a\alpha b \notin P$ dir.

Teorem 2.1.1.3: M, Nobusawa anlamında bir Γ-halkası, A ve P, M'nin idealleri olsun. Bu taktirde P asal ise P/A, M/A da asaldır.
Tersine, P′ M/A nın asal ideali ve θ: $M \rightarrow M/A$ ya kanonik homomorfizm ise bu taktirde $\theta^{-1}(P') = P$, M' nin A yı kapsayan bir asal idealidir.

Tanım 2.1.1.4: M bir Γ-halkası ve $S \subset M$ olsun. $S = \varnothing$ veya $\forall a, b \in S$ için $(a)(b) \cap S \neq \varnothing$ ise S' ye bir m-sistem denir.

Not: P asal ve $A \subseteq P$ dir ancak ve ancak P^c bir m-sistem ve $P^c \cap A = \varnothing$ dir.

İspat: $\Rightarrow$: P asal ve $A \subseteq P$ olsun. Bu durumda $\forall a, b \in P^c$ için $a \notin P$ ve $b \notin P$ olduğundan P nin asallığı kullanılarak $\exists \alpha \in \Gamma$ için $a\alpha b \notin P$ bulunur $\Rightarrow \exists \alpha \in \Gamma$ için $a\alpha b \in P^c$ bulunur. Aynı zamanda $a\alpha b \in (a)(b)$ olduğundan buradan $(a)(b) \cap P^c \neq \varnothing$ elde edilir. O halde P^c bir m-sistemdir.
Ayrıca $A \subseteq P$ olduğundan $P^c \cap A = \varnothing$ olduğu açıktır.

Tersine P^c m-sistem ve $P^c \cap A = \varnothing$ olsun. Bu durumda P nin asal ve $A \subseteq P$ olduğunu gösterelim.
$A \not\subset P$ olsa $a \in A$ ve $a \notin P$ olacak şekilde en az bir $a \in M$ vardır $\Rightarrow$ $a \in P^c$ dir.
Buradan $P^c \cap A \neq \varnothing$ elde ederiz. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde $A \subseteq P$ dir.

Şimdi P'nin asal olduğunu gösterelim.
$a \notin P$ ve $b \notin P$ olsun $\Rightarrow$ $a \in P^c$ ve $b \in P^c$ dir.
Buradan $\forall \alpha \in \Gamma$ için $a\alpha b \in (a)(b)$ olduğunu ve P^c bir m-sistem olduğundan $(a)(b) \cap P^c \neq \varnothing$ olduğunu kullanarak $\exists \alpha \in \Gamma$ için $a\alpha b \in P^c$ elde edilir.
$\Rightarrow$ $\exists \alpha \in \Gamma$ için $a\alpha b \notin P$ dır.
Bu ise P nin asal olması demektir.

Tanım 2.1.1.5: M bir Γ-halkası ve A, M'nin herhangi bir ideali olsun.

$$r(A) = \{x \in M \mid x \in U, U \text{ m-sistem ve } U \cap A \neq \varnothing\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A idealinin radikali denir.

Not: A, M'nin bir ideali olsun . Bu durumda $A \subseteq r(A)$ dır.
Gerçekten;
$x \in A$ ve $x \in U$, U bir m-sistem olsun.

Buradan m-sistem tanımından $x \in U$, $y \in U$ için $(x)(y) \cap U \neq \varnothing$ elde edilir.

Ayrıca A, M'nin bir ideali olduğundan $A\Gamma M \subset A$ dır.

$\Rightarrow x \in A$ için $x\alpha y \in A$ dır.

$\Rightarrow (x)(y) \subset A$ dır.

O halde $(x)(y) \cap U \neq \varnothing \Rightarrow A \cap U \neq \varnothing$ elde edilir. Bu ise radikal tanımından $x \in r(A)$ olması demektir.

Not: Eğer P asal ideal ve $A \subseteq P$ ise bu durumda $r(A) \subseteq P$ dir.

Çünkü;

P asal ve $A \subseteq P$ ise bu durumda Not-I den P^c bir m-sistem ve $P^c \cap A = \varnothing$ dir.

$x \in r(A)$ olsun. O halde x'i bulunduran her U m-sistemi için $U \cap A \neq \varnothing$ dır.

Öte yandan $P^c \cap A = \varnothing$ olduğundan $x \in r(A)$ iken $x \notin P^c$ dir. Çünkü, şayet $x \in P^c$ olsa $P^c \cap A \neq \varnothing$ olur. Bu ise çelişkidir.

O halde $x \in P$, dolayısıyla $r(A) \subseteq P$ dir.

Lemma 2.1.1.6: A, S m-sisteminden ayrık bir ideal olsun. Bu durumda A'dan ayrık m-sistemlerin sınıfında maksimal olacak şekilde $T \supseteq S$ m-sistemi vardır.

İspat: S bir m-sistem ve $A \cap S = \varnothing$ olsun.

$\mathscr{M} = \{S_i \mid S_i$ ler m-sistem ve $A \cap S_i = \varnothing, \forall i \in I$ için$\}$ M' deki m-sistemlerin bir sınıfı olsun. Öncelikle $\mathscr{M} \neq \varnothing$ dır. Çünkü $S_i = S$ alınırsa $A \cap S = \varnothing$ ve S bir m-sistemdir. Kapsama bağıntısına göre $\mathscr{M}$ kısmi sıralıdır. Zorn Lemma' dan $\mathscr{M}$ nin T gibi bir üst sınırı (maksimal elemanı) vardır.

$T \in \mathscr{M}$ olduğundan $A \cap T = \varnothing$ dir ve T bir m-sistem ve $\mathscr{M}$ de maksimal olduğundan $\forall i \in I$ için $S_i \subseteq T$ ve dolayısıyla $S \subseteq T$ bulunur.

Lemma 2.1.1.7: A bir ideal ve S, $S \cap A = \emptyset$ olacak şekilde bir m-sistem olsun. Bu durumda S ile ayrık olan ve A' yı kapsayan ideallerin sınıfında maksimal olacak şekilde bir $P \supseteq A$ ideali vardır ve P asaldır.

İspat: S bir m-sistem ve bir A ideali için $S \cap A = \emptyset$ olsun. $\mathscr{M} = \{K \mid S \cap K = \emptyset,\ A \subseteq K\}$ idealler sınıfını ele alalım. Öncelikle $A \in \mathscr{M}$ olduğundan $\mathscr{M} \neq \emptyset$ dır.

Zorn Lemma' dan $\mathscr{M}$ ' nin P gibi bir maksimal elemanı vardır ve bu P ideali için $S \cap P = \emptyset$ ve $A \subseteq P$ dir.

Herhangi b, $c \in S$ için b, $c \notin P$ olsun. Bu taktirde $P + (b) \neq P$ ve $P + (c) \neq P$ dır.

P' nin maksimalliğinden $P + (b) \notin \mathscr{M}$ ve $P + (c) \notin \mathscr{M}$ dir. Diğer bir deyişle $(P + (c)) \cap S \neq \emptyset$ ve $(P + (b)) \cap S \neq \emptyset$ dır.

Yani $s_1 \in S$, $s_1 \in P + (b)$ ve $s_2 \in S$, $s_2 \in P + (c)$ olacak şekilde $s_1, s_2 \in S$ ler vardır. Öte yandan S bir m-sistem olduğundan $(s_1)(s_2) \cap S \neq \emptyset$ dir.

Ayrıca,

$s_1 = p_1 + b_1$, $s_2 = p_2 + c_1$, $b_1 \in (b)$, $c_1 \in (c)$ için

$(s_1)(s_2) \subseteq (P + (b_1))(P + (c_1)) \subseteq (P + (b))(P + (c)) \subseteq P + (b)(c)$

dir. Şayet burada $(b)(c) \subseteq P$ olsa $(s_1)(s_2) \subseteq P$ olur. Yani, $P \cap S \neq \emptyset$ olur. Halbuki P'nin seçilişinden dolayı bu olamaz. O halde $(b)(c) \not\subseteq P$ yani P asal bulunur.

Lemma 2.1.1.8: Bir M Γ-halkasının boştan farklı bir P altkümesi bir A idealini kapsayan minimal asal idealdir (P, A'nın minimal asalıdır) ancak ve ancak P^c, A'dan ayrık maksimal m-sistemdir.

İspat: $\Leftarrow$: P^c, A'dan ayrık maksimal m-sistem olsun. Bu durumda Lemma 2.1.1.7 den P^c ile ayrık olan ve A'yı kapsayan ideallerin sınıfında bir P_1 maksimal ideali vardır.

Yani P_1, $\mathscr{M} = \{P_i \mid A \subseteq P_i , P^c \cap P_i = \varnothing\}$ kümesinin maksimal elemanı ve aynı zamanda Lemma 2.1.1.7'den asaldır. O halde $P^c \cap P_1 = \varnothing \Rightarrow P_1 \subseteq P \Rightarrow P_1{}^c \supseteq P^c$ dir.

P_1 asal ideal iken $P_1{}^c$, A ile ayrık bir m-sistem ve P^c, A ile ayrık maksimal bir m-sistem olduğundan $P_1{}^c = P^c \Rightarrow P_1 = P$ dir.

Yani P asal idealdir. Açık olarak P^c nin maksimal m-sistem olmasından P, A'nın minimal asalıdır.

Gerçekten;

$A \subseteq P' \subseteq P$ olsa bu durumda $P^c \subseteq P'^c$, P^c maksimal $\Rightarrow P^c = P'^c \Rightarrow P = P'$ dir.

$\Rightarrow$: Tersine P, A'nın minimal asalı olsun. Bu durumda P^c, A ile ayrık bir m-sistemdir ve Lemma 2.1.1.6'den A ile ayrık olan, P^c yi kapsayan bir maksimal S m-sistemi vardır, yani $P^c \subseteq S$ dir. İlk kısımdan dolayı $(S^c)^c = S$ maksimal bir m-sistemdir. $S \cap A = \varnothing$ ise S^c, A'nın minimal asalıdır ve $A \subset S^c$ dir. Öte yandan $P^c \subseteq S$ ise $S^c \subseteq P$ olur. Buradan $A \subseteq S^c \subseteq P$ olmasından ve P'nin minimalliğinden $P = S^c$ elde edilir. O halde $S = P^c$, A ile ayrık olan maksimal bir m-sistemdir.

Sonuç 2.1.1.9: Eğer P asal ideal ve $A \subseteq P$ ise bu durumda P, A'nın bir minimal asalını kapsar.

İspat: P asal ideal ve $A \subseteq P$ ise Lemma 2.1.1.8 den P^c, A ile ayrık bir m-sistemdir. Bu durumda Lemma 2.1.1.6 dan A ile ayrık bir maksimal S m-sistemi için $P^c \subseteq S$ dir. Yine bu durumda $S^c \subseteq P$ olmasından ve Lemma 2.1.1.8 in ilk kısmından $(S^c)^c = S$, A ile ayrık maksimal m-sistemse bu durumda S^c, A'nın minimal asalıdır. Dolayısıyla $A \subseteq S^c \subseteq P$ bulunmuş olur.

Teorem 2.1.1.10: A bir M Γ-halkasının herhangi bir ideali ise bu durumda r(A), A'nın minimal asal ideallerinin arakesitidir. Yani P_i ler A'nın minimal asal idealleri olmak üzere $r(A) = \bigcap_{i \in I} P_i$ dir.

İspat: A bir M Γ-halkasının herhangi bir ideali olsun.

$\forall i \in I$ için P_i' ler A'nın minimal asal idealleri ve $A \subseteq P_i$ ise $\forall i \in I$ için $r(A) \subseteq P_i$ dir.

Buradan $\forall i \in I$ için $r(A) \subseteq \cap P_i$ elde edilir.

Şimdi $\bigcap_{i \in I} P_i \subseteq r(A)$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir x elemanı için $x \notin r(A)$ olsun. r(A) nın tanımından x'i bulunduran bir S m-sistemi vardır ve $S \cap A = \varnothing$ dir. O halde Lemma 2.1.1.6 dan $S_1 \supseteq S$ ve A ile ayrık olacak şekilde bir maksimal S_1, m-sistemi vardır. Fakat Lemma 2.1.1.8 den $S_1^c = P$, A' nın minimal asalıdır.

Öte yandan $x \in S \subseteq S_1 \Rightarrow x \notin P \Rightarrow x \notin \bigcap_{i \in I} P_i$ olur. Buradan $\bigcap_{i \in I} P_i \subseteq r(A)$ dır.

Sonuç olarak $r(A) = \bigcap_{i \in I} P_i$ elde edilir.

Sonuç 2.1.1.11: Bir idealin radikali yine bir idealdir.

Sonuç 2.1.1.12: A bir ideal iken $r(r(A)) = r(A)$

Sonuç 2.1.1.13: Şayet $R = r(0)$ ise bu durumda $r(M/R) = 0$ dır.

İspat: $x \in M$ için $x + R \neq 0 + R$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \notin R = r(0)$ dır. $R = r(0) = \bigcap_{i \in I} P_i$, P_i'ler M'nin asal idealleri olduğundan $P \supseteq R$ olacak şekilde bir P asal ideali vardır ve $x \notin P$' dir. Diğer yandan P, M nin asal ideali ve $R \subseteq P$ olduğundan P/R, M/R nin bir asal ideali ve $x + R \notin P/R$ dir. Böylece r(M/R) nin tanımından $x + R \notin r(M/R)$ olur. O halde $r(M/R) = 0$ dır.

Sonuç 2.1.1.14: A ve B, M Γ-halkasının herhangi idealleri olmak üzere $r(A \cap B) = r(A) \cap r(B)$ dir.

İspat: $r(A \cap B) = \bigcap_{i \in I} P_i$, $A \cap B \subseteq P_i$, P_i'ler asal idealler olmak üzere A' nın asal bölenleri W_i' ler yani $A \subseteq W_i$ olsun. Öte yandan $A \cap B \subseteq A \subset W_i$ olduğundan W_i' ler $A \cap B$ nin de asal bölenleridirler.

O halde $r(A \cap B) \subseteq r(A)$ dır. Benzer şekilde $A \cap B \subseteq B \subset U_i$ olduğunda U_i' ler $A \cap B$' nin de asal bölenleri olurlar. Bu taktirde $r(A \cap B) \subseteq r(B)$ $\Rightarrow r(A \cap B) \subseteq r(A) \cap r(B)$ olur.

Tersine $r(A) \cap r(B) \subseteq r(A \cap B)$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.
Eğer $A \cap B \subseteq P$ asal ise $AB \subseteq P$ ve P asal olduğundan $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ dir.
Yani $r(A) \subseteq r(A \cap B)$ veya $r(B) \subseteq r(A \cap B) \Rightarrow r(A) \cap r(B) \subseteq r(A \cap B)$ olur. O halde $r(A \cap B) = r(A) \cap r(B)$ dir.

2.1.2. Primary idealler

Tanım 2.1.2.1: M bir Γ-halkası ve A, B onun herhangi iki ideali olsun. Bu taktirde herhangi bir Q ideali için $AB \subseteq Q$ iken $A \subseteq r(Q)$ veya $B \subseteq Q$ şartı sağlanıyorsa Q ya sağ primary ideal denir.
Benzer şekilde sol primary ideal tanımlanabilir.
Biz buradaki çalışmalarımızda sağ primary ideallerini kullanacağız.

Teorem 2.1.2.2: M bir Γ-halkası ve Q, M'nin bir ideali olsun. Bu taktirde
Q primary idealdir ancak ve ancak $(a)(b) \subseteq Q$ olduğunda $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ ise.

İspat: $\Rightarrow$: Q primary ideal olsun. O halde (a) ve (b), M' nin idealleri olduğundan $(a)(b) \subseteq Q$ iken $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ dur.

$\Leftarrow$: $(a)(b) \subseteq Q$ iken $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ olsun. Herhangi A, B idealleri için $AB \subseteq Q$ ve $B \not\subset Q$ olsun.
Bu taktirde $A \subseteq r(Q)$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.
$B \not\subset Q$ olduğundan $b \in B$ fakat $b \notin Q$ olacak şekilde bir $b \in M$ vardır. Bu durumda $b \in B \cap Q^c$ dir. Buradan herhangi $a \in A$ için $(a)(b) \subseteq AB \subseteq Q \Rightarrow (a)(b) \subseteq Q$ dir. Hipotezden $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ idi. Fakat $b \notin Q$ kabul ettiğimizden $\forall a \in A$ için $a \in r(Q)$ olur. Bu ise $A \subseteq r(Q)$ olması demektir.

Teorem 2.1.2.3: M, Nobusawa anlamında bir Γ-halkası ve Q bir ideal olsun.
Q primary idealdir ancak ve ancak $\forall a, b \in M$ için $a\Gamma b \subseteq Q$ iken $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ oluyorsa ($\Leftrightarrow a \notin r(Q)$ ve $b \in Q \Rightarrow a\Gamma b \cap Q^c \neq \emptyset$).

İspat: $\Rightarrow$: Q primary ideal ve $a\Gamma b \subseteq Q$, $a \notin r(Q)$ olsun. (a)(b) nin herhangi bir elemanı $\forall n, m \in M$, $\forall a, b, c, d, e, f, g, h, j, k \in M$, $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \mu, \nu, \xi, \eta \in \Gamma$ için $(na+c\alpha a+a\beta d+e\gamma a\delta f)\rho(mb+g\mu b+b\nu h+j\xi b\eta k)$

biçimindeki elemanların sonlu toplamı şeklindedir.

Buradaki herbir terim Q'nun elemanı olduğundan dolayısıyla $(a)(b) \subseteq Q$ ve Teorem 2.1.2.2 den $b \in Q$ bulunur.

Tersine $a\Gamma b \subseteq Q$ iken $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ olsun.
Herhangi A, B idealleri için $AB \subseteq Q$ ve $B \not\subset Q$ olsun. $B \not\subset Q$ olduğundan $b \in B \cap Q^c$ olacak şekilde bir $b \in M$ vardır. Bu durumda herhangi $a \in A$ için $a\Gamma b \subseteq AB \subseteq Q \Rightarrow a\Gamma b \subseteq Q$ dur.
Hipotezden $\forall a \in A$ için $a \in r(Q)$ olduğundan $A \subseteq r(Q)$ olur. Buradan Q primary bulunur.

2.2. Türevli Gamma Halkalarının Komütatifliği

R bir asal halka, char $R \neq 2$ ve $0 \neq d : R \rightarrow R$ bir türev olmak üzere

i) $d^2(R) \subset Z$ ise R komütatiftir.

ii) $0 \neq d_1 : R \rightarrow R$, $0 \neq d_2 : R \rightarrow R$ herhangi iki türev olmak üzere $d_1d_2(R) \subset Z$ ise R komütatiftir.

oldukları daha önceden Vukman (1989) tarafından ispatlanmıştır. Bu kesimdeki amacımız R halkası yerine bir M Γ-halkasının (Barnes anlamında) U idealini ve d türevi yerine de M Γ-halkası üzerindeki türevi alarak sonuçları genelleştirmektir.

Tanım 2.2.1: M bir Γ-halkası ve d, M üzerinde tanımlı toplamsal bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in M$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$ için

$d(x\alpha y) = d(x)\alpha y + x\alpha d(y)$ eşitliği sağlanıyorsa d ye M Γ-halkası üzerinde bir türev denir (Jing, 1987).

Tanım 2.2.2: M bir Γ-halkası olsun.

$Z = \{c \in M \mid c\delta m = m\delta c, \forall m \in M, \forall \delta \in \Gamma \text{ için}\}$

şeklinde tanımlanan Z kümesine M Γ-halkasının merkezi denir. Ayrıca $\forall a, b \in M$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$ için $a\alpha b - b\alpha a = [a,b]_\alpha$ şeklinde gösterilecektir.

Bundan sonraki çalışmalarımızda M, Barnes anlamında bir Γ-halkası olarak alınacaktır.

Lemma 2.2.3. M bir Γ-halkası olsun. Bu durumda $\forall a, b, c \in M$ ve $\forall \beta, \gamma \in \Gamma$ için aşağıdakiler gerçeklenir.

i) $[a\gamma b,c]_\beta = a\gamma[b,c]_\beta + [a,c]_\beta\gamma b + a\gamma(c\beta b) - a\beta(c\gamma b)$ dir.

ii) $a \in Z$ ise bu durumda $[a\gamma b,c]_\beta = a\gamma[b,c]_\beta$ dır.

iii) $a \in Z$ ise bu durumda $a\gamma[b,c]_\beta = a\beta[b,c]_\gamma$ dır.

iv) M asal Γ-halkası olsun. Bu durumda $a \in Z$ ve $a\Gamma b = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

v) M asal Γ-halkası olsun. Bu durumda $a \in Z$ ve $a\Gamma b \subset Z$ ise $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.

vi) M, char $M \neq 2$ olan asal Γ-halkası olsun. Bu durumda $a \in Z$ ve $a\gamma[b,c]_\gamma = 0$ ise $a = 0$ veya $[b,c]_\gamma = 0$ dır.

İspat : $\forall a, b, c \in M$ ve $\forall \beta, \gamma \in \Gamma$ için

i) Tanım 2.1.2' nin ii) ve iii) şıkları kullanılarak

$a\gamma[b,c]_\beta + [a,c]_\beta \gamma b + a\gamma(c\beta b) - a\beta(c\gamma b)$

$= a\gamma(b\beta c - c\beta b) + (a\beta c - c\beta a)\gamma b + a\gamma(c\beta b) - a\beta(c\gamma b)$

$= a\gamma(b\beta c) - a\gamma(c\beta b) + (a\beta c)\gamma b - (c\beta a)\gamma b + a\gamma(c\beta b) - a\beta(c\gamma b)$

$= a\gamma(b\beta c) + a\beta(c\gamma b) - (c\beta a)\gamma b - a\beta(c\gamma b)$

$= a\gamma(b\beta c) - (c\beta a)\gamma b$

$= (a\gamma b)\beta c - c\beta(a\gamma b)$

$= [a\gamma b,c]_\beta$

elde edilir.

ii) $a \in Z$ olsun.

Bu durumda Gamma halkasındaki merkez tanımından

$$\begin{aligned} a\gamma(c\beta b) - a\beta(c\gamma b) &= (c\beta b)\gamma a - a\beta(c\gamma b) \\ &= c\beta(b\gamma a) - a\beta(c\gamma b) \\ &= c\beta(a\gamma b) - a\beta(c\gamma b) \\ &= (c\beta a)\gamma b - a\beta(c\gamma b) \\ &= (a\beta c)\gamma b - a\beta(c\gamma b) \\ &= a\beta(c\gamma b) - a\beta(c\gamma b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğunu ve $[a,c]_\beta = 0$ olduğunu i) de kullanarak $[a\gamma b,c]_\beta = a\gamma[b,c]_\beta$ elde ederiz.

iii) $\forall a \in Z$ için
$$\begin{aligned} a\gamma[b,c]_\beta &= a\gamma(b\beta c - c\beta b) \\ &= a\gamma(b\beta c) - a\gamma(c\beta b) \\ &= (b\beta c)\gamma a - (c\beta b)\gamma a \end{aligned}$$

$= b\beta(c\gamma a) - c\beta(b\gamma a)$

$= b\beta(a\gamma c) - c\beta(a\gamma b)$

$= (b\beta a)\gamma c - (c\beta a)\gamma b$

$= (a\beta b)\gamma c - (a\beta c)\gamma b$

$= a\beta(b\gamma c) - a\beta(c\gamma b)$

$= a\beta[(b\gamma c) - (c\gamma b)]$

$= a\beta[b,c]_\delta$

elde edilir.

iv) M asal Γ-halkası olmak üzere $a \in Z$ ve $\forall b \in M$ için $a\Gamma b = 0$ olsun.

Bu durumda $\forall t \in M$ ve $\forall \beta, \gamma \in \Gamma$ için $0 = t\gamma(a\beta b)$

$= (t\gamma a)\beta b$

$= (a\gamma t)\beta b$

$\Rightarrow$ $a\Gamma M\Gamma b = 0$ bulunur. Buradan M'nin asallığı kullanılarak $a = 0$ veya $b = 0$ sonucu elde edilir.

v) M asal Γ-halkası olmak üzere $a \in Z$ ve $\forall b \in M$ için $a\Gamma b \subset Z$ olsun.

