

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

57736

**KUANTUM KROMODİNAMİĞİNDE EKSENEL
AYARDA PROPAGATÖRLERİN TAYİNİNDEKİ
GÜÇLÜKLERİN GİDERİLMESİ**

DOKTORA TEZİ

Seyhun URLA

Ana Bilim Dalı : FİZİK

Haziran 1995

KUANTUM KROMODİNAMİĞİNDE EKSENEL
AYARDA PROPAGATÖRLERİN TAYİNİNDEKİ
GÜÇLÜKLERİN GİDERİLMESİ

DOKTORA TEZİ

Seyhun URLA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12.06.1995

Tezin Savunulduğu Tarih : 18.09.1995

Tez Danışmanı
Prof.Dr.Yüksel BEKTÖRE

(*y. Beköre*)

Üye
Doç. Dr. Oya OĞUZ

(*Oya Oğuz*)

Üye
Doç. Dr. Elşen VELİYEV

(*E. Veliyev*)

Haziran 1995

KUANTUM KROMODİNAMİĞİNDE EKSENEL AYARDA PROPAGATÖRLERİN TAYİNİNDEKİ GÜÇLÜKLERİN GİDERİLMESİ

Seyhun URLA

Anahtar Kelimeler:Kuantum Kromodinamiği, Abel tipli olmayan ayar teorileri, Fonksiyonel kuantumlama, Gluon propagatörü, İlmekli diyagramların hesaplanması, Oluşturucu fonksiyonel, Ayar simetrisi, Eksenel ayar.

Özet: Bu çalışmada Kuantum Kromodinamiğinde eksenel ayarda ($n_\mu A_\mu^a = 0$) gluon propagatöründeki $1/(nk)^l$ şeklindeki fiziksel olmayan kutuplarla ilgili problemler ve ilmekli diyagramların hesaplanmasında karşılaşılan tekilliklerin giderilmesi yer almaktadır. $\partial_\mu^\perp = \partial_\mu - n_\mu (n \cdot \partial)$ olmak üzere $(n_\mu - i\epsilon \partial_\mu^\perp) A_\mu^a(x) = 0$ şeklinde bir geliştirilmiş eksenel ayar koşulu öne sürülmüştür. Bu ayarda, fonksiyonel integrasyon yöntemiyle kuantumlama gerçekleştirilmiş ve gluon propagatörü hesaplanmıştır. Bu propagatörde fiziksel olmayan kutuplar artık mevcut değildir. İleri sürülen bu geliştirilmiş ayar koşulu, gluon propagatöründeki kutupları yapay olarak gideren reçeteler yerine kutupların çevrenme kuralını doğrudan doğruya kuantumlama yönteminden elde etmektedir. Kutupların çevrenme yöntemi, her türlü ilmekli diyagramların hesaplanmasında ortaya çıkan tekillikleri gidermiş olmaktadır. Kuantulamada verilen bu yöntemle Ward Özdeşliği, tepe fonksiyonları, propagatörler ve diğer niceliklerdeki değişimlerin izlenebileceği, kuantum istatistiğindeki benzer problemlerin çözülebileceği gösterilmiştir.

REMOVING DIFFICULTIES IN THE DETERMINATION OF PROPAGATORS IN THE AXIAL GAUGE IN QUANTUM CHROMODYNAMICS

Seyhun URLA

Keywords: Quantum Chromodynamics, Axial Gauge, Nonabelian Gauge Theories, Functional Quantization, Gluon Propagator, Loop Diagrams Calculations, Generating Functional, Gauges Symmetry.

