

57732

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ELEKTROMANYETİK DALGALARIN HOMOJEN OLMAYAN
ORTAMLARDA TERS SAÇILMA PROBLEMİ**

**DOKTORA TEZİ
Y.Müh.Serda APAK**

**Ana Bilim Dalı: ELEKTRONİK
Programı : HABERLEŞME**

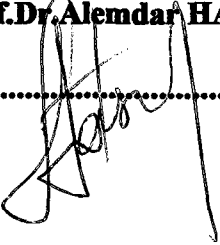
Kasım,1995

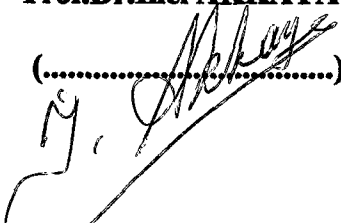
KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ


**ELEKTROMANYETİK DALGALARIN HOMOJEN OLMAYAN
ORTAMLARDA TERS SAÇILMA PROBLEMİ**

DOKTORA TEZİ
Y.Müh.Serda APAK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 1.10.1995
Tezin Savunulduğu Tarih: 1.12.1995

Tez Danışmanı
Prof.Dr.Alemdar HASANOĞLU
(.....)


Üye
Prof.Dr.İnci AKKAYA
(.....)


Üye
Doç.Dr.Doğan DİBEKÇİ
(.....)


Kasım,1995

HOMOJEN OLMAYAN ORTAMLARDA TERS

SAÇILMA PROBLEMLERİ

Serda APAK

Anahtar Kelimeler: Elektromanyetik Dalgalar, Helmholtz Denklemi, Ters Saçılma

Özet: Bu çalışmada, üç katmanlı homojen bir ortamın ara katında homojen olmayan silindirik bir cismin bulunması durumundaki ters saçılma problemi incelenmiş ve sayısal olarak çözümü gerçekleştirilmiştir. Ele alınan ters problemin çözümünün temelini iki fonksiyonel denklem teşkil etmektedir. Bu fonksiyonel denklemlerden birisi ortamda alınan deneysel ölçüm sonuçlarından bağımsızken, diğeri ancak bu ölçümlerle belirlenebilir. Bu denklemlerin öncelikle analitik incelenmesi yapılmış ve daha sonra bu integral denklemlerin çözümü için algoritma kurulmuştur. Method ve algoritmayı test etmek için dairesel kesitli silindirden saçılma örneğine bakılmıştır.

THE INVERSE SCATTERING PROBLEMS IN NON-HOMOGENEOUS MEDIA

Serda APAK

Key Words: Electromagnetic waves, Helmholtz Equation, Inverse Scattering, Non-Homogeneous medium, Numerical Solution of Singular Integral Equations

Abstract: In this study, the inverse scattering problem of three layer homogeneous medium having non-homogeneous cylindrical body inside is considered and its numerical solution is obtained. The approach to the problem is based on two functional equations. While one of them is independent of the experimental measurements, the other can only be determined by these measurements. First, analytical investigations on these equations are performed and then an algorithm is established for the solution. To test the method and the algorithm, scattering from circular cylinder case is used.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Günümüzde mühendislik ve tıpta geniş uygulama alanlarına sahip elektromanyetik veya akustik dalgaların homojen olmayan ortamlarda ters saçılma problemleri üzerinde çok sayıda bilim adamının çalıştığı konulardan birisidir ve bu da problemin güncelliği ile bağlantılıdır. Dalga denklemleri için ters problemler, saçılan dalganın karakteristik özelliklerini gösteren deneysel ölçüm sonuçlarını kullanarak, homojen olmayan saçılma ortamının özelliklerini belirleyen katsayıların bulunmasıdır. Örneğin; mühendislikte malzemelerin tahribatsız muayenesi ve Jeofizik'te saçılan sismik değerler kullanılarak Dünyanın iç yapısının belirlenmesi dalga denklemleri için ters problemlerin uygulama alanlarıdır. Bu çalışmalarda problemin matematiksel modeli kurulurken bir çok fiziksel prosesler göz önüne alınmamakta ve bir takım varsayımlar düşünülmektedir. Bu çalışmanın amacı maksimal sayıda fiziksel prosesleri göz önüne alan, gerçeğe daha yakın bir modelin oluşturulması olmuştur. Böyle bir model, sabit olmayan katsayılı dalga denklemleri sisteminin çözümü ile bağlantılıdır. Genellikle, ters problemlerin çözümü tek ve verilenlere sürekli bağlı değildir. Ayrıca bu sistem simetrik olmadığından problemin sayısal çözümü için yeni yöntemler oluşturmak gereği orta çıkmaktadır. Bu nedenle çalışmamda oluşturulan yeni yöntemle problemin nümerik olarak çözümü gerçekleştirilmiştir.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren danışmanım sayın Prof.Dr. Alemdar HASANOĞLU'na (KO.Ü), yardımlarını gördüğüm sayın Doç.Dr. Afet FETULLAYEV (KO.Ü.) ve Doç.Dr. Elşen VELİYEV'e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ Ve TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. ELEKTROMANYETİK DALGALARIN YAYILMASI	4
2.1. Maxwell Denklemleri	4
2.2. Elektromanyetik Dalga Denklemleri	9
BÖLÜM 3. DÜZLEMSEL MONOKROMATİK DALGALARIN KIRILMASI ve YANSIMASI	14
3.1. Düşey ve Paralel Polarizasyonlu Elektromanyetik Dalgaların Kırılması ve Yansıması	18
3.2. Yansıma ve Kırılma Katsayıları	20

BÖLÜM 4. ELEKTROMANYETİK DALGALARIN DÜZ ve TERS SAÇILMA PROBLEMLERİNİN ANALİTİK İNCELENMESİ	27
4.1. Dielektrik Katsayısı Sabit Olan Silindirden Elektromanyetik Dalgaların Saçılması	34
4.2. Elektromanyetik Dalgaların Ters Saçılma Probleminin Analitik İncelenmesi	38
BÖLÜM 5. HOMOJEN OLMAYAN ORTAMLARDA ELEKTROMANYETİK DALGALARIN TERS SAÇILMA PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	47
5.1. Problemin Formülasyonu	47
5.2. Sayısal Çözüm İçin Denklemlerin Uygun Hale Getirilmesi	49
5.3. Sayısal Çözüm Algoritması	51
BÖLÜM 6. SAYISAL DENEYLERİN SONUÇLARI ve ÖNERİLER	58
6.1. Hesaplama Sonuçları	61
6.1.1. Fiziksel ve Geometrik Özellikleri Değiştirerek Alınan Sonuçlar	62
6.1.2. Değişik Giriş Verileri İçin Sayısal Sonuçlar	65
6.2. Öneriler	67
KAYNAKLAR	69
EKLER	74
ÖZGEÇMİŞ	80

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Herhangi bir kapalı eğri ile zincirlenen akımlar	6
Şekil 3.1. İki farklı ortamı ayıran sınır yüzeyinde alınan ΔS yüzeyi	15
Şekil 3.2. İki farklı ortamı ayıran sınır yüzeyinde elektromanyetik dalgaların kırılması ve yansımaları	16
Şekil 3.3. Düşey polarizasyonlu gelen dalgaların kırılması ve yansımaları	19
Şekil 3.4. Paralel polarizasyonlu gelen dalga için kırılma ve yansımaları	20
Şekil 3.5. θ_i açısıyla gelen dalganın bir ortamdan diğerine geçerken kırılması ...	21
Şekil 4.1. Farklı fiziksel özelliklere sahip üç katmanlı homojen ortam	28
Şekil 4.2. Üç katmanlı homojen ortamda dalgaların yayılması	29
Şekil 4.3. Yansıyan dalgalar arasındaki faz farkı	30
Şekil 4.4. Üç katmanlı ortamda $k^2(x_2)$ 'nin değişimi	40
Şekil 4.5. $\theta \in (-\pi, 0)$ olması durumunda gelen dalga	42
Şekil 4.6. Dalgaların kırılması ve yansımaları	43
Şekil 5.1. Kompleks düzlemde η 'nin değişimi	50
Şekil 5.2a. Birim çemberde θ_i 'nin değişimi	52
Şekil 5.2b. ξ_j 'nin birim çemberde değişimi	52
Şekil 6.1. Saçıcı cismin koordinat sistemindeki konumu	59
Şekil 6.2. $v(x)$ fonksiyonu	62

Şekil 6.3.Saçılan alanın koordinatlara göre değişimi	63
Şekil 6.4.Toplam alan	63
Şekil 6.5. $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ve $\omega l_0 = 1$ için $v(x)$ fonksiyonu	64
Şekil 6.6. $v(x) = 1$ için alınan sonuç	65
Şekil 6.7. $v(x) = 4$ için alınan sonuç	65
Şekil 6.8 Algoritmanın kafes yapısı	66
Şekil 6.9 İdeal durumdaki $v(x)$ fonksiyonu	66
Şekil 6.10 Daha küçük adım için $v(x)$ fonksiyonu	67
Şekil 6.11 Büyük n değerleri için $v(x)$ fonksiyonu	67
Şekil 6.12 Kafes adımı-zaman karakteristiği	68
Şekil 6.13 n sayısı-zaman karakteristiği	68

1.GİRİŞ

Saçılma teorisi XX.yüzyıl matematiksel fen bilimlerinde araştırılan temel konulardan birisi olmuştur. Rayleigh'in göğün neden mavi olduğunu açıklamasından, Rutherford'un atom çekirdeklerini keşfetmesinden bilgisayarlı tomografinin modern tıbbi uygulamaları ile saçılma olgusu yüzyıldan fazla bir süredir bilimadamlarının ilgilerini çekmiş ve bu konuda çalışmalarını sağlamıştır.

Akustik ve elektromagnetik dalgaların ters saçılma problemi son on yıllık süre içerisinde sayısal uygulamalı bir kaç değerlendirme olmaktan çıkmış, sayısal algoritması çok iyi gelişmiş matematiksel teori haline gelmiştir. Akustik ve elektromagnetik dalgaların ters saçılma problemi kabaca iki sınıfa ayrılabilir. Bunlar ters engel problemi ve ters araortam problemleridir. Ters engel problemi bazı özellikleri belli olan homojen bir engelden saçılmış alanın sonsuzdaki bilgisinden yani uzak alan modelinden cismin bilinmeyen özelliklerinin bulunmasıdır. Ters araortam probleminde ise, homojen olmayan bir araortam saçıcı cisim olarak değerlendirilir ve uzak alan modelinden ortamın özelliklerini belirleyen parametrelerinin bir veya birkaçı bulunur.

Diferansiyel ve İntegral Denklemler teorisinde ters problemler ilk defa A.N. Tikonov (1943) tarafından araştırılmıştır. Daha sonra fonksiyonel analizde ters spektral problemler I.Gelfand (1951) tarafından formüle edilmiştir.

V.A.Marçenko (1955)'nin çalışmasından başlayarak analizde ve diferansiyel denklemlerde dalgaların saçılmasına bağlı ters problemler sistematik olarak araştırılmaya başlanmıştır. Örneğin; Jones (1979, 1985) ve Colton and Kress (1983, 1992) önce saçılma problemlerini ele almışlar, daha sonra düz probleminin çözümünün ters saçılma problemi çözümüne asimptotik olarak yaklaşması nedeniyle öncelikle düz problem için çözümün varlığını ve eşsizliğini ispatlamışlardır.

Bu önemli problemin analitik olarak incelenmesi konusunda çok az sayıda yayın bulunmaktadır. Problemin matematiksel yanının çok zor olmasından dolayı bir çok araştırmacı bazı yaklaşımlarla bu problemi çözmüştür. Bunlardan birisi de Born yaklaşımıdır. Born yaklaşımı, problemin oldukça fazla varsayımlar altında çözümünü sağlamaktadır. Yine de bu yaklaşım oldukça iyi teorilerin ortaya çıkmasına yardımcı olmuştur. Helmholtz denkleminin temel analitik çözümlerinin bir dizi farklı yaklaşımlarının örnekleri Chadan ve Sabatier (1989), Colton ve Kress (1992), Jones (1985), Lax ve Phillips (1967), Leis (1986), Müller (1969), Newton (1982), Reed ve Simon (1979), Wilcox (1975) ve Mithat İdemen (1990)' da incelenebilir.

Akustik ve elektromagnetik dalgaların ters saçılma probleminde birçok konuyu kapsama almak imkansızdır. Alanın çok hızlı gelişmesi böyle bir amacın gerçekleşmesini engellemektedir. Burada özellikle lineer olmayan ters saçılma probleminin yapısı üzerinde durulmuş ve belirli durumlarda uygulanabilirliği olan çeşitli lineer yöntemler anlatılmıştır. Bu çalışmada elektriksel ve manyetik parametreleri bilinen bir katmanın ara katında bulunan cismin geometrik ve fiziksel özellikleri saçılan dalgaların deneysel ölçüm sonuçlarını kul-

lanılarak bulunmuştur. Bunu gerçekleştirirken önce II.bölümde elektromanyetik dalgaların yayılması ile ilgili Maxwell denklemleri ve bu denklemlerden Helmholtz eşitliklerinin elde edilmesi incelenmiş, III. bölümde kırılma ve yansıma kanunları anlatılmış, IV. bölümde Elektromanyetik dalga ters problemleri iki farklı yaklaşım altında incelenmesi yapılmış ve V. bölümde problemin sayısal çözümü için algoritma verilmiştir. VI.bölümde ise sayısal çalışmadan elde edilen örnek sonuçlar verilmiştir.



2.ELEKTROMANYETİK DALGALARIN YAYILMASI

2.1 Maxwell Denklemleri

Elektrik ve manyetik alanın varlığı herhangi bir noktaya getirilen bir yüke tesir eden kuvvet yardımıyla anlaşılır. Elektrik alan ve manyetik alan arasında önemli farklar vardır. Bu farklardan birisi elektrik alanının duran ve hareket eden yüklere; manyetik alanın ise sadece hareket halindeki yüklere kuvvet uygulamasıdır. Bir diğeri ise; elektrik alanı bir vektörel alan olup, hem duran, hem de hareket eden yükler tarafından oluşturulurken yine bir vektör alanı olan magnetik alanın sadece hareket eden yüklerce oluşturulabilmesidir.

James Clerk Maxwell 1873 yılında o güne kadar olan elektriksel ve manyetiksel çalışmaları analiz ederek, elektrik ve manyetik alanların aynı bir elektromanyetik alanın farklı durumlarda tezahür formları olduğu sonucuna varmıştır. Maxwell, uzayda keyfi dağılımlı yüklerin ve akımların oluşturduğu elektromanyetik alanın tüm özelliklerini kapsıyan diferansiyel denklemler sistemini bulmuştur. Bu denklemler bir çok matematikçi ve fizikçinin elektromanyetik dalgaların yayılması ile ilgili çalışmalarında temel teşkil etmiştir.

Maxwell'in diferansiyel denklemlerinin elde edilmesini incelemeden önce vektör analizinden bilinen integral teoremlerini ve bir vektör fonksiyonunun gradyan, diverjans, rotasyonel ifadelerini verelim. \vec{F} bir vektör fonksiyonu, A ise skaler bir fonksiyon olsun.

$\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ ise birim vektörlerdir.

$$\text{grad } A = \vec{\nabla} A = \frac{\partial A}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{u}_z \quad (2.1)$$

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \\ \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \\ & + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{div rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{rot grad } A = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} A) = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{div grad } A = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} A) = \nabla^2 A = \Delta A \quad (2.6)$$

Diverjans Teoremi :

$$\int_s \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_v \int \int \nabla \cdot \vec{F} dv \quad (2.7)$$

Stokes Teoremi :

$$\oint_c \vec{F} dl = \int_s \int \vec{\nabla} \times \vec{F} ds \quad (2.8)$$

şeklindedir.

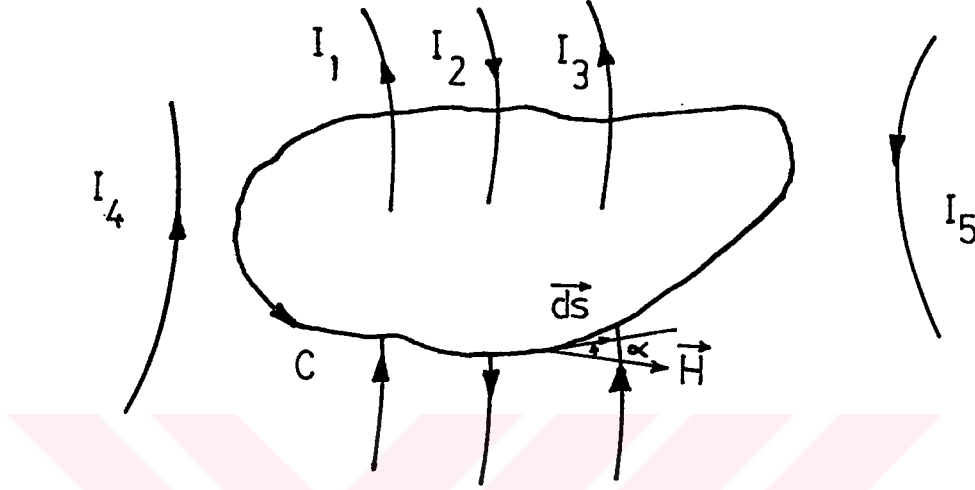
Magnetik alan şiddetinin herhangi bir c kapalı eğrisi boyunca hesaplanan çizgisel integrali, bu eğriye dayanan bir yüzeyi delen ve dolayısıyla eğri ile zincirlenen akımların cebrik toplamına eşittir.

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{top}} \quad (2.9)$$

Zamana göre değişen elektrik alanının olması durumunda

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{I}_{\text{top}} + \int_s \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.10)$$

şeklinde zamana göre değişen manyetik alan meydana gelir.



Şekil 2.1 Herhangi bir kapalı eğri ile zicirlenen akımlar

(2.10) un sol tarafına Stokes teoremini uygularsak;

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \int \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} \quad (2.11)$$

(2.10)'da (2.11)'i yerine koyarsak:

$$\int_s \int \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_s \int \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_s \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.12)$$

Buradaki J akım yoğunluğudur ve $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$ ilişkisi ile \vec{E} elektrik alan vektörüne bağlıdır. σ iletkenliği gösterir. (2.12)'den

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.13)$$

(2.13) Maxwell Ampere denklemdir. $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 'ye deplasman akım yoğunluğu denir ve bu akımın elektrik yüklerinin hareketi ile bir ilgisi yoktur. Bilindiği gibi boşluktan

başka her dielektrik zayıf da olsa bir akım geçirir. Dolayısı ile akım değiştiğinde elektrik alanıda değişeceğinden bir deplasman akımı oluşacaktır.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \left[\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = -\operatorname{div} \vec{J} \quad (2.15)$$

Bu eşitliğin her iki tarafının t ye göre integralini alıp, incelemeye devam edelim:

$$\int_t \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) dt = - \int_t \operatorname{div} \vec{J} dt \quad (2.16)$$

(2.16) dan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\operatorname{div} \vec{D} = - \int_t \operatorname{div} \vec{J} dt = \operatorname{div} \left[\int_t (-\vec{J}) dt \right] \quad (2.17)$$

Burada eşitliğin sağ tarafı için Diverjans teoremini hatırlarsak:

$$\int \int_v \operatorname{div} \vec{J} dV = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.18)$$

eşitliği elde edilir. (2.18) denkleminin her iki tarafının t 'ye göre integralini alıp

(-1) ile çarparsak :

$$\int \int_v \operatorname{div} \left[\int_t (-\vec{J}) dt \right] dv = \int_t \left[\int_s (-\vec{J}) d\vec{S} \right] dt \quad (2.19)$$

elde edilir. Burada $\int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = i(t)$ bütün S yüzeyinden dışarı doğru akan akımdır. (2.19)'u düzenlersek

$$\int \int_v \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_t i'(t) dt \quad (2.20)$$

eşitliği elde edilir. (2.20)'eşitliğinin sağ tarafı ise t zamanda içerde biriken Q yükünü gösterir. Bu Q yükü ile serbest yük yoğunluğu arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$Q = \int \int_v \int \rho dV \quad (2.21)$$

(2.21)'i (2.20)'de yerine koyalım:

$$\int \int \int \operatorname{div} \vec{D} \cdot d\vec{v} = \int \int \int \rho \, dv \quad (2.22)$$

(2.22) eşitliğinden çok önemli bir ifade olan

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (2.23)$$

olduğu görülmektedir.

Bir iletken çevre ile zincirlenen ϕ akısı zamanla değişirse bu çevrede $e = -\frac{d\phi}{dt}$ emk'i endüklenir. EMK nedeniyle elektronlar harekete geçer ve bir endüksiyon akımını doğur.

$$e = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.24)$$

$$\phi = \int_s \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.25)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.26)$$

Bu eşitlikte dikkat edilirse sol taraf e emk'ne eşittir. Bu durumda Faraday endüksiyon kanunu yazarsak;

$$e = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.27)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada ϕ magnetik akıyı, B manyetik indüksiyonu göstermektedir. (2.27) eşitliğinin sağ tarafına Stokes teoremini uyguladıktan sonra (2.26) ile eşitlersek;

$$\int_s \int \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_s \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.28)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.29)$$

şeklindeki Maxwell - Faraday denklemini elde ederiz.

(2.29) denkleminde görüldüğü gibi zamanla değişen magnetik alan tarafından bir elektrik alanı oluşturulmakta ve bu alanın etkisiyle yükler harekete geçmektedir.