Bu durumda (ii) den $0 = [a\gamma b,c]_\beta = a\delta[b,c]_\beta$ bulunur. Buradan

$$a\delta[b,c]_\beta = 0, \ \forall c \in M, \forall \beta, \delta \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.1)$$

elde edilir. (2.1) de iv) kullanılırsa $a = 0$ veya $[b,c]_\beta = 0$ bulunur.

Sonuç olarak $\forall c \in M$, $\forall \beta \in \Gamma$ için $a = 0$ veya $b \in Z$ elde edilir.

vi) M, char $M \neq 2$ olan asal Γ-halkası olmak üzere $a \in Z$, $\forall b, c \in M$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için $a\gamma[b,c]_\gamma = 0$ olsun.

Bu durumda $\forall \gamma, \beta \in \Gamma$ için $0 = a(\beta + \gamma)[b,c]_{\beta+\gamma} = a\beta[b,c]_\gamma + a\gamma[b,c]_\beta$, yani $\forall b, c \in M$, $\forall \beta, \gamma \in \Gamma$ için $a\beta[b,c]_\gamma + a\gamma[b,c]_\beta = 0$ elde edilir.

Bu durumda iii) den $2a\gamma[b,c]_\beta = 0$ ve buradan char $M \neq 2$ olduğunu kullanarak $a\gamma[b,c]_\beta = 0$ bulunur. Bu son ifadeye iv) uygulanırsa $a = 0$ veya $[b,c]_\beta = 0$ elde edilir.

Lemma 2.2.4: M bir asal Γ- halkası olsun. Bu durumda

i) $(0) \neq U$, M nin bir sağ ideali ve $U \subset Z$ ise M komütatiftir.

ii) $(0) \neq U$, M nin bir sağ (sol) ideali ve $a \in M$ iken $U\Gamma a = 0$ ($a\Gamma U = 0$) ise $a = 0$ dır.

iii) $(0) \neq U$, M nin bir ideali ve $a, b \in M$ için $a\Gamma U\Gamma b = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat :

i) $(0) \neq U$, M nin bir sağ ideali ve $U \subset Z$ olsun. Bu durumda Lemma 2.2.3 ii) nin kullanılmasıyla $\forall u \in U$ için, $\forall a, b \in M$, $\forall \gamma, \beta \in \Gamma$ için

$0 = [u\gamma a,b]_\beta = u\gamma[a,b]_\beta$ ve buradan

$$U\Gamma[a,b]_\beta = 0, \quad \forall a, b \in M, \forall a \in U \text{ ve } \forall \beta \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.2)$$

elde edilir.

(2.2) ye Lemma 2.2.3 iv) nin uygulanmasıyla $\forall a, b \in M$, $\forall u \in U$ ve $\forall \beta \in \Gamma$ için $u = 0$ veya $[a,b]_\beta = 0$ elde edilir. Buradan da $U \neq (0)$ olduğundan $\forall a, b \in M$, $\forall \beta \in \Gamma$ için $[a,b]_\beta = 0$ elde edilir. Bu ise M nin komütatif olması demektir.

ii) $(0) \neq U$, M nin bir sağ ideali ve $a \in M$ olmak üzere $U\Gamma a = 0$ olsun.

Bu durumda $\forall u \in U$, $\forall x \in M$, $\forall \gamma, \beta \in \Gamma$ için $0 = (a\gamma x)\beta a$ bulunur. Yani $\forall u \in U$, $\forall x \in M$ için $u\Gamma M\Gamma a = 0$ bulunur. Buradan M nin asallığı ve $U \neq (0)$ olduğu kullanılarak $a = 0$ bulunur.

iii) $(0) \neq U$, M nin bir ideali ve $a, b \in M$ için $a\Gamma U\Gamma b = 0$ olsun. Bu durumda

$\forall u \in U$, $\forall m \in M$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ için $a\gamma(u\beta m)\alpha b \in a\Gamma U\Gamma b = 0$ dır.

Buradan $\forall \gamma \in \Gamma$ için $a\gamma U\Gamma M\Gamma b = 0$ bulunur.

Son ifadede M nin asallığı kullanılarak $\forall \gamma \in \Gamma$ için $a\gamma U = 0$ veya $b = 0$ elde edilir.

Buradan $a\Gamma U = 0$ veya $b = 0$ elde edilir. Eğer $a\Gamma U = 0$ ise ii) den $a = 0$ bulunur.

Sonuç olarak $a = 0$ veya $b = 0$ elde edilir.

Lemma 2.2.5: M bir asal Γ-halkası ve d, M nin bir türevi olsun. Bu durumda

i) $(0) \neq U$, M nin bir sağ ideali ve $d(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

ii) $(0) \neq U$, M nin bir ideali ve $a \in M$ iken $a\Gamma d(U) = 0$ $(d(U)\Gamma a = 0)$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

iii) Char M $\neq 2$ ve $(0) \neq U$, M nin bir ideali olsun. Bu durumda $d^2(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

iv) Char M $\neq 2$, $(0) \neq U$, M'nin bir ideali ve d_1, d_2 M'nin iki türevi olsun. Bu durumda $d_2(U) \subset U$ ve $d_1d_2(U) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat :

i) Hipotezden ve U nun ideal olması tanımından $\forall u \in U$, $\forall m \in M$, $\forall \alpha \in \Gamma$ için

$0 = d(u\alpha m) = d(u)\alpha m + u\alpha d(m) = u\alpha d(m)$

$\Rightarrow$ $U\Gamma d(M) = 0$ bulunur.

Burada Lemma 2.2.4 ii) kullanılırsa $U \neq (0)$ olduğundan $d(M) = 0$ ve buradan da $d = 0$ elde edilir.

ii) Hipotez ve U'nun ideal olduğu kullanılarak $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$, $\forall m \in M$ için

$0 = a\alpha d(u\beta m) = a\alpha d(u)\beta m + a\alpha u\beta d(m)$

$\Rightarrow$ $0 = a\Gamma U\Gamma d(M)$ elde edilir.

Bu ifadeye Lemma 2.2.4 iii) uygulandığında $M \neq (0)$ olmasından $a = 0$ veya $d = 0$ bulunur.

Benzer şekilde $d(U)\Gamma a = 0$ için $a = 0$ veya $d = 0$ sonucu bulunur.

iii) Hipotezden ve U'nun ideal olduğu kullanılarak $\forall u, v \in U$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
0 = d^2(u\alpha v) &= d(d(u)\alpha v + u\alpha d(v)) \\
&= d^2(u)\alpha v + d(u)\alpha d(v) + d(u)\alpha d(v) + u\alpha d^2(v) \\
&= 2d(u)\alpha d(v)
\end{aligned}
$$

ve char M $\neq 2$ olmasından $0 = d(u)\alpha d(v)$, $\forall u, v \in U$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$ için

ve buradan da $d(U)\Gamma d(U) = 0$ elde edilir.

Bu ifadeye ii) uygulanırsa $d(U) = 0$ bulunur ve bu son ifadeye i) uygulanırsa $d = 0$ elde edilir.

iv) Hipotezden ve U nun ideal olmasından $\forall u, v \in U$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} 0 = d_1d_2(u\alpha v) &= d_1(d_2(u)\alpha v + u\alpha d_2(v)) \\ &= d_1d_2(u)\alpha v + d_2(u)\alpha d_1(v) + d_1(u)\alpha d_2(v) + u\alpha d_1d_2(v) \\ &= d_2(u)\alpha d_1(v) + d_1(u)\alpha d_2(v) \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada u yerine $d_2(u)$ alınırsa $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha \in \Gamma$ için

$0 = d_2{}^2(u)\alpha d_1(v) + d_1d_2(u)\,\alpha d_2(v) = d_2{}^2(u)\alpha d_1(v)$ elde edilir.

$\Rightarrow\ 0 = d_2{}^2(U)\Gamma d_1(U)$ dır.

Bu son ifadeye ii) uygulanırsa $d_2{}^2(U) = 0$ veya $d_1 = 0$ bulunur.

$d_2^2(U) = 0$ ise iii) den $d_2 = 0$ bulunur ve sonuç olarak $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ elde edilir.

Bundan sonraki kısımda U, M'nin sıfırdan farklı bir ideali olarak alınacaktır.

Lemma 2.2.6: M bir asal Γ-halkası, char M ≠ 2, 0 ≠ d M'nin bir türevi olsun. Bu durumda $d(U) \subset Z$ ise M komütatiftir.

İspat: Lemma 2.2.5 i) den dolayı $Z \neq (0)$ dır.

Buna göre $\forall u \in U$, $\forall y \in M$, $\forall z \in Z$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için

$0 = [d(u\gamma z),y]_\gamma = [d(u)\gamma z + u\gamma d(z),y]_\gamma = [d(u)\gamma z,y]_\gamma + [u\gamma d(z),y]_\gamma$

bulunur.

Burada $d(u) \in Z$, $z \in Z$ olduğu ve Lemma 2.2.3 ii) kullanılırsa

$$0 = [u,y]_\gamma \gamma d(z), \quad \forall u \in U, \forall y \in M, \forall z \in Z \text{ ve } \forall \gamma \in \Gamma \text{ için}$$

elde edilir. Bu ifadeye Lemma 2.2.3 vi) uygulanırsa

$\forall u \in U$, $\forall y \in M$, $\forall z \in Z$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[u,y]_\gamma = 0$ veya $d(z) = 0$ bulunur. Yani,

$$d(Z) = 0 \quad \text{veya} \quad [U,M]_\gamma = 0, \ \forall \gamma \in \Gamma \text{ için} \tag{2.3}$$

bulunur.

Burada $\forall\gamma \in \Gamma$ için $[U,M]_\gamma = 0$ olduğunda $U \subset Z$ ve Lemma 2.2.4 i) den M komütatif bulunur.

$d(Z) = 0$ ise $d(U) \subset Z$ olduğunu kullanarak $d^2(U) \subset d(Z) = 0$, yani $d^2(U) = 0$ elde edilir. Bu ise Lemma 2.2.5 iii) den $d = 0$ olmasını gerektirir. Bu da hipotezle çelişir. O halde M komütatiftir.

Teorem 2.2.7: M bir asal Γ-halkası, char M ≠ 2, 3 ve 0 ≠ d, M'nin bir türevi olsun. Eğer $d(U) \subset U$ ve $d^2(U) \subset Z$ ise M komütatiftir.

İspat: Hipotezden, $\forall u \in U$, $\forall\beta, \gamma \in \Gamma$ ve $\forall y \in M$ için $d^2(d(U)) = d^3(U) \in Z$ olduğunda

$$
\begin{aligned}
0 &= [d^2(d(u)\gamma d(u)),y]_\beta \\
&= [d\{d^2(u)\gamma d(u) + d(u)\gamma d^2(u)\},y]_\beta \\
&= [d^3(u)\gamma d(u) + d^2(u)\gamma d^2(u) + d^2(u)\gamma d^2(u) + d(u)\gamma d^3(u),y]_\beta \\
&= [2\{d^3(u)\gamma d(u) + d^2(u)\gamma d^2(u)\},y]_\beta \\
&= 2[d^3(u)\gamma d(u),y]_\beta + 2[d^2(u)\gamma d^2(u),y]_\beta
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada char M ≠ 2, $d^2(U) \subset Z$ ve $d^3(U) \subset Z$ olduğu ve Lemma 2.2.3 ii) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= d^3(u)\gamma[d(u),y]_\beta + d^2(u)\gamma[d^2(u),y]_\beta \\
&= d^3(u)\gamma[d(u),y]_\beta, \quad \forall u \in U, \forall y \in M, \forall\beta, \gamma \in \Gamma \text{ için}
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu ifadeye Lemma 2.2.3 iv) uygulanırsa

$$d^3(u) = 0 \quad \text{veya} \quad [d(u),y]_\beta = 0, \quad \forall u \in U, \forall y \in M, \forall\beta, \gamma\in\Gamma \text{ için}$$

yani,

$$d^3(u) = 0 \quad \text{veya} \quad d(u) \in Z, \quad \forall u \in U \text{ için} \tag{2.4}$$

elde edilir.

Eğer $d^3(u) = 0$ ise bu taktirde, $\forall u \in U$, $\forall y \in M$, $\forall\beta, \gamma \in \Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
0 &= [d^2(u\beta d(u)),y]_\gamma \\
&= [d\{d(u)\beta d(u) + u\beta d^2(u)\},y]_\gamma
\end{aligned}
$$

$= [d^2(u)\beta d(u) + d(u)\beta d^2(u) + d(u)\beta d^2(u) + u\beta d^3(u),y]_\gamma$

$= [3d^2(u)\beta d(u),y]_\gamma$

olacağından char $M \neq 3$ ve Lemma 2.2.3 ii) den $0 = d^2(u)\beta[d(u),y]_\gamma$ bulunur.

Bu son ifadeye Lemma 2.2.3 iv) uygulandığında

$d^2(u) = 0$ veya $[d(u),y]_\gamma = 0$, $\forall u \in U$, $\forall y \in M$, $\forall \gamma \in \Gamma$ için

bulunur. Böylece (2.4) ifadesi

$d^2(u) = 0$ veya $d(u) \in Z$, $\forall u \in U$ için

biçimine dönüşür. O halde,

$K = \{u \in U \mid d^2(u) = 0\}$ ve $L = \{u \in U \mid d(u) \in Z\}$ kümelerini tanımlarsak K ve L, U'nun iki toplamsal alt grubudur ve $U = K \cup L$ dır. Hipotezde $d \neq 0$ kabul edildiğinden Lemma 2.2.5 iii) den $U \neq K$ dır.

O halde Brauer Trick'ten $U = L$ yani $d(U) \subset Z$ elde edilir.

Bu ise Lemma 2.2.6'dan M'nin komütatif olmasını gerektirir.

Lemma 2.2.8: M, char $M \neq 2$ olacak şekilde bir asal Γ-halkası, $a \in M$ ve $Z \neq (0)$ olsun. Eğer $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[U,a]_\gamma = 0$ ise bu takdirde $a \in Z$ dir.

İspat: $\forall u \in U$, $\forall x, y, t \in M$ ve $\forall \delta, \beta, \gamma \in \Gamma$ için $u\delta t\beta y\gamma x \in U$ olduğundan Lemma 2.2.3 i) den

$0 = [u\delta t\beta y\gamma x,a]_\gamma = u\delta t\beta y\gamma[x,a]_\gamma + [u\delta t\beta y,a]_\gamma\gamma x + u\delta t\beta y\gamma(a\gamma x) - u\delta t\beta y\gamma(a\gamma x)$

$= u\delta t\beta y\gamma[x,a]_\gamma$, $\forall u \in U$, $\forall x, y, t \in M$, $\forall \delta,\beta,\gamma \in \Gamma$ için

elde edilir ve dolayısıyla,

$0 = U\Gamma M\Gamma M\gamma[M,a]_\gamma$, $\forall \delta \in \Gamma$ için

bulunur. Burada M'nin asallığı ve $U \neq (0)$ olması kullanılarak $\forall \delta \in \Gamma$ için $M\gamma[M,a]_\gamma = 0$ bulunur. Böylece $0 \neq z \in Z$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için $z\gamma[M,a]_\gamma = 0$ elde edilir.

Bu ifadeye Lemma 2.2.3 vi) uygulanırsa $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[M,a]_\gamma = 0$ elde edilir. Bu da $a \in Z$ olmasını gerektirir.

Lemma 2.2.9: M, char $M \neq 2, 3$ olan bir asal Γ-halkası, $0 \neq d_1$, d_2 M'nin $d_1d_2(U) \subset Z$ ve $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde iki türevi olsun. Bu durumda $d_1d_2^2(U) = 0$ ise M komütatiftir.

İspat: Hipotezden $\forall u \in U$, $\forall \beta, \gamma \in \Gamma$ ve $\forall y \in M$ için

$$0 = [d_1d_2(d_2(u)\beta d_2(u)),y]_\gamma$$
$$= [d_1(d_2^2(u)\beta d_2(u) + d_2(u)\beta d_2^2(u)),y]_\gamma$$
$$= [d_1d_2^2(u)\beta d_2(u) + d_2^2(u)\beta d_1d_2(u) + d_1d_2(u)\beta d_2^2(u) + d_2(u)\beta d_1d_2^2(u),y]_\gamma$$
$$= 2\{[d_1d_2^2(u)\beta d_2(u),y]_\gamma + [d_1d_2(u)\beta d_2^2(u),y]_\gamma\}$$
$$= 2[d_1d_2(u)\beta d_2^2(u),y]_\gamma$$

Char $M \neq 2$ ve Lemma 2.2.3 ii) kullanılırsa,

$0 = d_1d_2(u)\beta[d_2^2(u),y]_\gamma$,$\forall u \in U$, $\forall \beta, \gamma \in \Gamma$ ve $\forall y \in M$ için ve burada Lemma 2.2.3 iv) kullanılırsa

$$d_1d_2(u) = 0 \text{ veya } [d_2^2(u),y]_\gamma = 0, \ \forall u \in U, \forall \beta, \gamma \in \Gamma \text{ ve } \forall y \in M \text{ için}$$

elde edilir ve burada Lemma 2.2.3 iv) kullanılırsa

$$d_1d_2(u) = 0 \text{ veya } [d_2^2(u),y]_\gamma = 0, \ \forall u \in U, \forall y \in M \text{ ve } \forall \gamma \in \Gamma \text{ için}$$

bulunur. Bu da,

$$d_1d_2(u) = 0 \text{ veya } d_2^2(u) \in Z \tag{2.5}$$

olması demektir.

$K = \{u \in U \mid d_1d_2(u) = 0\}$ ve $L = \{u \in U \mid d_2^2(u) \in Z\}$ dersek K ve L, U'nun toplamsal alt grupları ve $U = K \cup L$ dır. Hipotezden $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olduğundan Lemma 2.2.5 iv) den $U \neq K$ bulunur.

Bu durumda Brauer Trick'ten $U = L$ yani, $d_2^2(U) \subset Z$ bulunur. Bu ise Teorem 2.2.7 den M'nin komütatif olmasını gerektirir.

Lemma 2.2.10: M, char $M \neq 2$ olan bir asal Γ-halkası ve $0 \neq d_1$, d_2, M'nin $d_1d_2(U) \subset Z$, $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde iki türevi ve $a \in M$ olsun. Bu durumda $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[d_1(U),a]_\gamma = 0$ ise $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[d_2(U),a]_\gamma = 0$ dır.

İspat : Hipotezden $\forall x \in U$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için

$0 = [d_1(d_2(x)\gamma d_2(x)),a]_\gamma$

$= [2d_1d_2(x)\gamma d_2(x),a]_\gamma = 2[d_1d_2(x)\gamma d_2(x),a]_\gamma$

Char $M \neq 2$ olduğundan ve Lemma 2.2.3 ii)den

$$0 = d_1d_2(x)\gamma[d_2(x),a]_\gamma, \quad \forall x \in U, \forall \gamma \in \Gamma \text{ için}$$

elde edilir. Burada Lemma 2.2.3 vi) ü kullanarak $\forall x \in U$ için

$$d_1d_2(x) = 0 \text{ veya } [d_2(x),a]_\gamma = 0, \forall \gamma \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.6)$$

elde edilir. $K = \{x \in U \mid d_1d_2(x) = 0\}$ ve $L = \{x \in U \mid [d_2(x),a]_\gamma = 0, \forall \gamma \in \Gamma \text{ için}\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L, U'nun toplamsal alt grupları ve $U = K \cup L$ dir. Bu durumda $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olduğundan Lemma 2.2.5 iv) den $U \neq K$ dır. O halde Brauer Trick'ten $U = L$, yani $\forall x \in U$, $\forall \gamma \in \Gamma$ için $0 = [d_2(x),a]_\gamma$ elde edilir. Bu ise $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[d_2(U),a]_\gamma = 0$ olması demektir.

Lemma 2.2.11: M, char $M \neq 2$ olan bir asal Γ-halkası ve $0 \neq d_1, d_2$ M'nin $d_1d_2(U) \subset Z$, $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde iki türevi ve $a \in M$ olsun. Bu durumda $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[d_1(U),a]_\gamma = 0$ ise $a \in Z$ dir.

İspat : $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[d_1(U),a]_\gamma = 0$ ise Lemma 2.2.10 dan $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[d_2(U),a]_\gamma = 0$ elde edilir. O halde $\forall x \in U$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için

$0 = [d_1d_2(x\gamma x),a]_\gamma$

$= [d_1(d_2(x)\gamma x + x\gamma d_2(x)),a]_\gamma$

$= [d_1d_2(x)\gamma x + d_2(x)\gamma d_1(x) + d_1(x)\gamma d_2(x) + x\gamma d_1d_2(x),a]_\gamma$

$= [2d_1d_2(x)\gamma x,a]_\gamma$

$= 2[d_1d_2(x)\gamma x,a]_\gamma$

Burada char $M \neq 2$ olmasını ve Lemma 2.2.3 ii) yi kullanarak

$0 = d_1d_2(x)\gamma[x,a]_\gamma, \quad \forall x \in U, \forall \gamma \in \Gamma$ için

bulunur. Bu ifadeye Lemma 2.2.3 vi) uygulanırsa

$$d_1d_2(x) = 0 \text{ veya } [x,a]_\gamma = 0, \forall x \in U, \forall \gamma \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.7)$$

elde edilir.

$K = \{x \in U \mid d_1d_2(x) = 0\}$ ve $L = \{x \in U \mid [x,a]_\gamma = 0, \forall\gamma \in \Gamma$ için$\}$ denilirse K ve L U'nun toplamsal alt grupları ve $U = K \cup L$ olduğu açıktır. $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olmasından Lemma 2.2.5 iv) den $U \neq K$ dır. O halde Brauer Trick'ten $U = L$, yani $\forall\gamma \in \Gamma$ için $[U,a]_\gamma = 0$ bulunur. Bu durumda Lemma 2.2.8 den $a \in Z$ dir.

Lemma 2.2.12: M, char $M \neq 2, 3$ olan bir asal Γ-halkası ve $0 \neq d_1, d_2$ M'nin $d_1d_2(U) \subset Z$ ve $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde iki türevi ve $a \in M$ olsun. Bu durumda $\forall\gamma \in \Gamma$ için $[d_1(U),a]_\gamma \subset Z$ ise $a \in Z$ dir.

İspat: Eğer $Z = (0)$ ise $d_1d_2(U) = 0$ ve böylece Lemma 2.2.5 iv) den $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olmalıdır. Bu ise hipotezle çelişir. O halde $Z \neq (0)$ dır. Bu durumda hipotezden ve U'nun ideal olmasından $\forall x \in U$, $\forall z \in Z$ ve $\forall\beta, \gamma \in \Gamma$ için

$Z \ni [d_1(x\beta z),a]_\gamma = [d_1(x)\beta z + x\beta d_1(z),a]_\gamma = [d_1(x)\beta z,a]_\gamma + [x\beta d_1(z),a]_\gamma$

bulunur. Bu durumda Lemma 2.2.3 ii)den

$Z \ni [d_1(x),a]_\gamma\beta z + [x,a]_\gamma\beta d_1(z)$ ve $[d_1(x),a]_\gamma\beta z \in U$ olduğundan buradan

$Z \ni [x,a]_\gamma\beta d_1(z)$, $\forall x \in U$, $\forall z \in Z$ ve $\forall\gamma, \beta \in \Gamma$ için

elde edilir. Yani,

$$[U,a]_\gamma\beta d_1(Z) \subset Z, \quad \forall\gamma, \beta \in \Gamma \text{ için} \tag{2.8}$$

dir. (2.8)'de Lemma 2.2.3 v) uygulanırsa,

$$\forall\gamma \in \Gamma \text{ için } [U,a]_\gamma \subset Z \text{ veya } d_1(Z) = 0 \tag{2.9}$$

elde edilir.