Abstract: The problems about the unphysical poles arising from factors like $1/(nk)^l$ in the gluon propagator in the axial gauge ($n_\mu A_\mu^a = 0$) in quantum chromodynamics, and removal of singularities met in calculating loop-diagrams take parts in this thesis. A generalized axial gauge condition in the form of $(n_\mu - i\varepsilon\partial_\mu^\perp)A_\mu^a(x) = 0$ has been put forward, where $\partial_\mu^\perp = \partial_\mu - n_\mu(n\partial)$. In this gauge, quantization has been realized and gluon propagator has been calculated by functional integration method. No unphysical poles exist any more in this propagator. This generalized gauge condition put forward has directly obtained encircling rules of the poles from quantization method instead of the prescriptions which artificially remove the poles in the gluon propagator. Thus, encircling method of the poles has removed the singularities appeared in the calculations of every kind of loop diagrams. It has been shown that the similar problems can be solved in the quantum statistics in which Ward Identity, Vertices, propagators and variations in the other quantities can be monitored by this method given in quantization.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Yeni bir bilim dalı olan Kuantum Kromodinamiği için henüz Türkçe literatürün gelişmemiş olması ve konumuzla ilgili Türkçe çalışmaların bulunmaması, bazı deyimlerin Türkçe'lerinin bulunmasında zorluk çıkarmıştır. Bununla birlikte diğer bazı deyimlerin karşılığını özenle seçtiğimize inanıyorum. Uygun bulmadığımızı İngilizce yazdık. Örneğin; functional action (fonksiyonel etkime), generating functional (oluşturucu fonksiyonel), axial gauge (eksenel ayar) gibi olanlar en çok kullandıklarımızdır.

Bu çalışmada kullanılan çok sayıdaki geniş integraller anlatımı bozmaması için, bu türdeki çalışmalara benzer olarak EK sayfalarında verilmiştir.

Bu çalışmanın benzer konudaki yeni çalışmalara yol açmasını ve bilime katkıda bulunmasını diliyorum.

Destek veren ve çalışma olanağı sağlayan danışmanım sayın Prof.Dr. Yüksel BEKTÖRE'ye, özellikle bu konuda beni bilgilendiren ve zamanını ayıran sayın Doç.Dr.Elşen VELİYEV'e, bana yardımcı olan sayın Yrd.Doç.Dr. Kadir ERKAN ve Arş.Gör. Jale YILMAZKAYA'ya manevi yönden destekleyen üniversitedeki tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
NOTASYON DİZİNİ ve KISALTMALALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
TABLolar DİZİNİ	x
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. KUANTUM KROMODİNAMİĞİNDE TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Ayar Dönüşümleri	4
2.2. Alan Teorisinin Fonksiyonel İntegrallerle Kurulması.....	17
2.3. Ayar Alanlarının Kuantumlanması	28
BÖLÜM 3. ABEL TIPLI OLMAYAN AYAR ALANLARININ KUANTUMLANMASI.....	35
3.1. Fadeev-Popov Yöntemi.....	35
3.2. 3.2. Ayar Teorilerinde Hesaplama Teknikleri.....	46
BÖLÜM 4. EKSENEL AYARDA KUANTUMLAMANIN KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ.....	55
4.1. Kovaryant Olmayan Ayarlar	55
4.2. Kuramsal Taneciklerin Giderilmesi	56
4.3. Eksenel Ayar Tekniği	60
4.4. Eksenel Ayarda Ward Özdeşliği	72

BÖLÜM 5. PROPAGATÖRLERİN TAYİNİ	78
5.1. Serbest Gulyon Propagatörünün Hesabı	78
5.2. Kullanılan İntegrallerin Tanımlanması	87
5.3. Kullanılan İntegrallerin Tensör Yapısının Sadeleştirilmesi	89
SONUÇ ve TARTIŞMA	92
KAYNAKLAR.....	94
EK.....	98
ÖZGEÇMİŞ.....	103



SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

a	: Uzay renk indisi
$A_\mu(x)$: x' Uzay-zaman noktasındaki foton veya gulyon alanı
b	: Uzay renk indisi
c	: Uzay renk indisi veya ışık hızı
$C(x), \bar{C}(x)$: x' Uzay-zaman noktasındaki antikomitatif ghost alanları
C_{YM}	: Grup teorisinde bir sabit
D_μ^{ab}	: Kovaryant türev
DA	: Alan integrasyon ölçüsü
$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y)$: Koordinatlara bağlı Green fonksiyonu
e	: Elektron yükü
f_c^{ab}	: Lie grubunun antikomitatif ince yapı sabiti
$F_{\mu\nu}$: Alan teorisinde antisimetrik şiddet tensörü
g	: Kuvvetli etkileşme sabiti
$G(x_i)$: Green fonksiyonu
$G_{\mu\nu}$: Gulyon propagatörü
h	: Planck sabiti
H	: Hamilton operatörü
$j_\mu(x), j_\nu(x)$: Dış kaynak operatörü
i	: Sanal sayı veya indislemelerde kullanılmıştır.
I_{div}	: İntegrallerin ıraksak kısmı
k	: Momentumlardan birini ifade eden değişken
L^a, L^b, L^c	: Lie grubu jeneratörleri
L	: Lagranj yoğunluğu
m	: Elektron veya kuark kütlesi
$M_F, M_{ab}(x, y)$: Fadeev-Popov matrisi