(2.13) ve (2.29) denklemlerinden zamanla değişen elektrik alanının burulganlı magnetik alan oluşturduğunu aynı şekilde zamanla değişen magnetik alanın ise burulganlı elektrik alan oluşturduğunu söyleyebiliriz. İşte bu denklemlerde yer alan ve Maxwell'in 1862'de ortaya koyduğu "Deplasman akımı" kavramı Maxwell denklemlerine daha sonra dalga denklemi özelliği kazandırmıştır.

(2.29) denkleminin her iki tarafının diverjanslarını aldığımızda

$$\text{div rot } \vec{E} = \text{div}(-j\omega \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B} = 0 \quad (2.30)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2.31)$$

denklemini elde ederiz.

2.2 Elektromanyetik Dalga Denklemleri

Maxwell denklemlerinden dalga denklemlerini elde etmeden önce, herhangi bir elektromanyetik alanı gösteren \vec{E} elektrik alan, \vec{H} manyetik alan, \vec{D} elektrik alan endüksiyon ve \vec{B} manyetik alan endüksiyon vektörleri arasındaki bağıntıları öncelikle verelim. Bunlar :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.32)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.33)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.34)$$

(2.34)'deki ε dielektrik, (2.33)'deki μ ise geçirgenlik katsayısı olarak adlandırılır. Bilindiği gibi genel durumda $\vec{r} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$, $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$, $\mu = \mu(\vec{r})$ ve $\sigma = \sigma(\vec{r})$ şeklindedir. Aynı şekilde elektrik alan vektörünü $\vec{E}(x, y, z, t)$ ve manyetik alan vektörünü $\vec{H}(x, y, z, t)$ şeklinde gösterebiliriz.

(2.32)-(2.34) eşitliklerini kullandığımızda Maxwell denklemleri

$$\text{rot } \vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \sigma \vec{E} \quad (2.35)$$

$$\text{rot } \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (2.36)$$

şeklini alır. Maxwell denklemlerinden dalga denklemini elde etmek için (2.35) ve (2.36) eşitliklerinin rotasyonellerini alalım. Ancak daha önce bu işlemlerde kullanacağımız bazı özdeşlikleri verelim:

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.37)$$

$$\nabla \times \nabla \times F = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F \quad (2.38)$$

$$\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a \quad (2.39)$$

$$\nabla(aB) = B\nabla a + a\nabla B \quad (2.40)$$

$$\nabla \times (aB) = \nabla a \times B + a\nabla \times B \quad (2.41)$$

$$\nabla \times (F \times B) = F\nabla \cdot B - b\nabla \cdot F + (B \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)B \quad (2.42)$$

Bu özdeşliklerde B de F gibi bir vektördür. Şimdi (2.35) ve (2.36)'nın rotasyonellerini alalım:

$$\text{rot rot } \vec{H} - \text{rot} \left(\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \text{rot} (\sigma \vec{E}) \quad (2.43)$$

$$\text{rot rot } \vec{E} + \text{rot} \left(\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.44)$$

(2.38) özdeşliğini kullanırsak (2.43) eşitliği ;

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} (\varepsilon \vec{E}) = \text{rot} (\sigma \vec{E}) \quad (2.45)$$

şekline gelir. Elde edilen bu ifadeye aşağıdaki açılımları yerine yazarsak; (2.49)'u elde ederiz.

$$\text{rot}(\sigma \vec{E}) = \nabla \sigma \times \vec{E} + \sigma \nabla \times \vec{E} \quad (2.46)$$

$$\text{rot}(\varepsilon \vec{E}) = \nabla \varepsilon \times \vec{E} + \varepsilon \nabla \times \vec{E} \quad (2.47)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\frac{1}{\mu}(\nabla \mu \cdot \vec{H}) \quad (2.48)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \left(-\frac{1}{\mu}(\nabla \mu \cdot \vec{H}) \right) - \nabla \varepsilon \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \sigma \times \vec{E} \quad (2.49)$$

Benzer biçimde, (2.44) eşitliğinde de aynı işlemler yapılırsa:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \left(-\frac{1}{\varepsilon}(\nabla \varepsilon \cdot \vec{H}) \right) - \nabla \mu \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.50)$$

elde edilir.

Şimdi bu iki önemli denklemi (2.49 - 2.50) özel durumlar için inceleyelim:

1- $\mu = \mu_r \cdot \mu_0 = s b t$, $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$, $\sigma = \sigma(\vec{r})$ olsun,

Manyetik geçirgenlik katsayısı sabit alındığı için $\text{grad} \mu = 0$ olacak ve bu durumda da Maxwell denklemleri aşağıdaki şekli alacaktır.

$$\Delta \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\nabla \varepsilon \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \sigma \times \vec{E} \quad (2.51)$$

$$\Delta \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \left(-\frac{1}{\varepsilon}(\nabla \varepsilon \cdot \vec{E}) \right) \quad (2.52)$$

2- $\mu = s b t$ ama $\mu_r \neq 1$, $\varepsilon = s b t$ ama $\varepsilon_r \neq 1$, $\sigma = 0$ ise:

Bu durumda μ ve ε sabit olduğundan $\text{grad} \mu = 0$ ve $\text{grad} \varepsilon = 0$ değerlerini alacağından Maxwell denklemleri;

$$\Delta \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.53)$$

$$\Delta \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.54)$$

şekline gelir. Helmholtz denklemleri diye adlandırılan bu denklemlerde $\omega^2\epsilon\mu$ yerine k^2 yazarak, düzenleme yapalım:

$$\Delta\vec{H} + k^2\vec{H} = 0 \quad (2.55)$$

$$\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \quad (2.56)$$

Burada kullandığımız k , bilindiği gibi dalga sayısı olarak adlandırılır.

Bu defada $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ ve $\sigma = 0$ olan durum için yani boşluk için Maxwell denklemlerini yazalım.

Bu durumda da $\text{grad}\mu = 0$, $\text{grad}\epsilon = 0$ ve $\text{grad}\sigma = 0$ olacaktır. Sonuç olarak denklemler;

$$\Delta\vec{H} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.57)$$

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.58)$$

şeklinde olur. (2.57) ve (2.58) denklemlerinden görüldüğü gibi akımların ve yüklerin olmadığı uzayda elektromanyetik alan mevcuttur ve dalgalar şeklinde yayılmaktadır. Matematiksel fizikten belli olduğu gibi (2.57) ve (2.58) eşitlikleri dalga denklemleridir. Bu denklemlerin çözümünü $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 e^{j\vec{k}\vec{r}} \cdot e^{-j\omega t}$ şeklinde arayabiliriz. Burada dalganın fazının

$\varphi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = k_1x + k_2y + k_3z - \omega t$ şeklinde olduğu görülmektedir. Burada yayılma vektörü bileşenleri k_1, k_2 ve k_3 ' ün reel olduklarını kabul edelim.

$\omega t - k_1x + k_2y + k_3z = sbt$ 'i sağlayan noktalar eş fazlıdır. $t = t_0$ için $\omega t_0 = sbt$ dersek;

$$k_1x + k_2y + k_3z = sbt \quad (2.59)$$

Bu bir düzlem denklemdir. Bu düzlemin normalini aradığımızda; \vec{k} vektörünün

eş faz düzlemine normal olduğunu buluruz.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.60)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.61)$$

$$\vec{H} = -\frac{\nabla \times \vec{E}}{j\omega\mu} = -\frac{1}{j\omega\mu} \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (2.62)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega\mu} \quad (2.63)$$

- Sonuçlar :**
- 1- \vec{E} ve \vec{H} eş fazlıdır.
 - 2- $\vec{H} \perp \vec{E} \perp \vec{k}$
 - 3- $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ vektörleri gibi bir sağ el üçlüsü oluştururlar.

(2.53)-(2.54) ile (2.57)-(2.58) eşitlikleri arasındaki tek fark dalgaların yayılma hızıdır. İlk Boşlukta elektromanyetik dalgalar $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ ışık hızı ile yayılırken, diğer iki denklemden ifade edilen dalgalar daha düşük bir hızla yayılırlar ($v = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$). Her iki durumda da μ ve ϵ sabit olduğundan ortamlar homojen dir. Yani ϵ ve μ 'nün her noktada aldığı değer aynıdır.

3- $\epsilon = sbt, \mu = sbt, \sigma = sbt$ olduğunda ise Maxwell denklemleri

$$\Delta\vec{H} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (2.64)$$

$$\Delta\vec{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.65)$$

şekline gelir .

3.DÜZLEMSEL MONOKROMATİK DALGALARIN KIRILMASI ve YANSIMASI

Bir elektromanyetik dalga bir ortamdan diğer ortama geçerken; dalganın bir miktarı gelme açısından farklı bir açıyla kırılarak yayılırken, bir miktarıda sınırdaki yansıyarak geri döner. Kırılma açısının değeri gelme açısına ve kırılma indeksine bağlıdır. Çünkü kırılma ve yansıma olayları iki ortamın manyetik geçirgenliklerinin, dielektrik katsayılarının veya iletkenliklerinin birinin veya birkaçının birbirinden farklı olmasından kaynaklanmaktadır. Şekil 3.1'de manyetik geçirgenlikleri, dielektrik katsayıları birbirinden farklı olan iki ortamı ayıran bir sınır yüzeyi görülmektedir. Bu sınır yüzeyi üzerinde yan kenarları sınır yüzeyine dik olan dikdörtgen biçimli bir çevre görülmektedir. Eğer çevrenin $2l$ uzunluğundaki genişliği çok küçükse, bu çevreye Maxwell-Faraday kanunu uygulandığında;

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_s \int -j\omega\mu\vec{H} \cdot d\vec{s}$$

Burada \vec{H} şekil düzlemine normal olsun. ($d\vec{S} = dx \cdot dy \vec{u}_z$)

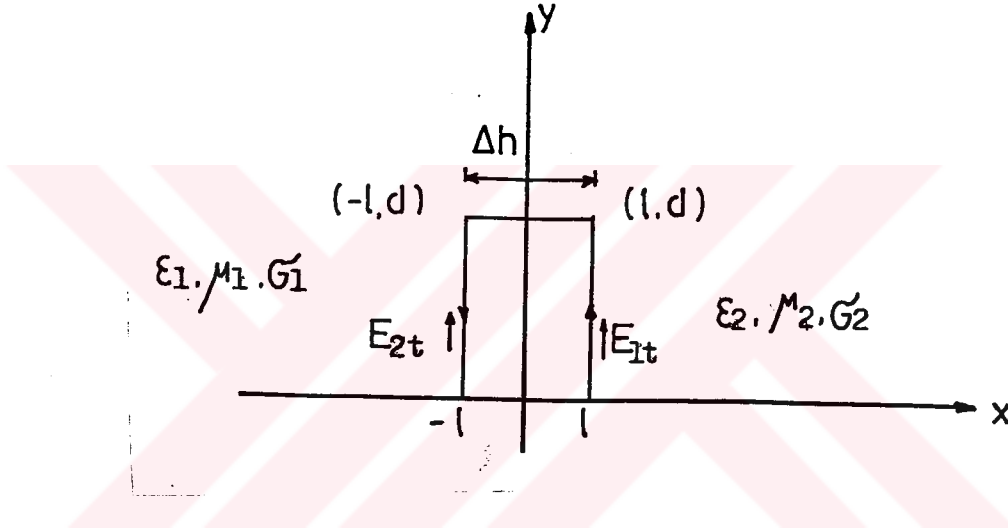
$$\begin{aligned} \int_{-l}^0 E_{2x}(x, 0)dx + \int_0^l E_{1x}(x, 0)dx + \int_0^d E_{1y}(c, y)dy + \int_l^0 E_{1x}(x, d)dx + \\ \int_0^{-l} E_{2x}(x, d)dx + \int_d^0 E_{2y}(-c, d)dy = \\ \int_{-l}^0 \int_0^d -j\omega\mu_2 H_{2z} dx dy + \int_0^l \int_0^d -j\omega\mu_1 H_{1z} dx dy \end{aligned} \quad (3.1)$$

l' 'yi sifira götürürsek; S yüzeyi 0'a yaklaşır. Bu durumda;

$$\int_0^d [E_{1t}(0, y) - E_{2t}(-0, y)] dy = 0 \quad (3.2)$$

elde edilir ve buradan da aşağıdaki sınır şartı yazılır.

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (3.3)$$



Şekil 3.1 İki farklı ortamı ayıran sınır üzerinde alınan ∇S yüzeyi

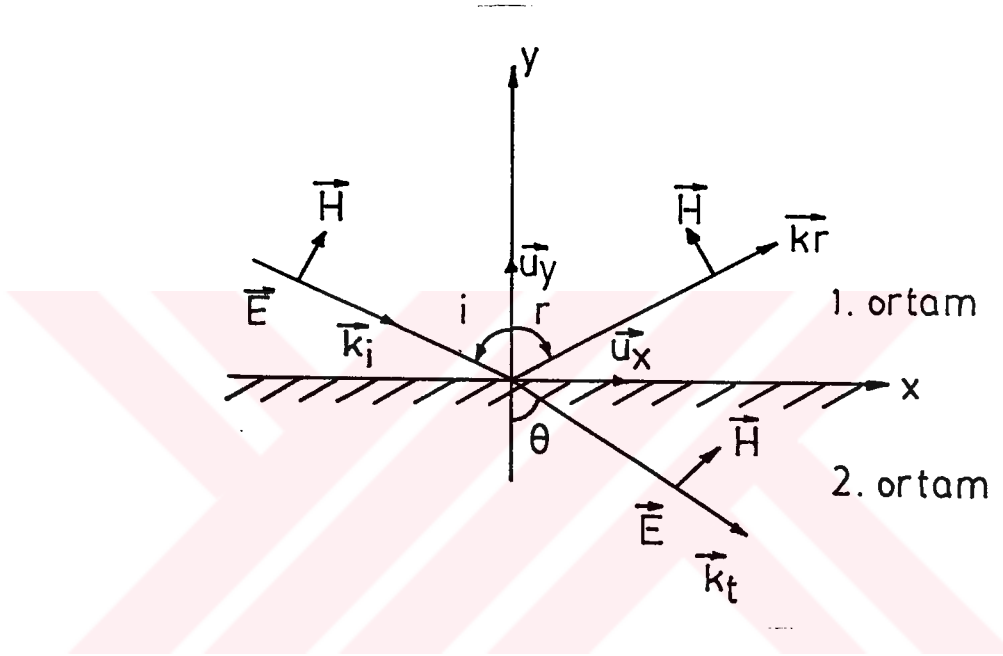
E_{1t} ve E_{2t} , sınır yüzeyinin iki tarafındaki alan şiddetinin teğetsel bileşenleridir. O halde elektrik alan şiddetinin teğetsel bileşenleri, sınır yüzeyinin iki tarafında aynı değeri almak zorundadır. (3.3) eşitliği elektromanyetik alanda iki farklı ortamı ayıran sınır yüzeyindeki **sınır şartını** gösterir. Yine iki ortam içindeki deplasmanların normal bileşenleri D_{1n} ve D_{2n} ile gösterilirse; tabanlardan geçen akıların toplamı sıfır olacağından

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (3.4)$$

yazılabilir. Benzer şekilde (2.10) denkleminde manyetik alan için sınır şartlarını aşağıda görüldüğü gibi elde ederiz.

$$H_{1t} = H_{2t} \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (3.5)$$

Yukarıda bulduğumuz sınır şartları bizi kırılma ve yansıma kanunlarına getirir.



Şekil 3.2 İki farklı ortamı ayıran sınır yüzeyinde elektromanyetik dalgaların kırılması ve yansıması

Şekil 3.2’de gelen dalganın yayılma vektörü \vec{k}_i , kırılan dalganın yayılma vektörü \vec{k}_t ve yansıyan dalganın yayılma vektörü \vec{k}_r ile gösterilsin. Bu vektörler:

$$\vec{k}_i = \sin i \vec{u}_x - \cos i \vec{u}_y \quad (3.6)$$

$$\vec{k}_t = \sin \theta \vec{u}_x - \cos \theta \vec{u}_y \quad (3.7)$$

$$\vec{k}_r = \sin r \vec{u}_x + \cos r \vec{u}_y \quad (3.8)$$

şeklinde olur. Buna göre gelen dalga E_i , yansıyan dalga E_r , kırılan dalga E_t ve

gelen dalga z eksenine paralel ise;

$$\vec{E}_i = -\vec{u}_z E_{i0} e^{-j(x \sin i - y \cos i)} e^{-j\omega_1 t} \quad (3.9)$$

$$\vec{E}_r = -\vec{u}_z E_{r0} e^{-j(x \sin r - y \cos r)} e^{-j\omega_2 t} \quad (3.10)$$

$$\vec{E}_t = -\vec{u}_z E_{t0} e^{-j(x \sin \theta - y \cos \theta)} e^{-j\omega_3 t} \quad (3.11)$$

şekindedir. $y = 0$ için sınır şartlarını yazarsak:

$$-E_{i0} e^{-jk_1 x \sin i} e^{-j\omega_1 t} - E_{r0} e^{-jk_1 x \sin r} e^{-j\omega_2 t} = -E_{t0} e^{-jk_2 x \sin \theta} e^{-j\omega_3 t} \quad (3.12)$$

Yukardaki eşitliğin bütün x ve t değerleri için sağlanabilmesi ancak üç dalganın da frekanslarının eşit olması ile mümkündür. Yani $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ olması gerekmektedir.

$$k_1 \sin i = k_1 \sin r = k_2 \sin \theta \quad (3.13)$$

$$i = r; \quad k_1 \sin i = k_2 \sin \theta \quad (3.14)$$

(3.12) eşitliği elektromanyetik dalgaların kırılması ve yansımaları halinde dalganın frekansının değişmediğini gösterir. (3.13) ve (3.14) ise yansıyan ve kırılan dalgaların yönlerini göstermekte olup, **Shnell Kanunu** olarak bilinmektedir.

$$-E_{i0} - E_{r0} = -E_{t0} \quad (3.15)$$

Eğer ortamların magnetik geçirgenlikleride birbirine eşit yani $\mu_1 = \mu_2$ ise (3.13) eşitliğinden

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\sin i}{\sin \theta} \Rightarrow \frac{\omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}{\omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} = \frac{\sin i}{\sin \theta} \Rightarrow \frac{\sin i}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (3.16)$$

yazılabilir. Şimdi gelen dalganın sınır düzlemi ile yaptığı açıya bağlı olarak kırılan ve yansıyan dalgaların genliklerinin değişimini inceleyerek iki farklı durumla karşılaşırız. Bunlardan birincisi elektrik alan vektörünün sınır yüzeyine

paralel veya gelme düzlemine dik olmasıdır. Diğeri ise; manyetik alan vektörünün sınır yüzeyine elektrik alan vektörününse gelme düzlemine paralel olmasıdır. Bu iki farklı durum sırasıyla Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'de gösterilmiştir. Literatürler incelendiğinde (Jordan(1964), Bladel(1964), vb.) elektrik alan vektörünün gelme düzlemine dik veya paralel olmasına bağlı olarak, polarizasyon "dik" ya da "paralel" olarak adlandırıldığı görülecektir. Bu durum dalga klavuzlarında TE ve TM modları olarak bilinir.

3.1. Düşey ve Paralel Polarizasyonlu Elektromanyetik Dalgaların Kırılması ve Yansıması

Durum 1:Burada ele alacağımız ortamlardan birincisinin sabitleri ϵ_1, μ_1 ikincisinin ise ϵ_2, μ_2 olsun (Şekil 3.3). Ayrıca η_1, η_2 sırasıyla $\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$ ve $\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$ oranlarına karşı gelsin. Elektrik alan vektörü \vec{E} ise; gelme düzlemine dik, yansıma yüzeyine paralel olsun. Sınır boyunca \vec{E} 'nin teğetsel bileşeninin sürekli olması gerektiğini belirten sınır şartlarını

$$E_i + E_r = E_t \quad (3.17)$$

$$\frac{E_t}{E_i} = 1 + \frac{E_r}{E_i} \quad (3.18)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca sınır yüzeyinde enerjinin korunumu prensibine dayanarak, metrekare başına gönderilen ve $\frac{E^2}{\eta}$ şeklinde gösterilen gücü yazabiliriz.

$$\frac{1}{\eta_1} E_i^2 \cos i = \frac{1}{\eta_1} E_r^2 \cos i + \frac{1}{\eta_2} E_t^2 \cos \theta \quad (3.19)$$

$$\frac{E_r^2}{E_i^2} = 1 - \frac{\eta_1 E_t^2 \cos \theta}{\eta_2 E_i^2 \cos i} = 1 - \frac{\sqrt{\epsilon_2} E_t^2 \cos \theta}{\sqrt{\epsilon_1} E_i^2 \cos i} \quad (3.20)$$

yazabiliriz. (3.16) eşitliğini (3.19)'da yerine koyarsak;

$$\frac{E_r^2}{E_i^2} = 1 - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \left(1 + \frac{E_r}{E_i}\right)^2 \frac{\cos \theta}{\cos i} \quad (3.21)$$

ifadesini elde ederiz. Eşitliğin her iki tarafının karekökünü alırsak :

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos i - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta}{\sqrt{\epsilon_1} \cos i + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta} \quad (3.22)$$

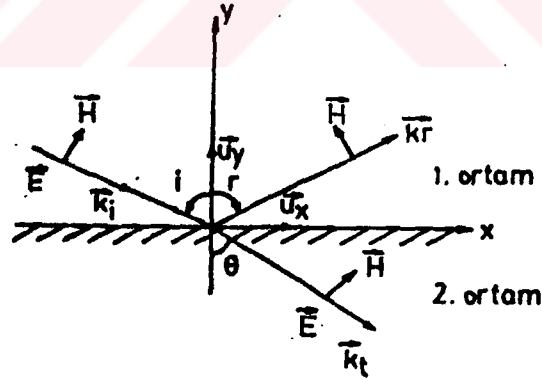
elde ederiz. Buradan

$$\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta = \sqrt{\epsilon_2(1 - \sin^2 \theta)} = \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 i} \quad \text{den}$$

yazabiliriz. Bulduğumuz bu ifadeyi (3.21)'de yerine yazalım:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos i - \sqrt{(\epsilon_2/\epsilon_1) - \sin^2 i}}{\cos i + \sqrt{(\epsilon_2/\epsilon_1) - \sin^2 i}} \quad (3.23)$$

Bu eşitlik düşey olarak polarize olmuş dalganın genliğinin yansıyan dalganın genliğine oranını vermektedir.