Eğer $\forall\gamma \in \Gamma$ için $[U,a]_\gamma \subset Z$ ise $\forall m \in M$, $\forall u \in U$ ve $\forall\beta, \gamma \in \Gamma$ için $0 = [[u,a]_\gamma,m]_\beta$ elde edilir. Burada u yerine $u\gamma u$, $\gamma \in \Gamma$ alırsak,

$0 = [[u\gamma u,a]_\gamma,m]_\beta = [u\gamma[u,a]_\gamma+[u,a]_\gamma\gamma u, m]_\beta = [u,m]_\beta\gamma[u,a]_\gamma + [u,a]_\gamma\gamma[u,m]_\beta$ $= 2[u,m]_\beta\gamma[u,a]_\gamma$ ve char $M \neq 2$ olduğundan bu ifade

$$0 = [u,m]_\beta\gamma[u,a]_\gamma, \forall m \in M, \forall u \in U, \forall\beta, \gamma \in \Gamma \text{ için} \tag{2.10}$$

haline dönüşür.

(2.10)'a Lemma 2.2.3 vi) uygulandığında $\forall u \in U$ için

$[u,m]_\beta = 0$, $\forall m \in M$, $\forall\beta \in \Gamma$ veya $[u,a]_\gamma = 0$, $\forall\gamma \in \Gamma$ için yani,

$$[U,a]_\gamma = 0, \ \forall\gamma \in \Gamma \tag{2.11}$$

elde edilir.

(2.11)'e Lemma 2.2.8 uygulandığında $a \in Z$ bulunur.

Eğer $d_1(Z) = 0$ ise bu durumda $d_1d_1d_2(U) = 0$ olur ve $\forall x \in U$, $\forall\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}
0 &= d_1d_1d_2(d_2(x)\gamma d_2(x)) \\
&= d_1d_1(d_2^2(x)\gamma d_2(x)) + d_1d_1(d_2(x)\gamma d_2^2(x)) \\
&= d_1(d_1d_2^2(x)\gamma d_2(x) + d_2^2(x)\gamma d_1d_2(x)) + d_1(d_1d_2(x)\gamma d_2^2(x) + d_2(x)\gamma d_1d_2^2(x)) \\
&= 4d_1d_2^2(x)\gamma d_1d_2(x)
\end{aligned}$$

Char $M \neq 2$ olduğundan buradan

$$0 = d_1d_2^2(x)\gamma d_1d_2(x), \ \forall x \in U, \ \forall\gamma \in \Gamma \text{ için}$$

elde edilir. Buna Lemma 2.2.3 iv) uygulanırsa $\forall x \in U$ için

$$d_1d_2(x) = 0 \quad \text{veya} \quad d_1d_2^2(x) = 0 \tag{2.12}$$

bulunur.

$K = \{x \in U \mid d_1d_2(x) = 0\}$ ve $L = \{x \in U \mid d_1d_2^2(x) = 0\}$ kümelerini tanımlarsak, K ve L, U'nun toplamsal alt grupları ve $U = K \cup L$ dir. Lemma 2.2.5 iv) den dolayı $U \neq K$ ve dolayısıyla $U = L$ dir. Yani $d_1d_2^2(U) = 0$ dır. Bu ise Lemma 2.2.9 dan M'nin komütatif olmasını gerektirir. Yani her iki durumda da $a \in Z$ elde edilir.

Teorem 2.2.13: M, char $M \neq 2, 3$ olan bir asal Γ-halkası ve $0 \neq d_1, d_2$ M'nin $d_1d_2(U) \subset Z$ ve $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde iki türevi olsun. Bu durumda M komütatiftir.

İspat: Hipotezden $\forall x, y \in U$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}
Z \ni d_1d_2([x,d_2(y)]_\gamma) &= d_1([d_2(x),d_2(y)]_\gamma + [x,d_2^2(y)]_\gamma) \\
&= [d_1d_2(x),d_2(y)]_\gamma + [d_2(x),d_1d_2(y)]_\gamma + [d_1(x),d_2^2(y)]_\gamma + [x,d_1d_2^2(y)]_\gamma \\
&= [d_1(x),d_2^2(y)]_\gamma
\end{aligned}$$

buradan,

$$[d_1(U),d_2^2(U)]_\gamma \subset Z,\ \forall\gamma \in \Gamma \text{ için} \tag{2.13}$$

bulunur. (2.13)'e Lemma 2.2.12 uygulanırsa $d_2^2(U) \subset Z$ ve buradan da Teorem 2.2.7 den M'nin komütatifliği elde edilir.

Böylece (Posner, 1957) nin Teorem 1' i Γ-halkalarında aşağıdaki biçimde ispatlanarak genelleştirilmiş olur.

Uyarı 2.2.14: M, char M $\neq 2$ olan bir asal Γ-halkası ve d_1, d_2 M'nin iki türevi olsun. Bu durumda d_1d_2 türevse $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat: d_1d_2 M nin türevi olduğundan,

$$d_1d_2(x\alpha y) = d_1d_2(x)\alpha y + x\alpha d_1d_2(y),\ \forall x, y \in M, \alpha \in \Gamma \text{ için} \tag{2.14}$$

olur. Öte yandan

$$\begin{aligned} d_1d_2(x\alpha y) &= d_1(d_2(x)\alpha y + x\alpha d_2(y)) \\ &= d_1d_2(x)\alpha y + d_2(x)\alpha d_1(y) + d_1(x)\alpha d_2(y) + x\alpha d_1d_2(y) \end{aligned}$$

yani, $\forall x, y \in M, \forall\alpha \in \Gamma$ için

$$d_1d_2(x\alpha y) = d_1d_2(x)\alpha y + d_2(x)\alpha d_1(y) + d_1(x)\alpha d_2(y) + x\alpha d_1d_2(y) \tag{2.15}$$

bulunur. (2.14) ve (2.15)'in eşitliğinden

$$d_2(x)\alpha d_1(y) + d_1(x)\alpha d_2(y) = 0,\ \forall x, y \in M,\ \forall\alpha \in \Gamma \text{ için} \tag{2.16}$$

bulunur. (2.16) da x yerine $x\beta d_1(z)$, $\forall z \in M$, $\forall\beta \in \Gamma$ için alırsak bu taktirde $\forall x, y, z \in M, \forall\alpha, \beta \in \Gamma$ için $0 = d_2(x\beta d_1(z))\alpha d_1(y) + d_1(x\beta d_1(z))\alpha d_2(y)$ $= d_2(x)\beta d_1(z)\alpha d_1(y) + x\beta d_2d_1(z)\alpha d_1(y) + d_1(x)\beta d_1(z)\alpha d_2(y) + x\beta d_1^2(z)\alpha d_2(y)$

bulunur.

Yani $\forall x, y, z \in M, \forall\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$$0 = d_2(x)\beta d_1(z)\alpha d_1(y)+x\beta d_2d_1(z)\alpha d_1(y)+d_1(x)\beta d_1(z)\alpha d_2(y)+x\beta d_1^2(z)\alpha d_2(y) \tag{2.17}$$

elde edilir. Ayrıca (2.16) da x yerine $d_1(z)$ alınırsa

$$0 = d_2d_1(z)\alpha d_1(y) + d_1^2(z)\alpha d_2(y),\ \forall y, z \in M, \forall\alpha \in \Gamma \text{ için} \tag{2.18}$$

bulunur. Bu durumda (2.18)'i (2.17) de kullanarak

$$0 = d_2(x)\beta d_1(z)\alpha d_1(y) + d_1(x)\beta d_1(z)\alpha d_2(y),\ \forall x, y, z \in M, \forall\alpha, \beta \in \Gamma \text{ için} \tag{2.19}$$

elde edilir.

Bu defa (2.16) da x yerine $z \in M$ alınırsa

$$d_1(z)\alpha d_2(y) = - d_2(z)\alpha d_1(y), \forall y, z \in M, \forall \alpha \in \Gamma \text{ için} \quad (2.20)$$

bulunur.

Böylece $d_1(x)\beta(d_1(z)\alpha d_2(y)) = - d_1(x)\beta(d_2(z)\alpha d_1(y))$ elde edilir. Bu ifade ve (2.19) dan $d_1(x)\beta d_1(z)\alpha d_2(y) = - d_2(x)\beta d_1(z))\alpha d_1(y)$ olduğu son eşitlikte kullanılırsa

$$(d_2(x)\beta d_1(z) - d_1(x)\beta d_2(z))\alpha d_1(y) = 0, \ \forall x, y, z \in M, \ \forall \alpha, \beta \in \Gamma \text{ için} \quad (2.21)$$

olduğu görülür.

(2.21)'e Lemma 2.2.5 ii) uygulandığında

$$d_1 = 0 \text{ veya } d_2(x)\beta d_1(z) - d_1(x)\beta d_2(z) = 0, \ \forall x, z \in M, \forall \beta \in \Gamma \text{ için}$$

bulunur. Eğer $d_1 \neq 0$ ise bu durumda

$$d_2(x)\beta d_1(z) - d_1(x)\beta d_2(z) = 0, \forall x, z \in M, \forall \beta \in \Gamma \text{ için} \quad (2.22)$$

olur. (2.16) da y yerine z ve α yerine β alınırsa

$$d_2(x)\beta d_1(z) + d_1(x)\beta d_2(z) = 0, \forall x, z \in M, \forall \beta \in \Gamma \text{ için} \quad (2.23)$$

elde edilir. (2.22) ve (2.23) taraf tarafa toplanıp char $M \neq 2$ olduğu kullanılırsa $\forall x, z \in M$, $\forall \beta \in \Gamma$ için $d_2(x)\beta d_1(z) = 0$, yani

$$d_2(M)\Gamma d_1(M) = 0 \quad (2.24)$$

elde edilir. (2.24)'e Lemma 2.2.5 ii) uygulanırsa $d_2 = 0$ bulunur.

2.3. (σ,τ)-Türevli Gamma Halkaları

Bu kesimdeki amacımız tezimizin 2.2. kesiminde ele alınan Lemma 2.2.5, Lemma 2.2.6 ve Teorem 2.2.7 de M Gamma Halkasının d türevi yerine, M nin bir (σ,τ)-türevini alarak sonuçları daha da genelleştirmektir.

Tanım 2.3.1: M bir Γ-halkası ve $\sigma : M \to M$ herhangi bir toplamsal dönüşüm olmak üzere $\forall\, x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\sigma(x\alpha y) = \sigma(x)\alpha\sigma(y)$ eşitliğini sağlıyorsa σ ya M nin bir Γ-homomorfizmi denir. σ, birebir ve örten ise σ'ya M'nin bir Γ-otomorfizmi denir (Barnes, 1968).

Tanım 2.3.2: M bir Γ-halkası ve $\sigma,\ \tau : M \to M$ Γ-otomorfizmleri olsunlar. $d : M \to M$ toplamsal dönüşümü $\forall\, x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$$d(x\alpha y) = d(x)\alpha\sigma(y) + \tau(x)\alpha d(y)$$

eşitliğini sağlıyorsa d ye M nin bir (σ,τ)-türevi denir.

Uyarı 2.3.3: M bir Γ-halkası, $(0) \neq U$, M nin bir ideali ve σ, M nin Γ-otomorfizmi olsun. Bu durumda $\sigma(U)$, M nin sıfırdan farklı bir idealidir.

İspat: U, M nin bir ideali olduğundan $\forall x \in U$, $\forall m \in M$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$ için $x\alpha m,\ m\alpha x \in U$'dur. Burada σ'nın Γ-otomorfizm olduğu kullanılarak $\forall x \in U$, $\forall m' \in M$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$ için $\sigma(x)\alpha m' = \sigma(x)\alpha\sigma(m) = \sigma(x\alpha m) \in \sigma(U)$, $\forall m \in M$ için, yani $\sigma(U)\Gamma M \subset \sigma(U)$ elde edilir. Benzer şekilde $M\Gamma\sigma(U) \subset \sigma(U)$ olduğu gösterilerek $\sigma(U)$ nun M nin ideali olduğu bulunur. Öte yandan $U \neq (0)$ olduğundan ve σ nın birebirliğinden $\sigma(U) \neq (0)$ dır.

Bundan sonraki çalışmalarımızda $U \neq (0)$, M nin bir idealini d, $d\tau = \tau d$, $\sigma d = d\sigma$ olacak şekilde M nin bir (σ,τ)-türevini gösterecektir.

Lemma 2.3.4:

(i) M bir asal Γ-halkası ve $a \in M$ olsun. Bu durumda $a\Gamma d(U) = 0$ ($d(U)\Gamma a = 0$) ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

(ii) $d(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

(iii) M, char $M \neq 2$ olan asal Γ-halkası ve $d^2(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

(iv) M, char $M \neq 2$ olan asal Γ-halkası, d_1 ve d_2, M nin $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde (σ,τ)-türevleri olsunlar. Bu durumda $d_1d_2(U) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat:

(i) $a\Gamma d(U) = 0$ olsun. Bu durumda $\forall u \in U$, $\forall m \in M$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için $0 = a\alpha d(u\beta m) = a\alpha(d(u)\beta\sigma(m) + \tau(u)\beta d(m)) = a\alpha d(u)\beta\sigma(m) + a\alpha\tau(u)\beta d(m)$ ve buradan $0 = a\alpha\tau(u)\beta d(m)$, $\forall u \in U$, $\forall m \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için yani,

$$a\Gamma\tau(U)\Gamma d(M) = 0 \tag{2.25}$$

bulunur. (2.25) de sırasıyla Uyarı 2.3.3 ve Lemma 2.2.4 (iii) kullanılırsa $a = 0$ veya $d = 0$ sonucu bulunur. Benzer şekilde $d(U)\Gamma a = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ sonucu da elde edilir.

(ii) $d(U) = 0$ ise bu durumda hipotezden $\forall u \in U$, $\forall m \in M$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için $0 = d(u\alpha m) = d(u)\alpha\sigma(m) + \tau(u)\alpha d(m) = \tau(u)\alpha d(m)$, yani $\tau(U)\Gamma d(M) = 0$ bulunur. Burada Uyarı 2.3.3 ve (i) kullanılarak $d = 0$ elde edilir.

(iii) $d^2(U) = 0$ olsun. Hipotezden $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha \in \Gamma$ için $0 = d^2(u\alpha v) = d(d(u)\alpha\sigma(v) + \tau(u)\alpha d(v)) = d^2(u)\alpha\sigma^2(v) + \tau(d(u))\alpha d(v) + d(\tau(u))\alpha\sigma(d(v)) + \tau^2(u)\alpha d^2(v) = \tau(d(u))\alpha d(v) + d(\tau(u))\alpha\sigma(d(v))$ olur. Burada $\tau d = d\tau$, $\sigma d = d\sigma$ ve char $M \neq 2$ olduğu kullanılarak $d(\tau(u))\alpha d(\sigma(v)) = 0$, $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha \in \Gamma$ için yani,

$$d(\tau(U))\Gamma d(\sigma(U)) = 0 \tag{2.26}$$

bulunur. (2.26) da Uyarı 2.3.3 ve (i) kullanılırsa $d(\sigma(U)) = 0$ veya $d = 0$ yani, $d(U) = 0$ veya $d = 0$ elde edilir. Sonuç olarak (ii) den $d = 0$ bulunur.

(iv) $d_1d_2(U) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda hipotezden $\forall u, v \in U$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$ için $0 = d_1d_2(u\alpha v) = d_1(d_2(u)\alpha\sigma(v) + \tau(u)\alpha d_2(v)) = \tau(d_2(u))\alpha d_1(\sigma(v)) + d_1(\tau(u))\alpha(\sigma(d_2(v)))$ elde edilir. Burada $d_1\tau = \tau d_1$ olduğu kullanılırsa

$$\tau(d_2(u))\alpha d_1(\sigma(v)) + \tau(d_1(u))\alpha\sigma(d_2(v)) = 0,\ \forall u, v \in U \text{ ve } \forall\alpha \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.27)$$

elde edilir. (3) de u yerine $d_2(u)$ alınırsa $0 = \tau(d_2^2(u))\alpha d_1(\sigma(v)) + \tau(d_1d_2(u))\alpha\sigma(d_2(v))$ $= \tau(d_2^2(u))\alpha d_1(\sigma(v))$, $\forall u, v \in U$ ve $\forall\alpha \in \Gamma$ için, yani,

$$\tau(d_2^2(U))\Gamma d_1(\sigma(U)) = 0 \qquad (2.28)$$

bulunur. (2.28) de Uyarı 2.3.3 ve (i) kullanılırsa $d_2^2(U) = 0$ veya $d_1 = 0$ elde edilir. Eğer $d_2^2(U) = 0$ ise (iii) den $d_2 = 0$ olur ve sonuç olarak $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ bulunur.

Teorem 2.3.5: M bir asal Γ-halkası olsun. Bu durumda $d \neq 0$ ve $d(U) \subset Z$ ise M komütatiftir.

İspat: Hipotez sağlansın. Bu durumda $\forall a, b \in U$, $\forall m \in M$, $\forall\alpha, \beta \in \Gamma$ için $0 = [d(a\alpha b),m]_\beta = [d(a)\alpha\sigma(b)+\tau(a)\alpha d(b),m]_\beta = [d(a)\alpha\sigma(b),m]_\beta + [\tau(a)\alpha d(b),m]_\beta$ olur. Burada Lemma 2.2.3 (ii) kullanılarak $\forall a, b \in U$, $m \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$$d(a)\alpha[\sigma(b),m]_\beta + [\tau(a),m]_\beta\alpha d(b) = 0 \qquad (2.29)$$

bulunur. (2.29) da b yerine $b\gamma\sigma^{-1}(m)$, $\gamma \in \Gamma$ alınırsa,

$$0 = d(a)\alpha[\sigma(b)\gamma m,m]_\beta + [\tau(a),m]_\beta\alpha\{d(b)\gamma m + c(b)\gamma d(\sigma^{-1}(m))\}$$

olur. Burada Lemma 2.2.3 (i) ve (2.29) kullanılırsa $\forall a, b \in U$, $\forall m \in M$, $\forall\alpha, \beta \in \Gamma$ için $0 = [\tau(a),m]_\beta\alpha\tau(b)\gamma d(\sigma^{-1}(m))$, yani,

$$0 = [\tau(a),m]_\beta\Gamma\tau(U)\Gamma d(\sigma^{-1}(m)),\ \forall a \in U, \forall m \in M, \forall\beta \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.30)$$

elde edilir. (2.31) de Uyarı 2.3.3 ve Lemma 2.2.4 (iii) kullanılırsa $\forall m \in M$ için

$$[\tau(a),m]_\beta = 0,\ \forall a \in U, \forall\beta \in \Gamma \text{ için} \quad \text{veya} \quad d(\sigma^{-1}(m)) = 0$$

bulunur. $K = \{m \in M \mid [\tau(a),m]_\beta = 0, \forall a \in U, \beta \in \Gamma\}$ ve $L = \{m \in M \mid d(\sigma^{-1}(m)) = 0\}$ olsun. K ve L, M nin toplamsal alt grupları ve $M = K \cup L$ dir. Hipotezden $d \neq 0$ alındığından $M \neq L$ dir. O halde buradan Brauer Trick nedeniyle $M = K$ yani $\forall\beta \in \Gamma$ için $[\tau(U),m]_\beta = 0$ bulunur. Bu ise $\tau(U) \subset Z$, yani $U \subset Z$ olması demektir. Sonuç olarak Lemma 2.3.4 (i) den M komütatif bulunur.

Lemma 2.3.6: M, char $M \neq 2, 3$ olan bir asal Γ-halkası, d M nin $d(U) \subset U$, $d^2(U) \subset Z$ koşullarını sağlayan bir (σ,τ)-türevi olsun. Bu durumda $d^3(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

İspat: Hipotezden $\forall a, b \in U$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$0 = d^3(a\alpha b) = d^2(d(a)\alpha\sigma(b) + \tau(a)\alpha d(b))$

$= d(d^2(a)\alpha\sigma^2(b) + \tau(d(a))\alpha d(\sigma(b)) + d(\tau(a))\alpha\sigma(d(b)) + \tau^2(a)\alpha d^2(b))$

$= \tau(d^2(a))\alpha d(\sigma^2(b)) + d(\tau(d(a))\alpha\sigma(d(\sigma(b)) + \tau^2(d(a))\alpha d^2(\sigma(b)) + d^2(\tau(a))\alpha\sigma^2(d(b))$

$+ \tau(d(\tau(a)))\alpha d(\sigma(d(b))) + d(\tau^2(a))\alpha\sigma(d^2(b))$

elde edilir. Burada $d\sigma = \sigma d$, $d\tau = \tau d$ oldukları ve char $M \neq 3$ olduğu kullanılırsa

$= \tau(d^2(a))\alpha\sigma^2(d(b)) + \tau(d^2(a))\alpha\sigma^2(d(b)) + \tau^2(d(a))\alpha d^2(\sigma(b)) + \tau(d^2(a))\alpha\sigma^2(d(b))$

$+ \tau^2(d(a))\alpha d^2(\sigma(b)) + \tau^2(d(a))\alpha d^2(\sigma(b))$

$= 3\{\tau(d^2(a))\alpha\sigma^2(d(b)) + \tau^2(d(a))\alpha d^2(\sigma(b))\}$

yani,

$$\tau(d^2(a))\alpha\sigma^2(d(b)) + \tau^2(d(a))\alpha d^2(\sigma(b)) = 0, \ \forall a, b \in U, \ \forall\alpha \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.31)$$

elde edilir. (2.31) de a yerine d(a) alınırsa $\forall a, b \in U$, $\forall\alpha \in \Gamma$ için $\tau^2(d^2(a))\alpha d^2(\sigma(b)) = 0$ yani,

$$\tau^2(d^2(U))\Gamma d^2(\sigma(U)) = 0 \qquad (2.32)$$

olur. $d^2(U) \subset Z$ ve $\sigma d = d\sigma$ olduğu göz önüne alınarak (2.32) de Lemma 2.2.3 (iv) kullanılırsa $d^2(U) = 0$ ve buradan da Lemma 2.3.4 (iii) kullanılarak $d = 0$ elde edilir.

Teorem 2.3.7: M, char $M \neq 2, 3$ olan bir asal Γ-halkası, $0 \neq d$ M nin $d(U) \subset U$ ve $d^2(U) \subset Z$ koşullarını sağlayan bir (σ,τ)-türevi ise bu durumda M komütatiftir.