n_μ	: Uzay-zamanda sabit ve keyfi bir vektör
N	: Grup boyutu
N	: Normalizasyon sabiti
p	: Momentum değişkeni
q	: Momentumlardan birini ifade eden değişken
q_i	: Konum vektörü
r	: Momentumlardan birini ifade eden değişken
s	: Momentumlardan birini ifade eden değişken
\mathcal{S}	: Fonksiyonel etkiye (action)
t	: Zaman değişkeni
$U_\mu^{abc}(p,k,q)$: Ghost-ghost-glyon tepe fonksiyonu
$V_{\mu\nu\rho}^{abcd}(p,q,s,r)$: Üç-glyon tepe fonksiyonu
$W_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd}(p,q,s,r)$: Dört-glyon tepe fonksiyonu
$Z(j),Z$: Oluşturucu fonksiyonel (generating functional)
α	: Pertürbasyon serisinin ince yapı sabiti
$\alpha(x)$: QED'de ayar dönüşüm parametresi
γ_μ	: Dirac matrisi
Γ	: Gamma fonksiyonu
δ^{ab}	: Delta Dirac fonksiyonu
$\Delta_F(A)$: Ayar alanına bağlı sonsuz hacim sabiti
ε	: Küçük sanal sayı faktörü
λ^a	: Gell-Mann matrisi
Λ	: İnce yapı sabitinde kullanılan bir sabit
$\partial_\mu, \partial_\nu$: Sırasıyla x_μ ve x_ν 'ye göre kısmi türev operatörleri
μ	: Lorentz indisi
ν	: Lorentz indisi
$\xi, \bar{\xi}$: Ghost alanları için antikomitatif kaynak fonksiyonları
$\prod_{\mu\nu}^{ab}(p)$: p ' momentumuna bağlı öz-enerji fonksiyonu
ρ	: Lorentz indisi
σ	: Lorentz indisi

τ	: Lorentz indisi
ϕ	: Yüklü taneciğın alan fonksiyonu
ψ	: Elektron veya kuark alan fonksiyonu
$\bar{\psi}$: Pozitron veya antikuark alan fonksiyonu
$\omega(x)$: QCD'de ayar dönüşüm parametresi
QED	: Kuantum Elektrodinamiği
QCD	: Kuantum Kromodinamiği



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $(h/s)-(n/c)$ çerçevesinde fiziğin aşamaları	9
Şekil 2.2. Uzay-zamanda taneciğin konum değiştirmesi	10
Şekil 2.3. Hal değiştirme yörüngeleri	18
Şekil 2.4. 1 halinden 2 haline geçişte çeşitli yörüngeler	18
Şekil 2.5. Ayar dönüşümleriyle bulunan eğriler ve onları kesen yüzey	33
Şekil 3.1. Eksenel vektör n_m , uzaydaki bir eksenin sembolik olarak tanımlar.....	40
Şekil 3.2. q_0 kompleks düzleminde kutupların yerleşme durumu	50
Şekil 3.3. Baş-değer reçetesi (3.2.27) eşitliğindeki kutupları kompleks q_0 düzleminin birinci ve dördüncü çeyreklerine yerleştirir.....	54
Şekil 4.1. m' tane ayar alanı ile etkileşen gost ilmeği. Kesik çizgiler gost taneciklerini, dalgalı çizgiler ayar alanlarını gösteriyor.....	60
Şekil 4.2. Ayar alanı propagatörü	61
Şekil 4.3. Gost propagatörü	61
Şekil 4.4. Üç gluonlu tepe fonksiyonu	61
Şekil 4.5. Dört gluonlu tepe fonksiyonu	61
Şekil 4.6. Gost-gost-gluon tepe fonksiyonu	61
Şekil 4.7. C_1 hattının orijinal pozisyonu	70
Şekil 4.8. $z = -1/2$ çizgisinin sağına düşen C_2 hattının pozisyonu	71
Şekil 4.9. Yang-Mills öz-enerji diyagramları. (a) Eksenel ayar tek ilmek öz-enerji diyagramı. Tüm çizgiler Yang-Mills alanına tekabül eder; (b) Kütlesiz tadpole diyagramı	75