Şekil 3.3 Düşey polarizasyonlu gelen dalganın kırılması ve yansıması

Durum 2 : Paralel Polarizasyon: \vec{E} elektrik alan vektörü gelme düzlemine paralel, \vec{H} manyetik alan vektörü ise kırılma yüzeyine paraleldir. Durum 1' deki gibi sınır şartlarını yazarsak:

$$(E_i - E_r) \cos \theta_1 = E_t \cos \theta_2 \quad (3.24)$$

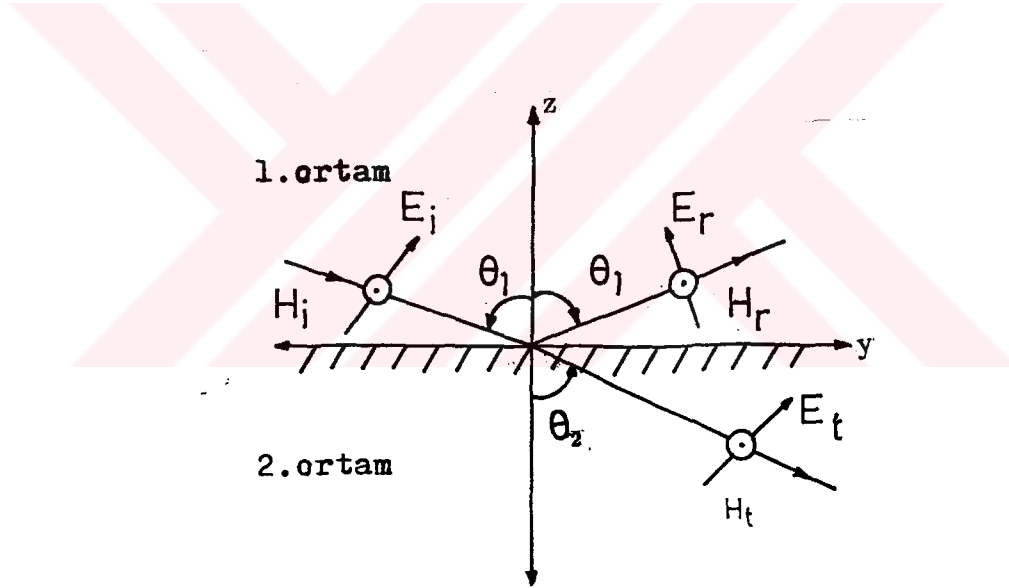
$$\frac{E_t}{E_i} = \left(1 - \frac{E_r}{E_i}\right) \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \quad (3.25)$$

(3.15) eşitliğinden

$$\left(\frac{E_r}{E_t}\right)^2 = 1 - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \left(1 - \frac{E_r}{E_i}\right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \quad (3.26)$$

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{(\epsilon_2/\epsilon_1) \cos \theta_1 - \sqrt{(\epsilon_2/\epsilon_1) - \sin^2 \theta_1}}{(\epsilon_2/\epsilon_1) \cos \theta_1 + \sqrt{(\epsilon_2/\epsilon_1) - \sin^2 \theta_1}} \quad (3.27)$$

ifadesini elde ederiz. (3.23) ve (3.27)'den elde ettiğimiz sonuçlar **Freshnel Kanunları** olarak bilinir.



Şekil 3.4 Paralel polarizasyonlu gelen dalga için kırılma ve yansımaya

3.2. Yansımaya ve Kırılma Katsayıları:

Elektriksel ve magnetik özellikleri birbirinden farklı olan iki ortam ele alalım.

Bu ortamlardan biriyle θ açısı yaparak gelen dalga sınırdaki kırılarak κ açısıyla ikinci ortama geçsin. Kırılan dalganın genliğinin gelen dalganın genliğine oranına

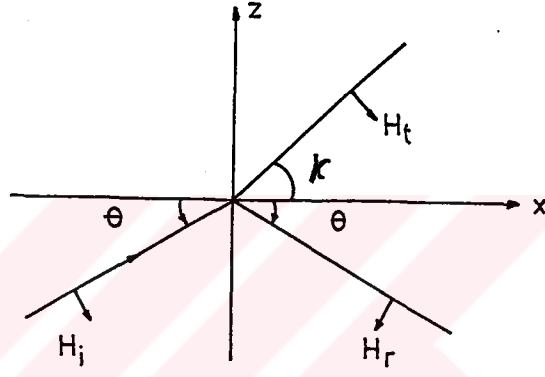
transmisyon katsayısı diyoruz.

$$T = \frac{E_t}{E_i} \quad (3.28)$$

Aynı şekilde yansıyan dalganın genliğini, gelen dalganın genliğine oranına da yansıma katsayısı diyoruz ve

$$R = \frac{E_r}{E_i}$$

şeklinde ifade ediyoruz.



Şekil 3.5 θ_i açısıyla gelen dalganın bir ortamdan diğerine geçerken kırılması

Şekil 3.5' de iki ortamı ayıran x boyunca süreklilik denklemini yazarsak;

$$H_{ix} + H_{rx} = H_{tx} \quad (3.29)$$

elde ederiz. Bilindiği gibi

$$\omega \mu H_x = c([\vec{k}\vec{E}])_x \quad (3.30)$$

şeklindedir.

$$[\vec{k}\vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ k_x & k_y & k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (3.31)$$

Buradan

$$([\vec{k}\vec{E}])_x = k_y E_z \quad (3.32)$$

$$H_x = c \frac{k_y E_z}{\mu \omega} \quad (3.33)$$

Bu eşitliği x sınırındaki süreklilik için tekrar yazarsak:

$$\frac{c}{\omega \mu} k_i (E_{iz} - E_{rz}) = \frac{c}{\omega \mu} k_j E_{tz} \quad (3.34)$$

Burada k_i ve k_j dalga vektörünün sırasıyla x ve y doğrultusundaki bileşenleridir.

$$(E_{iz} - E_{rz}) k_i \sin \theta = E_{tz} k_j \sin \kappa \quad (3.35)$$

$$(1 - R) E_{iz} k_i \sin \theta = T k_j E_{iz} \sin \kappa \quad (3.36)$$

$$(1 - R) k_i \sin \theta = T k_j \sin \kappa \quad (3.37)$$

$$k_i \sin \theta - R k_i \sin \theta = k_j T \sin \kappa \quad (3.38)$$

$$n = \frac{k_j}{k_i} \quad (3.39)$$

$$R = \frac{k_i \sin \theta - T k_j \sin \kappa}{k_i \sin \theta} = \frac{\sin \theta - (1 + R) n \sin \kappa}{\sin \theta} \quad (3.40)$$

$$R(\sin \theta + n \sin \kappa) = \sin \theta - n \sin \kappa \quad (3.41)$$

$$R = \frac{\sin \theta - n \sin \kappa}{\sin \theta + n \sin \kappa} \quad (3.42)$$

Böylece

$$R_{ij}(\theta, x) = \frac{k_i \sin \theta - k_j \sin \kappa}{k_i \sin \theta + k_j \sin \kappa} \quad i, j = 0, 1, 2 \quad (3.43)$$

elde edilir. Transmisyon katsayısı da

$$T_{ij} = 1 + R_{ij} = \frac{2k_i \sin \theta}{k_i \sin \theta + k_j \sin \kappa} \quad (3.44)$$

şeklindedir.

Bu bölümü bitirmeden önce sınır koşullarından da biraz bahsedelim: İkinci bölümde gösterdiğimiz gibi elektromanyetik dalgaların saçılması ikinci dereceden kısmi türevli Helmholtz denkleminle ifade edilmektedir. Kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinden belli olduğu gibi, çözümün bulunabilmesi için sınır koşullarının verilmesi gerekir. Literatürlerde (Baylis(1982), Bladel(1964),vb.) aşağıdaki durumlar yoğun şekilde incelenmiştir.

1- Uzak alan Modeli: İspatlanmıştır ki;

$$\Delta E^s + k^2 E^s = F \quad (3.45)$$

denkleminin aşağıdaki şartları sağlayan yeğane çözümü vardır. İki boyutlu durumda $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dir ve

$$E^s = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial E^s}{\partial r} - ikE^s = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.47)$$

olur. Üç boyutlu durumda ise $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ olmak üzere

$$E^s = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial E^s}{\partial r} - ikE^s = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.49)$$

olur. (3.41) denklemini

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|y|=r} \int \left| \frac{\partial E^s}{\partial r} - ikE^s \right| ds = 0 \quad (3.50)$$

şeklinde de yazılabilir. (3.47) ve (3.48) eşitlikleri saçılan dalgaları ifade eden çözümleri bulmak için kullanılır. Bunlara Sommerfeld sınır koşulları denilmektedir. Sommerfeld sınır koşulu, dalganın uzak mesafelerde nasıl davrandığını gösterdiğinden analitik çözümlerde yeterli olmasına rağmen, sayısal çözümlerde güçlükler meydana çıkmaktadır. Bu güçlükler sayısal çözümlerde uzak alan mesafelerini sonsuz alamamamızdan kaynaklanır. Çünkü bilgisayar ortamı sonsuz bir büyüklükle çalışmamıza olanak vermez.

Yakın alan modeli : Sayısal çözümlerde dalganın sonlu sınırdaki davranışını bilmek gerekmektedir. Yukarıda belirtildiği gibi Sommerfeld sınır koşulu ise dalganın uzak(sonsuz) mesafelerde davranışını göstermektedir. Buna göre sayısal çözümlerde Sommerfeld sınır koşulunu kullanamayız. Bildiğimiz gibi üç boyutlu durumda saçılan dalga için Helmholtz denklemi

$$\Delta E^s + k^2 E^s = 0 \quad (3.51)$$

şekindedir. Atkinson (1982) ve Wilcox (1975) tarafından gösterilmiştir ki (3.50) denkleminin çözümü küresel koordinat sisteminde (r, θ, ϕ) değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi yakınsak seri şeklinde gösterilebilir.

$$E^s = \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(\theta, \phi)}{(kr)^j} \quad (3.52)$$

$F_j(\theta, \psi)$ fonksiyonlarını radiation pattern F_0 cinsinden

$$F_j(\theta, \phi) = \frac{1}{(2i)^j j!} \prod_{l=0}^j [l(l-1) + Q] F_0(\theta, \phi) \quad (3.53)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada Q Beltrami operatörüdür. (θ, ψ) değişkenleri cinsinden

$$Q = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.54)$$

yazılabilir. Herhangi bir çözüm için Sommerfeld sınır koşulu;

$$-ikE^s + \frac{\partial E^s}{\partial r} = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.55)$$

şeklindedir. (3.52)' den görüldüğü gibi

$$-ikE^s + \frac{\partial E^s}{\partial r} = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad r \rightarrow \infty \quad (3.56)$$

yazılabilir. Elde ettiğimiz bu ifade ile belirlenen saçılan dalgaların bu özelliği Sommerfeld sınır koşulunun sağlandığını göstermektedir. Sayısal hesaplamalarda r 'nin değeri sonlu bir değer olarak alınır. Örneğin; $r = r_1$ için sınır koşulu

$$-ikE^s + \frac{E_r}{r}|_{r=r_1} = 0 \quad (3.57)$$

olduğu düşünülebilir. Ancak bu şart çok hatalıdır. Çünkü gerçekte (3.52) serisinin ilk terimini bile sağlamamaktadır. Buna göre sonlu alanda Sommerfeld sınır şartının yerine geçebilecek koşulu bulmaya çalışalım: Basit bir şekilde gösterilirki;

$$B_1 E^s = \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik + \frac{1}{r}\right) E^s \quad (3.58)$$

şeklinde tanımlanan B_1 operatörü keyfi $F(\theta, \phi)$ fonksiyonu için

$$B_1 \left[\frac{e^{ikr}}{kr} F(\theta, \phi) \right] = 0 \quad (3.59)$$

eşitliğini sağlamaktadır. Böylece (3.52) şeklinde ifade edilen keyfi E^s fonksiyonu için;

$$B_1 E^s|_{r=r_1} = o\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.60)$$

yazabiliriz. Daha kesin bir sınır şartını bulmak için aşağıdaki şekilde operatörler dizisi tanımlayalım :

$$B_m = \prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik + \frac{2j-1}{r} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik + \frac{2m-1}{r} \right) B_{m-1} \quad (3.61)$$

Direk hesaplamalar gösterir ki,

$$p = e^{ikr} \frac{F(\theta, \phi)}{(kr)^l} \quad l = 1, \dots, m \quad (3.62)$$

şeklindeki her bir fonksiyon için,

$$B_m p = 0 \quad (3.63)$$

sağlanmaktadır. Böylece (3.52) eşitliğine sahip herhangi bir fonksiyon için

$$B_m E^s|_{r=r_1} \equiv h = 0 \left(\frac{1}{r_1^{2m+1}} \right) \quad (3.64)$$

yazabiliriz. Burada m sayısı arttıkça sınır koşulu daha da kesinleşir. (3.61)' den görüldüğü gibi B_m operatörü,

$$\left(-ik + \frac{\partial}{\partial r} \right)^m + \text{daha düşük düzeyli terimler} \quad (3.65)$$

şeklinde yazılabilir. (3.63) sınır koşuluna genelleşmiş Sommerfeld sınır şartı gibi bakabiliriz. Ancak burada bir çok terim ihmal edildiği için %5 – 10 hata ile yaklaşık sonucu elde etmekteyiz.

4.ELEKTROMANYETİK DALGALARIN DÜZ ve TERS SAÇILMA PROBLEMLERİNİN İKİ FARKLI YAKLAŞIM BAZINDA ANALİTİK İNCELENMESİ

İnceliyeceğimiz iki farklı yaklaşımda da $x_2 > 0, -d < x_2 < 0$ ve $x_2 < -d$ şeklinde farklı fiziksel özelliklere sahip üç katmanlı bir ortam ve bu ortamın ara diliminde ($-d < x_2 < 0$) silindirik bir B cisminin bulunduğu durum ele alınacaktır. Birinci katman içinde yayılan bir dalganın ikinci katmana kırılarak geçmesi ve kırılan dalganın ikinci katmanda bulunan B cisminden saçılması ile oluşan E^s dalgasının hesaplanmasına düz problem, E^s dalgasının değerinin deneysel olarak ölçüldüğünü kabul ederek cismin fiziksel ve geometrik özelliklerinin bulunmasına ters problem denir.

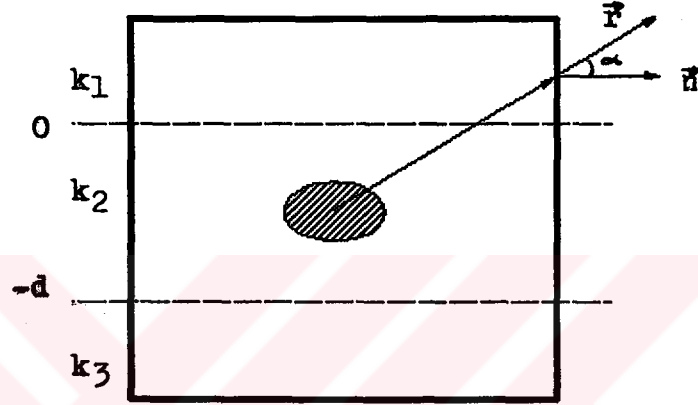
Birinci yaklaşımda elektromanyetik dalgaların düz ve ters saçılma problemleri sırasıyla incelenecektir. Şekil 4.1' de görülen silindiri çevreleyen katmanların homojen ve izotropik olduğunu, ancak iletken ve manyetik olmadığını kabul edelim. Katmanların dielektrik katsayıları ise sırasıyla $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ şeklinde birbirinden farklı ancak sabit olan katsayılardır. Ara katmanda bulunan sonsuz uzunluktaki silindir şeklindeki B cismi ise manyetik olmayıp ($\mu = \mu_0$), dielektrik katsayısı $\epsilon(x_1, x_2)$ ve iletkenliği $\sigma(x_1, x_2)$ şeklinde olup, x_1 ve x_2 'nin fonksiyonlarıdır. B cismi z eksenine paralel olarak yerleştirilmiş ve düzlemsel, monokromatik dalga ile uyarılmıştır.

Bu durumda elektrik alan şiddeti vektörü \vec{E} z eksenine paraleldir. Böylece

gelen dalga için

$$E^i = E_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = E_0 \exp\{k_3(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)\} \quad (4.1)$$

ifadesini yazabiliriz.



Şekil 4.1 Farklı fiziksel özelliklere sahip üç katmanlı homojen ortam

Yukardaki eşitlikte gelen dalganın genliğini gösteren E_0 değerini 1 kabul edeceğiz.

k_3 burada $x_2 < -d$ bölgesinin dalga sayısını gösterir. Şekil 4.1 'den de görüldüğü

gibi k x_2 'nin bir fonksiyonudur ve

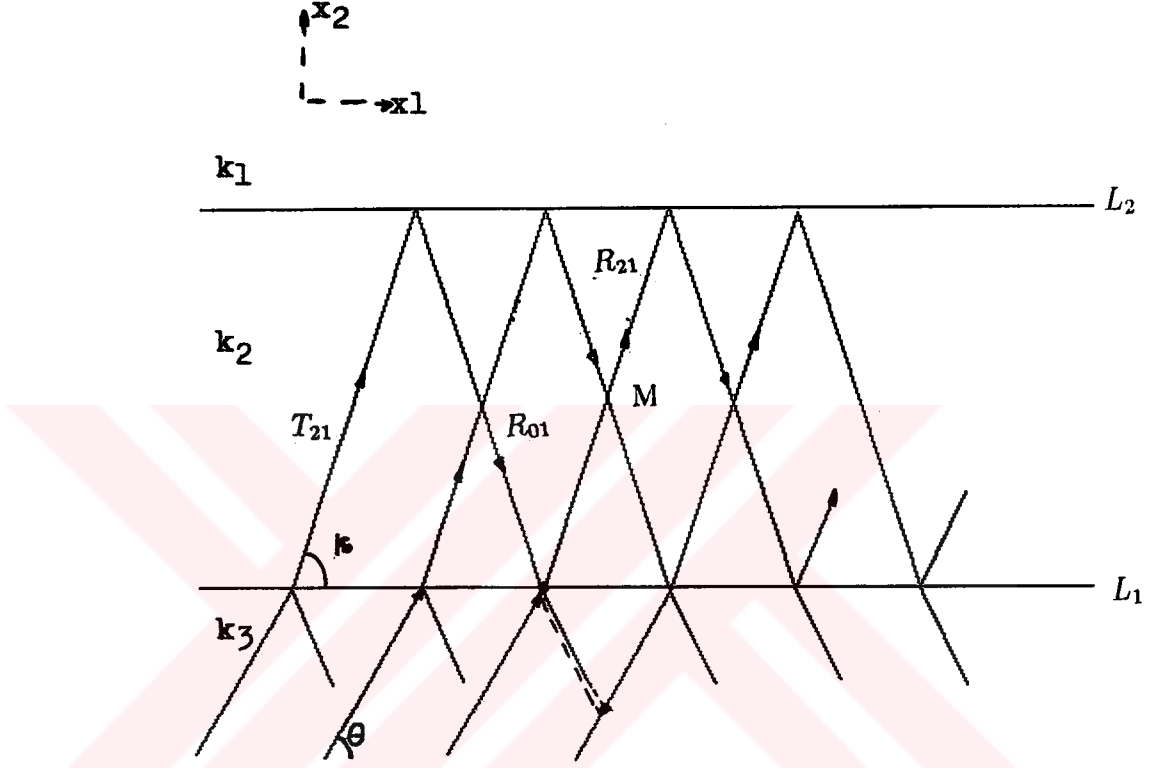
$$\bar{k}^2(x_2) = \begin{cases} k_1^2, & x_2 > 0 \\ k_2^2, & -d < x_2 < 0 \\ k_3^2, & x_2 < -d \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklindedir.