İspat: $d^2(U) \subset Z$ olduğundan $\forall a, b \in U$, $\forall m \in M$ ve $\forall\alpha, \gamma \in \Gamma$ için

$0 = [d^2(a\alpha b), m]_\gamma$

$= [d(d(a)\alpha\sigma(b) + \tau(a))\alpha d(b)), m]_\gamma$

$= [d^2((a)\alpha\sigma^2(b) + 2\tau(d(a))\alpha d(b)) + \tau^2((a)\alpha d^2(b), m]_\gamma$

$= d^2(a)\alpha[\sigma^2(b),m]_\gamma + [\tau^2(a),m]_\gamma\alpha d^2(b) + 2\tau(d(a)\alpha[d(\sigma(b)),m]_\gamma + 2[\tau(d(a)),m]_\gamma$

$+ \alpha d(\sigma(b)) + 2\{\tau(d(a))\alpha(m\gamma d(\sigma(b)) - \tau(d(a))\gamma(m\alpha d(\sigma(b))\}$

yani, $\forall a, b \in U$, $m \in M$ ve $\alpha, \gamma \in \Gamma$ için

$$0 = d^2(a)\alpha[\sigma^2(b),m]_\gamma + [\tau^2(a),m]_\gamma\alpha d^2(b) + 2\tau(d(a))\alpha[d(\sigma(b)),m]_\gamma$$
$$+ 2[\tau(d(a)),m]_\gamma\alpha d(\sigma(b)) + 2\{\tau(d(a))\alpha(m\gamma d(\sigma(b)) - \tau(d(a))\gamma(m\alpha d(\sigma(b))\} \qquad (2.33)$$

olur. (2.33) de a yerine $d^2(a)$, b yerine d(b) alınırsa,

$$0 = d^4(a)\alpha[\sigma^2(d(b)),m]_\gamma + [\tau^2(d^2(a),m]_\gamma\alpha d^3(b) + 2\tau(d^3(a))\alpha[d(\sigma(d(b))),m]_\gamma$$
$$+ 2[\tau(d^3(a)),m]_\gamma\alpha d(\sigma(d(b)) + 2\{\tau(d^3(a))\alpha(m\gamma d(\sigma(d(b))) - \tau(d^3(a))\gamma(m\alpha d(\sigma(d(b)))\}$$

olur. Burada $\tau d = d\tau$, $\sigma d = d\sigma$ ve $d^3(U), d^4(U) \subset Z$ olduğu ve Lemma 2.2.3 (ii) kullanılırsa $\forall a, b \in U$, $m \in M$ ve $\alpha, \gamma \in \Gamma$ için $d^4(a)\alpha[\sigma^2(d(b),m]_\gamma = 0$ yani,

$$d^4(U)\Gamma[\sigma^2(d(U)), M]_\gamma = 0, \ \forall\gamma \in \Gamma \text{ için} \tag{2.34}$$

elde edilir. (2.34) de $d^4(U) \subset Z$ olduğu göz önüne alınarak Lemma 2.2.3 (iv) kullanılırsa $d^4(U) = 0$ veya $[\sigma^2(d(U)), M]_\gamma = 0$, $\forall\gamma \in \Gamma$ için elde edilir. Eğer $d^4(U) = 0$ ise bu durumda $\forall u, v \in U$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} 0 = d^4(d(u)\alpha d(v)) &= d^3(d^2(u)\alpha\sigma(d(v)) + \tau(d(u))\alpha d^2(v)) \\ &= d^2(d^3(u)\alpha\sigma^2(d(v)) + 2\tau(d^2(u))\alpha\sigma(d^2(v))) + \tau^2(d(u))\alpha d^3(v)) \\ &= d(3\tau(d^3(u)\alpha\sigma^2(d^2(v)) + 3\tau^2(d^2(u))\alpha\sigma(d^3(v)) \\ &= 3\tau^2(d^3(u))\alpha\sigma^2(d^3(v)) + 3\tau^2(d^3(u))\alpha\sigma^2(d^3(v)) \\ &= 6\tau^2(d^3(u))\alpha\sigma^2(d^3(v)) \end{aligned}$$

yani, $\forall u, v \in U$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $0 = 6\tau^2(d^3(u))\alpha\sigma^2(d^3(v))$ bulunur. Burada char $M \neq 2, 3$ olduğu kullanılırsa

$$\tau^2(d^3(U)\Gamma\sigma^2(d^3(U)) = 0 \tag{2.35}$$

bulunur. (2.35) de $d^3(U) \subset Z$ olduğundan Lemma 2.2.3 (iv) kullanılırsa $d^3(U) = 0$ ve buradan Lemma 2.3.6 dan $d = 0$ bulunur. Bu durumda çelişki elde edilir. 0 halde $\forall\gamma \in \Gamma$ için $[\sigma^2(d(U)), M]_\gamma = 0$, yani $\sigma^2(d(U)) \subset Z \Rightarrow d(U) \subset Z$ ve buradan Teorem 2.3.5 den M komütatif bulunur.

2.4. Gamma Halkaları Üzerinde Simetrik Bi-Türevler

Tanım: M bir Γ-halkası ve $D(.,.) : M \times M \to M$ dönüşümü verilsin. Bu durumda $\forall x, y \in M$ için $D(x,y) = D(y,x)$ eşitliği sağlanıyorsa D ye bir simetrik dönüşüm denir.

Ayrıca $\forall x, y, z \in M$ için $D(x+y,z) = D(x,z) + D(y,z)$ ve $D(x,y+z) = D(x,y) + D(x,z)$ eşitlikleri sağlanıyorsa D ye bi-toplamsal dönüşüm denir.

Tanım: M bir Γ-halkası ve $D(.,.) : M \times M \to M$ simetrik bi-toplamsal dönüşümü $\forall x, y, z \in M, \alpha \in \Gamma$ için

$$D(x\alpha y,z) = D(x,z)\alpha y + x\alpha D(y,z)$$

eşitliğini sağlıyorsa D ye M Γ-halkası üzerinde simetrik bi-türev denir. Ayrıca $\forall x \in M$ için $f(x) = D(x,x)$ şeklinde tanımlanan $f : M \to M$ dönüşümüne D nin izi denir. Yine burada f nin bir çift fonksiyon ve $\forall x, y \in M$ için $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2D(x,y)$ olduğu açıktır.

Bu bölümdeki amacımız Vukman (1989) tarafından elde edilen ve tezimizin 1.2.4 kesiminde verilen 1.2.4.3, 1.2.4.5 ve 1.2.4.6 teoremlerinde R halkası yerine bir M Γ-halkası ve D simetrik bi-türevi yerine de M Γ-halkası üzerinde yukarıdaki gibi tamamlanan D simetrik bi-türevini alarak bu sonuçları genelleştirmektir.

Lemma 2.4.1: M, char $M \neq 2$ olan asal bir Γ-halkası olsun. Bu durumda $a, b \in M$ sabit elemanlar olmak üzere $\forall x \in M$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için $a\alpha x\beta b + b\alpha x\beta a = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat: $\forall x \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için $a\alpha x\beta b + b\alpha x\beta a = 0$ olsun. Bu durumda $\forall x, y \in M$, $\forall \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}(a\alpha x\beta b)\alpha' y\beta'(a\alpha x\beta b) &= -(b\alpha x\beta a)\alpha' y\beta'(a\alpha x\beta b) \\ &= -\{b\alpha(x\beta a\alpha' y)\beta' a\}\alpha x\beta b \\ &= a\alpha(x\beta a\alpha' y)\beta' b\alpha x\beta b\end{aligned}$$

$= a\alpha x\beta(a\alpha' y\beta' b)\alpha x\beta b$

$= -(a\alpha x\beta b)\alpha' y\beta'(a\alpha x\beta b)$

$\Rightarrow 2\{(a\alpha x\beta b)\alpha' y\beta'(a\alpha x\beta b)\} = 0$ ve burada char $M \neq 2$ olduğunu kullanarak $(a\alpha x\beta b)\alpha' y\beta'(a\alpha x\beta b) = 0$, $\forall x, y \in M$, $\forall \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \Gamma$ için yani,

$$(a\alpha x\beta b)\Gamma M\Gamma(a\alpha x\beta b) = 0, \forall x \in M, \forall \alpha, \beta \in \Gamma \text{ için} \quad (2.36)$$

bulunur. M asal olduğundan (2.36) dan $a\alpha x\beta b = 0$, $\forall x \in M$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için, yani $a\Gamma M\Gamma b = 0$, yine M nin asallığından $a = 0$ veya $b = 0$ bulunur.

Teorem 2.4.2: M, char $M \neq 2$ olan asal bir Γ-halkası, D_1, D_2 simetrik bi-türevler ve d_2, D_2 nin izi olsun. Bu durumda $\forall x \in M$ için $D_1(d_2(x),x) = 0$ ise $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

İspat: $\forall x \in M$ için $D_1(d_2(x),x) = 0$ olsun. Bu ifadeyi x e göre lineerlersek, $\forall x, y \in M$ için

$0 = D_1(d_2(x+y), x+y)$

$= D_1(d_2(x) + d_2(y) + 2D_2(x,y), x+y)$

$= D_1(d_2(x),x) + D_1(d_2(x),y) + D_1(d_2(y),x) + D_1(d_2(y),y) + 2D_1(D_2(x,y),x) + 2D_1(D_2(x,y), y)$

olur. Burada hipotezin kullanılmasıyla $\forall x, y \in M$ için

$$D_1(d_2(x),y) + D_1(d_2(y),x) + 2D_1(D_2(x,y),x) + 2D_1(D_2(x,y),y) = 0 \quad (2.37)$$

bulunur. (2.37) de x yerine -x alınır ve d_2 nin çiftliği ile simetrik bi-türevle ilgili özellikler kullanılırsa $\forall x, y \in M$ için

$$D_1(d_2(x),y) - D_1(d_2(y),x) + 2D_1(D_2(x,y),x) - 2D_1(D_2(x,y),y) = 0 \quad (2.38)$$

elde edilir. (2.37) ve (2.38) taraf tarafa toplanır ve char $M \neq 2$ olduğu kullanılırsa

$$D_1(d_2(x),y) + 2D_1(D_2(x,y),x) = 0, \forall x, y \in M \text{ için} \quad (2.39)$$

bulunur. (2.39) da y yerine $x\alpha y$, $\alpha \in \Gamma$ alınır, hipotez ve (2.39) kullanılırsa

$0 = D_1(d_2(x),x\alpha y) + 2D_1(D_2(x,x\alpha y),x)$

$= D_1(d_2(x),x)\alpha y + x\alpha D_1(d_2(x),y) + 2D_1(D_2(x,x)\alpha y + x\alpha D_2(x,y),x)$

$= x\alpha D_1(d_2(x),y) + 2x\alpha D_1(D_2(y,x),x) + 2D_1(d_2(x),x)\alpha y + 2d_2(x)\alpha D_1(y,x) + 2d_1(x)\alpha D_2(x,y)$

$= 2\{d_1(x)\alpha D_2(x,y) + d_2(x)\alpha D_1(x,y)\}$, $\forall x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$ için ve char $M \neq 2$ olmasından buradan,

$$0 = d_1(x)\alpha D_2(x,y) + d_2(x)\alpha D_1(x,y),\ \forall x, y \in M,\ \alpha \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.40)$$

elde edilir. (2.40) da y yerine $y\beta x$ alınır, hipotez ve (2.40) kullanılırsa $\forall x, y \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$0 = d_1(x)\alpha D_2(x,y\beta x) + d_2(x)\alpha D_1(x,y\beta x)$

$= d_1(x)\alpha(y\beta D_2(x) + D_2(x,y)\beta x) + d_2(x)\alpha y\beta d_1(x) + D_1(x,y)\beta x)$

$= d_1(x)\alpha y\beta d_2(x) + \{d_1(x)\alpha D_2(x,y) + d_2(x)\alpha D_1(x,y)\}\beta x + d_2(x)\alpha y\beta d_1(x)$

ve böylece

$$d_1(x)\alpha y\beta d_2(x) + d_2(x)\alpha y\beta d_1(x) = 0,\ \forall x, y \in M,\ \alpha, \beta \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.41)$$

bulunur. $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olduğunu yani $d_1(x_1) \neq 0$ ve $d_2(x_2) \neq 0$ olacak şekilde x_1, $x_2 \in M$ lerin bulunduğunu kabul edelim. Bu durumda (2.41) de x yerine x_1 alınırsa

$$d_1(x_1)\alpha y\beta d_2(x_1) + d_2(x_1)\alpha y\beta d_1(x_1) = 0,\ \forall y \in M,\ \alpha, \beta \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.42)$$

bulunur. (2.42)'ye Lemma 2.4.1 uygulandığında $d_1(x_1) = 0$ olduğundan $d_2(x_1) = 0$ olur. Benzer şekilde (2.41) de x yerine x_2 alınır ve Lemma 2.4.1 kullanılırsa $d_1(x_2) = 0$ elde edilir. Öte yandan $d_1(x_2) = 0$ olduğunu (2.40) da kullanarak

$$d_2(x_2)\alpha D_1(x_2,y) = 0,\ \forall y \in M,\ \alpha \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.43)$$

bulunur. Diğer yandan $x_2 \in M$ sabit olmak üzere $d : M \to M$; $y \to D_1(x_2,y)$ biçiminde tanımlanan d; D_1 in simetrik bi-türev olmasından dolayı M nin bir türevidir. Bu nedenle (2.43) ifadesi $d_2(x_2)\alpha d(y) = 0$, $\forall y \in M$, $\forall \alpha \in \Gamma$ için yani,

$$d_2(x_2)\Gamma d(M) = 0 \qquad (2.44)$$

biçimine dönüşür. (2.44) de Lemma 2.2.4 (ii) kullanılır ve $d_2(x_2) \neq 0$ olduğu dikkate alınırsa $d = 0$, yani $\forall y \in M$ için $0 = d(y) = D_1(x_2,y)$ bulunur. Özel olarak y yerine x_1 alınır ve D_1 in simetrik olduğu kullanılırsa $D_1(x_1,x_2) = 0$ elde edilir.

Benzer işlemlerle $D_2(x_1,x_2) = 0$ olduğu da görülür.

Eğer $x_1 + x_2 = z \in M$ denilirse, bu durumda $d_1(z) = d_1(x_1+x_2) = d_1(x_1) + d_1(x_2) + 2D_1(x_1,x_2) = d_1(x_1) \neq 0$ olduğu ve benzer şekilde $d_2(z) = d_2(x_2) \neq 0$ olduğu da görülür. Öte yandan (2.41) de x yerine z alınarak Lemma 2.4.1 kullanılırsa $d_1(z) = 0$ veya $d_2(z) = 0$ elde edilir. Bu ise üstteki sonuçla çelişir. O halde $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır. $d_1 = 0$ ise bu takdirde $\forall x, y \in M$ için $0 = d_1(x+y) = 2D_1(x,y)$ ve char $M \neq 2$ olmasından $D_1(x,y) = 0$, $\forall x, y \in M$, yani $D_1 = 0$ bulunur. Benzer şekilde $d_2 = 0$ ise $D_2 = 0$ olduğu da görülür.

Teorem 2.4.3: M, 2-torsion free yarı-asal Γ-halkası, $D : M\times M \rightarrow M$ simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun. $\forall x \in M$ için $D(d(x),x) = 0$ ise $D = 0$ dır.

İspat: $\forall x \in M$ için $D(d(x),x) = 0$ olsun. Bu ifadeyi x e göre lineerler ve Vukman (1989) nın Teorem 4'ündeki işlemleri tekrarlarsak,

$$D(d(x),y) + 2D(D(x,y),x) = 0,\ \forall x, y \in M \text{ için} \tag{2.45}$$

bulunur. (2.45) de y yerine $x\alpha y$, $\alpha \in \Gamma$ alınır ve hipotez ile (2.45) kullanılırsa $\forall x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}
0 &= x\alpha D(d(x),y) + 2x\alpha D(D(x,y),x) + 2D(x,x)\alpha D(x,y) + 2d(x)\alpha D(y,x) \\
&= x\alpha\{D(d(x),y) + 2D(D(x,y),x)\} + 4d(x)\alpha D(x,y) \\
&= 4d(x)\alpha D(x,y)
\end{aligned}$$

olur. Buradan char $M \neq 2$ olduğunu kullanarak,

$$d(x)\alpha D(x,y) = 0,\ \forall x, y \in M,\ \alpha \in \Gamma \text{ için} \tag{2.46}$$

bulunur. (2.46) da y yerine $y\beta x$, $\beta \in \Gamma$ alınır ve (2.46) kullanılırsa $\forall x, y \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}
0 &= d(x)\alpha D(x,y\beta x) \\
&= d(x)\alpha y\beta D(x,x) + d(x)\alpha D(x,y)\beta x \\
&= d(x)\alpha y\beta D(x,x)
\end{aligned}$$

yani,

$$0 = d(x)\Gamma M\Gamma d(x),\ \forall x \in M \text{ için} \tag{2.47}$$

olur. (2.47) de M nin yarı-asallığı kullanılırsa $\forall x \in M$ için $d(x) = 0$ ve buradan $D = 0$ sonucu bulunur.

Teorem 2.4.4: M, char $M \neq 2, 3$ olan bir asal Γ-halkası, D_1 ve D_2 simetrik bi-türevler, $B : M\times M \rightarrow M$ simetrik bi-toplamsal dönüşüm ve d_1, d_2 ve f sırasıyla D_1, D_2 ve B nin izleri olsun. Bu durumda $\forall x \in M$ için $d_1(d_2(x)) = f(x)$ ise $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

İspat: $\forall x \in M$ için $d_1(d_2(x)) = f(x)$ olsun. Bu ifadeyi x e göre lineerler ve Vukman (1989) nın Teorem 5 indeki işlemleri tekrarlarsak,

$$D_1(d_2(x),y) + 2d_1(D_2(x,y)) = 0, \ \forall x, y \in M \text{ için} \quad (2.48)$$

$$D_1(d_2(x),D_2(x,y)) = 0 \quad , \ \forall x, y \in M \text{ için} \quad (2.49)$$

$$d_1(d_2(x)) = 0 \quad , \ \forall x \in M \ \text{ için} \quad (2.50)$$

ifadeleri elde edilir. (2.49) da y yerine $y\alpha x$, $\alpha \in \Gamma$ alınırsa $\forall x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$ için

$0 = D_1(d_2(x), D_2(x,y\alpha x))$

$= y\alpha d_1d_2(x) + D_1(d_2(x),y)\alpha d_2(x) + D_2(x,y)\alpha D_1(d_2(x),x) + D_1(d_2(x),D_2(x,y))\alpha x$

olur. Burada (2.49) ve (2.50) kullanılarak,

$$0 = D_1(d_2(x),y)\alpha d_2(x) + D_2(x,y)\alpha D_1(d_2(x),x), \ \forall x, y \in M, \alpha \in \Gamma \text{ için} \quad (2.51)$$

bulunur. (2.51) de y yerine $x\beta y$, $\beta \in \Gamma$ alınır ve (2.51) kullanılırsa $\forall x, y \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için

$0 = D_1(d_2(x),x\beta y)\alpha d_2(x) + D_2(x,x\beta y)\alpha D_1(d_2(x),x)$

$= x\beta D_1(d_2(x),y)\alpha d_2(x) + x\beta D_2(x,y)\alpha D_1(d_2(x),x) + D_1(d_2(x),x)\beta y\alpha d_2(x) + d_2(x)\beta y\alpha D_1(d_2(x),x)$

$= x\beta\{D_1(d_2(x),y)\alpha d_2(x) + D_2(x,y)\alpha D_1(d_2(x),x)\} + D_1(d_2(x),x)\beta y\alpha d_2(x) + d_2(x)\beta y\alpha D_1(d_2(x),x)$

$= D_1(d_2(x),x)\beta y\alpha d_2(x) + d_2(x)\beta y\alpha D_1(d_2(x),x)$

yani, $\forall x, y \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$$0 = D_1(d_2(x),x)\beta y\alpha d_2(x) + d_2(x)\beta y\alpha D_1(d_2(x),x) \quad (2.52)$$

bulunur. Amacımız $\forall x \in M$ için $D_1(d_2(x),x) = 0$ olduğunu göstermektir. Bir $x_1 \in M$ için $D_1(d_2(x_1),x_1) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (2.52) de x yerine x_1 alınırsa $\forall y \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $D_1(d_2(x_1),x_1)\beta y\alpha d_2(x_1) + d_2(x_1)\beta y\alpha D_1(d_2(x_1),x_1) = 0$ bulunur. Bu ise Lemma 2.4.1 den $d_2(x_1) = 0$ olması demektir. Öte yandan $d_2(x_1) = 0$

iken $D_1(d_2(x_1),x_1) = D_1(0,x_1) = 0$ olması nedeniyle çelişki elde edilir. O halde $\forall y \in M$ için $D_1(d_2(x),x) = 0$ olur. Buradan da Teorem 2.4.2 nin kullanılmasıyla $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ sonucunu elde edilir.

Teorem 2.4.5: M, char M $\neq 2, 3$ olan bir yarı-asal Γ-halkası ve D simetrik bi-türev, $B : M\times M \to M$ simetrik bi-toplamsal dönüşüm ve d, f sırasıyla D, B nin izleri olsun. Bu durumda $\forall x \in M$ için $d(d(x)) = f(x)$ ise $D = 0$ dır.

İspat: Teorem 2.4.4 ün ispatındaki işlemler tekrarlanılırsa,

$D_1(d_2(x), D_2(x,y)) = 0$, $\forall x, y \in M$ için ifadesi,

$$D(d(x), D(x,y)) = 0, \forall x, y \in M \text{ için} \tag{2.53}$$

ve $d_1(d_2(x)) = 0$, $\forall x \in M$ için ifadesi de

$$d(d(x)) = 0, \forall x \in M \text{ için} \tag{2.54}$$

şekline gelir. (2.53) de y yerine $y\alpha z$, $z \in M$, $\alpha \in \Gamma$ alınır ve (2.53) kullanılırsa $\forall x, y, z \in M, \alpha \in \Gamma$ için

$0 = D(d(x),D(x,y\alpha z))$

$= y\alpha D(d(x),D(x,z)) + D(d(x),y)\alpha D(x,z) + D(x,y)\alpha D(d(x),z) + D(d(x),D(x,y))\alpha z$

$= D(d(x),y)\alpha D(x,z) + D(x,y)\alpha D(d(x),z)$

olur. Yani,

$$0 = D(d(x),y)\alpha D(x,z) + D(x,y)\alpha D(d(x),z), \forall x, y, z \in M, \alpha \in \Gamma \text{ için} \tag{2.55}$$

bulunur. (2.55) de z yerine $d(x)$ alınır ve (2.54) kullanılırsa $\forall x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$0 = D(d(x),y)\alpha D(x,d(x)) + D(x,y)\alpha D(d(x),d(x))$

$= D(d(x),y)\alpha D(x,d(x)) + D(x,y)\alpha d(d(x))$

$= D(d(x),y)\alpha D(x,d(x))$

yani,

$$0 = D(d(x),y)\alpha D(x,d(x)), \forall x, y \in M, \alpha \in \Gamma \text{ için} \tag{2.56}$$

bulunur. (2.56) da y yerine $x\beta y$, $\beta \in \Gamma$ alınır ve (2.56) kullanılırsa,

$0 = D(d(x),x\beta y)\alpha D(x,d(x))$

$= x\beta D(d(x),y)\alpha D(x,d(x)) + D(d(x),x)\beta y\alpha D(x,d(x))$

$= D(d(x),x)\beta y\alpha D(x,d(x))$

$\Rightarrow\ D(d(x),x)\beta y\alpha D(d(x),x) = 0,\ \forall x,\ y \in M,\ \alpha,\ \beta \in \Gamma$ için

bulunur ve buradan,

$$D(d(x),x)\Gamma M\Gamma D(d(x),x) = 0,\ \forall x \in M \text{ için} \qquad (2.57)$$

olur. (2.57) de M nin yarı-asallığı kullanılırsa $\forall x \in M$ için $D(d(x),x) = 0$ bulunur. Bu ise Teorem 2.4.3 den $D = 0$ olması demektir.

2.5. Gamma Halkaları Üzerinde Ortogonal Türevler

Tanım: M bir yarı-asal Γ-halkası ve d, g M nin herhangi iki türevi olsun. Eğer

$$d(x)\Gamma M\Gamma g(y) = 0 = g(y)\Gamma M\Gamma d(x), \ \forall x, y \in M \text{ için} \tag{2.58}$$

oluyorsa d ve g ye M Γ-halkasında ortogonal türevler denir.

Not I: Bir yarı-asal Γ-halkasında sıfırdan farklı bir türev kendisiyle ortogonal olamaz.

Bu kesimde, Bresar ve Vukman (1989) tarafından elde edilen ve tezimin 1.2.5 nolu kesiminde verilen Teorem 1.2.5.1, Sonuç 1.2.5.2, Sonuç 1.2.5.4, Sonuç 1.2.5.5, Teorem 1.2.5.6 ve Sonuç 1.2.5.7 de R halkası yerine bir M Γ-halkası alınıp (2.58) tanımı kullanılarak daha önce elde edilen sonuçlar genelleştirilmiştir.

Lemma 2.5.1: M, 2-torsion free yarı-asal bir Γ-halkası ve a, b $\in$ M olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) $a\Gamma x\Gamma b = 0$, $\forall x \in M$ için

(ii) $b\Gamma x\Gamma a = 0$, $\forall x \in M$ için

(iii) $a\alpha x\beta b + b\alpha x\beta a = 0$, $\forall x \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için

Ayrıca bu koşullardan herhangi biri sağlanıyorsa $a\Gamma b = 0 = b\Gamma a$ dır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): $a\Gamma M\Gamma b = 0$ olsun. Bu durumda $(b\Gamma M\Gamma a)\Gamma M\Gamma(b\Gamma M\Gamma a) = 0$ olur ve M nin yarı-asallığı kullanılarak buradan $b\Gamma M\Gamma a = 0$ yani, $\forall x \in M$ için $b\Gamma x\Gamma a = 0$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $b\Gamma M\Gamma a = 0$ olsun. Bu durumda $(a\Gamma M\Gamma b)\Gamma M\Gamma(a\Gamma M\Gamma b) = 0$ olup M nin yarı-asallığından $a\Gamma M\Gamma b = 0$ elde edilir.