TABLolar DİZİNİ

Tablo 1. Temel tanecikler arasındaki mevcut dört etkileşme.....	8
Tablo 2. Başlıca kovaryant ayarlar.....	37
Tablo 3. Kovaryant olmayan önemli ayarlar.....	39



1. GİRİŞ

Kuantum Kromodinamiği (Quantum Chromodynamics, Kuantum Renk Dinamiği) bilim dalı olarak 1972-1973 yıllarında şekillenmiştir. Kuantum Kromodinamiğinin oluşması temel iki fikir üzerine kurulmuştur. Bunlardan birincisi Yang ve Mills (1954) tarafından ileri sürülen hipotezdi. Bu hipoteze göre izotopik spinlerin birbiriyle etkileşmelerini ifade eden Lagrange yoğunluğu, yerel ayar dönüşümlerine göre invariant kalmalı, yani yerel ayar simetrisine sahip olmalıydı. Daha sonraki yıllarda bu fikir gelişmeye başladı. Buna bağlı olmaksızın gelişen diğer bir hipoteze göre, kuvvetli etkileşmeye katılan tanecikler yani hadronlar $SU(3)$ grubunun değerlendirmesine göre sınıflara bölünebilirlerdi. Buna dayanarak Gell-Mann ve Zweig (1964) hadronların kuarklardan (quark) oluştuğunu ileriye sürdüler. Bu iki fikir sonradan birbirinden bağımsız olarak gelişmeyi sürdürdü. Daha sonraki yıllarda bu iki fikrin birbiriyle çok yakından ilişkili olduğu anlaşıldı. Sonunda, Gell-Mann, Fritsch ve Weinberg (1973) tarafından Kuantum Kromodinamiği (QCD) adı altında şekillendirildi.

Bu teoriye göre, şiddetli etkileşmeyi ifade eden Lagranjiyen $SU(3)$ grubunu oluşturan yerel ayar dönüşümlerine göre invariant kalmalıydı. Böyle ayar simetrisine sahip teorilerin kuantumlanmasında bazı güçlüklerle karşılaşılıyordu. Bu güçlüklerin ortadan kaldırılması ve Abel tipli olmayan ayar teorilerinin kuantumlanması Fadeev ve Popov (1967) tarafından gerçekleştirildi. Fadeev-Popov yöntemine göre Abel tipli olmayan ayar alanları kuantumlanırken oluşturucu fonksiyonelde fiziksel olmayan serbestlik dereceleri ortadan kaldırılmalıdır. Bunu mümkün kılmak için oluşturucu fonksiyonelin ifadesindeki integranda ayar koşulu denilen çarpan eklenir. Alan teorilerinde farklı ayar koşulları kullanılmaktadır (Lorentz, Landau, Coulomb, Eksenal v.d.). Ayar koşulunun eklenmesiyle oluşturucu fonksiyonelden, kuantumlamayı engelleyen serbestlik dereceleri giderilmiş olur. Ayar koşulunun eklenmesi, ayrıca, başlangıçta klasik teoride olmayan fiktif fermi taneciklerinin (ghost) ortaya çıkmasına neden olur.

Diğer taraftan Gross, Wilzek ve Politzer (1973) birbirlerinden bağımsız olarak Kuantum Kromodinamiğinde asimptotik serbestlik (asymptotic freedom) olarak

isimlendirilen kuvvetli etkileşme sabiti “g” değerinin etkileşen taneciklerin ilk hızlarına ve aralarındaki uzaklığa, yani momentumlarına bağlı olduğunu buldular. Bu da Kuantum Kromodinamiğinde pertürbasyon teorisini kullanmaya olanak sağladı (Wilson 1974, , Frenkel and Taylor 1976, Callan et al 1978, Huang 1982, Bassetto et al 1983, Muta 1987).

Bu çalışmada, eksenel ayarda Abel tipli olmayan ayar alanlarının kuantumlanması ile ilgili problemler yer almaktadır. Bu amaçla eksenel ayarın avantajlarını, bu ayarda yapılmış çalışmaları ve kuantumlamada ortaya çıkan güçlükleri özetleyelim (Leibbrandt 1994).