Bu çalışmada E^0 ile gösterilen cisim yokken ki toplam alan katmanlar

arasındaki kırılmalar ve yansımalar nedeniyle aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

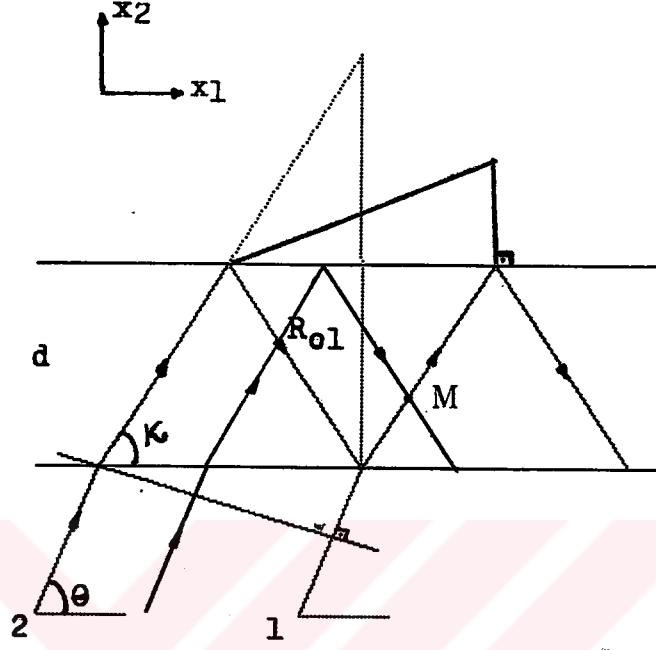
$$E^0(x) = K \exp\{ik_2(x_1 \cos \kappa + x_2 \sin \kappa)\} + L \exp\{ik_2(x_1 \cos \kappa - x_2 \sin \kappa)\} \quad (4.3)$$



Şekil 4.2 Üç katlı homojen ortamda dalganın yayılması

Yukarıdaki eşitlikteki birinci terim, M ile gösterilen bir noktada yapılan ölçümlerde Şekil 4.2'den de görüldüğü gibi \$L_1\$ sınırından kırılarak \$L_2\$'ye doğru yayılan ve M noktasından geçen tüm dalgaların toplamını ifade eder. Aynı eşitliğin ikinci terimi ise; \$L_2\$ sınırından yansiyarak geri dönen tüm dalgaların toplamını göstermektedir. Bu nedenle cisim yokken M noktasındaki toplam dalga \$E^0\$, bu iki terimin toplamı şeklindedir. Şekil 4.2'den görüldüğü gibi \$L_1\$ ve \$L_2\$'nin sınırladığı ara ortamda yayılan dalga, sınırlardan herhangi birine geldiğinde bir kısmı yansiyarak geri dönmektedir. Bu nedenle yansiyarak geri dönen iki dalga

arasında bir faz farkı oluşmaktadır.(Şekil 4.3) Bu açıklamalardan sonra öncelikle yansıyan iki dalga arasındaki faz farkını, daha sonra ise bunlara bağlı olarak K ve L katsayılarını hesaplayalım.



Şekil 4.3 Yansıyan dalgalar arasındaki faz farkı

$$\Delta\varphi_1 = k_2 \left(\frac{2d}{\tan \kappa} \cos \kappa + 2d \sin \kappa \right) \quad (4.4)$$

$$\Delta\varphi_2 = k_3 |\vec{r}| = k_3 \frac{2d}{\tan \kappa} \cdot \cos \theta \quad (4.5)$$

Bu iki eşitlikten faz farkı $\Delta\varphi$ 'yi yazarsak;

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 \quad (4.6)$$

Ayrıca burada Snell kanunu olarak bilinen

$$k_3 \cos \theta = k_2 \cos \kappa \quad (4.7)$$

ifadesini kullanırsak,

$$\Delta\varphi = k_3 2d \sin \kappa \quad (4.8)$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu durumda Şekil 4.2'den de görüldüğü gibi, L_1 'den L_2 'ye doğru yayılan dalgaların toplamını ifade eden K katsayısı için,

$$K = T_{21}(1 + R_{01}R_{21}e^{ik_2 2d \sin \kappa} + R_{01}^2 R_{21}^2 e^{ik_2 4d \sin \kappa} + \dots) \quad (4.9)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha} \quad .$$

olduğundan

$$K = \frac{T_{21}}{1 - R_{01}R_{21}e^{ik_2 2d \sin \kappa}} = \frac{T_{21}}{1 + R_{10}R_{12}e^{ik_2 2d \sin \kappa}} \quad (4.10)$$

olur. Benzer şekilde L_2 'den L_1 'e doğru olan dalgaların toplamını ise,

$$L = \frac{T_{21}}{1 + R_{10}R_{21}e^{ik_2 2d \sin \kappa}} \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edebiliriz. (4.10) ve (4.11) denklemlerinde T_{ij} ve R_{ij} katsayıları kırılma ve yansıma katsayıları olup, (3.36) ve (3.37) eşitlikleriyle

$$R_{ij}(\theta, \kappa) = \frac{k_i \sin \theta - k_j \sin \kappa}{k_i \sin \theta + k_j \sin \kappa} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.12)$$

$$T_{ij}(\theta, \kappa) = \frac{2k_i \sin \theta}{k_i \sin \theta + k_j \sin \kappa} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.13)$$

şeklinde verilmişti. Burada cisim yokken ortam içinde yayılan dalga denklemini verelim. Helmholtz denklemi lineer denklem olduğundan, bu denklemi sağlayan fonksiyonların lineer kombinasyonu da Helmholtz denklemini sağlayacağından, cisim yokken ortamlarda yayılan toplam dalgalarda Helmholtz denklemini sağlarlar. Bu durumda (2.53)' den yararlanarak,

$$\Delta E^0 + k^2(x_2)E^0 = 0 \quad (4.14)$$

dalga denklemini yazabiliriz.

Buraya kadar ortamda cismin olmadığı duruma bakıldı. Bu bölümün başında belirttiğimiz şekilde ara ortamda yerleşmiş bir B cismi bulunuyorsa, E^i ile gösterilen gelen dalga L_1 sınırına geldiğinde bir kısmı kırılarak κ açısıyla ikinci ortama girip yayılırken, cismin yüzeyine geldiğinde farklı fiziksel özellik yada özellikler nedeniyle saçılır. İkinci bölümde incelediğimiz gibi, cisim varken ki toplam alan (2.52) eşitliği ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\Delta E - \mu_0 \varepsilon(x) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma(x) \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (4.15)$$

$$\Delta E - \mu_0 \varepsilon(x) w^2 E - i \mu_0 \sigma(x) w E = 0 \quad (4.16)$$

Bu çalışmada cisim yokken ki toplam dalgayı E^0 ile, saçılan dalgayı E^s ile, yansıyan dalgayı E^t ile, toplam alanı ise E ile göstereceğiz. Yukarıdaki denklemin çözümünü

$$E = E^0 + E^s \quad (4.17)$$

şeklinde arayalım. Bu ifadeyi (4.17) eşitliğinde yerine yazalım;

$$\Delta(E^0 + E^s) + \mu_0 \varepsilon(x) w^2 (E^0 + E^s) - i \mu_0 \sigma(x) w (E^0 + E^s) = 0 \quad (4.18)$$

elde ettiğimiz bu eşitliğin her iki tarafına $k^2(x_2)E^s$ ekleyip, düzenlersek:

$$\begin{aligned} \Delta E^s + k^2(x_2)E^s &= -\Delta E^0 - \mu_0 \varepsilon(x) w^2 (E^0 + E^s) \\ &+ i \mu_0 \frac{\sigma(x)}{\varepsilon_2 w} w^2 \varepsilon_2 (E^0 + E^s) + k^2(x_2)E^s \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$E^0 + E^s = E \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} \Delta E^s + k^2(x_2)E^s &= k^2(x_2)E^0 + k^2(x_2)E^s + \\ &(-\mu_0 \frac{\varepsilon(x)\varepsilon_2}{\varepsilon_2} w^2 + i \mu_0 \frac{\sigma(x)}{\varepsilon_2 w} w^2 \varepsilon_2)(E^0 + E^s) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\Delta E^s + k^2(x_2)E^s = k^2(x_2)E + k^2(x_2)\left(-\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_2} + i\frac{\sigma(x)}{\varepsilon_2 w}\right)E \quad (4.21)$$

$$\Delta E^s + k^2(x_2)E^s = -k^2(x_2)\left[\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\varepsilon(x) - i\frac{\sigma(x)}{w}\right) - 1\right]E \quad (4.22)$$

elde ederiz. Şimdi aşağıdaki gibi değişen bir fonksiyon tanımlayalım:

$$v(x) = \left[\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\varepsilon(x) - i\frac{\sigma(x)}{w}\right) - 1\right] \quad (4.23)$$

Görüldüğü gibi bu fonksiyon cismin fiziksel özelliklerini bünyesinde bulundurmaktadır. Saçılan alanın toplam alanla ilişkisinin belirlendiği (4.22) eşitliğini bu fonksiyon cinsinden yazalım;

$$\Delta E^s + k^2(x_2)E^s = -k^2(x_2)v(x).E(x) \quad (4.24)$$

Burada da $w(x)$ şeklinde aşağıda gösterildiği gibi yeni bir fonksiyon tanımlayalım.

$$w(x) = v(x)\left[1 + \frac{E^s(x)}{E^0(x)}\right] \quad (4.25)$$

$$E^0(x)w(x) = v(x)E(x) \quad (4.26)$$

Böylece denkleminiz aşağıdaki şekli alır:

$$\Delta E^s + k^2(x_2)E^s = -k^2(x_2)E^0(x).w(x) \quad (4.27)$$

$w(x)$ ' i bu şekilde tanımlamamızın amacı (4.24) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci terimin katsayısını sabit yapabilmektir. (4.27) denklemini **Born** yaklaşımında inceleyelim. Bu yaklaşımda

$$|E^s(x)| \ll |E^0(x)| \quad x \in B \quad (4.28)$$

kabul edilir ve buna göre

$$v(x) \approx w(x) \quad (4.29)$$

elde edilir. Bu yaklaşım cismin fiziksel özelliklerinin ortamın fiziksel özelliklerinden çok farklı olmadığını göstermektedir.

Bilindiği gibi (4.27) denklemi ikinci mertebeden diferansiyel denklemdir. Matematik-fizik denklemleri teorisinden belli olduğu gibi baktığımız problemin çözümünü bulabilmek için sınır koşullarının verilmesi gerekir. Bazı durumlarda (basit ortam) Helmholtz denklemi Sommerfeld sınır şartı kullanarak kesin çözülebilir.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sqrt{|x|} \left[\frac{\partial E^s}{\partial |x|} - ik(x_2) E^s \right] = 0$$

$$x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (4.30)$$

Buraya kadar verdiğimiz matematiksel fizik denklemler hem düz, hem de ters problem için geçerli olup, bu aşamada bir ayrıma geçmemiz gerekmektedir. Bu nedenle alt bölümlerde önce düz daha sonra ise ters problem irdelenecektir.

4.1. Dielektrik Katsayısı Sabit Olan Silindirden Elektromanyetik Dalgaların Saçılması

Bu alandaki araştırmaların genel özelliklerini elde etmek için iki boyutlu homojen silindirden saçılma problemine bakalım. Bu durumda üç boyutlu saçılma probleminin özelliklerini kaybetmeden düz ve ters saçılma problemlerini inceleyebiliriz. Daha önceden anlatıldığı gibi elektromanyetik alan iki boyutlu düzlemde skaler E_z ve H_z fonksiyonları ile tam olarak belirlenir. Elektrik alan veya manyetik alan vektörlerinden birisi z eksenine paralel, yani iki boyutlu düzlemde diktir. E_z ve H_z 'in her ikisinde aynı parçasal diferansiyel denklemi sağlarlar. İki ortamı ayıran yüzeydeki geçiş şartları birinci durum için E_z ve $\frac{\partial E_z}{\mu \partial n}$ fonksiyonlarının süreklilik koşulu, diğerinde ise H_z ve $\frac{\partial H_z}{\epsilon \partial n}$ fonksiyonlarının süreklilik

koşullarıdır. Eğer sınır mükemmel iletken $u = 0$ ve $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 'dır. Böylece empedans sınır şartı $\eta u + \frac{\eta u}{\partial n} = 0$ olacaktır.

Burada düzlemsel dalga tarafından uyarılmış, b yarıçaplı, homojen, izotropik dairesel bir silindirden saçılma problemi ele alınacak ve silindirin dışında yazılan

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2 E = 0 \quad (4.31)$$

parçasal diferansiyel eşitliği çözülecektir. Silindirin içerisinde ise k_1 yerine k_2 yazılacaktır. Gelen dalgayı E_i , silindirden saçılan dalgayı E_1 ile, içeriye geçen dalgayı ise E_2 ile gösterelim. ζ dıştan içe aktarma oranı ise, silindir yüzeyindeki sınır koşulları

$$E^i + E_1 = E_2, \quad \eta(E^i + E_1) = \zeta \frac{\partial E_2}{\partial n} \quad (4.32)$$

E , 2π ile değişen periyodik bir fonksiyon olduğunda Fourier serisine açılabilir.

$$E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(r) e^{im\phi} \quad \text{burada} \quad a_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E e^{-im\phi} d\phi \quad (4.33)$$

a_m m.mertebeden Bessel fonksiyonudur (Ek-A). $k_1 r$ bu fonksiyonun argümanıdır. r ve ϕ ise düzlemdeki kutup koordinatlarıdır. Örneğin, düzlemsel dalga $E^i = e^{-ik_1 r \cos(\phi)}$ ise,

$$E^i = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_1 r) e^{im(\phi - \frac{1}{2}\pi)} \quad (4.34)$$

şeklinde Fourier serisi şeklinde ifade edilir. E_1 sonsuzlukta giden dalga olmalıdır.

$$E_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m H_m^{(2)}(k_1 r) e^{im(\phi - \frac{1}{2}\pi)} \quad (4.35)$$

Diğer bir deyişle E_2 , $r = 0$ 'da sonlu değerde olmalıdır. Bu durumda

$$E_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m J_m(k_2 r) e^{im(\phi - \frac{1}{2}\pi)} \quad (4.36)$$

şeklindeki uygun ifade elde edilmiş olur. Sınır şartlarında bunları yerine koyarsak,

$$J_m(k_1 b) + b_m H_m^{(2)}(k_1 b) = c_m J_m(k_2 b) \quad (4.37)$$

$$k_1 \{J'_m(k_1 b) + b_m H_m^{(2)'}(k_1 b)\} = \zeta k_2 c_m J'_m(k_2 b) \quad (4.38)$$

Böylece

$$b_m = \frac{\zeta k_2 J'_m(k_2 b) J_m(k_1 b) - k_1 J_m(k_2 b) J'_m(k_1 b)}{k_1 J_m(k_2 b) H_m^{(2)'}(k_1 b) - \zeta k_2 J'_m(k_2 b) H_m^{(2)}(k_1 b)}, \quad (4.39)$$

$$c_m = -2i/\pi b \{k_1 J_m(k_2 b) H_m^{(2)'}(k_1 b) - \zeta k_2 J'_m(k_2 b) H_m^{(2)}(k_1 b)\} \quad (4.40)$$

Örneğin süper iletken için aşağıdaki empedans sınır şartı ile konuyu ele alalım.

$$\partial(E^i + E_1)/\partial n + \eta(E^i + E_1) = 0 \quad (4.41)$$

Burada E_2 yoktur ve E_1 için bu durumu ayırtetmek için b_m yerine B_m diyelim.

$$B_m = -\frac{\eta J_m(k_1 b) + k_1 J'_m(k_1 b)}{\eta H_m^{(2)}(k_1 b) + k_1 H_m^{(2)'}(k_1 b)} \quad (4.42)$$

Şimdi alan tam olarak belirlenmiştir. Bu hesaplamalar yüksek frekansa kadar kısmen doğrudur. Yüksek frekanslarda seri yavaş değiştiğinden alçak frekans davranışı görülecektir. $k_1 b$ ve $k_2 b$ çok küçük değerlerde ise Bessel fonksiyonu ve onun argümanları için yaklaşık değerler yazabiliriz.

$$J_m(z) = (-1)^m J_{-m}(z) \quad (4.43)$$

$$H_m^{(2)}(z) = (-1)^m H_{-m}^{(2)}(z) \quad (4.44)$$

Böylece ilk durum da sadece $m = 0, \pm 1$ terimleri b_m için yeterli olacaktır.

$$E_1 \approx b_0 H_0^{(2)}(k_1 r) - 2ib_1 H_1^{(2)}(k_1 r) \cos \phi, \quad (4.45)$$

$$b_0 = \frac{1}{4}\pi i b^2 (k_1^2 - \zeta k_2^2), \quad b_1 = \frac{1}{4}\pi i k_1^2 b^2 (\zeta - 1)/(\zeta + 1). \quad (4.46)$$

Silindir merkezinden büyük uzaklıklarda E_1 için

$$E_1 \sim \left\{ \frac{1}{4}(k_1^2 - \zeta k_2^2) b^2 + \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} k_1^2 b^2 \cos \phi \right\} i \left(\frac{\pi}{2k_1 r} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ik_1 r + \frac{1}{4}\pi i} \quad (4.47)$$

şeklindeki ifadeyi verebiliriz. Yukardaki denklemde birinci terim, silindir eksenine boyunca yer alan çizgi kaynaktan yayılan alan gibi tanımlanabilecekken, ikinci terim ise çift çizgi kaynağından yayılan alan şeklinde ifade edilebilir.

4.2. Elektromanyetik Dalgaların Ters Saçılma Probleminin Analitik İncelemesi

4.1'de verilen düz problem çözümüne benzer şekilde ters problemin çözümü (4.24) denkleminin elde edilecektir. Bu çözüm ise, aşağıdaki şekilde aranacaktır.

$$E^s(x) = k_2^2 \int_B G(x; y) E^0(y) w(y) dy \quad (4.48)$$

şeklindedir.

Cismin içinde ve cismin çevresinde saçılan dalgayı belirlemek istediğimizde Born yaklaşımı yetersiz olur. Çünkü (4.25)' den de görüldüğü gibi $w(x)$ saçılan dalganın değerini içermektedir. (4.48)'de ki $G(X; y)$ Green fonksiyonudur. Bilindiği gibi aşağıdaki denklemin çözümüne Green fonksiyonu denir.

$$\Delta G + k^2(x_2)G = -\delta(x - y) \quad (4.49)$$

$G(x; y)$ ' nin daha uygun bir ifadesini elde edebilmek için önce Fourier dönüşümüne bakalım.

$$\bar{G}(\alpha, x_2; y) = \int_R G(x_1, x_2; y) e^{-i\alpha x_1} dx_1 \quad (4.50)$$

Bu dönüşümü (4.49)' da gözönüne alarak aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\frac{d}{dx_2^2} \bar{G} - [\alpha^2 - k^2(x_2)] \bar{G} = -e^{-i\alpha y_1} \delta(x_2 - y_2) \quad (4.51)$$

(4.50)' ye benzer olarak $G(x; y)$ için ters Fourier dönüşümünü yazalım:

$$G(x; y) = \frac{1}{2\pi} \int_{c_1} \bar{G}(\alpha, x_2; y) e^{i\alpha x_1} d\alpha \quad (4.52)$$

(4.50) ve (4.52)'den Green fonksiyonunun yapısının aşağıdaki özelliğe sahip olduğunu görürüz.

$$G(x; y) \equiv G_o(x_1 - y_1, x_2, y_2) \quad (4.53)$$

Aynı şekilde E^s 'in de Fourier dönüşümü alınırsa;

$$\overline{E}_s(\alpha, x_2) = k_2^2 \int_B \overline{G}(\alpha, x_2; 0; y_2) [\overline{E^0 w}](\alpha, y_2) dy_2 \quad (4.54)$$

$\theta \in (-\pi, 0)$ aralığı ve $x_2 > 0$ için eşitlik

$$\frac{1}{k_2^2} \exp(\gamma_0 x_2) \overline{E}_s(\alpha, x_2) = F(K, L, A, \kappa) \quad (4.55)$$

şeklinde elde edilecektir. $w(\nu)$ 'nin bu ifadesinden ters Fourier dönüşümü alınarak $w(x)$ hesaplanır. $w(x)$ 'den de $v(x)$ bulunabilir.

İkinci yaklaşımda da birinci yaklaşımda olduğu gibi katmanları iletken ve manyetik olmayıp, dielektrik katsayılarında ϵ_1, ϵ_2 ve ϵ_3 şeklinde olan homojen bir ortam ele alalım. Ara katmanda bulunan sonsuz uzunluktaki iletken ve manyetik olmayan ($\mu = \mu_0, \sigma = 0$) silindir şeklindeki B cisminin dielektrik katsayısı x 'in bir fonksiyonu olsun ($\epsilon(x)$). Ayrıca katmanları dielektrik katsayıları arasında $\epsilon_3 \geq \epsilon_1$ ve $\epsilon_3 \geq \epsilon_2$ şeklinde bir orantı olduğunu kabul edelim. Cisim yine z eksenine paralel olup, düzlemsel ve monokromatik dalga ile uyarılsın. Bu durumda toplam alan şu şekilde yazılabilir.

$$E(x) = E^s(x) + E^0(x) \quad (4.56)$$

Cisim yokken ki alan

$$\Delta E^0 + k^2(x_2) E^0 = 0 \quad (4.57)$$

denklemini sağlar. B cisminden saçılan alan içinse birinci yaklaşımda bulduğumuz gibi

$$\Delta E^s + k^2(x_2) E^s = -k^2(x_2) v(x) E(x) \quad (4.58)$$

yazabiliriz. (4.56) ve (4.57) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\Delta E^0 + \Delta E^s + k^2(x_2)E^0 + k^2(x_2)E^s = -k^2(x_2)v(x)E(x) \quad (4.59)$$

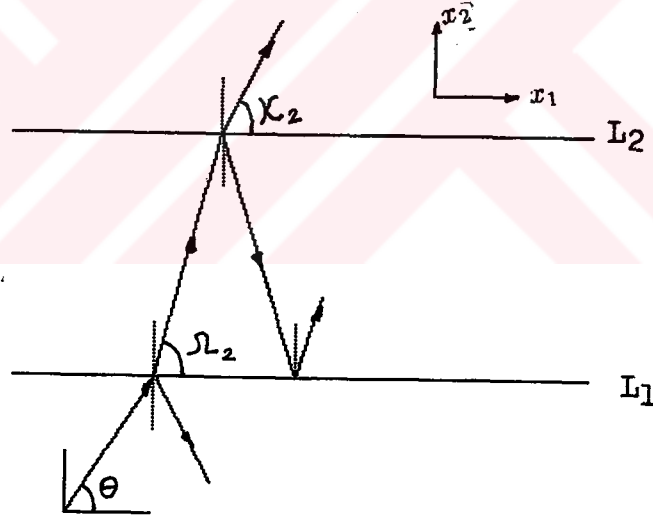
toplam alan için

$$\Delta E + k^2(x_2)E = -k^2(x_2)v(x)E(x) \quad (4.60)$$

eşitliği elde edilir. Burada $v(x)$ fonksiyonu birinci yaklaşımdaki ile aynı nitelikte olup, $\sigma(x) = 0$ olduğundan aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$v(x) = \frac{k_B^2(x)}{k^2(x_2)} - 1 = \begin{cases} 0 & x \notin B \\ \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_3} - 1 & x \in B \end{cases} \quad (4.61)$$

$v(x)$ sınırlandırılmış bir fonksiyondur. Görüldüğü gibi $1 + v(x) > 0$ şeklindedir.