Ayrıca (i) ve (ii) varken $\forall x \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için $a\alpha x\beta b + b\alpha x\beta a = 0$ sağlandığı açıktır. O halde (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sağlanmış olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $a\alpha x\beta b + b\alpha x\beta a = 0$, $\forall x \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için sağlansın. Bu durumda Lemma 2.4.1'in ispatındaki işlemler tekrarlanılırsa $\forall x \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için

$(a\alpha x\beta b)\Gamma M\Gamma(a\alpha x\beta b) = 0$ ve M nin yarı-asallığından $\forall x \in M$, $\forall\alpha, \beta \in \Gamma$ için $a\alpha x\beta b = 0$, yani

$$a\Gamma x\Gamma b = 0\,,\ \forall x \in M \text{ için} \tag{2.59}$$

bulunur.

Ayrıca $a\Gamma M\Gamma b = 0$ ise bu durumda $(b\Gamma a)\Gamma M\Gamma(b\Gamma a) = 0$ olur ve buradan M nin yarı-asallığı kullanılarak $b\Gamma a = 0$ bulunur. Benzer şekilde $a\Gamma b = 0$ olduğu da görülür.

Lemma 2.5.2: M bir yarı-asal Γ-halkası olsun. $f, h : M \rightarrow M$ toplamsal dönüşümleri $\forall x \in M$ için $f(x)\Gamma M\Gamma h(x) = 0$ eşitliğini sağlasın. Bu durumda $\forall x, y \in M$ için $f(x)\Gamma M\Gamma h(y) = 0$ dır.

İspat: Hipotez sağlansın. Bu durumda

$$0 = f(x)\alpha m\beta h(x),\ \forall x, m \in M,\ \forall\alpha, \beta \in \Gamma \text{ için} \tag{2.60}$$

elde edilir. (2.60) da x yerine $x+y$, $y \in M$ alınır ve (2.60) kullanılırsa

$0 = f(x+y)\alpha m\beta h(x+y)$

$= f(x)\alpha m\beta h(x) + f(x)\alpha m\beta h(y) + f(y)\alpha m\beta h(x) + f(y)\alpha m\beta h(y)$

$= f(x)\alpha m\beta h(y) + f(y)\alpha m\beta h(x)$

yani,

$$0 = f(x)\alpha m\beta h(y) + f(y)\alpha m\beta h(x),\ \forall x, y \in M,\ \forall\alpha, \beta \in \Gamma \text{ için} \tag{2.61}$$

bulunur. Buradan $\forall\alpha', \beta' \in \Gamma$ ve $m' \in M$ için

$(f(x)\alpha m\beta h(y))\alpha' m'\beta'(f(x)\alpha m\beta h(y)) = -\,(f(x)\alpha m\beta h(y))\alpha' m'\beta'(f(y)\alpha m\beta h(x)$

$= -\,f(x)\alpha(m\beta h(y)\alpha' m'\beta' f(y)\alpha m)\beta h(x)$

ve buradan $m\beta h(y)\alpha' m'\beta' f(y)\alpha m \in M$ olduğu ve hipotez kullanılarak,

$0 = (f(x)\alpha m\beta h(y))\alpha' m'\beta'(f(x)\alpha m\beta h(y))$, $\forall\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \Gamma$, $x, y, m, m' \in M$ için yani,

$0 = (f(x)\alpha m\beta h(y))\Gamma M\Gamma(f(x)\alpha m\beta h(y))$, $\forall\alpha, \beta \in \Gamma$, $\forall x, y, m \in M$ için olur. Burada M nin yarı-asallığı kullanılarak,

$$0 = f(x)\Gamma M\Gamma h(y),\ \forall x, y \in M \text{ için}$$

elde edilir.

Lemma 2.5.3: M, 2-torsion free yarı-asal Γ halkası olsun. M nin d ve g türevlerinin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma g(y) + g(x)\Gamma d(y) = 0$ olmasıdır.

İspat: $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma g(y) + g(x)\Gamma d(y) = 0$ olsun. Bu durumda,

$$d(x)\beta g(y) + g(x)\gamma d(y) = 0, \ \forall x, y \in M, \ \forall \beta, \gamma \in \Gamma \text{ için} \tag{2.62}$$

dir. (2.62) de y yerine $y\alpha x$, $\alpha \in \Gamma$ alınır ve (2.62) kullanılırsa $\forall x, y \in M$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ için

$0 = d(x)\beta g(y\alpha x) + g(x)\gamma d(y\alpha x)$

$= (d(x)\beta g(y) + g(x)\gamma d(y))\alpha x + d(x)\beta y\alpha g(x) + g(x)\gamma y\alpha d(x)$

$= d(x)\beta y\alpha g(x) + g(x)\gamma y\alpha d(x)$

yani,

$$d(x)\beta y\alpha g(x) + g(x)\gamma y\alpha d(x) = 0, \ \forall x, y \in M, \ \forall \beta, \gamma \in \Gamma \text{ için} \tag{2.63}$$

olur. (2.63) de γ yerine $\gamma + \gamma'$, $\gamma' \in \Gamma$ alınır ve (2.63) kullanılırsa $\forall x, y \in M$ ve $\forall \alpha, \beta, \gamma, \gamma' \in \Gamma$ için

$0 = d(x)\beta y\alpha g(x) + g(x)\gamma y\alpha d(x) + g(x)\gamma' y\alpha d(x)$

$= g(x)\gamma' y\alpha d(x)$

yani, $g(x)\gamma' y\alpha d(x) = 0$, $\forall x, y \in M$, $\forall \alpha, \gamma' \in \Gamma$ için ve buradan

$$0 = g(x)\Gamma M\Gamma d(x), \ \forall x \in M \text{ için} \tag{2.64}$$

elde edilir. (2.64) ye Lemma 2.5.2 uygulanılırsa $\forall x, y \in M$ için $g(x)\Gamma M\Gamma d(y) = 0$ bulunur. Öte yandan (2.63) da β yerine $\beta + \beta'$, $\beta' \in M$ alınıp benzer işlemler yapılırsa $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma M\Gamma g(y) = 0$ bulunur. Sonuç olarak $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma M\Gamma g(y) = 0 = g(y)\Gamma M\Gamma d(x)$ yani, d ile g ortogonal bulunur.

Tersine d ile g ortogonal yani, $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma M\Gamma g(y) = 0 = g(y)\Gamma M\Gamma d(x)$ olsun. Bu durumda Lemma 2.5.1 den $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma g(y) = 0 = g(y)\Gamma d(x)$ ve buradan $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma g(y) + g(x)\Gamma d(y) = 0$ bulunur.

Uyarı 2.5.4: M, 2-torsion free yarı-asal bir Γ-halkası olsun. Bu durumda d ve g ortogonal ise $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma g(y) = 0 = g(y)\Gamma d(x)$ dir.

İspat: d ve g ortogonal olduğundan $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma M\Gamma g(y) = 0 = g(y)\Gamma M\Gamma d(x)$ dir. Buraya Lemma 2.5.1 in uygulanmasıyla $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma g(y) = 0 = g(y)\Gamma d(x)$ elde edilir.

Lemma 2.5.5: M bir yarı-asal Γ-halkası ve $(0) \neq U$, M nin bir ideali olsun. Bu durumda $Ann_r U = Ann_l U$ dur.

İspat: $Ann_r U = \{a \in M \mid U\Gamma a = 0\}$ M nin bir sağ idealidir. Gerçekten; $a, b \in Ann_r U$ ise bu taktirde $\forall u \in U$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$ için $u\alpha(a - b) = u\alpha a - u\alpha b = 0$ olduğundan $a - b \in Ann_r U$ olur. Ayrıca $\forall a \in Ann_r U$, $u \in U$, $m \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $u\beta(a\alpha m) = (u\beta a)\alpha m = 0\alpha m = 0$ olduğundan $a\alpha m \in Ann_r U$ ve sonuç olarak $Ann_r U$, M nin bir sağ ideali olur. Yani $(Ann_r U)\Gamma M \subset Ann_r U$ dur. Benzer şekilde $M\Gamma(Ann_l U) \subset Ann_l U$, yani $Ann_l U$ nun, M nin bir sol ideali olduğu gösterilir.

Öte yandan $(Ann_r U)\Gamma U\Gamma(Ann_r U)\Gamma U = 0$ dır. $\Rightarrow$ M nin yarı-asallığından $(Ann_r U)\Gamma U = (0)$ ve dolayısıyla $(Ann_r U) \subset Ann_l U$ bulunur. Aynı şekilde $U\Gamma(Ann_l U)\Gamma U\Gamma(Ann_l U) = (0)$ ve M nin yarı-asallığından $U\Gamma(Ann_l U) = (0)$, yani $(Ann_l U) \subset Ann_r U$ ve sonuç olarak $Ann_l U = Ann_r U$ bulunur.

Lemma 2.5.6: M, yarı-asal bir Γ-halkası ve $(0) \neq U$, M nin bir ideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) $Ann\, U$, M nin bir idealidir.

(ii) $(Ann\, U) \cap U = (0)$ dır.

İspat: (i) $a \in Ann\, U$ alalım. Bu durumda Lemma 2.5.5 den $a\Gamma U = 0 = U\Gamma a$ dır. O halde $a, b \in Ann\, U$ olmak üzere $\forall u \in U$, $\alpha \in \Gamma$ için $u\alpha(a - b) = u\alpha a - u\alpha b = 0$ ve $(a - b)\alpha u = a\alpha u - b\alpha u = 0$ olduğundan $a - b \in Ann\, U$ yani, $Ann\, U$, M nin toplamsal bir alt grubudur. Diğer yandan $\forall a \in Ann\, U$, $m \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$(a\alpha m)\beta u = a\alpha(m\beta u) = 0$ ve $u\beta(a\alpha m) = (u\beta a)\alpha m = 0$ olduğundan $(\text{Ann } U)\Gamma M \subset \text{Ann } U$ olur. Benzer şekilde $M\Gamma(\text{Ann } U) \subset \text{Ann } U$ olduğu gösterilerek sonuç olarak Ann U, M nin bir ideali bulunur.

(ii) $(\text{Ann } U) \cap U$, M nin bir ideali ve $[(\text{Ann } U) \cap U]\Gamma[(\text{Ann } U) \cap U] \subset U\Gamma\text{Ann } U = (0)$ olduğundan $[(\text{Ann } U) \cap U]\Gamma[(\text{Ann } U) \cap U] = (0)$ ve burada M nin yarı-asallığı kullanılarak $(\text{Ann } U) \cap U = (0)$ elde edilir.

Lemma 2.5.7: M bir yarı-asal Γ-halkası olsun. Bu durumda,

(i) U_1 ve U_2, M nin $U_1 \cap U_2 = (0)$ olacak şekilde idealleri ise bu durumda $U_1\Gamma U_2 = (0)$ $(U_2\Gamma U_1 = (0))$ dır.

(ii) U_1, M nin bir ideali ve $U_2 = \text{Ann } U_1$ ise $U = U_1 \oplus U_2$ M nin bir essential idealidir.

İspat: (i) U_1 ve U_2, M nin $U_1 \cap U_2 = (0)$ olacak şekilde idealleri olsun. Bu durumda $U_1\Gamma U_2 \subset U_1$ ve $U_1\Gamma U_2 \subset U_2$ olduğundan $U_1\Gamma U_2 \subset U_1 \cap U_2 = (0)$ yani, $U_1\Gamma U_2 = (0)$ bulunur. Aynı şekilde $U_2\Gamma U_1 = (0)$ olduğu gösterilir.

(ii) U_1, M nin bir ideali, $U_2 = \text{Ann } U_1$ ve $U = U_1 \oplus U_2$ olsun. Bu durumda U_1, U_2 ideal olduklarından U nun da M nin bir ideali olduğu açıktır. Diğer yandan Lemma 2.5.6 dan $U_1 \cap U_2 = (0)$ olur ve bu durumda (i) den $U_1\Gamma U_2 = (0)$ bulunur. Böylece $(0) \neq I$, M nin bir ideali olmak üzere $I \cap U = (0)$ ise (i) den $I\Gamma U = (0)$ olur.

Öte yandan $U = U_1 \oplus U_2$ olduğundan $I\Gamma U_1 \subset I\Gamma U = (0)$ ve $I\Gamma U_2 \subset I\Gamma U = (0)$ ve buradan $I\Gamma U_1 = (0)$ ve $I\Gamma U_2 = (0)$ bulunur. Benzer şekilde $U_1\Gamma I = (0)$ ve $U_2\Gamma I = (0)$ olacağından $I \subset \text{Ann } U_1 = U_2$ ve $I \subset \text{Ann } U_2 \Rightarrow I \subset U_2 \cap \text{Ann } U_2 = (0)$ yani, $I = (0)$ olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde M nin sıfırdan farklı her I ideali için $I \cap U \neq (0)$, yani $U = U_1 \oplus U_2$, M nin bir essential idealidir.

Teorem 2.5.8: M, 2-torsion free yarı-asal Γ-halkası ve $d, g : M \to M$ iki türev olsun. d ile g nin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır.

(i) $dg = 0$

(ii) $dg + gd = 0$

(iii) dg türev

(iv) $\forall x \in M$ için $(dg)(x) = a\alpha x + x\beta b$ olacak şekilde $a, b \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ vardır.

(v) M nin aşağıdaki koşulları sağlayan U_1, U_2 idealleri vardır.

a) $U_1 \cap U_2 = (0)$ dır ve $U_1 \oplus U_2$, M nin essential idealidir.

b) $d : M \to U_1$ ve $g : M \to U_2$ dır.

c) d nin $U_1 \oplus U_2$ ye kısıtlanması $d_1 : U_1 \to U_1$ bir türev ve $0_2 : U_2 \to U_2$ bir sıfır dönüşümü olmak üzere $d_1 \oplus 0_2$ dir. Ayrıca $d_1 = 0$ ise $d = 0$ dır.

d) g nin $U_1 \oplus U_2$ ye kısıtlanması $0_1 : U_1 \to U_1$ sıfır dönüşüm, $g_2 : U_2 \to U_2$ bir türev olmak üzere $0_1 \oplus g_2$ dir. Ayrıca $g_2 = 0$ ise $g = 0$ dır.

İspat: d ve g, M nin iki türevi ise bu durumda $\forall x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} dg(x\alpha y) &= d(g(x\alpha y)) \\ &= d(g(x)\alpha y + x\alpha g(y)) \\ &= dg(x)\alpha y + g(x)\alpha d(y) + d(x)\alpha g(y) + x\alpha dg(y) \end{aligned}$$

yani, $\forall x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$ için

$$dg(x\alpha y) = dg(x)\alpha y + g(x)\alpha d(y) + d(x)\alpha g(y) + x\alpha dg(y) \tag{2.65}$$

olur.

(i) $\Rightarrow$ d ile g ortogonaldir: $dg = 0$ olsun. Bu durumda (2.65) den

$$0 = g(x)\alpha d(y) + d(x)\alpha g(y),\ \forall x, y \in M \text{ ve } \alpha \in \Gamma \text{ için} \tag{2.66}$$

elde edilir. (2.66) da y yerine $y\beta z$, $z \in M$, $\beta \in \Gamma$ alınır ve (2.66) kullanılırsa $\forall x, y, z \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $g(x)\alpha y\beta d(z) + d(x)\alpha y\beta g(z) = 0$ bulunur. Bu ifadede z yerine x alındığında,

$$0 = g(x)\alpha y\beta d(x) + d(x)\alpha y\beta g(x),\ \forall x, y \in M \text{ ve } \alpha, \beta \in \Gamma \text{ için} \tag{2.67}$$

bulunur. (2.67) de Lemma 2.5.1 kullanıldığında $\forall x \in M$ için $d(x)\Gamma M\Gamma g(x) = 0 = g(x)\Gamma M\Gamma d(x)$ olur. Burada Lemma 2.5.2 kullanılarak $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma M\Gamma g(y) = 0 = g(y)\Gamma M\Gamma d(x)$ yani, d ile g ortogonal olur.

d ile g ortogonaldir $\Rightarrow$ (i): Bu durumda d ile g nin ortogonalliğinden $\forall x, y, z \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $0 = d(x)\alpha y\beta g(z)$ ve buradan

$0 = d(d(x)\alpha y\beta g(z)) = d(d(x)\alpha y)\beta g(z) + (d(x)\alpha y)\beta d(g(z))$

$= d^2(x)\alpha y\beta g(z) + d(x)\alpha d(y)\beta g(z) + d(x)\alpha y\beta dg(z) = d(x)\alpha y\beta dg(z)$

yani,

$$0 = d(x)\alpha y\beta dg(z), \forall x, y, z \in M, \alpha, \beta \in \Gamma \text{ için} \tag{2.68}$$

olur. (2.68) de x yerine g(z) alınırsa $\forall y, z \in M, \alpha, \beta \in \Gamma$ için $0 = (dg)(z)\alpha y\beta(dg)(z)$ yani,

$$0 = (dg)(z)\Gamma M\Gamma(dg)(z), \forall z \in M \text{ için} \tag{2.69}$$

olur. (2.69) da M nin yarı-asallığı kullanılırsa $dg = 0$ bulunur. Benzer işlemlerle $gd = 0$ olduğu da gösterilir.

(ii) $\Rightarrow$ d ile g ortogonaldir: $dg + gd = 0$ olsun. Bu durumda $\forall x, y \in M, \alpha \in \Gamma$ için

$0 = (dg + gd)(x\alpha y)$

$= (dg)(x\alpha y) + (gd)(x\alpha y)$

$= (dg + gd)(x)\alpha y + 2g(x)\alpha d(y) + 2d(x)\alpha g(y) + x\alpha(dg + gd)(y)$

bulunur. Burada (ii) ve M nin 2-torsion free olduğu kullanılırsa

$$0 = g(x)\alpha d(y) + d(x)\alpha g(y), \forall x, y \in M, \alpha \in \Gamma \text{ için} \tag{2.70}$$

elde edilir. "(i) $\Rightarrow$ d ile g ortogonaldir" gerektirmesi ispatlanırken yapılan işlemler (2.70) için de yapılırsa d ve g ortogonal bulunur.

d ile g ortogonal $\Rightarrow$ (ii): d ve g ortogonal olsun. Bu durumda (i) sağlandığından $dg = 0 = gd$ dir. Yani $dg + gd = 0$ dır.

(iii) $\Rightarrow$ d ile g ortogonaldir: dg bir türev olsun. Bu durumda

$$(dg)(x\alpha y) = (dg)(x)\alpha y + x\alpha(dg)(y), \forall x, y \in M, \alpha \in \Gamma \text{ için} \tag{2.71}$$

ve (2.71) ile (2.65) in eşitliğinden

$$0 = g(x)\alpha d(y) + d(x)\alpha g(y), \forall x, y \in M, \alpha \in \Gamma \text{ için} \tag{2.72}$$

elde edilir. (2.72) de yine "(i) $\Rightarrow$ d ile g ortogonaldir" gerektirmesi gösterilirken yapılan işlemler tekrarlanılırsa d ve g ortogonal bulunur.

d ile g ortogonaldir $\Rightarrow$ (iii): Bu durumda d ve g nin ortogonalliğinden (i) gerçeklenir, yani $dg = 0$ dır. Ve sonuç olarak $0 : M \to M$ dönüşümü bir türev olduğundan dg bir türevdir.

(iv) $\Rightarrow$ d ile g ortogonaldir: $\forall x \in M$ için $(dg)(x) = a\alpha x + x\beta b$ olacak şekilde $a, b \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ elemanları bulunsun. Burada x yerine $x\gamma y$, $\gamma \in \Gamma$, $y \in M$ alınırsa,

$$(dg)(x\gamma y) = a\alpha(x\gamma y) + (x\gamma y)\beta b,\ \forall x, y \in M, \gamma \in \Gamma \text{ için} \tag{2.73}$$

olur. Ayrıca (2.65) den $\forall x, y \in M, \gamma \in \Gamma$ için

$$(dg)(x\gamma y) = dg(x)\gamma y + g(x)\gamma d(y) + d(x)\gamma g(y) + x\gamma dg(y \tag{2.74}$$

bulunur. (2.74) de $(dg)(x) = a\alpha x + x\beta b$ ve $(dg)(y) = a\alpha y + y\beta b$ olduğu kullanılırsa

$dg(x\gamma y) = (a\alpha x + x\beta b)\gamma y + g(x)\gamma d(y) + d(x)\gamma g(y) + x\gamma(a\alpha y + y\beta b)$

yani, $\forall x, y \in M, \gamma \in \Gamma$ için

$$(dg)(x\gamma y) = (a\alpha x)\gamma y + (x\beta b)\gamma y + g(x)\gamma d(y) + d(x)\gamma g(y) + x\gamma(a\alpha y) + x\gamma(y\beta b) \tag{2.75}$$

bulunur. (2.73) ve (2.75) in eşitliğinden

$$(x\beta b)\gamma y + x\gamma(a\alpha y) + g(x)\gamma d(y) + d(x)\gamma g(y) = 0,\ \forall x, y \in M, \gamma \in \Gamma \text{ için} \tag{2.76}$$

elde edilir. (2.76) da y yerine $y\delta x$, $\delta \in \Gamma$ alınır ve (2.76) kullanılırsa $\forall x, y \in M$, $\gamma, \delta \in \Gamma$ için $(x\beta b)\gamma(y\delta x) + x\gamma[a\alpha(y\delta x)] + g(x)\gamma(d(y)\delta x + y\delta d(x)) + d(x)\gamma(g(y)\delta x + y\delta g(x)) = 0$ olur. Bu ifade yeniden düzenlenerek (2.76) kullanılırsa

$$0 = g(x)\gamma y\delta d(x) + d(x)\gamma y\delta g(x),\ \forall x, y \in M, \delta, \gamma \in \Gamma \text{ için} \tag{2.77}$$

bulunur. (2.77) de Lemma 2.5.1 (iii) kullanıldığında $\forall x \in M$ için $g(x)\Gamma M\Gamma d(x) = 0 = d(x)\Gamma M\Gamma g(x)$ bulunur. Bu ifadeye Lemma 2.5.2 nin uygulanılırsa $\forall x, y \in M$ için $g(x)\Gamma M\Gamma d(y) = 0 = d(y)\Gamma M\Gamma g(x)$, yani d ile g ortogonal bulunur.

d ile g ortogonaldir $\Rightarrow$ (iv): Bu durumda (i) sağlandığından $dg = 0$ olur. Buradan $\forall x \in M$ için $0 = dg(x) = 0\alpha x + x\beta 0$ olacak şekilde $0 \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ elemanları varolduğundan (iv) sağlanır.

(v) $\Rightarrow$ d ile g ortogonaldir: M nin aşağıdaki özellikleri sağlayan U_1, U_2 idealleri bulunsun.