Eksenel ayar ilk olarak Kummer (1961) tarafından serbest elektromonyetik alanın kuantumlanmasını yaptığı makale ile verilmişti. Arnowitt ve Fickler (1962) eksenel ayarı Abel tipli olmayan teorilerin kuantumlanmasında $A_3^a = 0$ özel şekliyle kullandılar. Bu çalışmada Lagrange ve Heisenberg Hareket Denklemleri arasındaki uyumunda sağlandığını gösterdiler. Eksenel ayar bazı avantajlara sahiptir ve Abel tipli olmayan teorilerin bu ayarda ($n_\mu A_\mu^a = 0$) incelenmesi, son yıllarda literatürde geniş şekilde yer almaktadır (Schwinger 1963, Delbourgo 1974, Gross and Wilczek 1974, Kummer 1975, Konetschy and Kummer 1976, Frenkel and Taylor 1976, Caracciolo et al 1982, Landshoff 1986, Lee and Milgram 1985, Leibbrandt 1987).

Bu ayarda ghost tanecikleri ile gluon tanecikleri arasında etkileşme mevcut değildir. Bu durum Ward Özdeşliğini sadeleştirir (Ward 1950, Takahashi 1957, Capper and Leibbrandt 1982). Aynı zamanda sadece fermiyonları ve ayar taneciklerini içeren kapalı denklemler sistemini elde etmeye olanak verir. Diğer taraftan eksenel ayarda Rezidüel simetrisinin mevcudluğu kanonik kuantumlama da instantonları gözönüne almaya olanak sağlar. Ayrıca ışık-konisi(light-cone) ayarı ($n^2 = 0$), süper simetrik Yang-Mills alanlarının kuantumlanması için uygundur (Mandelstam 1983, Bassetto 1993).

Eksenel ayarda rezidüel simetrisinin olması gluon propagatöründe $1/(nk)^l$ şeklinde fiziksel olmayan kutuplar problemini ortaya çıkarır. Bu nedenle ilmekli diyagramların

hesaplanmasında güçlüklerle karşılaşılır. Bu güçlükleri gidermek için reçeteler ileri sürülmüş ve bazı nicelikler hesaplanmıştır. Başdeğer (PV-principle value) reçetesi kullanılarak renormalizasyon sabitleri hesaplanmış ve gluon propagatörünün düzeysel (planar) ayarda davranışı incelenmiştir. Ayrıca Green fonksiyonlarının kızılotesi asimptotiği incelenmiş ve Wilson ilmeğinin ortalaması hesaplanmıştır. Aynı zamanda n_μ^* , analitik regülarizasyon ve diğer reçeteler ileri sürülmüştür (Polyakov 1975, Bassetto 1983a, Lee and Milgram 1985).

Fakat reçetelerin, uygulandığı teorilerin özellikleriyle ne kadar uyum sağlayacağı belli değildi. Bazı durumlarda reçeteler yanlış sonuçlar veriyordu. Ayrıca, sadece tek ilmekli diyagramların hesaplanmasına olanak veriyorlardı. Üstelik bu reçetelerden hangisinin daha güvenli olabileceği belirsizdi (Leibbrandt 1994).

Bu çalışmada, yetersiz kalan bu reçeteler tekniğini kullanımdan kaldırmak amacıyla gluon propagatöründe bulunan fiziksel olmayan kutupların nasıl çevreleneceği ve ilmekli diyagramların hesaplanmasında ortaya çıkan tekilliklerin nasıl giderileceği yer almaktadır. Abel tipli olmayan ayar alanlarının kuantumlanması, fonksiyonel integrasyon yöntemi (Gribov 1978, Zuber and Itzykson 1980, Muta 1987, Rivers 1987, Ramond 1989, McKeon 1993) ile gerçekleştirilmiştir. Getirilen yöntemde, $\partial_\mu^\perp = \partial_\mu - n_\mu(n\partial)$ olmak üzere $(n_\mu - i\varepsilon\partial_\mu^\perp)A_\mu^a(x)=0$ şeklinde bir ayar koşulu öne sürülecek ($\varepsilon \rightarrow 0$ limitinde standart aksel ayara dönüşür) ve bu ayarda gluon propagatörü hesaplanacaktır. Gluon propagatörünün elde edilen ifadesinde (Veliev et al 1989) artık kutuplar mevcut değildir ve $\varepsilon \rightarrow 0$ limitinde aksel ayardaki bilinen propagatör ifadesi elde edilmektedir.