Şekil 4.4 Üç katmanlı ortamda $k^2(x_2)$ 'nin değişimi

$k^2(x_2)$ fonksiyonu ise;

$$k^2(x_2) = \begin{cases} \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0 & x_2 > 0 \\ \omega^2 \varepsilon_3 \mu_0 = k_B^2 & x_2 \in (-d, 0) \\ \omega^2 \varepsilon_2 \mu_0 & x_2 < -d \end{cases} \quad (4.62)$$

şeklindedir. Toplam alan E , ω frekansında gelen dalganın yayılma açısı θ 'ya da bağlıdır. Bu nedenle $E(x, \theta, \omega)$ şeklinde gösteririz. Bu fonksiyon fiziksel olarak $\omega > 0$ için tanımlanabilir. $E(x, \theta, \omega)$ fonksiyonunun analitikliğini kompleks ω düzleminde düşünelim. Bu durumda $E(x, \theta, -\omega)$ fonksiyonu da $\omega > 0$ olduğu yerlerde de (4.24) için bir çözümdür. Ancak sonsuz alan modelinde $\omega > 0$ için geçerli olan

$$\sqrt{|x|} \left[\frac{\partial}{\partial |x|} E^s - ik_B(x_2) E^s \right] \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty \quad (4.63)$$

Sommerfeld sınır şartı $\omega < 0$ için bu haliyle geçerli değildir. $\omega < 0$ için sınır şartı

$$\sqrt{|x|} \left[\frac{\partial}{\partial |x|} E^s + ik_B(x_2) E^s \right] \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty \quad (4.64)$$

şeklinde olacaktır. $E(x, \theta, \omega)$ giden dalga çözümü, $E(x, \theta, -\omega)$ ya ise gelen dalga çözümü dersek, bu iki dalga arasında

$$E(x, \theta, \omega) = \int_{-\pi}^{\pi} (S(\theta, \psi) E(x, \psi, -\omega) d\psi) \quad (4.65)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Buradaki $S(\theta, \psi)$ integralin çekirdeğidir ve bilinen bir fonksiyondur.

Metodun amacı, ilk önce $E(x, \theta, \omega)$ için (4.65) fonksiyonel eşitliğini çözmek ve daha sonra (4.24) diferansiyel eşitliğinden $v(x)$ 'in açık bir ifadesini (4.59) eşitliğinden

$$-\frac{\Delta E}{k_B^2(x_2)} = (1 + v(x)) E(x, \theta, \omega)$$

$$-\frac{\Delta E}{k_B^2(x_2) E(x, \theta, \omega)} = 1 + v(x)$$

$$v(x) = -\left[1 + \frac{\Delta E(x, \theta, \omega)}{k_B^2(x_2) E(x, \theta, \omega)} \right] \quad x_2 \in (-d, 0)$$

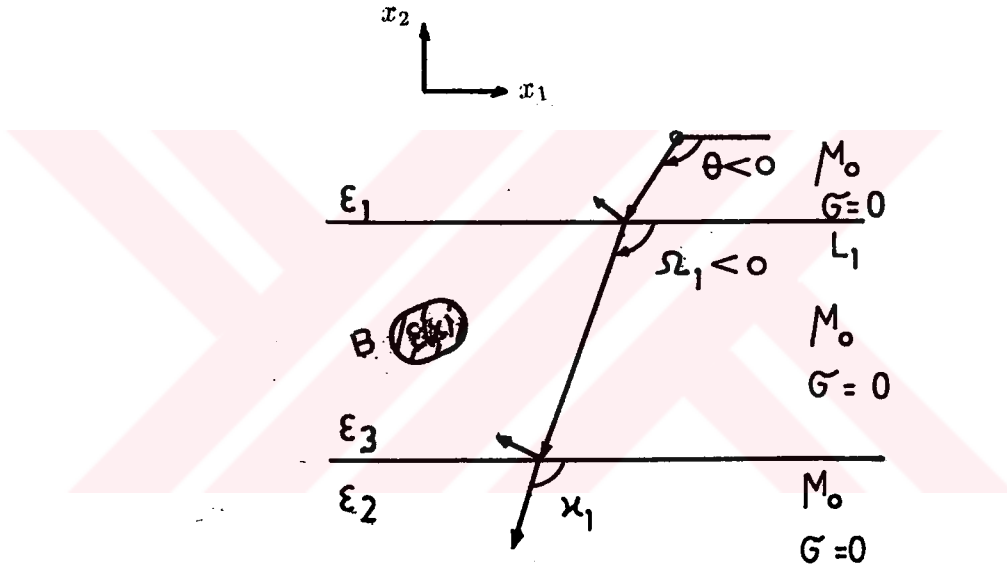
$$v(x) = -[1 + \Delta E(x, \theta, \omega)/w^2 \epsilon_2 \mu_0 E(x, \theta, \omega)] \quad (4.66)$$

şeklinde elde etmektir. Öte yandan $E^s(x, \theta, -\omega)$ fonksiyonu analitik olduğu için

$$E^s(x, \theta, -\omega) = \frac{e^{i\omega l_3 a}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma l_3 a} E^s(x, \theta, \sigma)}{\sigma + \omega} d\sigma \quad (4.67)$$

şeklinde yazabiliriz. İntegral üstündeki (\sim) işareti Cauchy ve Jordan teoremlerinden bilinen singüler integrali belirtmektedir. Şimdi (4.65) ve (4.67)'nin çözümünde önemli rol oynayan $E^0(x, \theta, \omega)$ 'yi inceleyelim.

Önce gelen dalga E^i 'yi yazalım:



Şekil 4.5 $\theta \in (-\pi, 0)$ olması durumunda gelen dalga

$$E^i = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \exp\{ik_1(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)\} \quad \theta \in (-\pi, 0) \quad (4.68)$$

$x_2 > 0$ için

$$E^0(x) = E^i + R_1 \exp\{ik_1(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)\}, \quad (4.69)$$

$-d < x_2 < 0$ için

$$E^0(x) = K_1 \exp\{ik_3[-x_1 \cos(\pi - \Omega_1) - x_2 \sin(\pi - \Omega_1)]\} + L_1 \exp\{ik_3[-x_1 \cos(\pi - \Omega_1) + x_2 \sin(\pi - \Omega_1)]\} \quad (4.70)$$

Denklemleri düzenlersek:

$$E^0(x) = K_1 \exp\{ik_3(x_1 \cos \Omega_1 + x_2 \sin \Omega_1)\} + L_1 \exp\{ik_3(x_1 \cos \Omega_1 - x_2 \sin \Omega_1)\} \quad (4.71)$$

$x_2 < -d$ bölgesinde

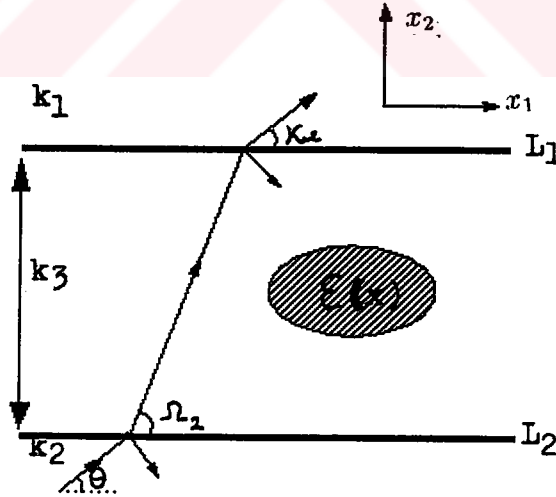
$$E^0(x) = T_1 \exp\{ik_1(x_1 \cos \kappa_1 + x_2 \sin \kappa_1)\} \quad (4.72)$$

Şimdi Snell ilişkisini yazalım:

$$k_1 \cos \theta = k_3 \cos \Omega_1 = k_2 \cos x_1 \quad \Omega_1, \text{Re}(\kappa_1) \in (-\pi, 0) \quad (4.73)$$

Burada Ω_1 ve κ_1 kırılma açılarıdır ve kırılan dalgaların yayılma yönünü gösterirler.

$\varepsilon_3 \geq \varepsilon_1$ ve $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_2$ kabulü nedeniyle Ω_1 açısı daima reel olacakken κ_1 ise kompleks değerli olacaktır. Kırılma ve yansımaya katsayıları R_1, T_1, K_1 ve L_1 şu şekilde hesaplanırlar:



Şekil 4.6 Dalgaların kırılması ve yansımaları

Kolaylık için $l_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}$, $l_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_0}$, $l_3 = \sqrt{\varepsilon_3 \mu_0}$ değerlerini tanımlayalım. Şimdi yansımaya ve kırılma katsayılarını hesaplayalım. Bu katsayılar üçüncü bölümde

verildiği gibi

$$R_{ij} = \frac{k_i \sin \theta - k_j \sin \kappa}{k_i \sin \theta + k_j \sin \kappa} \quad (4.74)$$

$$T_{ij} = 1 + R_{ij} \quad (4.75)$$

şeklindedir.

$$R_{20} = \frac{l_1 \sin \theta - l_3 \sin \Omega_1}{l_1 \sin \theta + l_3 \sin \Omega_1}, \quad R_{12} = \frac{l_3 \sin \Omega_1 - l_2 \sin \kappa_1}{l_3 \sin \Omega_1 + l_2 \sin \kappa_1} \quad (4.76)$$

$$T_{20} = \frac{2l_1 \sin \theta}{l_1 \sin \theta + l_3 \sin \Omega_1}, \quad T_{12} = \frac{2l_3 \sin \Omega_1}{l_3 \sin \Omega_1 + l_2 \sin \kappa_1} \quad (4.77)$$

θ açısı altında $(0, \pi)$ aralığında gelen dalganın bir kısmı yokken önce araortama Ω_1 açısıyla kırılarak girer. Daha sonra bu ortamda yayılırken L_1 sınırına geldiğinde burada da bir kısmı yansiyarak geri döner, bir kısmı ise κ_1 açısıyla kırılarak birinci ortamda yayılır. L_1 sınırından yansıyan dalga tekrar L_2 sınırına geldiğinde yine yansır. Bu olay sürekli devam eder. Bir M ölçüm noktasında aynı yönlü dalgalara baktığımızda L_2 'den L_1 'e doğru ve L_1 den L_2 'ye doğru giden dalgaların toplamını sırasıyla K_1 ve L_1 ile ifade edelim. $x_2 < -d$ katmanında yayılan dalgaların toplamını T_1 ; $x_2 > 0$ bölgesinde yayılan dalgaların toplamını ise R_1 ile ifade edelim. Buna göre:

$$K_1 = T_{02}[1 + R_{12} \cdot R_{02} e^{i2dl_3 \omega \sin \Omega_1} + R_{12}^2 R_{02}^2 e^{i4dl_3 \omega \sin \Omega_1} + \dots] \quad (4.78)$$

$$Q_1 = (l_3 \sin \Omega_1 + l_2 \sin \kappa_1)$$

$$Q_{-1} = (l_3 \sin \Omega_1 - l_2 \sin \kappa_1)$$

$$Q_2 = (l_1 \sin \theta + l_3 \sin \Omega_1)$$

$$Q_{-2} = (l_1 \sin \theta - l_3 \sin \Omega_1)$$

$$K_1(\theta, \omega) = \frac{T_{02}}{1 - R_{12} \cdot R_{02} \cdot e^{2idl_3 \omega \sin \Omega_1}} \quad (4.79)$$

$$K_1(\theta, \omega) = \frac{2l_1 \sin \theta Q_1 e^{2idl_3 \omega \sin \Omega_1}}{Q_1 \cdot Q_2 + Q_{-1} \cdot Q_{-2}} \quad (4.80)$$

Benzer şekilde

$$L_1(\theta, \omega) = \frac{T_{02} \cdot R_{12}}{1 - R_{12} R_{02} e^{-i\omega 2dl_3 \sin \Omega_1}} \quad (4.81)$$

$$L_1(\theta, \omega) = \frac{2l_1 \sin \theta Q_{-1} e^{-i\omega 2dl_3 \sin \Omega_1}}{Q_1 \cdot Q_2 + Q_{-1} \cdot Q_{-2}} \quad (4.82)$$

$$T_1(\theta, \omega) = \frac{4l_1 \sin \theta l_3 \sin \Omega_1 e^{2i\omega l_3 d \sin \kappa_1}}{Q_1 \cdot Q_2 + Q_{-1} \cdot Q_{-2}} \quad (4.83)$$

$$R_1(\theta, \omega) = \frac{Q_{-2} Q_1 e^{i\omega l_3 d \sin \Omega_1} + Q_2 Q_{-1} e^{i\omega l_3 d \sin \Omega_1}}{Q_1 \cdot Q_2 + Q_{-1} \cdot Q_{-2}} \quad (4.84)$$

$E^0(x)$ aynı şekilde K_1, L_2, R_2 ve T_2 cinsinden $(0, -\pi)$ aralığı içinde oluşturulabilir. Ayrıca $E^0(x)$ 'in fazını gösteren $e^{2i\omega l_3 d \sin \omega_1}$;

$$e^{2i\omega l_3 d \sin \omega_1} = -\frac{l_1 \sin \theta - l_3 \sin \Omega_1}{l_1 \sin \theta + l_3 \sin \Omega_1} \cdot \frac{l_3 \sin \omega_1 - l_2 \sin \kappa_1}{l_3 \sin \omega_1 + l_2 \sin \kappa_1} \quad (4.85)$$

şeklinde de yazabiliriz.

Şimdi birinci yaklaşımda yazdığımız gibi problemi Green fonsiyonunun çözümü haline getirelim:

Cisim yokken alanın:

$$\Delta E^0 + k^2(x_2)E^0 = 0 \quad (4.86)$$

yukardaki denklemi, saçılan alanı ise

$$\Delta E^s + k^2(x_2)E^s = -k^2(x_2)v(x)E(x) \quad (4.87)$$

denklemini sağladığı bilinmektedir. (4.86) denkleminin çözümünü aşağıdaki şekilde arayabiliriz.

$$E^s(x) = k^2(x_2) \int_B G_0(x, y) v(y) E(y) dy \quad (4.88)$$

Burada $G_0(x, y)$ üç boyutlu uzayda tanımlanmış Green fonksiyonudur ve aşağıdaki denklemin çözümüdür.

$$\Delta G_0 + k^2(x_2) G_0 = \delta(x - y) \quad (4.89)$$

$G_0^\pm(x, y)$, $x_2 > 0$ ve $x_2 < -d$ bölgesi için

$$G_0^\pm(x, y) = \frac{i}{4\pi} \int_{L_\pm} E^0(y, \eta) E_i(x, \eta \pm \pi) d\eta, y_2 \in (-d, 0) \quad (4.90)$$

şeklindedir. Ayrıca problemin nümerik çözümünde de kullanacağımız (4.49) eşitliğindeki $S(\theta, \psi)$ 'nin açık ifadesini verelim.

$$S_{11}(\theta, \psi) = R_1(\theta, \omega) \delta(\theta, \psi + \pi) + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} A_{21}(\psi + \pi, \theta) \quad (4.91)$$

$$S_{12}(\theta, \psi) = T_1(\theta, \omega) \delta(\psi - \kappa_1(\theta) - \pi) + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} A_{11}(\psi - \pi, \theta) \quad (4.92)$$

$$S_{21}(\theta, \psi) = T_2(\theta, \omega) \delta(\psi - \kappa_2(\theta) + \pi) + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} A_{22}(\psi + \pi, \theta) \quad (4.93)$$

$$S_{22}(\theta, \psi) = R_2(\theta, \omega) \delta(\psi + \theta - \pi) + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} A_{12}(\psi - \pi, \theta) \quad (4.94)$$

Buradaki A_{11} , A_{12} , A_{21} ve A_{22} değerleri radiation patternleri gösterir.

(4.55), (4.87) eşitliklerini kullanarak

$$E(x, \theta, \omega) = E_0(x, \theta, \omega) + k^2(x_2) \int_B G_0(x, y, \omega) v(y) E(y, \theta, \omega) dy \quad (4.95)$$

denklemini elde ederiz.

5. HOMOJEN OLMAYAN ORTAMLARDA ELEKTROMANYETİK TERS SAÇILMA PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

5.1. Problemin Formülasyonu

Dalga denklemleri için ters problemler; saçılan dalgaların özelliklerinin deneysel ölçüm sonuçlarını kullanarak homojen olmayan saçılma ortamının fiziksel ve geometrik özelliklerinin bulunmasıdır. Mühendislik ve tıbbın birçok alanlarında, örneğin mühendislikte; malzemelerin tahribatsız muayeneleri, jeofizikte saçılan sismik dalgaları inceleyerek dünyanın iç yapısının belirlenmesi dalga denklemi için ters problemlerin uygulama alanlarıdır. Homojen olmayan ortamlarda ters saçılma probleminin şu anda üzerinde çok sayıda bilim adamının çalıştığı problemlerden biri olması problemin güncelliği ile bağlantılıdır.

M.İdemen(1985)'in çalışmasında fiziksel özellikleri farklı katmanlar arasında bulunan silindirik cisimden ters saçılma problemi incelenmiş ve yeni yaklaşımda bulunulmuştur. Bu yaklaşımda silindirik cismin sonsuz uzun ve yönünün belli olduğu kabul edilerek problem iki boyutlu skaler probleme dönüştürülmüştür(Şekil 4.5). x_1Ox_2 koordinat sisteminde $x_2 > 0$, $-d < x_2 < 0$ ve $x_2 < -d$ farklı fiziksel özelliklere sahip ortamlar olduğu ve dielektrik katsayısı $x = (x_1, x_2)$ 'ye bağlı olan silindirik cismin ortadaki katmanda yerleştiği ve gelen dalganın lineer polarize edilmiş, düzlem dalga olduğu kabul edilmektedir. Bu

durumda toplam elektrik alanı $E(x)$

$$\Delta E + \omega^2 l^2(x_2)[1 + v(x)]E = 0 \quad (5.1)$$

denklemini ve Sommerfeld sınır koşulunu sağlamaktadır.

$$l(x_2) = \begin{cases} l_1 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, & x_2 > 0 \\ l_3 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_0}, & x_2 \in (-d, 0) \\ l_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}, & x_2 < -d \end{cases} \quad (5.2)$$

$$v(x) = \frac{l^2(x)}{l^2(x_2)} - 1 = \begin{cases} 0 & x \notin B \\ \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_3} - 1 & x \in B \end{cases} \quad (5.3)$$

B silindirin enine kesitini, $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2$ ve $\varepsilon(x)$ değerleri ise $x_2 > 0, \{x/x_2 \in (-d, 0)\} \setminus B, x_2 < -d$ ve B bölgelerinin dielektrik katsayılarını göstermektedir. Burada ele aldığımız B cismi ve üç farklı katman magnetik olmayan ortamlardır ($\mu = \mu_0$). Problemdeki hedefimiz $v(x)$ fonksiyonunu bularak, bu fonksiyondan cismin bilinmeyen fiziksel özelliklerinin ve yerinin bulunmasıdır. Bulunan $v(x)$ fonksiyonunun sıfırdan farklı olan yeri silindirik cismin enine kesit B bölgesini, onun sayısal fonksiyonu ise $\varepsilon(x)$ değerini belirler. Bu nedenle ilk olarak (4.65) fonksiyonel denklemini $E(x, \theta, \omega)$ fonksiyonuna göre $-d < x_2 < 0$ bölgesinde çözerek ve sonra (5.1) diferansiyel denklemini kullanarak $v(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki açık ifadenin bulunması gerekir.

$$v(x) = -[1 + \Delta E(x, \theta, \omega)/\omega^2 \varepsilon_3 \mu_0 E(x, \theta, \omega)] \quad (5.4)$$

Toplam alan fonksiyonu $E(x)$, gelen dalga'nın θ gelme açısına ve $\omega > 0$ frekansına bağlı olduğundan $E(x, \theta, \omega)$ şeklinde de yazılabilir. Bu fonksiyon (5.1) denklemini sağladığından, fonksiyonel denklemlerin devam etmesi prensibine göre

$E(x, \theta, -\omega)$, $\omega > 0$ fonksiyonu da (5.1) denklemini sağlayacaktır. Burada konu ettiğimiz $E(x, \theta, \omega)$ fonksiyonuna (5.1) denkleminin "giden dalga çözümü" , $E(x, \theta, -\omega)$ 'ya ise "gelen dalga çözümü " denir. M.İdemen(1985)'den bu iki dalga çözümlerinin IV.bölümde de verildiği gibi

$$E(x, \theta, \omega) = \int_{-\pi}^{\pi} S(\theta, \psi) E(x, \psi, -\omega) d\psi, \quad x \in R^2 \quad (5.5)$$

fonksiyonel denklemini sağladığı ve

$$E^s(x, \theta, \omega) = E(x, \theta, \omega) - E^0(x, \theta, \omega) \quad (5.6)$$

saçılan alan fonksiyonu için

$$E^s(x, \theta, -\omega) = \frac{e^{i\omega l_3 a}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma l_3 a} \frac{E^s(x, \theta, \sigma)}{(\sigma + \omega)} d\sigma, \quad x_2 \in (-d, 0) \quad (5.7)$$

"Universal bağıntı" olduğu gösterilmiştir. Burada $E^0(x, \theta, \omega)$ fonksiyonu cisim olmadığı durumdaki toplam alan fonksiyonu integral ise Cauchy principal value anlamındadır (a öyle bir değerki $|x| \leq a$ B bölgesini içine alır). $S(\theta, \psi)$ integral çekirdeği saçıcı cismin ve ortamların özelliklerini ve $x_2 > 0$, $x_2 < -d$ ortamlarında $E(x, \theta, \omega)$ için uzak alan ifadesine bağlı olarak bulunur.