Bu durumda $U_1 \cap U_2 = (0)$ ve $U_1 \oplus U_2$ M nin essential ideali, $d : M \to U_1$ ve $g : M \to U_2$, d nin $U_1 \oplus U_2$ ye kısıtlanması; $d_1 : U_1 \to U_1$ türev ve $0_2 : U_2 \to U_2$ sıfır dönüşüm olmak üzere $d_1 \oplus 0_2$ şeklinde ve $d_1 = 0$ ise $d = 0$, g nin $U_1 \oplus U_2$ ye kısıtlanması; $0_1 : U_1 \to U_1$ sıfır dönüşüm, $g_2 : U_2 \to U_2$ türev olmak üzere $0_1 \oplus g_2$ şeklinde ve $g_2 = 0$ ise $g = 0$ dır. Tezimin 1.2.5. kesimindeki Not'da belirtilen dönüşümlerin direkt toplamı tanımından $(u_1,u_2) \in U = U_1 \oplus U_2$ için $d(u_1,u_2) = (d_1(u_1),0_2(u_2)) = (d_1(u_1),0)$ ve $g(u_1,u_2) = (0_1(u_1),g_2(u_2)) = (0,g_2(u_2))$ ve $g_2(u_2) \in U_2$ olduğundan $dg(u_1,u_2) = d(g(u_1,u_2)) = d(0,g_2(u_2)) = (d_1(0),0_2(g_2(u_2)))$ $= (0,0) \Rightarrow dg(u_1,u_2) = (0,0)$, $\forall u_1, u_2 \in U$ için $\Rightarrow dg(U) = 0$ olur. Buradan $\forall u \in U, \forall r \in M, \forall \alpha \in \Gamma$ için

$0 = dg(u\alpha r)$

$= dg(u)\alpha r + d(u)\alpha g(r) + g(u)\alpha d(r) + u\alpha dg(r)$

$= d(u)\alpha g(r) + g(u)\alpha d(r) + u\alpha dg(r)$

yani,

$$0 = d(u)\alpha g(r) + g(u)\alpha d(r) + u\alpha dg(r),\ \forall u \in U, \forall r \in M, \forall \alpha \in \Gamma \text{ için} \qquad (2.78)$$

bulunur. (2.78) de $d(u) \in U_1$, $g(u) \in U_2$, $g(r) \in U_2$, $d(r) \in U_1$ oldukları kullanılırsa $d(u)\alpha g(r) + g(u)\alpha d(r) \in U_1 \cap U_2 = (0)$ yani,

$$0 = d(u)\alpha g(r) + g(u)\alpha d(r),\ \forall u \in U,\ \forall r \in M,\ \forall \alpha \in \Gamma \text{ için}$$

elde edilir. Bu eşitlik (2.78) de kullanıldığında $\forall u \in U, \forall r \in M, \forall \alpha \in \Gamma$ için $u\alpha dg(r) = 0$ yani,

$$U\Gamma dg(M) = 0 \qquad (2.79)$$

olur. Benzer şekilde,

$$dg(M)\Gamma U = 0 \qquad (2.80)$$

olduğu da görülür. Böylece (2.79) ve (2.80) den $dg(M) \subset \mathrm{Ann}\ U$ bulunur. Öte yandan $dg(M) \subset U_1 \subset U$ olduğundan $dg(M) \subset U \cap \mathrm{Ann}\ U$ ve Lemma 2.5.6 (ii) den $dg(M) = (0) \Rightarrow dg = 0$ bulunur. Yani (i) elde edilir. O halde buradan d ile g ortogonaldir.

d ile g ortogonaldir $\Rightarrow$ (v): U_1, M nin $\forall x \in M$ için $d(x)$ tarafından üretilen ideali ve $U_2 = \text{Ann}\, U_1$ olsun. Bu durumda d ve g nin ortogonalliğinden $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma M\Gamma g(y) = 0 = g(y)\Gamma M\Gamma d(x)$ olacağından bu ifadeye Lemma 2.5.1 uygulanırsa

$$d(x)\Gamma g(y) = 0 = g(y)\Gamma d(x), \forall x, y \in M \text{ için} \tag{2.81}$$

bulunur. (2.81) den $\forall y \in M$ için $g(y) \in U_2 = \text{Ann}\, U_1$ olur. Böylece $d : M \to U_1$ ve $g : M \to U_2$ yani (v) in b) şıkkı görülür. Ayrıca Lemma 2.5.6 (ii) den $U_1 \cap U_2 = (0)$ dır ve Lemma 2.5.7 (ii) den $U = U_1 \oplus U_2$, M nin essential idealidir. Böylece (v) in (a) şıkkı da görülmüş olur.

Şimdi $d \mid_U = d_1 \oplus 0_2$ ve $g \mid_U = 0_1 \oplus g_2$ olacak şekilde $d_1 : U_1 \to U_1$ ve $g_2 : U_2 \to U_2$ türevlerinin olduğunu gösterelim. Öncelikle $d(U_2) = 0$ olduğunu görelim. Herhangi bir $u_2 \in U_2$ için U_2 nin tanımından $U_1\Gamma u_2 = (0) = u_2\Gamma U_1$ yani, $\forall u_1, u_2 \in U_1$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$ için $u_1\alpha u_2 = 0$ dır $\Rightarrow$ $0 = d(u_1\alpha u_2) = d(u_1)\alpha u_2 + u_1\alpha d(u_2)$ olur. Buradan $d(u_1) \in U_1$ ve $u_2 \in \text{Ann}\, U_1$ olduğu kullanılarak $U_1\Gamma d(U_2) = (0)$ olduğu ve benzer biçimde $d(U_2)\Gamma U_1 = (0)$ olduğu elde edilir. Böylece bu ifadelerden $d(U_2) \subset \text{Ann}\, U_1 = U_2$ bulunur. Öte yandan $d : M \to U_1$ olduğundan $d(U_2) \subset U_1$ ve böylece $d(U_2) \subset U_1 \cap \text{Ann}\, U_1 = (0)$, yani $d(U_2) = 0$ olur. Diğer yandan $d_1 = d \mid_{U_1} : U_1 \to U_1$ denilirse d_1, U_1 üzerinde bir türevdir ve böylece $0_2 : U_2 \to U_2$ sıfır dönüşüm olmak üzere $\forall u_1, u_2 \in U_1$ için $d(u_1,u_2) = (d_1(u_1),0)$ olduğundan tanım gereği $d \mid_U = d_1 \oplus 0_2$ olur. Ayrıca $d_1 = 0$ ise $d = 0$ dır. Gerçekten, $d_1 = 0$ ise $\forall u_1, u_2 \in U_1$ için $d(u_1 , u_2) = (d_1(u_1), 0) = (0 ,0)$ olacağından $d(U) = 0$ dır. Buradan $\forall u \in U, \forall x \in M, \forall \alpha \in \Gamma$ için $u\alpha x \in U$ olduğunu kullanarak $0 = d(u\alpha x) = d(u)\alpha x + u\alpha d(x) = u\alpha d(x)$ bulunur. Böylece $U\Gamma d(M) = (0)$ ve benzer şekilde $d(M)\Gamma U = 0$ bulunur $\Rightarrow$ $d(M) \subset \text{Ann}\, U$ elde edilir. Öte yandan $d(M) \subset U_1 \subset U$ $\Rightarrow$ $d(M) \subset \text{Ann}\, U$ ve sonuç olarak $d(M) \subset U \cap \text{Ann}\, U = (0)$ $\Rightarrow$ $d = 0$ bulunur. Bu ise (c) nin ispatını verir.

$g : M \to U_2$ ve U_1, $\forall x \in M$ için $d(x)$ ler tarafından üretilen ideali olduğu ve d ve g nin ortogonalliğinden $dg = 0 = gd$ ve $\forall x, y \in M$ için $d(x)\Gamma g(y) = 0 = g(y)\Gamma d(x)$ oldukları görülmüştü. Bu ifadelerden yararlanılarak $\forall u_1 \in U_1$ için $g(u_1) = 0$ yani,

$g(U_1) = 0$ olduğu görülür. $g_2 = g\,|_{U_2} : U_2 \to U_2$ denilirse g_2, U_2 üzerinde bir türev ve $g(U_2) \subset U_2$ dir. Böylece $g(u_1,u_2) = (0,g_2(u_2))$ olduğundan $0_1 : U_1 \to U_1$ sıfır dönüşüm olmak üzere $g\,|_U = 0_1 \oplus g_2$ bulunur. Buradan $g_2 = 0$ iken $g = 0$ olduğu (c) dekine benzer işlemlerle görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.5.9: M, char $M \neq 2$ olan asal bir Γ-halkası olsun. Eğer M nin d ve g türevleri Teorem 2.5.8 in denk koşullarından birini sağlıyorsa bu durumda $d = 0$ veya $g = 0$ dır.

İspat: Teorem 2.5.8 deki (iii) sağlansın. Yani dg türev olsun. Bu durumda Uyarı 2.2.14 den $d = 0$ veya $g = 0$ bulunur.

Sonuç 2.5.10: M, 2-torsion free yarı-asal bir Γ-halkası olsun. Eğer M nin d türevi için d^2 türev ise $d = 0$ dır.

İspat : $dd = d^2$ türev olsun. Bu durumda Teorem 2.5.8 den d ile d ortogonal olur. O halde Not I den yarı-asal Γ-halkasında kendisiyle ortogonal olan türev sadece sıfır olacağından $d = 0$ bulunur.

Sonuç 2.5.11: M, 2-torsion free yarı-asal bir Γ-halkası ve d, M nin bir türevi olsun. Eğer $\forall x \in M$ için $d^2(x) = a\alpha x + x\beta b$ olacak şekilde $a, b \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ elemanları varsa $d = 0$ dır.

İspat: $\forall x \in M$ için $dd(x) = d^2(x) = a\alpha x + x\beta b$ olacak şekilde $a, b \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ elemanları olsun. Bu durumda Teorem 2.5.8 (iv) den d ile d ortogonal ve Not I den $d = 0$ bulunur.

2.6. Modül Değerli (σ,τ) -Türevler

R bir asal halka olmak üzere,

(i) $0 \neq d$, R nin bir türevi ve char $R \neq 2$ iken $d(R) \subset Z$ ise R komütatiftir.

(ii) d, R nin bir türevi olmak üzere $a \in R$ için $ad(R) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

(iii) $0 \neq d$, R nin bir (σ,τ)-türevi, char $R \neq 2$ ve $a \in R$ için $[d(R),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ dir.

oldukları sırasıyla Herstein (1979), Posner (1957) ve Aydın ve Kaya (1992) tarafından ispatlanmıştı.

Bu kesimde, yukarıdaki ifadelerde d türevi yerine aşağıda tanımlayacağımız modül değerli (σ,τ)-türev, R yerine de R nin bir $(0) \neq U$ ideali alınarak sonuçlar daha da genelleştirilecektir.

Tanım: R bir halka, σ, τ R üzerinde dönüşümler ve $(0) \neq X$ bir R-bimodül olsun. Eğer $d : R \to X$ toplamsal dönüşümü $\forall a, b \in R$ için $d(ab) = d(a)\sigma(b) + \tau(a)d(b)$ eşitliğini sağlıyorsa d ye modül değerli bir (σ,τ)-türev denir.

Bundan sonraki çalışmalarımızda R ile bir halkayı, X ile R bi-modülünü, U ile R nin sıfırdan farklı bir idealini ve $d : R \to X$ ile de modül değerli (σ,τ)-türevini göstereceğiz. Yine burada $C(X) = \{x \in X \mid xr = rx, \forall r \in R \text{ için}\}$ ve $C_{\sigma,\tau}(X) = \{x \in X \mid x\sigma(r) = \tau(r)x, \forall r \in R \text{ için}\}$ ve σ ile τ, R nin $\sigma d = d\sigma$, $\tau d = d\tau$ eşitliklerini sağlayan iki otomorfizmi olarak alınacaktır. Ayrıca,

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] + [y,[z,x]]$$

Jacobi özdeşliği ve

$$[[x,y]_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau} = [x,[y,z]]_{\sigma,\tau} + [[x,z]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau} \qquad \text{(A)}$$

özdeşliği sık sık kullanılacaktır.

R bir halka ve $(0) \neq X$ bir R-bimodül olmak üzere,

$$x \in X \text{ ve } a \in R \text{ için } xRa = (0) \Rightarrow x = 0 \text{ veya } a = 0 \qquad \text{(G1)}$$

$$x \in X \text{ ve } a \in R \text{ için } aRx = (0) \Rightarrow a = 0 \text{ veya } x = 0 \qquad \text{(G2)}$$

koşullarını tanımlayalım.

Lemma 2.6.1: (Bresar and Vukman, Remark 5) R bir halka ve $(0) \neq X$, bir R-bimodül olsun.

(i) Eğer (G1) (veya (G2)) koşulu varsa R asaldır.

(ii) Eğer (G1) (veya (G2)) koşulu var ve X, 2-torsion free ise R de 2-torsion freedir.

İspat: (i) (G1) koşulu sağlansın. Herhangi $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. Bu durumda herhangi $0 \neq x \in X$ için $xR(aRb) = x0 = 0$ yani $(xRa)Rb = 0$ dır. (G1) sağlandığından buradan $xRa = 0$ veya $b = 0$ dır. Yine (G1) den dolayı buradan $x = 0$ veya $a = 0$ veya $b = 0$ elde edilir. $x \neq 0$ kabul edildiğinden buradan $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Sonuç olarak $aRb = 0$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ bulunmuş oldu. O halde R asaldır.

Aynı şekilde (G2) sağlandığında da R nin asallığı bulunabilir.

(ii) (G1) koşulu sağlansın ve X, 2-torsion free olsun. Herhangi $a \in R$ için $2a = 0$ olduğunu kabul edelim $\Rightarrow$ $a + a = 0$ dır. Bu taktirde $\forall x \in X$ ve $r \in R$ için $xr(a + a) = xr0$ $\Rightarrow$ $xra + xra = 0$ $\Rightarrow$ $2xra = 0$, $\forall x \in X$, $\forall r \in R$ için bulunur. X, 2-torsion free olduğundan buradan $\forall x \in X$, $\forall r \in R$ için $xra = 0$ elde edilir. O halde buradan $\Rightarrow$ $\forall x \in X$ için $xRa = 0$ $\Rightarrow$ (G1) den dolayı $x = 0$ veya $a = 0$ elde edilir. $X \neq (0)$ kabul edildiğinden buradan $a = 0$ bulunur.

Sonuç olarak $a \in R$ için $2a = 0$ iken $a = 0$ elde edilir. O halde R, 2-torsion freedir.

Aynı şekilde (G2) sağlandığında ve hipotezin diğer şartı gerçeklendiğinde R nin 2-torsion free olduğu gösterilebilir.

Lemma 2.6.2: R bir halka, $(0) \neq X$ bir R-bimodül ve $(0) \neq U$, R nin bir ideali olsun. Eğer (G1) (veya (G2)) varsa $x \in X$ ve $a \in R$ için $xUa = (0)$ (veya $aUx = (0)$) ise $x = 0$ veya $a = 0$ dır.

İspat: (G1) sağlansın ve $x \in X$ ve $a \in R$ için $xUa = (0)$ olsun. U, R nin bir ideali

olduğundan $xRUa \subset xUa = (0)$ dır. Buradan $xRUa = (0)$ bulunur. Bu ise (G1) den $x = 0$ veya $Ua = (0)$ olması demektir.
Öte yandan Lemma 2.6.1 (i) den R asaldır. Bu durumda $Ua = (0)$ ise Önerme 1.1.15 den $a = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $x = 0$ veya $a = 0$ bulunur.

Aynı şekilde (G2) varsa ve $x \in X$ ve $a \in R$ için $aUx = (0)$ ise benzer işlemlerle $x = 0$ veya $a = 0$ olduğu gösterilebilir.

Lemma 2.6.3: R bir halka, $(0) \neq U$, R nin bir ideali ve $(0) \neq X$ bir 2-torsion free R-bi-modül olmak üzere (G1) koşulu bulunsun. Bu durumda
(i) $[X,U] \subset C(X)$ ise R komütatiftir.
(ii) $[X,U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}(X)$ ise R komütatiftir.

İspat: (i) $[X,U] \subset C(X)$ olsun. Bu durumda $\forall u, v \in U$ ve $\forall x \in X$ için $[[x,u],v] = 0$ olur. Burada Jacobi özdeşliği ve hipotez kullanılırsa,
$0 = [[x,u],v] = [x,[u,v]] + [u,[v,x]] = [x,[u,v]]$
yani,

$$\forall x \in X, \forall u, v \in U \text{ için } [x,[u,v]] = 0 \tag{2.82}$$

elde edilir. (2.82) de x yerine xr, $r \in R$ alınır ve (2.82) kullanılırsa,
$0 = [xr,[u,v]] = x[r,[u,v]] + [x,[u,v]]r$
$\Rightarrow x[r,[u,v]] = 0, \forall x \in X, \forall r \in R, \forall u, v \in U$ için
bulunur. Burada r yerine rs, $s \in R$ alınır ve son eşitlik kullanılırsa,

$$0 = x[rs,[u,v] = xr[s,[u,v]] + x[r,[u,v]]s$$

yani, $\forall x \in X, \forall r, s \in R, \forall u, v \in U$ için $0 = xr[s,[u,v]]$ elde edilir. O halde buradan,

$$XR[R,[U,U]] = (0) \tag{2.83}$$

bulunur. Bu eşitlikte (G1) özelliğini ve $X \neq (0)$ olduğunu kullanarak $[R,[U,U]] = (0)$ yani, $[U,U] \subset Z$ elde edilir. O halde Lemma 1.2.2.9 dan $U \subset Z$ ve sonra Önerme 1.1.19 dan R komütatif bulunur.
(ii) $[X,U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}(X)$ olsun. Bu durumda (A) özdeşliği ve hipotez kullanılarak, $\forall x \in X, \forall u, v \in U$ için $0 = [[x,u]_{\sigma,\tau},v]_{\sigma,\tau} = [x,[u,v]]_{\sigma,\tau} + [[x,v]_{\sigma,\tau},u] = [x,[u,v]]_{\sigma,\tau}$
bulunur. Yani,

$$[x,[u,v]]_{\sigma,\tau} = 0, \forall x \in X, \forall u, v \in U \text{ için} \tag{2.84}$$

bulunur. (2.84) de x yerine xr, $r \in R$ alınır ve (2.84) kullanılırsa $0 = [xr,[u,v]]_{\sigma,\tau} = x[r,\sigma([u,v])] + [x,[u,v]]_{\sigma,\tau} r = x[r,\sigma([u,v])]$ yani, $0 = x[r,\sigma([u,v])]$, $\forall x \in X$, $\forall r \in R$, $\forall u, v \in U$ bulunur. Burada r yerine rs, $s \in R$ alınır ve tekrar bu eşitlik kullanılırsa $\forall x \in X$, $\forall r, s \in R$, $\forall u, v \in U$ için $0 = x[rs,\sigma([u,v])] = xr[s,\sigma([u,v])] + x[r,\sigma([u,v])]s = xr[s,\sigma([u,v])]$ yani,

$$XR[R,\sigma([U,U])] = (0) \tag{2.85}$$

elde edilir. (2.85)'e (G1) uygulanırsa $X \neq (0)$ olduğundan $[R,\sigma([U,U])] = (0)$ bulunur.

$\Rightarrow \sigma([U,U]) \subset Z$, yani $[U,U] \subset Z$ bulunur. Bu ise Lemma 1.2.2.9 ve Önerme 1.1.19 dan R nin komütatif olması demektir.

Lemma 2.6.4: R bir halka, $(0) \neq U$, R nin bir ideali, $(0) \neq X$ bir R-bimodül olsun ve (G1) koşulu bulunsun. $d : R \to X$, (σ,τ)-türevi için

(i) $d(U) = (0)$ ise $d = 0$,

(ii) $a \in R$ için $d(U)a = (0)$ ise $d = 0$ veya $a = 0$ dır.

İspat: (i) U nun ideal olduğu ve hipotez kullanılırsa $\forall u \in U$, $\forall x \in R$ için $0 = d(ru) = d(r)\sigma(u) + \tau(r)d(u) = d(r)\sigma(u)$ yani,

$$d(r)\sigma(u) = 0,\ \forall u \in U,\ \forall r \in R \text{ için} \tag{2.86}$$

bulunur. (2.86) da r yerine $r\sigma^{-1}(s)$, $s \in R$ alınırsa $\forall u \in U$ ve $\forall r, s \in R$ için $0 = d(r\sigma^{-1}(s))\sigma(u) = d(r)s\sigma(u) + \tau(r)d(\sigma^{-1}(s))\sigma(u) = d(r)s\sigma(u)$ elde edilir. Yani,

$$d(R)R\sigma(U) = (0) \tag{2.87}$$

bulunur. $d(R) \subset X$ olduğundan (2.87) ye (G1) özelliği uygulanırsa $d(R) = 0$ veya $\sigma(U) = (0)$ yani, $d = 0$ veya $U = (0)$ elde edilir. Fakat hipotezden $U \neq (0)$ olduğundan $d = 0$ bulunur.

(ii) $a \in R$ için $d(U)a = 0$ olsun. Bu durumda $\forall u \in U$, $\forall r \in R$ için $0 = d(ru)a = (d(r)\sigma(u)\tau(r)d(u))a = d(r)\sigma(u)a\tau(r)d(u)a = d(r)\sigma(u)a$ bulunur. Yani,

$$d(R)\sigma(U)a = (0) \tag{2.88}$$

elde edilir. (2.88) e Lemma 2.6.2 uygulanırsa $d(R) = (0)$ veya $a = 0$ ve buradan da $d = 0$ veya $a = 0$ sonucuna varılır.

Uyarı: (G2) özelliği varken $ad(U) = (0)$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ olduğu da benzer olarak gösterilir.

Lemma 2.6.5: R komütatif olmayan bir halka, $(0) \neq X$ 2-torsion free bir R-bimodül ve $(0) \neq U$ R nin bir ideali olsun. Eğer (G1) koşulu sağlanıyor ve $d_1 : R \to X$ bir (σ,τ)-türev, $d_2 : R \to R$, $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde bir türev olduğunda $d_1d_2(U) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat: $\forall u, v \in U$ için hipotezden,

$$\begin{aligned}
0 &= d_1d_2(uv) \\
&= d_1(d_2(u)v + ud_2(v)) \\
&= d_1(d_2(u)v) + d_1(ud_2(v)) \\
&= d_1d_2(u)\sigma(v)\tau(d_2(u))d_1(v) + d_1(u)\sigma(d_2(v)) + \tau(u)d_1d_2(v) \\
&= \tau(d_2(u))d_1(v) + d_1(u)\sigma(d_2(v))
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da,

$$\tau(d_2(u))d_1(v) + d_1(u)\sigma(d_2(v)) = 0, \ \forall u, v \in U \text{ için} \tag{2.89}$$

elde edilir. (2.89) da v yerine $d_2(v)$ alınır ve hipotez kullanılırsa $\forall u, v \in U$ için

$$\begin{aligned}
0 &= \tau(d_2(u))d_1(d_2(v)) + d_1(u)\sigma(d_2(d_2(v))) \\
&= \tau(d_2(u))d_1d_2(v) + d_1(u)\sigma(d_2^2(v)) \\
&= d_1(u)\sigma(d_2^2(v))
\end{aligned}$$

yani,

$$d_1(U)\sigma(d_2^2(U)) = (0) \tag{2.90}$$

elde edilir. (2.90) da Lemma 2.6.4 (ii) kullanılırsa, $d_1 = 0$ veya $\sigma(d_2^2(U)) = 0$ yani, $d_1 = 0$ veya $d_2^2(U) = (0)$ bulunur. $d_2^2(U) = (0)$ ise Teorem 1.2.1.18 den $d_2 = 0$ olur ve sonuç olarak $d_1 = 0$ bulunur.

Lemma 2.6.6: R komütatif olmayan bir halka, $(0) \neq X$ 2-torsion free bir R-bimodül, $(0) \neq U$ R nin bir ideali olsun ve (G1) koşulu sağlansın. $d : R \to X$ bir (σ,τ)-türev ve $a \in R$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in Z$ veya $d = 0$ dır.

İspat: $\forall u, v \in U$ için hipotezden

$0 = [d(uv),a]_{\sigma,\tau}$

$= [d(u)\sigma(v)\tau(u)d(v),a]_{\sigma,\tau}$

$= [d(u)\sigma(v),a]_{\sigma,\tau} + [\tau(u)d(v),a]_{\sigma,\tau}$

$= d(u)[\sigma(v),\sigma(a)] + [d(u),a]_{\sigma,\tau}\sigma(v) + \tau(u)[d(v),a]_{\sigma,\tau} + [\tau(u),\tau(a)]d(v)$

$= d(u)\sigma([v,a]) + \tau([u,a])d(v)$

yani,

$$d(u)\sigma([v,a]) + \tau([u,a])d(v) = 0, \forall u, v \in U \text{ için} \qquad (2.91)$$

bulunur. (2.91) de u yerine au alınır ve (2.91) kullanılırsa $\forall u, v \in U$ için

$0 = (d(au)\sigma([v,a]) + \tau([au,a])d(v)$

$= (d(a)\sigma(u) + \tau(a)d(u))\sigma([v, a]) + \tau(a[u,a] + [a,a]u)d(v)$

$= d(a)\sigma(u)\sigma([v,a]) + \tau(a)d(u)\sigma([v,a]) + \tau(a)\tau([u,a])d(v)$

$= d(a)\sigma(u)\sigma([v,a]) + \tau(a)\{d(u)\sigma([v,a]) + \tau([u,a])d(v)\}$

$= d(a)\sigma(u)\sigma([v,a])$

elde edilir. Yani,

$$d(a)\sigma(U)\sigma([U,a]) = 0 \qquad (2.92)$$

olması demektir. (2.92) de Lemma 2.6.2 kullanıldığında $d(a) = 0$ veya $[U,a] = 0$ bulunur. $[U,a] = (0)$ ise Önerme 1.1.19 dan $a \in Z$ bulunur.