2.KUANTUM KROMODİNAMİĞİNDE TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Ayar Dönüşümleri

Ayar (gauge) dönüşümlerini açıklarken maddenin yapı taşlarını oluşturan temel taneciklerin günümüzdeki sınıflandırılmasını özetlemek yararlı olacaktır. Bu sınıflandırma şu aşamadır. Modern teorilere göre doğanın temel yapı taşları leptonlar ve kuarklardır. Leptonlar elektron (e^-), müon (μ^-), to (τ^-), nötrino (ν^-), müon nötrinosu (ν_μ), to nötrinosu (ν_τ) olarak adlandırılmıştır. Altı tanede antilepton ($e^+, \mu^+, \tau^+, \tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\mu, \tilde{\nu}_\tau$) bulunmaktadır. Doğanın mevcut etkileşmesinden birisi olan “Elektromanyetik Etkileşme” elektrik yüklü tanecikler arasındaki etkileşmedir. Bu etkileşmeyi veya diğer bir deyimle enerji alış verişini foton (γ) denilen tanecik sağlar. Bir çok taneciğin ve radyoaktif çekirdeklerin bozunmasına neden olan “zayıf etkileşme” de bozon (W^+, W^-, Z^0) denilen tanecikler rol oynar. Weinberg ve Salam (1968) bu iki etkileşmenin “Elektro-Zayıf” etkileşme adıyla tek bir teoriyle açıklanabileceğini kanıtladılar. Teorik değerlendirmelerin sürüp gittiği henüz netleşmemiş olan “gravitasyonel etkileşme” yi bir yana bırakıp çalışma alanımızla ilgisi olan “kuvvetli etkileşme” yi dikkate alalım. Bu etkileşme hadronları oluşturan kuarklar arasında ortaya çıkar. Altı tane kuark (d, u, s, c, b, t), altı tane de anti kuark ($\bar{d}, \bar{u}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}, \bar{t}$) mevcuttur (Faddeev and Slavnov 1980). Her kuark ve anti kuarkın kırmızı, yeşil ve mavi olmak üzere farklı renk yüküne sahip üç türü vardır. Hadronlar iki sınıfa ayrılır. Nükleonları da içeren üç kuarkdan oluşana baryon ($p, \eta, \Lambda, \Xi, \Omega$), bir kuark ve bir antikuarkdan oluşana ise mezon ($\pi, \kappa, \eta, \rho, \omega$) denir. Anlaşıldığı gibi hadronlar kuarkların bağlanması sonucu oluşan bileşik taneciklerdir (Wilson 1974). Kuarklar arasındaki bu bağı yani kuvvetli etkileşmeyi gulyon (gluon; g) denilen tanecik sağlar. Sekiz tane farklı renk yüklerine sahip gulyon türleri bulunmaktadır. Pratikte lepton ve kuarkların tümüne birden fermiyonlar (fermi

tanecikleri); etkileşmeyi sağlayan bütün aracı taneciklere ise ayar tanecikleri denir. Gerçekte bütün bu tanecikler; kütlelerine, yüküne, spinine, iç kuantum sayılarına ve etkileşme tiplerine göre ayrı ayrı sınıflandırılabilirler. Tanecik ve antitaneciklerin spini ve kütleleri aynı olmasına rağmen yükleri farklı işarete sahiptir. Örneğin bütün kuarkların spinleri $\pi/2$ olduğu halde bunlardan u,c,t ile simgelenenlerin yükleri $2e/3$ ve d,s,b ile simgelenenlerin yükleri $-e/3$ değerindedir. Buna göre bir proton $p = uud$ bileşiminde olduğundan yükü $q_p = 2e/3 + 2e/3 - e/3 = e$; bir nötron ise $n = udd$ bileşiminde bulunduğundan yükü $q_n = 0$ değerinde olmaktadır (Gell-Mann 1964, Callan et al 1978, Huang 1982, Muta 1987).

n_i , i yinci kuantum halindeki taneciklerin sayısını göstermek üzere sıcaklığı T olan bir sistemde

$$\bar{n} = N e^{-E_i/kT} \quad (k : \text{Boltzman sabiti})$$

formülüyle verilen Maxwell-Boltzman dağılımının yetersizliğinden sonra anlaşıldı ki n tamsayı olmak üzere spini $s = nh$ olan bozonlar

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} - 1} \quad (2.1.1)$$

Bose-Einstein dağılımına; spini $s = (2n+1)h/2$ olan fermiyonlar ise

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} + 1} \quad (2.1.2)$$

Fermi-Dirac dağılımına tabi olurlar. Bu bakımdan kuantumlanmaları da farklı olur.