5.2.Sayısal Çözüm İçin Denklemlerin Uygun Hale Getirilmesi:

$$\xi = \frac{\sigma - i}{\sigma + i} \quad (5.8)$$

dönüşümü ile yukardaki denklemler sistemi sayısal çözüm için daha avantajlı hale getirilebilir. Bu dönüşüm ile $\sigma \in (-\infty, \infty)$ kümesi kompleks düzlemde $|\xi| = 1$ çemberine karşı gelir (Şekil 5.1). Bu çember üzerinde $\sigma = e^{i\lambda}$ olduğunu

düşünürsek ($|e^{i\lambda}|$) bu durumda λ değişim alanı $(-\pi, \pi)$ aralığı olacaktır. Aynı şekilde

$$\eta = \frac{w - i}{w + i} \quad (5.9)$$

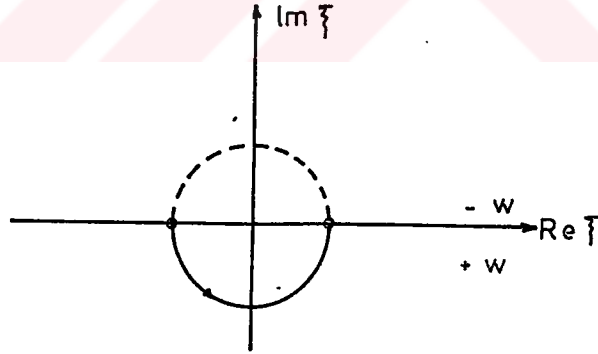
dönüşümünü yaparsak, bu durumda

$$\sigma - w = \frac{2i(\xi - \eta)}{(1 - \xi)(1 - \eta)} \quad (5.10)$$

$$d\sigma = \frac{2id\xi}{(1 - \xi)^2} \quad (5.11)$$

olur ve görüldüğü gibi bu dönüşümde ω 'ya η karşı gelirse, $-\omega$ 'ya η^* karşı gelecektir. Bu dönüşüm neticesinde $\frac{E^s(x, \theta, \omega)}{(1 - \eta)} \times e^{i\omega l_3 a}$ eşitliğini $\gamma(x, \theta, \eta)$ ile ifadesi ile gösterelim. Bu durumda $\frac{E^s(x, \theta, -\omega)}{(1 - \eta^*)} \times e^{-i\omega l_3 a} = \gamma(x, \theta, \eta^*)$ olacaktır.

Yeni değişkenlerle (4.67) denklemini oluşturalım:



Şekil 5.1 Kompleks düzlemde η 'nin değişimi

$$\gamma(x, \theta, \eta) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\gamma(x, \theta, \xi)}{\xi - \eta} d\xi \quad (5.12)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.65) denklemini de aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\gamma(\theta, \eta) = \frac{1 - \eta^*}{1 - \eta} e^{2i\omega l_3 a} \int_{-\pi}^{\pi} S(\theta, \psi) \cdot \gamma(\psi, \eta^*) d\psi + \frac{e^{i\omega l_3 a}}{1 - \eta} f(\theta, \omega) \quad (5.13)$$

Böylece sayısal çözüm için daha uygun denklemler elde etmiş olduk.

5.3. Sayısal Çözüm Algoritması:

Bir önceki dönüşümler sonucu elde edilen denklemlerden (5.12) eşitliği $\gamma(x, \theta, \eta)$ fonksiyonunun $|\eta| = 1$ çemberi üzerindeki herhangi bir noktadaki değerini, bu çember üzerinde alınmayan tüm noktalardaki değerleri ile ifade edildiği görülmektedir. (5.13) denklemi ise $\gamma(x, \theta, \eta)$ fonksiyonunu bu çemberin aşağı yarım bölgesi üzerindeki noktalardaki değerini, yukarı yarım bölgedeki değerleri ile ifade etmektedir. (5.12) denklemini aşağıdaki şekilde yazalım :

$$\gamma(\theta, \eta) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1, \Im(\xi) > 0} \frac{\gamma(\theta, \xi)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1, \Im(\xi) \leq 0} \frac{\gamma(\theta, \xi)}{\xi - \eta} d\xi \quad (5.14)$$

Burada birinci terim yukarı yarım çember üzerinde, ikinci ise aşağı yarım çember üzerinde alınmaktadır. (5.13) denkleminde $\gamma(x, \theta, \eta)$ ifadesini yukarıdaki eşitlikte yer alan ikinci terim yerine yazabiliriz. Böylece ;

$$\gamma(\theta, \eta) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1, \Im(\xi) > 0} \frac{\gamma(\theta, \xi)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1, \Im(\xi) \leq 0} \frac{1}{(\xi - \eta)} \cdot \left\{ \frac{1 - \xi^*}{1 - \xi} e^{2i\omega l_3 a} \int_{-\pi}^{\pi} S(\theta, \psi) \cdot \gamma(\psi, \xi^*) d\psi + \frac{e^{i\omega l_3 a}}{1 - \xi} f(\theta, \omega) \right\} d\xi \quad (5.15)$$

elde ederiz. Görüldüğü gibi bu eşitlik $\gamma(x, \theta, \eta)$ fonksiyonunun yukarı yarım çember üzerindeki herhangi bir noktadaki değerini, yine bu yarım çember üzerindeki arta kalan noktalarla ifade edilmektedir.

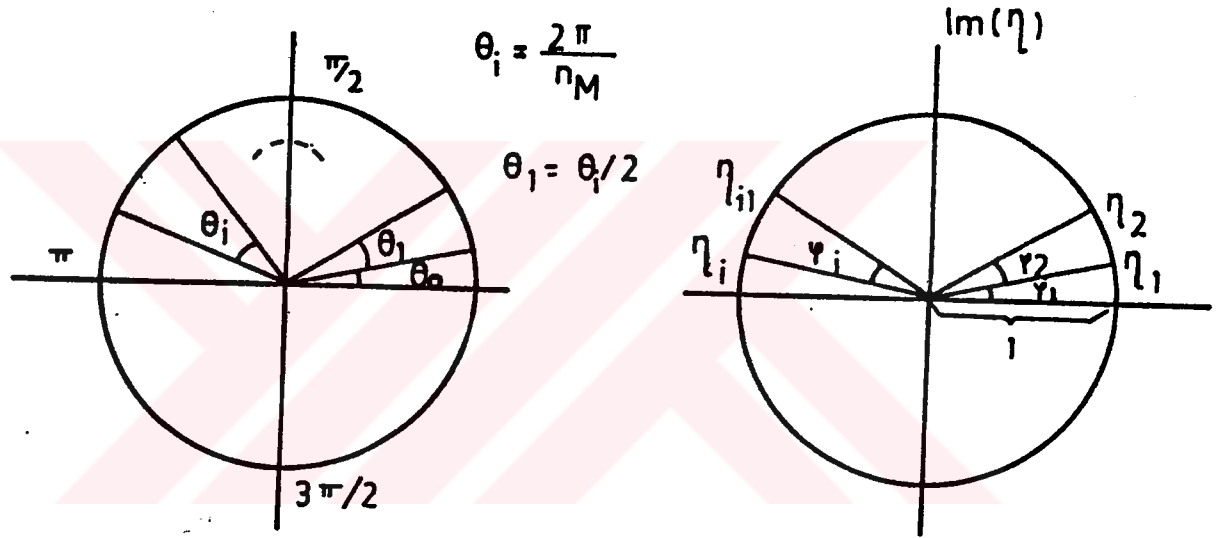
(5.15) integral denkleminin yaklaşık ifadesi

$$D = \{\theta, \eta : -\pi < \theta < \pi, |\eta| = 1\} \quad (5.16)$$

domeninde

$$K_{h, \tau_\xi} = \begin{cases} \theta_i, i = \overline{1, nm} & \theta_i = \theta_{i-1} + h, \theta_0 = h/2, h = 2\pi/nm \\ \xi_j, j = \overline{1, n} & \lambda_j = \lambda_{j-1} + \tau_\xi, \xi_j = e^{i\lambda_j}, \lambda_0 = \tau_3/2, \tau_3 = \pi/n \end{cases} \quad (5.17)$$

kafesi üzerinde alınmaktadır (Şekil 5.2).



Şekil 5.2a) Çemberde θ_i 'nin değişimi

b) ξ_j 'nin birim çemberde değişimi

(5.15) de yer alan $\int_{-\pi}^{\pi} S(\theta, \psi) \gamma(\psi, \xi^*) d\psi$ integrali için (4.91)-(4.95) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\theta \in (-\pi, 0) \text{ ise } \int_{-\pi}^0 S_{11}(\theta, \psi) \gamma(\psi, \xi^*) d\psi + \int_0^{\pi} S_{12}(\theta, \psi) \gamma(\psi, \xi^*) d\psi \quad (5.18)$$

şeklindedir.

$$\theta \in (0, \pi) \text{ ise } \int_{-\pi}^0 S_{21}(\theta, \psi) \gamma(\psi, \xi^*) d\psi + \int_0^{\pi} S_{22}(\theta, \psi) \gamma(\psi, \xi^*) d\psi \quad (5.19)$$

olur. Bu eşitliklerde $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ ifadelerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \theta \in (-\pi, 0) \text{ ise } R_1(\theta, \omega) \gamma(-\theta - \pi, \xi^*) + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^0 [A_{21}(\psi + \pi, \theta) \\ \gamma(\psi, \xi^*)] d\psi + T_1(\theta, \omega) \gamma(\kappa_1(\theta) + \pi, \xi^*) + \\ \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} [A_{11}(\psi - \pi, \theta) \gamma(\psi, \xi^*)] d\psi \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \theta \in (0, \pi) \text{ ise } T_2(\theta, \omega) \gamma(-\pi + \kappa_2(\theta), \xi^*) + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^0 [A_{22}(\psi + \pi, \theta) \\ \gamma(\psi, \xi^*)] d\psi + R_2(\theta, \omega) \gamma(\pi - \theta, \xi^*) + \\ \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} [A_{12}(\psi - \pi, \theta) \gamma(\psi, \xi^*)] d\psi \end{aligned} \quad (5.21)$$

olacaktır. Burada $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ saçılan dalganın ölçüm sonucunda elde edilen uzak alan ifadeleridir.

Sayısal çözüm için (4.35) denkleminin modelimiz gözönüne alınarak verilmiş şartlar altında elde edilen ifadesi kullanılmaktadır.

Yukarda elde ettiğimiz bu sonuçları (5.15)'de yerine yazalım.

$\theta \in (-\pi, 0)$ olması durumunda

$$\begin{aligned} \gamma(\theta, \eta) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1, \Im(\xi) > 0} \frac{\gamma(\theta, \xi)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1, \Im(\xi) \leq 0} \frac{1}{(\xi - \eta)}. \\ \left\{ \frac{1 - \xi^*}{1 - \xi} e^{2i\omega(\xi)l_3 a} \{ R_1(\theta, \omega) \gamma(-\theta - \pi, \xi^*) + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^0 [A_{21}(\psi + \pi, \theta) \right. \\ \gamma(\psi, \xi^*)] d\psi + T_1(\theta, \omega) \gamma(\kappa_1(\theta) + \pi, \xi^*) + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} [A_{11}(\psi - \pi, \theta) \\ \left. \gamma(\psi, \xi^*)] d\psi \} + \frac{e^{i\omega l_3 a}}{1 - \xi} f(\theta, \omega) \right\} d\xi \end{aligned} \quad (5.22)$$

$\theta \in (0, \pi)$ durumunda ise

$$\begin{aligned} \gamma(\theta, \eta) &= \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1, \Im(\xi) > 0} \frac{\gamma(\theta, \xi)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1, \Im(\xi) \leq 0} \frac{1}{(\xi - \eta)}. \\ &\left\{ \frac{1 - \xi^*}{1 - \xi} e^{2i\omega(\xi)l_3 a} \{T_2(\theta, \omega) \gamma(-\pi + \kappa_2(\theta), \xi^*) + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^0 [A_{22}(\psi + \pi, \theta) \right. \\ &\quad \left. \gamma(\psi, \xi^*)] d\psi + R_2(\theta, \omega) \gamma(\pi - \theta, \xi^*) + \right. \\ &\quad \left. \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi [A_{12}(\psi - \pi, \theta) \gamma(\psi, \xi^*)] d\psi \} \frac{e^{i\omega l_3 a}}{1 - \xi} f(\theta, \omega) \right\} d\xi \quad (5.23) \end{aligned}$$

D domeninde ve K kafesi üzerinde $\gamma(x, \theta_k, \eta_l)$ bilinmeyen kafes fonksiyonu için yaklaşık ifade aşağıdaki şekilde ayrıntı yazılır. Burada $k = \overline{1, nm}$, $l = \overline{1, n/2}$ şeklinde değişir.

$$\begin{aligned} & l = 2p, \quad p \in z \\ \gamma_{k,l} &= \frac{1}{\pi i} \sum_{q=1}^{n/2, 2} \frac{\gamma_{k,q}}{\xi_q - \xi_l} \cdot (e^{i(hg(q+1)-hg/2)} - e^{i(hg(q-1)-hg/2)}) + \\ & \frac{1}{\pi i} \sum_{q=n/2+1}^{n, 2} \left[\frac{1 - \xi_{n-q+1}}{1 - \xi_q} e^{2i\omega_q l_3 a} \cdot \sum_{i=1}^{nm} S_{k,i,q} \gamma_{i,n-q+1} \cdot \frac{2\pi}{nm} + \frac{e^{i\omega_q l_3 a}}{1 - \xi_q} f_{k,q} \right] / \\ & (\xi_q - \xi_l) \cdot (e^{i(hg(q+1)-hg/2)} - e^{i(hg(q-1)-hg/2)}) \quad (5.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & l = 2p + 1, \quad p \in z \\ \gamma_{k,l} &= \frac{1}{\pi i} \sum_{q=2}^{n/2, 2} \frac{\gamma_{k,q}}{\xi_q - \xi_l} \cdot (e^{i(hg(q+1)-hg/2)} - e^{i(hg(q-1)-hg/2)}) + \\ & \frac{1}{\pi i} \sum_{q=n/2+2}^{n, 2} \left[\frac{1 - \xi_{n-q+1}}{1 - \xi_q} e^{2i\omega_q l_3 a} \cdot \sum_{i=1}^{nm} S_{k,i,q} \gamma_{i,n-q+1} \cdot \right. \\ & \left. \frac{2\pi}{nm} + \frac{e^{i\omega_q l_3 a}}{1 - \xi_q} f_{k,q} \right] / (\xi_q - \xi_l) \cdot (e^{i(hg(q+1)-hg/2)} - e^{i(hg(q-1)-hg/2)}) \quad (5.25) \end{aligned}$$

Böylece $nm \times n/2$ sayıda kafes düğüm noktaları üzerinde bilinmeyen $\gamma(k, l)$ lere göre lineer denklemler sistemi oluşturuldu. Bu denklemler sistemini

$$\mathbf{AX} = \mathbf{F}$$

Böylece $nm \times n/2$ sayıda kafes düğüm noktaları üzerinde bilinmeyen $\gamma(k, l)$ 'lere göre lineer denklemler sistemi oluşturuldu. Bu denklemler sistemini

$$\mathbf{AX} = \mathbf{F}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada A katsayılar matrisini, X bilinmeyen vektörü, F ise sağ taraf vektörüdür. Bu matris ve vektörler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$X_i = \gamma_{[\frac{i}{n/2}]+1, i - [\frac{i}{n/2}] \cdot n/2} \quad (5.26)$$

Burada $i = \overline{1, nm \cdot n/2}$ şeklinde değişir. Benzer şekilde F_i 'de yazılırsa,

$$F_i = \frac{1}{\pi i} \sum_{q=n/2+1}^{n,2} \left[\frac{e^{i\omega_q l_2 a}}{1 - \xi_q} f_{k,q} \right] / (\xi_q - \xi_l) \cdot (e^{i(hg(q+1)-hg/2)} - e^{i(hg(q-1)-hg/2)}) \quad (5.27)$$

$l = 2p, \quad p \in z$

$$F_i = \frac{1}{\pi i} \sum_{q=n/2+2}^{n,2} \frac{e^{i\omega_q l_2 a}}{1 - \xi_q} f_{k,q} / (\xi_q - \xi_l) \cdot (e^{i(hg(q+1)-hg/2)} - e^{i(hg(q-1)-hg/2)}) \quad (5.28)$$

$l = 2p + 1, \quad p \in z$

$$a_{ij1} = a_{ij} + \frac{1}{\pi i} \sum_{q=1}^{n/2,2} \frac{1}{\xi_q - \xi_l} \cdot (e^{i(hg(q+1)-hg/2)} - e^{i(hg(q-1)-hg/2)}) \quad (5.29)$$

$l = 2p, \quad p \in z$

$i = (k - 1) \cdot n/2 + l$

$j1 = (k - 1) \cdot n/2 + q$

$$j2 = (i - 1) \cdot n/2 + (n - q + 1)$$

$$a_{ij2} = a_{ij1} + \frac{1}{\pi i} \sum_{q=n/2+1}^{n,2} \left[\frac{1 - \xi_{n-q+1}}{1 - \xi_q} e^{2iw_q l_2 q} \cdot \sum_{i=1}^{nm} S_{k,i,q} \cdot \frac{2\pi}{nm} \right] \quad (5.30)$$

$$l = 2p + 1, \quad p \in z$$

$$j3 = (k - 1).n/2 + q$$

$$a_{ij3} = a_{ij2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{q=1}^{n/2,2} \frac{1}{\xi_q - \xi_l} \cdot (e^{i(hg(q+1)-hg/2)} - e^{i(hg(q-1)-hg/2)}) \quad (5.31)$$

$$j4 = (i - 1).n/2 + (n - q + 1)$$

$$a_{ij4} = a_{ij3} + \frac{1}{\pi i} \sum_{q=n/2+1}^{n,2} \left[\frac{1 - \xi_{n-q+1}}{1 - \xi_q} e^{2iw_q l_2 q} \cdot \sum_{i=1}^{nm} S_{k,i,q} \cdot \frac{2\pi}{nm} \right] \quad (5.32)$$

şeklinde oluşacaktır.

Katsayılar matrisi, bilinmeyen ve sağ taraf vektörü yukardaki şekilde tanımlanan kompleks denklemler sisteminin sayısal çözümü bu denklemler sistemine denk olan reel denklemler sistemine dönüştürülerek gerçekleştirilebilir.

Bunun için

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + i\mathbf{F}_2$$

şeklinde gösterilebilir. Eğer A, X, F'in reel ve imajiner kısımlarını

$$\mathbf{X}_1 = (X_1^1, X_2^1, X_3^1, \dots, X_{nm.n/2}^1)$$

$$X_2 = (X_1^2, X_2^2, X_3^2, \dots, X_{nm.n/2}^2)$$

$$Y = (X_1^1, X_2^1, X_3^1, \dots, X_{nm.n/2}^1, X_1^2, X_2^2, X_3^2, \dots, X_{nm.n/2}^2)$$

şeklinde tanımlarsak,

$$(A_1 X_1 - A_2 X_2) + i(A_2 X_1 + A_1 X_2) = F_1 + iF_2 \quad (5.33)$$

lineer denklem sisteminin genel tanımını elde ederiz. Böylece

$$\begin{bmatrix} A_1 & : & -A_2 \\ & : & \\ \dots & \dots & \dots \\ & : & \\ A_2 & : & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_{nm,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \\ F_{nm,n} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

şeklinde yazabiliriz. Son olarak bulunan lineer reel denklemler sisteminin çözümü için pivotlamalı **GAUSS ELEME YÖNTEMİ** uygulanmıştır.