$d(a) = 0$ ise bu durumda $\forall u \in U$ için $d([u,a]) = [d(u),a]_{\sigma,\tau}[d(a),u]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur. Yani,

$$d([u,a]) = 0, \forall u \in U \text{ için} \qquad (2.93)$$

elde edilir. (2.91) de v yerine vw, $w \in U$ ve (2.91) den yararlanılırsa

$0 = d(u)\sigma([vw,a]) + \tau([u,a])d(vw)$

$= d(u)\sigma(v)\sigma([w,a]) + d(u)\sigma([v,a])\sigma(w) + \tau([u,a])(d(u)\sigma(w) + \tau(v)d(w))$

$= d(u)\sigma(v)\sigma([w,a]) + \tau([u,a])\tau(v)d(w)$ yani,

$$0 = d(u)\sigma(v)\sigma([w,a]) + \tau([u,a])\tau(v)d(w), \forall u, v, w \in U \text{ için} \qquad (2.94)$$

bulunur. (2.94) de w yerine $[w,a] \in U$ alınır ve (2.93) kullanılırsa,

$0 = d(u)\sigma(v)\sigma([[w,a],a]) + \sigma([u,a])\tau(v)d([w,a]) = d(u)\sigma(v)\sigma([[w,a],a])$ yani,

$$d(U)\sigma(U)\sigma([[U,a],a]) = 0 \qquad (2.95)$$

bulunur. (2.95) de Lemma 2.6.2 kullanılırsa $d(U) = 0$ veya $[[U,a],a] = 0$ bulunur.

$d(U) = (0)$ ise Lemma 2.6.4 (i) den $d = 0$ olur.

$[a,[a,U]] = 0$ ise $I_a : R \to R$, $x \to [a,x]$ R nin bir iç türevi olmak üzere $I_a^2(U) = 0$ olur. Bu ise Teorem 1.2.1.19 dan $a \in Z$ sonucunu verir.

O halde sonuç olarak $d = 0$ veya $a \in Z$ elde edilir.

Uyarı (I): R bir halka, $(0) \neq X$ bir R-bimodül olsun. Buna göre

(i) $a \in R$, $b \in C_{\sigma,\tau}(X)$, $ab \in C_{\sigma,\tau}(X)$ ise ve (G2) koşulu varsa $a \in Z$ veya $b = 0$ dır.

(ii) $a \in C_{\sigma,\tau}(X)$, $b \in R$, $ab \in C_{\sigma,\tau}(X)$ ise ve (G1) koşulu varsa $a = 0$ veya $b \in Z$ dir.

İspat: (i) $b, ab \in C_{\sigma,\tau}(X)$ olduğundan $\forall r \in R$ için $ab\sigma(r) = \tau(r)ab$ ve $b\sigma(r) = \tau(r)b$ eşitliklerini kullanarak $0 = ab\sigma(r) - \tau(r)ab = a\tau(r)b - \tau(r)ab = \{(a\tau(r) - \tau(r)a\}b$ yani,

$$[a,\tau(r)]b = 0, \ \forall r \in R \text{ için} \tag{2.96}$$

bulunur. (2.96) da r yerine rs, $s \in R$ alınır ve (2.96) kullanılırsa,

$0 = [a,\tau(rs)]b = [a,\tau(r)\tau(s)]b = [a,\tau(r)]\tau(s)b + \tau(r)[a,\tau(s)]b$

$= [a,\tau(r)]\tau(s)b$, $\forall r, s \in R$ için

bulunur. Burada τ'nun örtenliği kullanıldığında $[a,R]Rb = 0$ elde edilir. Bu ifadeye (G2) koşulunu uygulandığında ise $[a,R] = 0$ veya $b = 0$ yani, $a \in Z$ veya $b = 0$ sonucuna ulaşılır.

(ii) $a, ab \in C_{\sigma,\tau}(X)$ olduğundan $\forall r \in R$ için

$a\sigma(r) = \tau(r)a$ ve $ab\sigma(r) = \tau(r)ab$ eşitliklerini kullanarak

$0 = ab\sigma(r) - \tau(r)ab = ab\sigma(r) - a\tau(r)ab = a(b\sigma(r) - \sigma(r)b)$ yani,

$$a[b,\sigma(r)] = 0, \ \forall r \in R \text{ için} \tag{2.97}$$

elde edilir. Burada (i) dekine benzer işlemlerin tekrarlanmasıyla $aR[b,R] = 0$ ve buradan da (G1) den $a = 0$ veya $[b,R] = 0$, yani $a = 0$ veya $b \in Z$ bulunur.

Lemma 2.6.7: R komütatif olmayan bir halka, $(0) \neq U$ R nin bir ideali, $(0) \neq X$ 2-torsion free R-bimodül olsun ve (G1), (G2) koşulları bulunsun. $d : R \rightarrow X$ bir (σ,τ)-türev ve $a \in U$ iken $[d(U),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}(X)$ ise $a \in Z$ veya $d = 0$ dır.

İspat : Hipotezden,

$$\begin{aligned} C_{\sigma,\tau}(X) \ni [d(a^2),a]_{\sigma,\tau} &= [d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a),a\,]_{\sigma,\tau} \\ &= [d(a)\sigma(a),a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a)d(a),a]_{\sigma,\tau} \\ &= d(a)[\sigma(a),\sigma(a)] + [d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) + \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a),\tau(a)]d(a) \\ &= [d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) + \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} \end{aligned}$$

bulunur. Burada hipotezden $[d(a),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X)$, yani $[d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) = \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau}$

ve X'in 2-torsion free olduğu kullanılırsa $\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X)$ sonucunu buluruz. Bu ise Uyarı (I) (i) den $\tau(a) \in Z$ veya $[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$, yani $a \in Z$ veya $[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$ olması demektir.

$[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$ olsun. Bu durumda $\forall u \in U$ için

$C_{\sigma,\tau}(X) \ni [d([a,u]),a]_{\sigma,\tau} = [[d(a),u]_{\sigma,\tau} - [d(u),a]_{\sigma,\tau},a] = [[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} - [[d(u),a]_{\sigma,\tau}$
$= [[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}$ yani,

$$[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X),\ \forall u \in U \text{ için} \tag{2.98}$$

bulunur. (2.98) de u yerine au alınır ve $[d(a),a]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğu kullanılırsa

$C_{\sigma,\tau}(X) \ni [[d(a),au]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = [\tau(a)[d(a),u]_{\sigma,\tau} + [d(a),u]_{\sigma,\tau}\sigma(u),a)_{\sigma,\tau}$
$= [\tau(a)[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = \tau(a)[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a),\tau(a)][d(a),u]_{\sigma,\tau}$
$= \tau(a)[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}$

yani,

$$\tau(a)[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X),\ \forall u \in U \text{ için} \tag{2.99}$$

elde edilir. (2.99) da Uyarı (I) kullanılırsa $a \in Z$ veya $\forall u \in U$ için $[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur. Eğer $\forall u \in U$ için $[[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise bu durumda Jacobi özdeşliğinden ve hipotezden,

$0 = [[d(a),u]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = [d(a),[u,a]]_{\sigma,\tau} + [[d(a),a]_{\sigma,\tau},u]_{\sigma,\tau} = [d(a),[u,a]]_{\sigma,\tau}$ yani,

$$[d(a),[U,a]]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{2.100}$$

bulunur. Burada $I_a : R \to R,\ x \to [a,x],\ I_a(U) \subset U$ olacak şekilde R nin a ile belirlenen bir iç türevi ve $I_{d(a)} : R \to X,\ r \to [d(a),r]_{\sigma,\tau}$ nın bir modül değerli (σ,τ)-türev olduğunu kullanarak (2.100) den $I_{d(a)}I_a(U) = 0$ elde edilir.

Son eşitliğe Lemma 2.6.5 uygulanırsa $I_{d(a)} = 0$ veya $I_a = 0$, yani $[d(a),R]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $a \in Z$ bulunur. Bu ise $d(a) \in C_{\sigma,\tau}(X)$ veya $a \in Z$ olması demektir.

Eğer $d(a) \in C_{\sigma,\tau}(X)$ ise bu durumda (A) özdeşliği ve hipotezden $\forall u \in U$ için

$C_{\sigma,\tau}(X) \ni [d(au),u]_{\sigma,\tau} = [d(a)\sigma(u) + \tau(a)d(u),a]_{\sigma,\tau} = [d(a)\sigma(u),a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a)d(u),a]$
$= d(a)[\sigma(u),\sigma(a)] + [d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(u) + \tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a),\tau(a)]d(u) = d(a)\sigma([u,a])$
$+ \tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau}$

yani,

$$d(a)\sigma([u,a]) + \tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X),\ \forall u \in U \text{ için} \tag{2.101}$$

elde edilir. O halde $C_{\sigma,\tau}(X)$ tanımı, (A) özdeşliği ve hipotezden $\forall u \in U$ için

$0 = [d(a)\sigma([u,a]) + \tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = [d(a)\sigma([u,a]),a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}$
$= d(a)[\sigma([u,a]),\sigma(a)] + [d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma([u,a]) + \tau(a)[[d(u),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} + [\tau(a),\tau(a)][d(u),a]_{\sigma,\tau}$
$= d(a)[\sigma([u,a]),\sigma(a)] = d(a)\sigma([[u,a],a])$

yani, $d(a)\sigma([[U,a],a]) = 0$ bulunur. Burada $d(a) \in C_{\sigma,\tau}(X)$ olduğundan $\forall r \in R$ için $0 = d(a)\sigma(r)\sigma([[u,a],a])$ ve σ nın örtenliğinden

$$d(a)R\sigma([[U,a],a]) = 0 \qquad (2.102)$$

bulunur. (2.102) de (G1) özelliği kullanılırsa $d(a) = 0$ veya $[[U,a],a] = 0$ yani,

$$d(a) = 0 \text{ veya } [a,[a,U]] = 0$$

elde edilir. Eğer $[a,[a,U]] = 0$ ise $I_a : R \to R,\ x \to [a, x]$ iç türevi gözönüne alındığında bu eşitlik $I_a^2(U) = 0$ haline gelir. Bu ise Teorem 1.2.1.19 dan $a \in Z$ sonucunu verir. $d(a) = 0$ ise (2.101) den

$$\tau(a)[d(u),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}(X),\ \forall u \in U \text{ için} \qquad (2.103)$$

elde edilir. (2.103) e Uyarı (I) uygulandığında $a \in Z$ veya $[d(U),a]_{\sigma,\tau} = 0$ bulunur. $[d(U),a]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğunu varsayarsak Lemma 2.6.6 dan $a \in Z$ veya $d = 0$ olur. Sonuç olarak $a \in Z$ veya $d = 0$ elde edilir.

Sonuç 2.6.8: R bir halka, $(0) \neq U$ R nin bir ideali ve $(0) \neq X$ 2-torsion free bir R-bimodül olsun. (G1) koşulu sağlansın ve $0 \neq d : R \to X$ bir (σ,τ)-türev olsun. Bu durumda $[d(U),U]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise R komütatiftir.

İspat: $[d(U),U]_{\sigma,\tau} = (0)$ ise Lemma 2.6.6 dan $U \subset Z$ ve Önerme 1.1.19 den R komütatif bulunur.

Sonuç 2.6.9: R bir halka, $(0) \neq X$ 2-torsion free bir R-bimodül olsun. $0 \neq d : R \to X$ bir (σ,τ)-türev, $(0) \neq U$, R nin bir ideali olmak üzere (G1), (G2) özellikleri bulunsun. Bu durumda $[d(U),U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}(X)$ ise R komütatiftir.

İspat: $[d(U),U]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}(X)$ olsun. Bu durumda Teorem 2.6.7 den $U \subset Z$ ve Önerme 1.1.19 dan R komütatif bulunur.

BÖLÜM 3

3.1. Asal Gamma Halkalarında Tek Yanlı İdealler Ve Türevler

Bu bölümde asal halkalarda tek yanlı idealler üzerine yapılan ve tezimizin 1.2.6 kesiminde belirtilen çalışmalar asal Gamma Halkaları üzerine genelleştirilmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarımızda M bir asal Γ-halkası, $0 \neq d$ M'nin bir türevi, $(0) \neq U$ bir sağ ideali ve $L = Ann_t U = \{x \in M \mid x\Gamma U = 0\}$, yani U nun sol sıfırlayanlarının kümesi olarak alınacaktır.
Ayrıca burada L nin, M nin bir sol ideali olduğu görülür.

Lemma 3.1.1: M bir asal Γ-halkası, $0 \neq d$ M'nin bir türevi ve $(0) \neq U$ bir sağ ideali olmak üzere $L = Ann_t U$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.
(i) $d(U) \subseteq L$,
(ii) $d(U)\Gamma d(U) = 0$,
(iii) $d(U)\Gamma a = 0$ olacak şekilde $\exists 0 \neq a \in M$ vardır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): $d(U) \subseteq L$ olsun. Bu durumda $d(U)\Gamma U = 0$ yani,

$$0 = d(u)\alpha v, \forall u, v \in U, \forall \alpha \in \Gamma \text{ için} \tag{3.1}$$

elde edilir. (3.1) ve U nun sağ ideal olduğu kullanılarak $\forall u, v \in U, \forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için
$0 = d(u\beta d(w))\alpha v$
$= \{d(u)\beta d(w) + u\beta d^2(w)\}\alpha v$
$= d(u)\beta d(w)\alpha v + u\beta d^2(w)\alpha v$
$= u\beta d^2(w)\alpha v$
yani, $U\Gamma d^2(U)\Gamma U = 0$ bulunur. Bu durumda Lemma 2.2.4 (ii) den $d^2(U)\Gamma U = 0$ elde edilir. (3.1) ve bu ifade kullanılarak $\forall u, v \in U, \forall \alpha \in \Gamma$ için
$0 = d(d(u)\alpha v) = d^2(u)\alpha v + d(u)\alpha d(v) = d(u)\alpha d(v)$
yani, $d(U)\Gamma d(U) = 0$ elde edilir.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): $d(U)\Gamma d(U) = 0$ olsun. Öncelikle $\exists v \in V$ için $d(v) \neq 0$ dır. Gerçekten,

bu ifadenin tersini kabul edersek $\forall v \in U$ için $d(v) = 0$ olur $\Rightarrow$ $d(U) = (0)$ dır. Bu ise Lemma 2.2.5 (i) den $d = 0$ olması demektir. Halbuki bu sonuç hipotezle çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır, yani $\exists v \in V$ için $d(v) \neq 0$ dır. Ayrıca bu $d(v)$ elemanı için hipotezden $0 = d(u)\alpha d(v)$, $\forall u \in U, \alpha \in \Gamma$ için olduğu açıktır.

Yani $a = d(v)$ dersek, $d(U)\Gamma a = 0$ olacak şekilde $\exists 0 \neq a \in M$ vardır.

(iii) $\Rightarrow$ (i):

$d(U)\Gamma a = 0$ olacak şekilde $\exists 0 \neq a \in M$ olsun. Bu durumda U nun ideal olduğu kullanılarak,

$\forall u, v \in U, \alpha, \beta \in \Gamma$ için $0 = d(u\alpha v)\beta a = d(u)\alpha v\beta a + u\alpha d(v)\beta a$

$\Rightarrow$ $0 = d(u)\alpha v\beta a$, $\forall u, v \in U, \alpha, \beta \in \Gamma$ için

$\Rightarrow$ $0 = d(U)\Gamma U\Gamma a$

elde edilir. Bu ise M asal ve $a \neq 0$ olduğundan $d(U)\Gamma U = 0$ olması demektir. O halde $d(U) \subset L$ dir.

Teorem 3.1.2: M, char $M \neq 2$ olan bir asal Γ-halkası olsun. Bu durumda M'nin $d(U)$ ile üretilen alt halkası, M'nin sıfırdan farklı hiçbir sağ idealini içermez ancak ve ancak $d(U) \subseteq L$ dir.

İspat: $\Leftarrow$: $d(U) \subseteq L$ olsun. Bu durumda,

$$d(U)\Gamma U = 0 \tag{3.2}$$

dır. $S = \langle d(U) \rangle$, M nin $d(U)$ ile üretilen bir alt halkası olmak üzere S' nin tanımından ve (3.2) den $S\Gamma U = 0$ dır. Ayrıca S sıfırdan farklı hiçbir sağ ideal içermez. Yani $(0) \neq I \subset S$ olacak şekilde bir sağ ideal bulunmaz.

Gerçekten, $(0) \neq I \subset S$ olacak şekilde bir I sağ idealinin bulunduğunu kabul edelim. Bu taktirde $I\Gamma U = 0$ ve buradan Lemma 2.2.4 (ii) den $U = (0)$ dır. Bu ise hipotezden $U \neq (0)$ olması ile çelişir. O halde S, sıfırdan farklı hiçbir sağ ideal içermez.

$\Rightarrow$: $S = \langle d(U) \rangle$, M' nin bir alt halkası olmak üzere M' nin sıfırdan farklı hiçbir sağ idealini içermesin. $T = S \cap U$ olacak şekilde bir küme tanımlayalım. Öncelikle $0 \in T$ olduğundan $T \neq \varnothing$ dır.

Hipotezden $\forall t \in T, u \in U, \alpha \in \Gamma$ için $d(t)\alpha u = d(t\alpha u) - t\alpha d(u)$ $\Rightarrow$ $\forall t \in T, u \in U,$

$\alpha \in \Gamma$ için $d(t)\alpha u \in S$ yani, $d(T)\Gamma U \subseteq S$ dir.

Ayrıca $d(T)\Gamma U$ nun M'nin bir sağ ideali olduğu görülür. Yani $d(T)\Gamma U$, M'nin S'de kapsanan bir sağ idealidir. Halbuki hipotezden M'nin böyle bir sağ ideali varsa bu sıfır olacağından $d(T)\Gamma U = 0$ yani,

$$d(T) \subseteq L \tag{3.3}$$

dir. Ayrıca U ve S nin tanımından $\forall u \in U, \alpha \in \Gamma, s \in S$ için

$U \ni u\alpha d(s) = d(u\alpha s) - d(u)\alpha s \in S \Rightarrow u\alpha d(s) \in U \cap S \Rightarrow u\alpha d(s) \in T, \forall u \in U,$

$\alpha \in \Gamma,\ s \in S$ İçin

olacağından burada (3.3) den yararlanılırsa $d(u\alpha d(s)) \in L$ olur. Bu durumda $d(u\alpha d(s)) = d(u)\alpha d(s) + u\alpha d^2(s)$ olduğundan

$$L \ni d(u)\alpha d(s) + u\alpha d^2(s), \forall u \in U, \alpha \in \Gamma, s \in S \text{ için} \tag{3.4}$$

bulunur. $\forall u, v \in U, \alpha, \beta \in \Gamma, s \in S$ için $d(u\alpha v)\beta d(s) = d(u)\alpha v\beta d(s) + u\alpha d(v)\beta d(s)$ olduğundan buradan,

$$\begin{aligned} d(u)\alpha v\beta d(s) &= d(u\alpha v)\beta d(s) - u\alpha d(v)\beta d(s) \\ &= d(u\alpha v)\beta d(s) - u\alpha d(v)\beta d(s) \\ &= d(u\alpha v)\beta d(s) - u\alpha d(v)\beta d(s) + (u\alpha v)\beta d^2(s) - (u\alpha v)\beta d^2(s) \\ &= d(u\alpha v)\beta d(s) + (u\alpha v)\beta d^2(s) - u\alpha\{d(v)\beta d(s) + v\beta d^2(s)\} \end{aligned}$$

yani, $\forall u, v \in U, \alpha, \beta \in \Gamma, s \in S$ için

$$d(u)\alpha v\beta d(s) = d(u\alpha v)\beta d(s) + (u\alpha v)\beta d^2(s) - u\alpha\{d(v)\beta d(s) + v\beta d^2(s)\} \tag{3.5}$$

bulunur. Buradan (3.4) ve L'nin sol ideal olmasından $\forall u, v \in U, \alpha \in \Gamma, s \in S$ için $d(u)\alpha v\beta d(s) \in L$ yani, $d(U)\Gamma U\Gamma d(S) \subseteq L$ elde edilir. O halde L'nin tanımından $d(U)\Gamma U\Gamma d(S)\Gamma U = 0$ ve buradan M nin asallığı kullanılarak,

$$d(U)\Gamma U = 0 \text{ veya } d(S)\Gamma U = 0$$

elde edilir. Eğer $d(U)\Gamma U = 0$ ise bu taktirde $d(U) \subseteq L$ olduğu açıktır.

$d(S)\Gamma U = 0$ olsun. Bu durumda $d(S) \subseteq L$ olacağından $d^2(U) \subseteq L$ dir. Gerçekten, $\forall u \in U$ için $d^2(u) = d(d(u))$ eşitliğinde $d(u) \in S$ ve $d(S) \subseteq L$ olduğu kullanılarak $d^2(u) \in L$ yani, $d^2(U) \subseteq L$ dir.

$\forall u, v \in U, \alpha \in \Gamma$ için $d^2(u\alpha v) = d(d(u\alpha v)) = d(d(u)\alpha v + u\alpha d(v)) = d^2(u\alpha v) + 2d(u)\alpha d(v) + u\alpha d^2(v) \Rightarrow d^2(u\alpha v) = d^2(u\alpha v) + 2d(u)\alpha d(v) + u\alpha d^2(v)$ olduğundan buradan, $2d(u)\alpha d(v) = d^2(u\alpha v) - d^2(u)\alpha v - u\alpha d^2(v)$ elde edilir. Buradan da $d(S)\Gamma U = 0$, $d^2(U) \subseteq L$ ve L'nin sol ideal olduğu kullanılarak $\forall u, v \in U, \alpha \in \Gamma$ için

$2d(u)\alpha d(v) \in L$ bulunur. Bu ise char $M \neq 2$ olduğundan $\forall u, v \in U, \alpha \in \Gamma$ için $d(u)\alpha d(v) \in L$ yani,

$$d(U)\Gamma d(U) \subseteq L \qquad (3.6)$$

elde edilir. Ayrıca $\forall u, v, w \in U, \alpha, \beta \in \Gamma$ için $d(u)\alpha w\beta d(v) = d(u\alpha v)\beta d(v) - u\alpha d(w)\beta d(v)$ olduğundan buradan (3.6) ve L'nin sol ideal olması kullanılarak $d(U)\Gamma U\Gamma d(U) \subseteq L \Rightarrow d(U)\Gamma U\Gamma d(U)\Gamma U = 0$ elde edilir.

Bu ise M'nin asallığından $d(U)\Gamma U = 0$, yani $d(U) \subseteq L$ olması demektir.

Teorem 3.1.3: M, char $M \neq 2$ olacak şekilde bir asal Γ-halkası olsun. $(0) \neq U$, M'nin sıfırdan farklı bir ideali ve $0 \neq d$ bir türevi ve $0 \neq \delta$ ikinci bir türevi olsun. Bu durumda $\delta d(U) = 0$ ise $d(U) \subseteq L$, $\delta(U) \subseteq L$ dir.

İspat: $\delta d(U) = 0$ ve $S = \langle d(U) \rangle$ M'nin $d(U)$ ile üretilen alt halkası olsun. Bu durumda S'nin tanımından $\delta(S) = 0$ olduğu görülür. Ayrıca S, M'nin sıfırdan farklı hiçbir sağ idealini içermez. Gerçekten, aksini kabul edelim, yani $(0) \neq I \subset S$, M nin bir sağ ideali olsun. $I \subset S$ olduğundan $\delta(I) = 0$ dır. Buradan Lemma 2.2.5 (i) den $\delta = 0$ veya $I = 0$ ve $I \neq (0)$ kabul ettiğimizden $\delta = 0$ elde edilir.
Halbuki bu hipotezden $\delta \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani S, M'nin sıfırdan farklı hiçbir sağ idealini içermez. O halde Teorem 3.1.2 den

$$d(U) \subseteq L \qquad (3.7)$$

dir. Bu durumda $\forall u, v \in U, \alpha \in \Gamma$ için $d(u\alpha v) = d(u)\alpha v + u\alpha d(v)$ ifadesinde (3.7) kullanılırsa $d(u\alpha v) = u\alpha d(v)$, $\forall u, v \in U, \alpha \in \Gamma$ için yani,

$$d(U\Gamma U) = U\Gamma d(U) \qquad (3.8)$$

elde edilir. O halde $\forall u, v \in U, \alpha \in \Gamma$ için (3.8) eşitliğini ve hipotezi kullanarak

$0 = \delta d(u\alpha v) = \delta(u\alpha d(v)) = \delta(u)\alpha d(v) + u\alpha\delta d(v) = \delta(u)\alpha d(v)$

$\Rightarrow \forall u, v \in U, \alpha \in \Gamma$ için $\delta(u)\alpha d(v) = 0$

$\Rightarrow \delta(U)\Gamma d(U) = 0$ elde edilir.