6.SAYISAL DENEYLERİN SONUÇLARI ve ÖNERİLER

Bu yöntem ve algoritmalarca gerçek mühendislik problemlerinin çözümünün yapılabilmesi için (5.5) integralinin çekirdeği $S(\psi, \theta)$ 'da yer alan saçılma genliği $A(\psi, \theta)$ 'nın yani ölçüm sonuçlarının verilmesi gerekmektedir. Bu nedenle bu algoritma ve metodun testi için (0,-h) merkezli, ρ yarıçaplı, dairesel kesitli sonsuz uzun silindirik ve Oz eksenine paralel olarak yerleştirilmiş bir B cisimi göz önüne alınmıştır (Şekil 6.1). Böylece dairenin çapı ve B üzerinde tanımlanmış $v(x)$ fonksiyonunun değeri bilinirse, $A(\psi, \theta)$ fonksiyonunun değerini analitik olarak hesaplayabiliriz. Silindir ve dışındaki ortamda iletkenliğin sıfır olduğu düşünülmüştür. ρ yarıçaplı dairesel kesitli silindirik cisimimiz monokromatik düzlemsel ve sadece E_z^i bileşeni sıfırdan farklı olan bir alanla aydınlatılmış olsun. Gelen dalganın

$$E_z^i = E_0 e^{ikx} \quad (6.1)$$

$$E_z^i = E_0 e^{ikr \cos \psi} \quad (6.2)$$

$$= E_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) e^{-im(\psi - \pi/2)} \quad (6.3)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Silindirin dışındaki saçılan alan

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z^s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z^s}{\partial \psi^2} + k^2 E_z^s = 0, \quad (r > \rho, k^2 = \omega^2 \epsilon \mu) \quad (6.4)$$

denklemini ve $r \rightarrow \infty$ için ise radyasyon koşulunu sağlar.

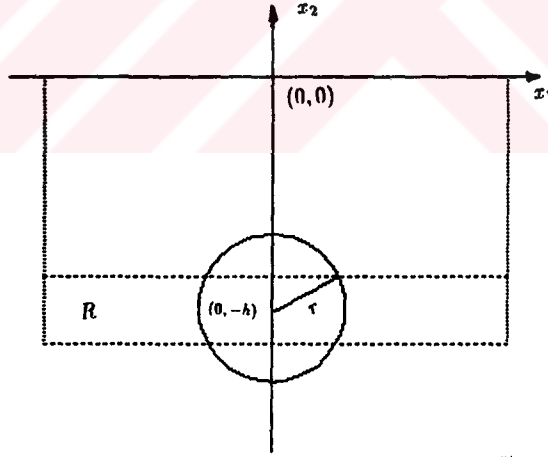
V. Bölümden bilindiği gibi, b_m 'ler geçiş koşulları yardımıyla bulunacak sabitlerdir.

$$E_z^s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m H_m^{(1)}(kr) e^{-im(\psi-\pi/2)}, \quad r > \rho \quad (6.5)$$

şeklindedir.

$$E_z^s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr} e^{-i(\psi-\pi/2)-i(m\pi+\pi/2)/2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr-i\pi/4} e^{im\psi} (-1)^m e^{im\pi/2} \quad (6.6)$$

eşitliği elde edilir.



Şekil 6.1 Saçıcı cismin koordinat sistemindeki konumu

Göz önüne alınan silindirin merkezi $(0, -h)$ noktasında olduğu için yukarıdaki ifade aşağıdaki gibi yazılmalıdır.

$$E_z^s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \sqrt{\frac{2}{\pi k\tilde{r}}} e^{ik\tilde{r}-i\pi/4} e^{-im\psi} (-1)^m e^{im\pi/2} \quad (6.7)$$

Burada saçılan alan;

$$E_z^s = A(\psi, \theta) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \quad (6.8)$$

şeklinde olup, burada $A(\psi, \theta)$ saçılma genliğidir (radiation pattern).

[23]'den bilindiği gibi, dairenin çapı olan ρ 'nun değeri $\omega l \rho$ yaklaşık 1 olacak şekilde seçilirse, $A(\psi, \theta)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$A(\psi, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/4} e^{-im\psi} (-1)^m e^{im\pi/2} \quad (6.9)$$

Bu ifadeden b_m sabitlerinin bulunmasının problemi çözdüğü anlaşılmaktadır.

Bu denklemden b_m ;

$$b_m = - \frac{\frac{k_1}{\mu_1} J'_m(k_1 \rho) J_m(k \rho) - \frac{k}{\mu} J_m(k_1 \rho) J'_m(k \rho)}{\frac{k_1}{\mu_1} J'_m(k_1 \rho) H_m^{(1)}(k \rho) - \frac{k}{\mu} J_m(k_1 \rho) H_m^{(1)'}(k \rho)} E_0 \quad (6.10)$$

şeklinde olup, $k = \omega l_0$ ve $k_1 = \sqrt{1 + vk}$ 'dir. Ancak b_m ifadesinde yer alan

Bessel ve Hankel fonksiyonları k ve k_1 'in büyük değerleri için kötü yakınsarlar.

Ancak argüman $k \rho$ ve $k_1 \rho$ yeteri derecede küçük ise örneğin $\omega l_0 \rho \approx 1$ ise

$$J_m(z) \approx (-1)^m J_{-m}(z) \approx \frac{z^m}{m! 2^m} - \frac{z^{m+2}}{(m+1)! 2^{m+2}} \quad (6.11)$$

$$H_0^{(1)}(z) \approx \left\{ 1 + \frac{2i}{\pi} (\nu + \ln \frac{z}{2}) \right\} J_0(z) + \frac{iz^2}{2\pi} \quad (6.12)$$

$$H_m^{(1)}(z) \approx (-1)^m H_{-m}^{(1)}(z) \approx (m-1)! 2^m (-i) \frac{\pi}{z^m}, \quad m \leq 1 \quad (6.13)$$

ifadelerini kullanabiliriz. Yukarıdaki ifadedeki ν "Euler" veya "Mascheron" sabiti olarak bilinir ve değeri yaklaşık olarak 0,5772156649...'dur. Bu durumda saçılma genliği

$$A(\psi, \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\pi/4 + kh \sin(\psi - \theta)} (e^{i\psi} b_{-1} + b_0 + e^{-i\psi} b_1) \quad (6.14)$$

Ancak $k\rho$ ve $k_1\rho$ 'nın büyük değerler söz konusu olduğunda, Hankel fonksiyonları için limit değerler almamız gerekecektir. Çünkü $\nu \in Z$ için Ek-A'da verilen Hankel fonksiyonları $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsiz olacaktır. Bu belirsizliği gidermek için (A.10) eşitliğine L'hospital kuralı uygulanarak limit hale geçilir. Bu durumda hesaplamalar

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x/2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \quad (6.15)$$

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + i \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\partial J_r}{\partial r} \right)_{r=m} - (-1)^m \left(\frac{\partial j_{-r}}{\partial r} \right)_{r=m} \right] \quad (6.16)$$

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + i \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\partial J_r}{\partial r} \right)_{r=m} - (-1)^m \left(\frac{\partial j_{-r}}{\partial r} \right)_{r=m} \right] \quad (6.17)$$

ifadeleri kullanılarak yapılır.

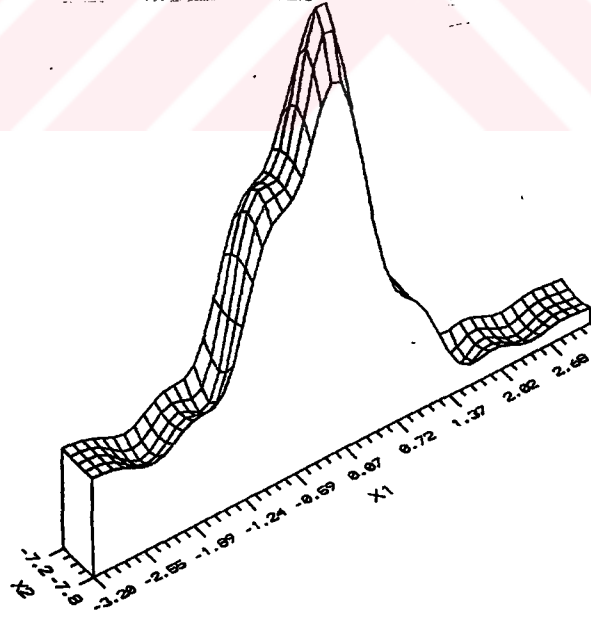
6.1. Hesaplama Sonuçları:

Bu örnek ile ilgili olarak hesaplanıp grafik halinde verilen ilk değerler; farklı fiziksel ve geometrik veriler için elde edilen sayısal sonuçlardır. Bu hesaplamalar yapılırken cismin homojen olduğu kabul edilmiş ve bu durumda da $\nu(x)$ fonksiyonu sabit olmuştur. İkinci hesaplama sonuçları verileri ise, algoritmanın giriş

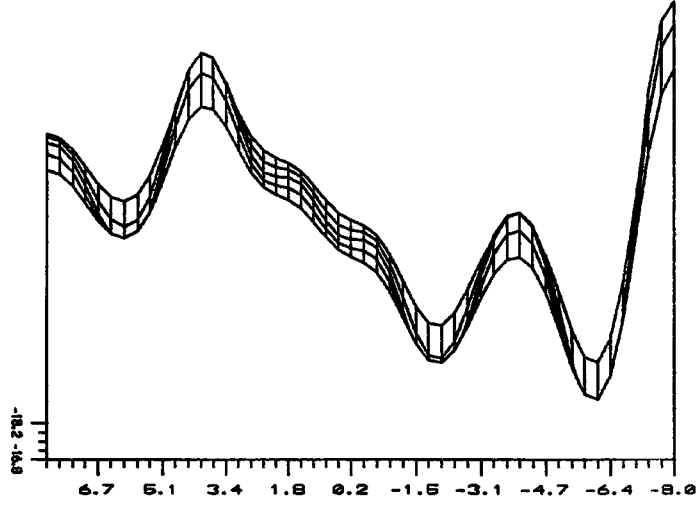
verilerinin (kafes adımları ve yerleşimi gibi) sonuçlara etkisini araştırmak için yapılmıştır. Söz konusu bu iki hesaplama sonuçları, verilerden bir kısmının sabit tutularak diğerlerinin değiştirilmesi çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır.

6.1.1. Fiziksel ve geometrik özellikleri değiştirerek alınan sayısal sonuçlar :

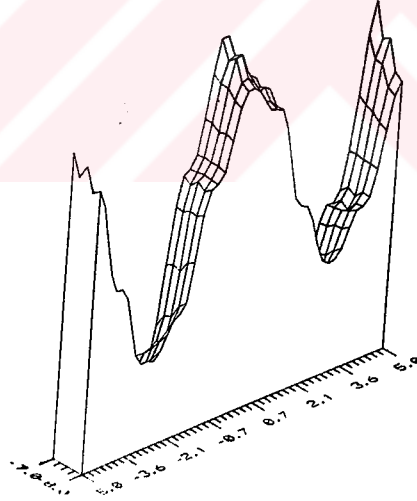
Şekil 6.2' de $\rho = 1m, l_o = l_1 = l_2 = \frac{1}{3.10^8} [sn/m], h = 7,5m, v(x) = 3$ giriş verileriyle elde edilmiş olan sayısal çözüm sonuçları verilmiştir. Burada sayısal çözüm sonucu olan toplam alan $u(x, \theta, \omega)$ fonksiyonundan $\theta = \frac{\pi}{2}, \omega l_o = 1$ değerleri için (5.4) ifadesinden elde edilmiş $v(x)$ fonksiyonunun $R\{(x_1, x_2) : -3,2 \leq x_1 \leq 3,2, -7,8 \leq x_2 \leq -7,2\}$ dikdörtgeninde x_1 ve x_2 koordinatlarına göre değişim eğrisi verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi sayısal çözüm sonuçları cismin yerini ve bilinmeyen fiziksel özelliğinin %67 oranında doğru olarak tesbit edilmesini sağlamıştır.



Şekil 6.2 $v(x)$ fonksiyonu



Şekil 6.3 Saçılan alanın koordinatlara göre değişimi

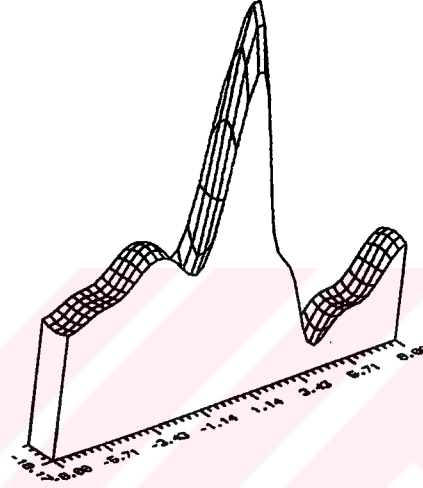


Şekil 6.4 Toplam alan

Şekil 6.3' de cismin aynı fiziksel ve geometrik özellikleri ile giriş data- ları için saçılan alanın koordinatlara göre değişimi verilmiştir. Şekil ince- lenirse, cismin bulunduğu yerde saçılan alanın genliğinin daha büyük olduğu görülecektir. Cisimden uzaklaştıkça bu genlik "Sommerfeld " koşuluna uygun

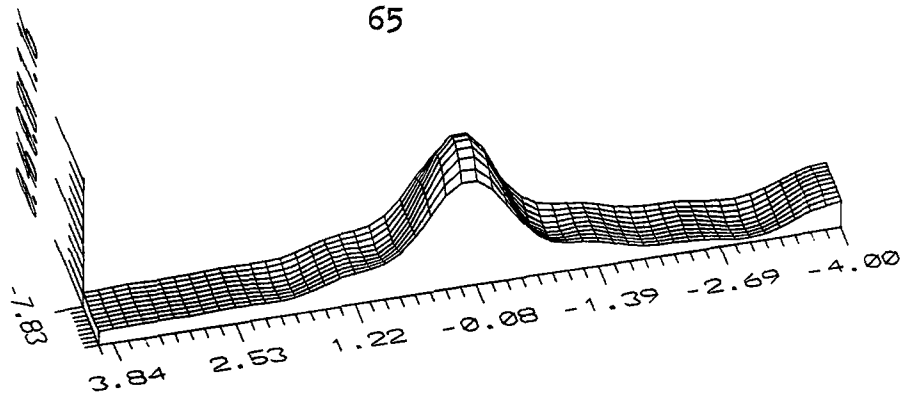
olarak küçülmektedir. Ayrıca bu şartlar altında oluşan toplam alanın değişimide Şekil 6.4' de verilmiştir.

Bilindiği gibi $v(x)$ fonksiyonu θ gelme açısına ve ω frekansına bağlı değildir. Bunu sayısal olarak gözlemek için $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ve $\omega l_0 = 1$ değerleri için de sayısal çözüm sonuçları alınmıştır. Görüldüğü gibi gelme açısı ve frekansın değişimi $v(x)$ fonksiyonunun değişimini az etkilemektedir.

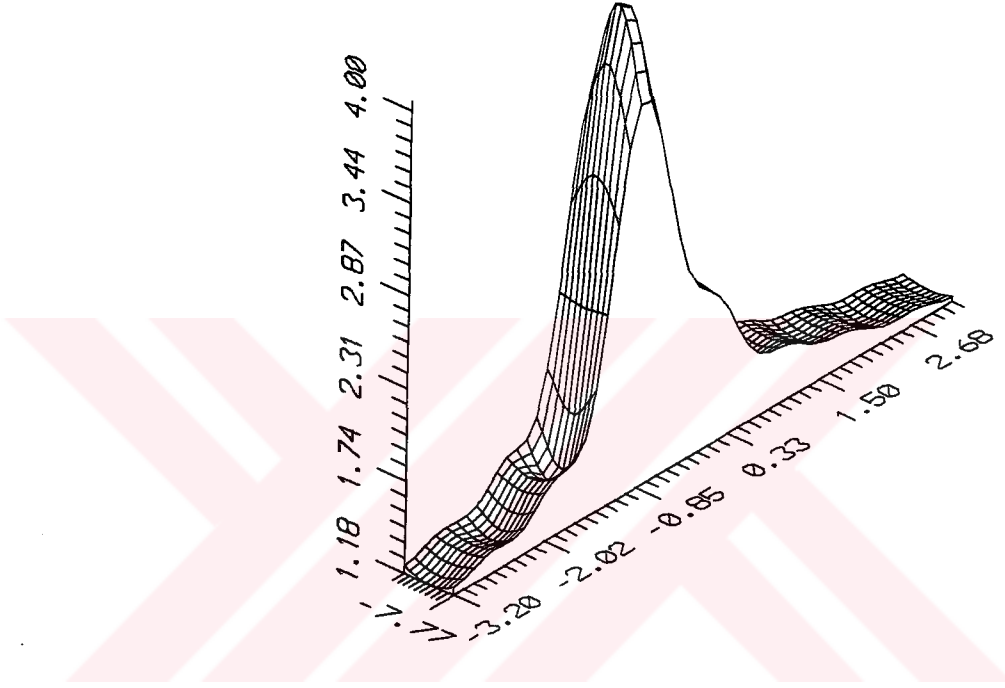


Şekil 6.5 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ve $\omega l_0 = 1$ için $v(x)$ fonksiyonu

Şimdiye kadar verilen örneklerde $v(x)$ fonksiyonunun değeri cismin bulunduğu yerlerde 3, olmadığı yerlerde sıfır olarak alındı. Şimdi ise diğer fiziksel ve geometriksel özellikler Şekil 6.2 ile aynı olsun ve test için cismin bulunduğu yerlerde $v(x)$ sırasıyla 1 ve 4 olarak alınsın (Şekil 6.6 ve Şekil 6.7).



Şekil 6.6 $v(x) = 1$ için alınan sonuç



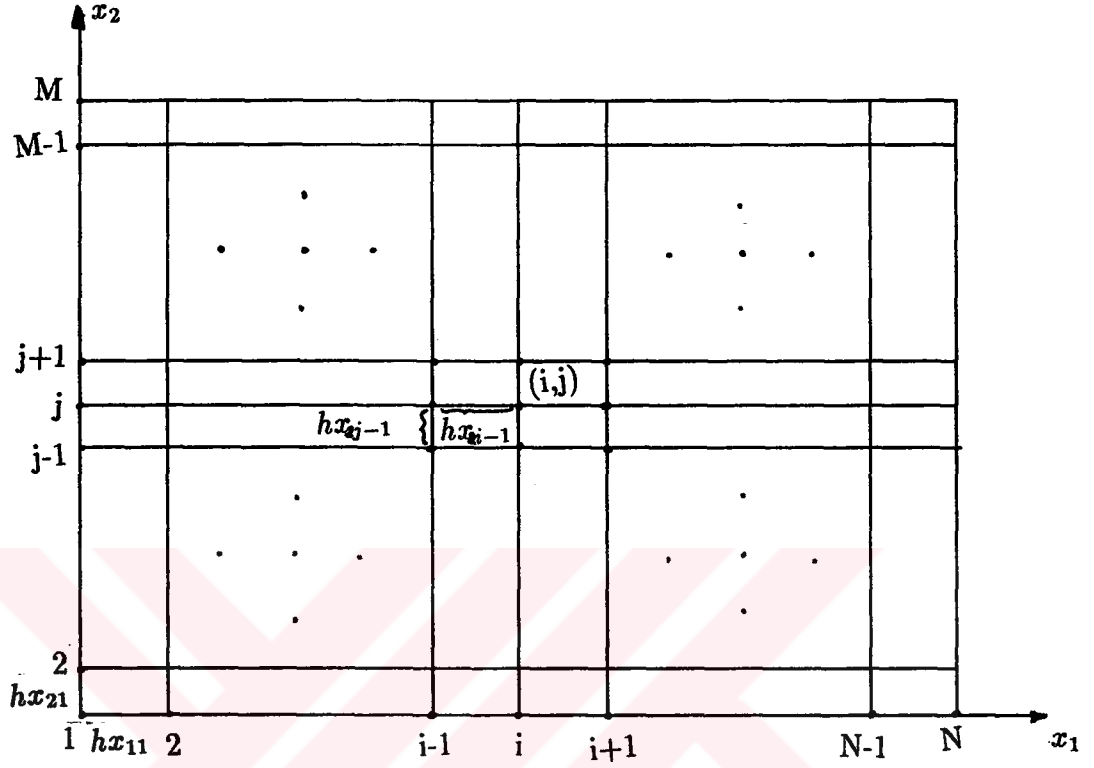
Şekil 6.7 $v(x) = 4$ için alınan sonuç

Görüldüğü gibi cismin fiziksel özelliğinin değeri, cismin bulunduğu ortamın özelliğinin değerine yaklaştığında $v(x)$ fonksiyonunun doğru olarak tesbit edilmesini mümkün kılmamaktadır.