Ayrıca burada $d \neq 0$ ve $U \neq (0)$ olduğundan $d(U) \neq 0$ dır. Gerçekten $d(U) = 0$ olsa Lemma 2.2.5 (i) den $d = 0$ veya $U = (0)$ olacağından verilen ifade doğrudur. Bu durumda $\delta(U)\Gamma d(U) = 0$ olacak şekilde $\exists 0 \neq d(U) \in M$ olup, buradan Lemma 3.1.1 den $\delta(U) \subseteq L$ bulunur.

3.2. Gamma Halkaları Üzerinde Modül Değerli (σ,τ)-Türevler:

Bu bölümde amacımız daha önceden Soytürk (1994, D.Tezi) tarafindan modül değerli (σ,τ)-türevler üzerinde gerçekleştirilen çalışmaları Gamma Halkaları üzerine genelleştirmektir.

Tanım: M bir Γ-halkası, X toplamsal bir değişmeli grup olsun.

$X\times\Gamma\times M \to X$, $(x,\gamma,m) \to x\gamma m$ olmak üzere $\forall x \in X$, $\forall\gamma, \delta \in \Gamma$ ve $\forall a, b \in M$ için

i) $x\gamma(a + b) = x\gamma a + x\gamma b$

ii) $(x_1 + x_2)\gamma b = x_1\gamma b + x_2\gamma b$

iii) $(x\gamma a)\delta b = x\gamma(a\delta b)$

özellikleri sağlanıyorsa X'e bir sağ M-modül denir.

Aynı şekilde sol M-modül tanımı yapılabilir. X, hem sağ hem de sol M-modül ise X'e kısaca M-bimodül denir

Tanım: M bir Γ-halkası, σ, M üzerinde bir dönüşüm olmak üzere $\forall m_1, m_2 \in M$, $\forall\alpha \in \Gamma$ için

$\sigma(m_1\alpha m_2) = \sigma(m_1)\alpha\sigma(m_2)$

$\sigma(m_1 + m_2) = \sigma(m_1) + \sigma(m_2)$

özellikleri sağlanıyorsa σ ya bir Γ-otomorfizm denir.

Tanım: M bir Γ-halkası, X bir M-modül olmak üzere,

$$C(X) = \{x \in X \mid x\alpha m = m\alpha x, \forall m \in M, \forall\alpha \in \Gamma \text{ için}\}$$

kümesine X modülünün merkezi (M nin X deki merkezi) denir.

Ayrıca σ ve τ, M üzerinde tanımlı herhangi iki dönüşüm olmak üzere,

$$C_{\sigma,\tau}(x) = \{x \in X \mid x\alpha\sigma(m) = \tau(m)\alpha x, \forall m \in M, \forall\alpha \in \Gamma \text{ için}\}$$

kümesine ise X modülünün (σ,τ)-merkezi denir.

Tanım: M bir Γ-halkası, $d : M \to M$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere $\forall m_1, m_2 \in M$ ve $\forall\alpha \in \Gamma$ için $d(m_1\alpha m_2) = d(m_1)\alpha m_2 + m_1\alpha d(m_2)$ eşitliği sağlanıyorsa d'ye M'de bir türev denir.

Tanım: M bir Γ-halkası ve σ, τ M üzerinde dönüşümler ve $(0) \neq X$ M-bimodül olsun. Bu durumda $d : M \to X$ toplamsal dönüşümü $\forall m_1, m_2 \in M$, $\forall \alpha \in \Gamma$ için

$$d(m_1\alpha m_2) = d(m_1)\alpha\sigma(m_2) + \tau(m_1)\alpha d(m_2)$$

eşitliğini sağlanıyorsa d'ye modül değerli bir (σ,τ)-türev denir.

Bundan sonraki çalışmalarımızda d modül değerli bir (σ,τ)-türev olmak üzere σ ile τ, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için $\sigma\alpha d = d\alpha\sigma$, $\tau\beta d = d\beta\tau$ özelliklerini sağlayan M'nin iki otomorfizmi olarak alınacaktır.

Ayrıca $\forall a, b \in M$ ve $\forall \beta \in \Gamma$ için $[a,b]_\beta = a\beta b - b\beta a$ olmak üzere,

$$[a\alpha b, c]_\beta = a\alpha[b,c]_\beta + [a,c]_\beta \alpha b + a\alpha(c\beta b) - a\beta(c\alpha b)$$

eşitliği sık sık kullanılacaktır.

M bir Γ-halkası, $(0) \neq X$ M-bimodül olmak üzere

$(G1) : x \in X, a \in M$ için $x\Gamma M\Gamma a = (0) \Rightarrow x = 0$ veya $a = 0$

$(G2) : x \in X, a \in M$ için $a\Gamma M\Gamma x = (0) \Rightarrow a = 0$ veya $x = 0$

koşullarını tanımlayalım.

Lemma 3.2.1: M bir Γ-halkası, $(0) \neq X$ M-bimodül olsun. Bu taktirde

(i) Eğer (G1) (veya (G2)) koşulu varsa M asaldır.

(ii) Eğer (G1) (veya (G2)) koşulu var ve X 2-torsion free ise M de 2-torsion freedir.

İspat: (i) (G1) koşulu sağlansın. Herhangi $a, b \in M$ için $a\Gamma M\Gamma b = 0$ olduğunu kabul edelim. Verilen $(0) \neq x \in X$ için $x\Gamma M\Gamma(a\Gamma M\Gamma b) = x\Gamma M\Gamma 0 = 0$ olduğundan $x\Gamma M\Gamma(a\Gamma M\Gamma b) = 0$ yani, $(x\Gamma M a)\Gamma M\Gamma b = 0$ elde edilir. Burada (G1) özelliğinden $x\Gamma M\Gamma a = 0$ veya $b = 0$ ve yine (G1) den $x = 0$ veya $a = 0$ veya $b = 0$ elde edilir. $x \neq 0$ olduğundan buradan $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Sonuç olarak $\forall a, b \in M$ için $a\Gamma M\Gamma b = 0$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ bulunmuş olur. O halde M asaldır.

Aynı şekilde (G2) koşulu varken M nin asallığı gösterilebilir.

(ii) (G1) koşulu sağlansın ve X, 2-torsion free olsun. Herhangi $m \in M$ için $2m = 0$ olsun. Bu durumda $m + m = 0$ dır. Buradan $\forall x \in X$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ ve $\forall m' \in M$ için

$x\alpha m'\beta(m + m) = x\alpha m'\beta 0 = 0$

$\Rightarrow x\alpha m'\beta m + x\alpha m'\beta m = 0$

yani $2x\alpha m'\beta m = 0$ elde edilir. Bu ise X, 2- torsion free olduğundan $\forall x \in X$, $\forall m \in M$ için $x\Gamma M\Gamma m = (0)$ olması demektir. Burada (G1) özelliği kullanılırsa $x = 0$ veya $m = 0$ elde edilir. $X \neq (0)$ kabul edildiğinden buradan $m = 0$ elde edilir. Sonuç olarak M, 2-torsion free bulunur.

(G2) koşulu sağlandığında da benzer işlemlerle M nin 2-torsion free olduğu gösterilebilir.

Lemma 3.2.2: M bir Γ- halkası, X M-bimodül ve $(0) \neq U$ bir ideal olsun. Bu durumda (G1) (veya (G2)) var ve $\forall x \in X$, $\forall a \in M$ için $x\Gamma U\Gamma a = (0)$ (veya $a\Gamma U\Gamma x = (0)$) ise $x = 0$ veya $a = 0$ dır.

İspat: $x \in X$ ve $a \in M$ için $x\Gamma U\Gamma a = (0)$ olsun. U, M'nin bir ideali olduğundan $x\Gamma M\Gamma U\Gamma a \subset x\Gamma U\Gamma a = (0)$ yani, $x\Gamma M\Gamma U\Gamma a = (0)$ elde edilir. Bu ise (G1) den $x = 0$ veya $U\Gamma a = (0)$ olması demektir.

Öte yandan 3.2.1 (i) den dolayı M asal olacağından Lemma 2.2.4 (ii) den $a = 0$ bulunur.

Sonuç olarak $x = 0$ veya $a = 0$ elde edilir.

(G2) sağlandığında $x \in X$ ve $a \in R$ için $aUx = (0)$ ise benzer işlemlerle $x = 0$ veya $a = 0$ olduğu gösterilebilir.

Lemma 3.2.3: M bir Γ-halkası, $(0) \neq U$ M nin bir sağ ideali, $(0) \neq X$ M-bimodül olsun ve (G2) koşulu bulunsun. Bu durumda

$d : M \to X$ bir (σ,τ)-türev olmak üzere

(i) $d(U) = (0)$ ise $d = 0$ dır.

(ii) $a \in M$ için $a\Gamma d(U) = (0)$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

İspat: (i) U nun sağ ideal olduğu hipotezde kullanılırsa $\forall u \in U$, $m \in M$, $\alpha \in \Gamma$ için

$0 = d(u\alpha m) = d(u)\alpha\sigma(m) + \tau(u)\alpha d(m) = \tau(u)\alpha d(m)$, yani

$$0 = \tau(u)\alpha d(m),\ \forall u \in U,\ \forall \alpha \in \Gamma \text{ ve } \forall m \in M \text{ için}$$

elde edilir. Bu ifade m yerine $\tau^{-1}(s)\beta m$, $s \in M$ alınırsa,

$0 = \tau(u)\alpha d(\tau^{-1}(s)\beta m) = \tau(u)\alpha(d(\tau^{-1}(s))\beta\sigma(m) + \tau(\tau^{-1}(s)\beta d(m)) = \tau(u)\alpha d(\tau^{-1}(s))\beta\sigma(m)$ $+ \tau(u)\alpha s\beta d(m) = \tau(u)\alpha s\beta d(m)$ yani,

$$\tau(U)\Gamma M\Gamma d(M) = (0) \tag{3.9}$$

bulunur. (3.9) a (G2) uygulandığında $\tau(U) = (0)$ veya $d(M) = (0)$ yani, $U = (0)$ veya $d = 0$ elde edilir. $U \neq (0)$ olduğundan buradan $d = 0$ elde edilir.

(ii) $a \in M$ için $a\Gamma d(U) = (0)$ olsun. Bu durumda U bir sağ ideal olduğundan $\forall u \in U$, $\forall m \in M$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için

$0 = a\beta d(u\alpha m) = a\beta\{d(u)\alpha\sigma(m) + \tau(u)\alpha d(m)\} = a\beta d(u)\alpha\sigma(m) + a\beta\tau(u)\alpha d(m)$ $= a\beta\tau(u)\alpha d(m)$ yani,

$$a\Gamma\tau(U)\Gamma d(M) = (0) \tag{3.10}$$

bulunur. Buradan Lemma 3.2.2 den $a = 0$ veya $d(M) = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $d = 0$ elde edilir.

Uyarı (I): U, M nin bir sol ideali olduğunda ve (G1) sağlandığında

(i) $d(U) = (0)$ ise $d = 0$,

(ii) $a \in M$ için $d(U)\Gamma a = (0)$ ise $d = 0$ veya $a = 0$,

oldukları benzer işlemlerle gösterilebilir.

Lemma 3.2.4: M komütatif olmayan bir Γ-halkası, $(0) \neq X$ 2-torsion free bir M-modül, $(0) \neq U$ bir ideal olsun ve (G1) koşulu sağlansın. $d_1 : R \rightarrow X$ bir (σ,τ)-türev, $d_2 : M \rightarrow M$, $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde bir türev olmak üzere $d_1d_2(U) = (0)$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat: Hipotezden $\forall u,v \in U$ ve $\forall \alpha \in \Gamma$ için

$0 = d_1d_2(u\alpha v) = d_1\{d_2(u)\alpha v + u\alpha d_2(v)\} = d_1(d_2(u)\alpha v) + d_1(u\alpha d_2(v))$

$= d_1d_2(u)\alpha\sigma(v) + \tau(d_2(u))\alpha d_1(v) + d_1(u)\alpha\sigma(d_2(v)) + \tau(u)\alpha d_1d_2(v)$

$= \tau(d_2(u))\alpha d_1(v) + d_1(u)\alpha\sigma(d_2(v))$

yani, $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha \in \Gamma$ için $0 = \tau(d_2(u))\alpha d_1(v) + d_1(u)\alpha\sigma(d_2(v))$ bulunur. Burada v yerine $d_2(v)$ alınırsa,

$0 = \tau(d_2(u))\alpha d_1(d_2(v)) + d_1(u)\alpha\sigma(d_2(d_2(v))) = \tau(d_2(u))\alpha d_1d_2(v) + d_1(u)\alpha\sigma(d_2^2(v))$ $= d_1(u)\alpha\sigma(d_2^2(v))$, $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha \in \Gamma$ için elde edilir. Yani, $d_1(U)\Gamma\sigma(d_2^2(U)) = (0)$

bulunur. Bu ifadede Uyarı I (ii) kullanıldığında $d_1 = 0$ veya $\sigma(d_2^2(U)) = (0)$ yani,$d_1 = 0$ veya $d_2^2(U) = (0)$ elde edilir. $d_2^2(U) = (0)$ ise Lemma 2.2.5 (iii) den $d_2 = 0$ olacağından sonuç olarak $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ elde edilir.

Lemma 3.2.5: M bir Γ-halkası, $(0) \neq X$ bir M-bimodül, $(0) \neq U$ M nin bir ideali olsun ve (G1) sağlansın. Bu durumda $0 \neq d : M \to X$ bir (σ,τ)-türev olmak üzere $d(U) \subset C(X)$ ise M komütatiftir.

İspat: U ideal olduğundan hipotezden $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha \in \Gamma$ için $d(u\alpha v) \in C(X)$ yani, $\forall m \in M$, $\forall \beta \in \Gamma$ için $[d(u\alpha v),m]_\beta = 0$ dır. Bu ise,

$$0 = [d(u)\alpha\sigma(v) + \tau(u)\alpha d(v),m]_\beta = [d(u)\alpha\sigma(v),m]_\beta + [\tau(u)\alpha d(v),m]_\beta \qquad (3.11)$$

olması demektir. Bu toplamdaki terimler açılıp hipotezden yararlanılırsa,

$[d(u)\alpha\sigma(v),m]_\beta = d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta + [d(u),m]_\beta\alpha\sigma(v) + d(u)\alpha(m\beta\sigma(v))$

$- d(u)\beta(m\alpha\sigma(v)) = d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta + (d(u)\alpha m)\beta\sigma(v) - d(u)\beta(m\alpha\sigma(v))$

$= d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta + (m\alpha d(u))\beta\sigma(v) - d(u)\beta(m\alpha\sigma(v))$

$= d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta + m\alpha(d(u)\beta\sigma(v)) - d(u)\beta(m\alpha\sigma(v))$

$= d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta + m\alpha(\sigma(v)\beta d(u)) - d(u)\beta(m\alpha\sigma(v))$

$= d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta + (m\alpha\sigma(v))\beta d(u) - d(u)\beta(m\alpha\sigma(v))$

$= d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta + d(u)\beta(m\alpha\sigma(v)) - d(u)\beta(m\alpha\sigma(v))$

$= d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta$, $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$, $\forall m \in M$ için

elde edilir. Aynı şekilde ikinci terim açıldığında,

$[\tau(u)\alpha d(v),m]_\beta = [\tau(u),m]_\beta\alpha d(v)$, $\forall u, v \in U$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$, $\forall m \in M$ için bulunur.

(3.11) de bu ifadeler yazıldığında,

$0 = [d(u)\alpha\sigma(v),m]_\beta + [\tau(u)\alpha d(v),m]_\beta = d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta + [\tau(u),m]_\beta\alpha d(v)$ yani,

$$0 = d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta + [\tau(u),m]_\beta\alpha d(v),\ \forall u, v \in U,\ \alpha, \beta \in \Gamma,\ m \in M \text{ için} \qquad (3.12)$$

elde edilir. Burada v yerine $v\gamma\sigma^{-1}(m)$, $\gamma \in \Gamma$ yazılırsa

$0 = d(u)\alpha[\sigma(v\gamma\sigma^{-1}(m)),m]_\beta + [\tau(u),m]_\beta\alpha d(v\gamma\sigma^{-1}(m)) = d(u)\alpha[\sigma(v)\gamma m,m]_\beta + [\tau(u),m]_\beta\alpha\{d(v)\gamma m+\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m))\} = d(u)\alpha\{\sigma(v)\gamma[m,m]_\beta + [\sigma(v),m]_\beta\gamma m$

$+ \ \sigma(v)\gamma(m\beta m) \ - \ \sigma(v)\beta(m\gamma m)\} \ + \ [\tau(u),m]_\beta\alpha d(v)\gamma m \ + \ [\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m))$

$= d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta\gamma m + d(u)\alpha(\sigma(v)\gamma(m\beta m) - \sigma(v)\beta(m\gamma m) + [\tau(u),m]_\beta\alpha d(v)\gamma m +$

$[\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m)) = \{d(u)\alpha[\sigma(v),m]_\beta + [\tau(u),m]_\beta\alpha d(v)\}\gamma m +$

$[\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m)) + d(u)\alpha(\sigma(v)\gamma(m\beta m) - \sigma(v)\beta(m\gamma m))$

ve buradan hipotez ve (3.12) kullanılarak $\forall u, v \in U \ \forall\alpha, \beta \in \Gamma, \forall m \in M$ için,

$0 = [\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m)) + d(u)\alpha\{\sigma(v)\gamma(m\beta m) - \sigma(v)\beta(m\gamma m)\}$

$= [\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m)) + d(u)\alpha\sigma(v)\gamma(m\beta m) - d(u)\alpha\sigma(v)\beta(m\gamma m)$

$= [\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m)) + (\sigma(v)\alpha d(u))\gamma m\beta m - d(u)\alpha\sigma(v)\beta(m\gamma m)$

$= [\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m)) + \sigma(v)\alpha(m\gamma d(u))\beta m - d(u)\alpha\sigma(v)\beta(m\gamma m)$

$= [\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m)) + \sigma(v)\alpha m\gamma(m\beta d(u)) - d(u)\alpha\sigma(v)\beta(m\gamma m)$

$= [\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m)) + d(u)\beta(\sigma(v)\alpha m\gamma m) - d(u)\alpha\sigma(v)\beta(m\gamma m)$

$= [\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m)) + \sigma(v)\beta d(u)\alpha(m\gamma m) - d(u)\alpha\sigma(v)\beta(m\gamma m)$

$= [\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m)) + (\sigma(v)\beta m)\alpha d(u)\gamma m - d(u)\alpha\sigma(v)\beta(m\gamma m)$

$= [\tau(u),m]_\beta\alpha\tau(v)\gamma d(\sigma^{-1}(m)) + d(u)\alpha\sigma(v)\beta(m\gamma m) - d(u)\alpha\sigma(v)\beta(m\gamma m)$

$\Rightarrow \ [\tau(U),M]_\beta\Gamma\tau(U)\Gamma d(\sigma^{-1}(M)) = (0), \forall\beta \in \Gamma$ için

bulunur. Bu ise Lemma 3.3.2 den $[\tau(U),M]_\beta = 0$ veya $d(\sigma^{-1}(M)) = 0$ olması demektir. σ^{-1} örten olduğundan buradan $[\tau(U),M]_\beta = 0$ veya $d(M) = (0)$ yani, $d \neq 0$ olduğundan $\forall\beta \in \Gamma$ için $[\tau(U),M]_\beta = 0$ ve buradan $\tau(U) \subset Z$ elde edilir. O halde Lemma 2.2.4 (i) den M komütatif bulunur.

SONUÇLAR

Tezimizin ikinci bölümünde Gamma Halkaları ve daha önceden Soytürk (1994, D.Tezi) tarafından Gamma Halkalarındaki Türev ve Modül Değerli Türevler kullanılarak elde edilen komütatiflik koşulları ele alınmış ve son bölümde ise Türevli Asal Γ-halkalarının Tek Yanlı İdealleri üzerinde bazı sonuçlar ile Γ-halkalarında tanımlı Modül Değerli (σ,τ)-Türevler kullanılarak birtakım sonuçlar tarafımızdan elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. AWTAR, R., 1984. Lie Structure in Prime Rings with Derivations. Publ. Math. Debrecen 31, 209-215.

2. AYDIN, N. and KAYA, K., 1992. Some Generalizations in Prime Rings with (σ,τ)-Derivations. Doğa – Tr. J. of Math., 16, 169-176.

3. BARNES, W.E., 1968. On the Γ-Rings of Nobusawa. Pacific J. of Math., Vol.18, No:3, 411-422.

4. BERGEN, J. and HERSTEIN, I.N. and KERR, J.W., 1981. Lie Ideals and Derivations of Prime Rings. J. of Algebra 1, 259-267.

5. BRESAR, M. and VUKMAN, J., 1989. Ortogonal Derivations and Extension of a Theorem of Posner. Radovi Matematicki, Vol.5, 237-246.

6. BRESAR, M. and VUKMAN, J., 1991. On the Left Derivations and Related Mappings. Proc. Amer. Math.-Soc., Vol. 110, No:1, 7-16.

7. BRESAR, M., 1994. One-sided Ideals and Derivations of Prime Rings. Proc. Amer. Math. Soc., Vol.122, No:4, 979-983.

8. BRESAR, M. and VUKMAN, J. Jordan (θ,φ)-Derivations. Glasnic Mathematica'da yayınlanacak.

9. HERSTEIN, I.N.,1968. Noncommutative Rings. Carus Math. Monographs, No:15, Math. Ass. America.

10. HERSTEIN, I.N., 1969. Topics in Ring Theory. Univ. of Chicago Press, Chicago.

11. HERSTEIN, I.N., 1976. Rings with Involution. Univ. of Chicago Press, Chicago.

12. HERSTEIN, I.N.,1979. A note Derivations II.Canad. Math. Bull., 22 (4), 509-511.

13. HIRANO, Y. and TOMINAGA, H., 1984. Some Commutativity Theorems for Prime Rings with Derivations and Differentially Semi-prime Rings. Math. J.Okayama Univ., 26, 101-108.

14. JING, F.J., 1987. On Derivations of Γ-rings. Qufu Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban 13, No:4.

15. KANDAMAR, H. and KAYA, K., 1992. Lie Ideals and (σ,τ)-Derivations in Prime Rings. Hacettepe Bull. of Natural Sciences and Engineering,

Vol.21, 29-33.

16. KAYA, K., 1991. Asal Halkalarda (σ,τ)-Lie Idealler. IV. Ulusal Mat. Sempozyumu, Antakya.

17. LEE, P.H. and LEE, T.K., 1981. On Derivations of Prime Rings. Chinese J.Math., 9(2), 107-110.

18. LEE, P.H. and LEE, T.K., 1983. Lie Ideals of Prime Rings with Derivations. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 11, 75-80.

19. MC.COY, N., 1964. Theory of Rings. The Macmillian Company, New York.

20. POSNER, E., 1957. Derivations in Prime Rings. Proc.Amer.Math.Soc., 8, 1093-1100.

21. VUKMAN, J.1989. Symmetric Bi-Derivations on Prime and Semi-prime Rings. Aeqotiones Math., 38, 245-254, University of Waterloo.

22. SOYTÜRK, M., 1994. Türevli Halkalarda bazı Genelleştirmeler, Cumhuriyet Ünv. Fen Bil. Ens. Doktora Tezi. Sivas.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Kocaeli'de doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Kocaeli'de tamamladı. 1992 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden 1996 yılında Matematikçi olarak mezun oldu.

10.10.1997 tarihinden itibaren Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Cebir Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.