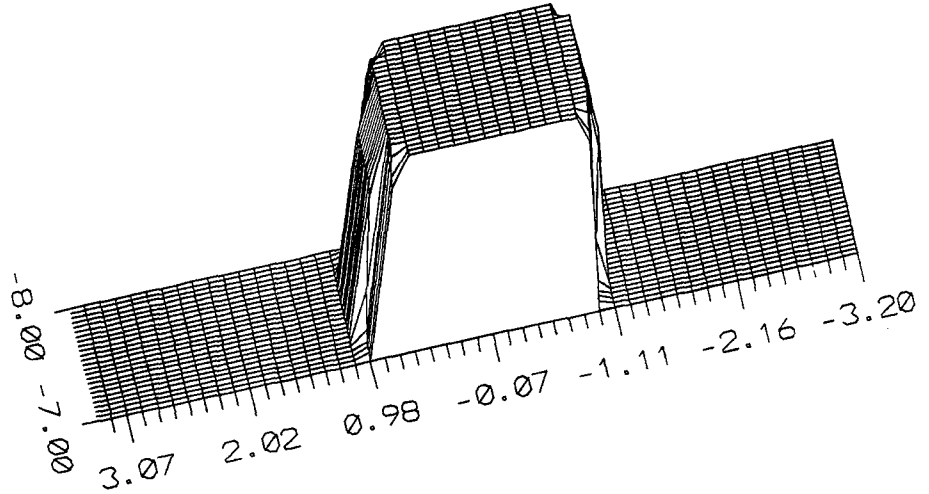
6.1.2. Değişik giriş verileri için sayısal sonuçlar :

Tarama alanında yapılmış olan kafesin x_1 boyunca h_{x1} ve x_2 boyunca h_{x2} adımlarının değişiminin sayısal sonuçlara etkisini görmek için Şekil 6.9'de sayısal çözüm sonuçları verilmiştir. Şekil 6.10 ile Şekil 6.9 karşılaştırıldığında adımların

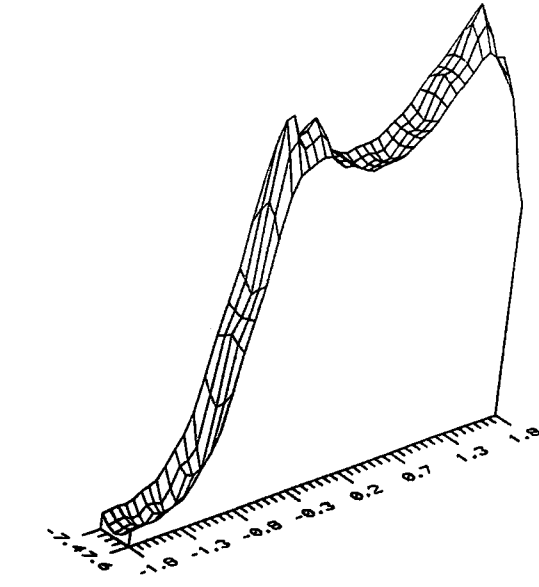
azalmasının gerçek $v(x)$ fonksiyonuna daha yüksek oranla yaklaşıldığını göstermektedir.



Şekil 6.8 R domeninde oluşturulan kafes yapısı ($i,j=x_{1i}, x_{2j}$)

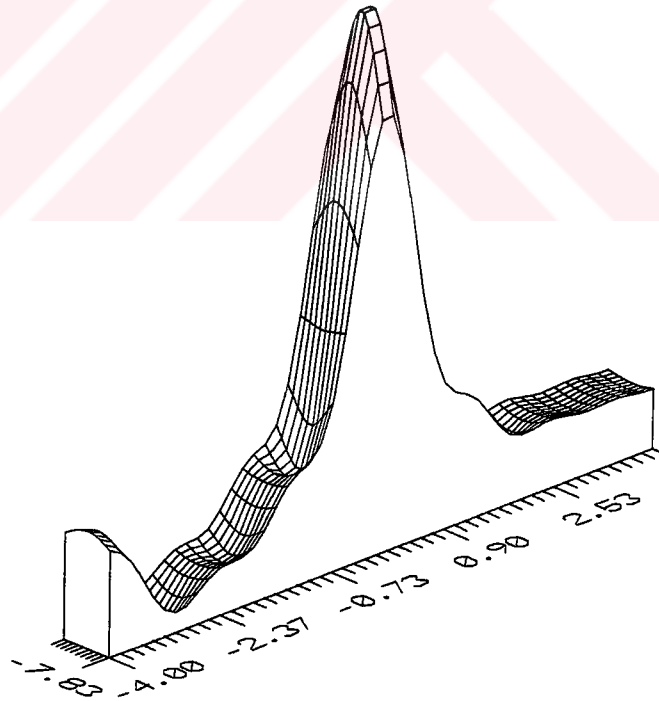


Şekil 6.9 İdeal durumdaki $v(x)$ fonksiyonu



Şekil 6.10 Daha küçük adım için $v(x)$ fonksiyonu

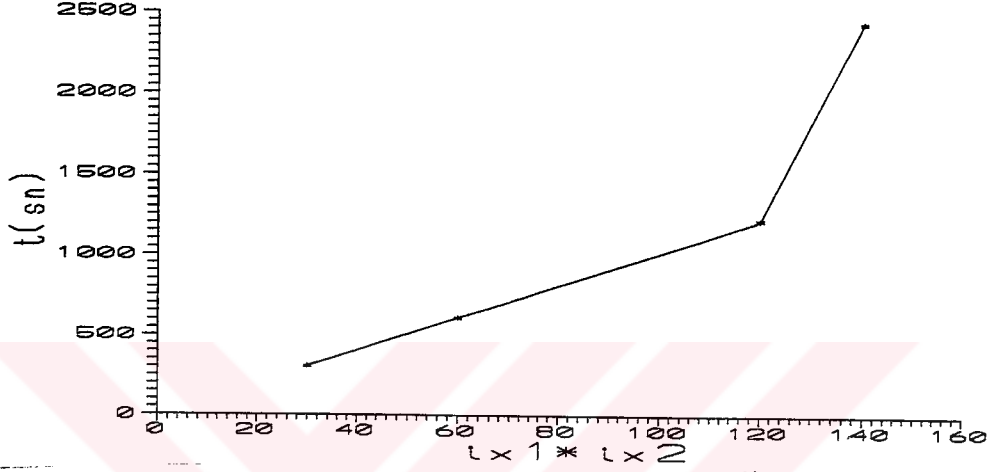
(5.5) singüler integral denkleminin birim çember üzerinde n sayıda eşit aralıklı nokta alınarak yaklaşık ifadesi bulunmuştur. Nokta sayısının dolayısıyla çember üzerinde kurulan adım uzunluğunun sayısal sonuçlara etkisini gözlemek için n 'in değerini değiştirerek de sayısal çözüm alınmıştır (Şekil 6.11).



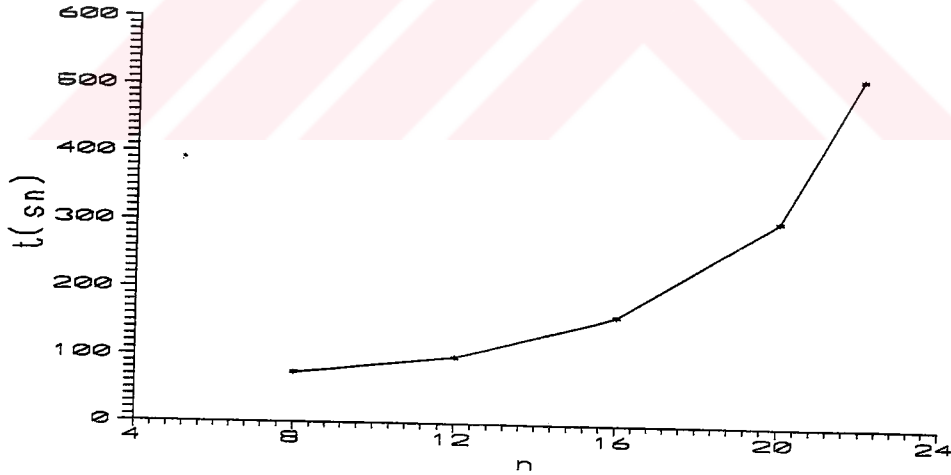
Şekil 6.11 Büyük n değerleri için $v(x)$ fonksiyonu ($n=65$)

6.2. Öneriler: Şekillerden görüldüğü gibi n sayısı büyüdükçe ve kafes adım sayısı azaldıkça sayısal integrale yaklaşım daha iyi olduğundan $v(x)$ fonksiyonu

uzunluğu azaldıkça sayısal integrale yaklaşım daha iyi olduğundan $v(x)$ fonksiyonu için aldığımız sayısal sonuçlar daha ideale yakın olmaktadır. Bu nedenle oluşan hata n 'e bağlı olarak $|I(t_{oj}) - S_n(t_{oj})| \leq \theta(t_{oj})$ formülü ile hesaplanır. Ayrıca n sayısına bağlı olarak hesaplama süresi değişmektedir. Şekil 6.12'den de görüldüğü gibi n arttıkça hesaplama işleminin süresi artmaktadır.



Şekil 6.12 Kafes adım sayısı-zaman karakteristiği



Şekil 6.13 n sayısı-zaman karakteristiği

Bu çalışmada 486DX50 mikroişlemcili, 340MByte hard-diske ve 8RAM'e sahip bilgisayar kullanılmıştır. Bu algoritma ve metod ile ideale çok yakın daha net ve kesin sonuçları daha kısa sürede almak için daha hızlı ve daha yüksek kapasiteli bilgisayar kullanmak gerekmektedir.

KAYNAKLAR

- 1- Abboud and Jean-Claude N.1992. Electromagnetic Waves in an Inhomogeneous Medium. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 164, p. 40-58, Academic Press,Inc.,Orlando.
- 2-Angell, T.S.,Colton,D. and Kirsch. 1982.The three dimensional inverse scattering problem for acoustic waves. J.Diff.Equations,Orlando.
- 3-Angell, T.S., Kleinman,T.E. and Hettlich .1990.The resistive and conductive problem for the exterior Helmholtz equation. SIAM J.Appl.Math,Philadelphia.
- 4-Angell,T.S.,Kleinman,R.E. and Hettlich. 1990. The resistive and conductive problems for the exterior Helmholtz equation.SIAM J.Appl.,Philadelphia.
- 5-Angell,T.S. and Kirsch,A. 1992. The conductive boundary condition for Maxwell's equations.SIAM J.Appl.,Philadelphia.
- 6-Atkinson,K.E. 1982. The numerical solution of Laplace's equation in three dimensions. SIAM J.Numer.Anal.Philadelphia.
- 7- Bayliss, Gunzberger and Turkel. 1982. Boundary Conditions for The Numerical Solution of Elliptic Equations in Exterior Regions. SIAM J. APPL.MATH., p. 430-450,Philadelphia.

- 8- Van Bladel J. 1964. Electromagnetic Fields
- 9- Bertero. 1988. Linear Inverse and Ill-Posed Problems.
- 9- Chadan and Sabatier.1989. Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. Springer-Verlag
- 10- Chen, Rakhlin.1992.On The Inverse Scattering Problem for The Helmholtz Equation in One Dimension. Inverse Problems, 8, p.365-391.,United Kingdom.
- 11-Colton and Kress.1981.The impedance boundary value problem for the time harmonic Maxwell equations.Math.Meth.in the Appl.,
- 12- Colton and Kress.1983.Integral Equations Methods in Scattering Theory
- 13- Colton and Kress.1991.An approximation problem in inverse scattering theory. Applicable Analysis,
- 14- Colton and Kress.1992.Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory.
- 15- Press, Flannery, Teukolsky and Vetterling.1986.Numerical Recipes
- 16- Gelfand I.M. and Levitan B.M.1951.On the determination of a differential equation by its spectral function. Dokl. Akad. Nauk,
- 17- Imbriale,W.A. and Mittra.1970.The two-dimensional inverse scattering prob-

lem. IEEE Trans.Ant.Prop.New York.

18- M.İdemen.1989.On different possibilities offered by the Born approximation in inverse scattering problems. Inverse Problems,United Kingdom.

19- Idemen and Akduman.1990.Two-Dimensional Inverse Scattering Problems connected with bodies buried in a slab. Inverse Problems, G,p.749-766.,United Kingdom.

20- M.İdemen.1993.Inverse scattering problems connected with cylindrical bodies. Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory,

21- Marchenko V.A.1955.The construction of the potential energy from the phases of the scattered waves.Dokl.Akad.Nauk.,

22- Jordan.1967.Electromagnetic Waves and Radiating Systems.Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.

23- Jones.1979.Methods in Electromagnetic Wave Propagation.Clarendon Press., Oxford.

24- D.S. Jones.1986.Acoustic and Electromagnetic Waves.

25- Kedzierawski.1991.The Inverse Scattering Problem for Time-Harmonic Acoustic Waves in an Inhomogeneous Medium With Complex Refraction Index. Journal of Computational and Applied Mathematics, p. 83-100.,Amsterdam.

- 26- Kress and Colton.1983.Integral Equation Methods in Scattering Theory. Wiley-Interscience Publication,
- 27- Kreyszig and Erwin.1972.Advanced Engineering Mathematics.New York :
- 28- Lax and Philips.1967.Scattering Theory.Academic Press
- 29- Leis.1986.Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics. John Wiley.
- 30- Müller.1969.Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves.Springer-Verlag.
- 31- R.G.Newton.1980.Inverse Scattering II.Three dimensions,J.Math.Physs.
- 32- Newton.1982.Scattering Theory of Waves and Particles.Springer-Verlag.
- 33- Reed and Simon.1979.Scattering Theory.
- 34-Sommerfeld,A.1964.Partial Differential Equations in Physics New York.
- 35- Tikhonov A.N.1943.On the stability of inverse problems, Dokl.Akad.Nauk.
- 36- Weder. Spectral and Scattering Theory for Wave Propagation in Perturbated Stratified Media.
- 37- V.H. Weston.1978.Nonlinear approach to inverse scattering.J.Math.Physs., American Institute of Physics.

38- Wilcox.1975.Scattering Theory for the D'Alembert Equation in Exterior Domains. Springer-Werlag

39- W.Tabara,B.Duchene,C.Pichot,D.Lesselier,L.Chommeolux.1988.Diffraction tomography:Contribution to the analysis of some applications in microwaves and ultrasonics. Inverse problems, United Kingdom.

40- Zinn,A.1991.The numerical solution of an inverse scattering problem for time harmonic acoustic waves.Inverse problem and Imaging,United Kingdom.



EK - A BESSEL FONKSİYONLARI

A.1 A.1 Genel Bessel Diferansiyel Denklemi

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\text{A.1})$$

İkinci mertebeden lineer olan bu diferansiyel denkleme genel Bessel diferansiyel denklemi denir. ν reel ve sabittir (ν ve x kompleks de olabilir). (A.1) denkleminin

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{\alpha+m} \quad (\text{A.2})$$

şeklinde bir çözümleri aranırsa lineer bağımsız olan iki çözüm bulunur. Bu halde

$$J_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x/2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \quad (\text{A.3})$$

$J_{\nu}(x)$ ye indisi ν olan birinci tür Bessel fonksiyonu denir. Yukarıdaki eşitlikteki seri $x \neq 0, x \neq \infty$ için yakınsaktır. Bu eşitlikte ν yerine $-\nu$ yazarsak

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x/2)^{-\nu+2m}}{m! \Gamma(-\nu + m + 1)} \quad (\text{A.4})$$

ikinci tür Bessel fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonların yakınsaklığı D'Alembert oran kriteri ile gösterilir. Her reel (veya kompleks) x için seri

yakınsaktır. Sadece $x \neq 0$ olmalıdır. Sonlu aralıkta Bessel fonksiyonları mutlak ve yakınsaktır. Eğer ν pozitif tam ise $\nu = n$ yazılır ve o zaman Γ fonksiyonunu faktoriyel olarak yazabiliriz.

$$\Gamma(n + m + 1) = (n + m)! \quad (\text{A5})$$

Sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonu, $n = 0$ alarak elde edilir.

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x/2)^{2m}}{(m!)^2} \quad (\text{A6})$$

J_ν ve $J_{-\nu}$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanan Wronski determinanı sıfırdan farklı olduğu için lineer bağımsızdır. $W(J_\nu, J_{-\nu}) \neq 0$ şartı ancak $\nu \neq 0$ ve $\nu \neq tam$ olduğunda gerçekleşir. Böylece bu iki fonksiyon (A.1) denkleminin çözümü olabilirler.

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = J_\nu J'_{-\nu} - J'_\nu J_{-\nu} \quad (\text{A7})$$

Eğer $\nu = 0$ veya $\nu = tam$ ise bu iki fonksiyon lineer bağlı olur. Bu durumda

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{A8})$$

elde edilir. Fakat bu bağıntı çok önemlidir. Negatif değerler için regüler olmayan çözüm bu suretle regüler olur. İşte bu $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$, $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ fonksiyonlarına ν cü mertebeden ve birinci türden Bessel fonksiyonları denir. $J_0(x)$ birinci nevi (0) ıncı mertebededir.

ν 'nün bir tam sayı olması durumunda lineer bağımsız olan ikinci nevi Bessel fonksiyonlarının çözümü C.Neumann tarafından bulunmuştur.

$$Y_n = \lim_{\nu \rightarrow n} \left[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right] \quad (\text{A.9})$$

(A.9) denklemini (A.1) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Demekki Bessel diferansiyel denkleminin ikinci çözümü $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}$ 'nün $\nu \rightarrow n$ için herhangi bir lineer kombinezonudur. Birçok fonksiyon bu hali sağlar, fakat ortak olarak Weber fonksiyonu ν nüncü mertebeden ikinci nevi Bessel fonksiyonu ismini alır ve şu şekilde gösterilir.

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (\text{A.10})$$

$Y_\nu(x)$ fonksiyonu Bessel diferansiyel denkleminin bir çözümüdür ve çözüm

$$y = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x) \quad (\text{A.11})$$

şeklindedir. Bu fonksiyon Neumann fonksiyonu olarakta bilinir. Lineer bağımsız olan ikinci bir fonksiyonun seri şeklindeki ifadesinin bulunması için Hankel açılımını elde etmek gerekmektedir. Bunun içinde (A.9) formülündeki türevlerin hesaplanıp, Euler sabitinin verilmesi şarttır. Euler sabiti $\gamma = 0,57772156..$ dir.

Eğer incelenirse $J_\nu(x)$ fonksiyonunun asimptotik olarak $\text{Cos}x$ fonksiyonuna $Y_\nu(x)$ fonksiyonunun da asimptotik olarak $\text{Sin}x$ fonksiyonuna yaklaştığı görülür.

Bu benzerliği daha iyi belirtmek için

$$J_\nu(x) + iY_\nu(x) = H_\nu^{(1)}(x) \quad (\text{A.12})$$

$$J_\nu(x) - iY_\nu(x) = H_\nu^{(2)}(x) \quad (\text{A.13})$$

eşitliklerini verelim. Bu denklemlerdeki $H_\nu^{(1)}$ ve $H_\nu^{(2)}$ fonksiyonlarına üçüncü nevi Bessel fonksiyonları veya Hankel fonksiyonları denilmektedir. Uygulamada çok önemli olan bu iki özel çözüm birincitür ve ikinci tür Hankel fonksiyonlarıdır. $H_\nu^{(1)}$ fonksiyonu e^{ix} fonksiyonuna, $H_\nu^{(2)}$ fonksiyonuda e^{-ix} fonksiyonuna benzer. $x \rightarrow \infty$ koşulu altında kompleks eşlenik çözümleri

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + .. \quad (\text{A.14})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + .. \quad (\text{A.15})$$

asimptotlarına sahiptirler.

Bu iki Hankel fonksiyonu yardımıyla Bessel diferansiyel denkleminin genel çözümünü şu şekilde yazılır.

$$y = AH_\nu^{(1)}(x) + BH_{-\nu}^{(2)}(x) \quad (\text{A.16})$$

Burada A ve B keyfi sabitlerdir. Hankel fonksiyonu hakkında şu özellikleri de verebiliriz.

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (\text{A.17})$$

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = i \frac{J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)e^{i\nu\pi}}{\sin \nu\pi} \quad (\text{A.18})$$

Buradan da

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = H_{\nu}^{(1)}(x)e^{i\nu\pi} \quad (\text{A.19})$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(x) = H_{\nu}^{(2)}(x)e^{-i\nu\pi} \quad (\text{A.20})$$

bağıntılarını elde edilir.

Farklı indisli Bessel fonksiyonlarının arasındaki temel bağıntılar Sayısal sonuçların elde edilmesinde kullanıldığı için aşağıda verilmiştir.

(A.3) eşitliğinin x 'e göre türevi alınırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$J_{\nu}'(x) = J_{\nu-1}(x) - \nu \frac{J_{\nu}(x)}{x} \quad (\text{A.21})$$

$$J_0'(x) = -J_1(x) \quad (\text{A.22})$$

Benzer şekilde

$$J_{\nu}'(x) = J_{\nu+1}(x) - \nu \frac{J_{\nu}(x)}{x} \quad (\text{A.23})$$

eşitliğide doğrudur. Bu iki formülü karşılaştırarak ard arda indisli üç Bessel fonksiyonu arasındaki bağıntı elde edilir.

$$2\nu \frac{J_\nu(x)}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) \quad (\text{A.24})$$

J için çıkarılan bu formüllerin benzerleri Neumann ve Hankel fonksiyonları içinde çıkarılabilir.

Yukardaki denklemleri kullanarak $\nu = \pm(2n + 1)/2$ indisli Bessel fonksiyonlarını elemanter fonksiyonlarla ifade edebiliriz. Bunu göstermek için $\nu = 1/2$ alalım.

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x/2)^{1/2+2m}}{m! \Gamma(m + 3/2)} \quad (\text{A.25})$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad (\text{A.26})$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (\text{A.27})$$

olduğu bulunur.

ÖZGEÇMİŞ

1960 yılında Adana'da doğdu. İstanbul Erenköy Kız Lisesini bitirdi. 1980 yılında girdiği Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nden 1984 yılında mezun oldu. Ekim 1986-Temmuz 1988 yılları arasında, Yıldız Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

1986 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nde görev yapmaktadır.