Bir taneciğin veya tanecikler sisteminin bağlı olduğu fizik kanunlarının doğruluğu ve geçerliliği ya keşfedilmiş ya da araştırılan bir simetrinin sonucudur. Örneğin enerjinin korunumu zamanın homojenliğinin, momentum korunumu uzayın homojenliğinin sonucudur. İkisi birlikte uzay-zaman geometrisinde öteleme simetrisine karşılık gelir. Açısal momentumun korunumu ise uzayın izotropikliğinin sonucudur ki bu da dönme

simetrisine karşı gelir. Yük korunumu ise uzay-zamanda geometrik olmayan ve vektöriyel taneciklerle ilgili yerel simetrinin sonucu olarak ortaya çıkar. Ayrıca taneciğin yapısı ile ilişkili iç simetrisi vardır. Ayar teorisinde, yerel simetri, global simetri, Abel tipli simetri, BRST simetrisi önemli rol oynamaktadırlar (Muta 1987).

Fiziksel olaylarda karşılaştığımız bir çok simetrilerin özellikleri, matematiksel olarak herhangi bir grubun özelliği ile çıkarılabilir. Fakat aralarında simetri özelliklerinden dolayı bazı farklılıklar olabilir. Örneğin, dönme simetrisinde değişken sonlu değerler arasında yer almasına rağmen öteleme simetrisinde $-\infty$ dan $+\infty$ a kadar bütün değerleri alabilir. Düzlemsel (iki boyutlu) dönmede komütatiflik (değişme özelliği) varken, uzaysal (üç boyutlu) dönmede yoktur. Komütatiflik gösteren gruplara Abel tipli, göstermeyen gruplara Abel tipli olmayan gruplar denir (Huang 1982).

Modern fizik teorilerinin kurulması, fizik kanunlarının Lorentz dönüşümlerine (ve Poincaré dönüşümlerine) göre invariant kalmasına dayanır. Bir uzay-zaman simetrisi olan Poincaré invariantlığı aynı zamanda bağımsız dönüşümleri içeren iç simetrisi de sahiptir. İç simetri grupları altındaki etkileşmelerin invariantlığı taneciğin kuantum halini de doğrular. Yapılan çok çeşitli deney sonuçları göstermiştir ki kuvvetli etkileşmelerde rol alan kuarklar, gulyonlar v.b. taneciklerin oluşturduğu dinamik sistemler üzerine geliştirilen fizik kanunlarının netleşebilmesi için uzay-zaman simetrisine sahip olmanın yanısıra ayrıca matematiksel bakımdan SU(3) grubuyla çakışan “ayar dönüşümleri” ne göre de invariant kalması gerekir. Yani “ayar simetrisi” ne de sahip olmalıdır. O zaman deney sonuçları ile teorinin uyduğu görülecektir.

SU(3) grubu SU(N) grubunun özel durumudur. Bunlar Lie gruplarıdır. N, grubun boyutunu göstermektedir. Lie gruplarının kullanılması, özellikle, fizikçilerin ilgisini çeken kompakt basit ve yarıbasit Lie grupları, ayar simetrisi çalışmalarına oldukça katkıda bulunmuştur. Topolojik sınıfa giren Lie grubu sonlu sayıdaki parametreler kümesine bağlı olan operatörlerin oluşturduğu bir gruptur. Sonlu ve kapalı bir bölgede değişiyorsa kompakttır. Anlamli invariant alt grupları yoksa basittir. Abel tipli invariant grupları yoksa yarıbasittir. Lie grubunun etkisiz elemanı civarında yapılan sonsuz küçük bir değişimin, dönüşümü alınacak nicelikte oluşturacağı değişimi

bulan operatöre grubun jeneratörü denir. Lie gruplarıyla uğraşmak yerine grup jeneratörleri ve onların komütasyon bağıntıları ile tanımlanmış Lie cebirindeki tekabülleri ile çalışmak yeterlidir.

SU(N) grubu için $a=1,2, \dots, N^2-1$ ve $\mu=0,1,2,3$ olmak üzere L^a ayar grubunun jeneratörlerini temsil etsin. O zaman tanımlayacağımız bir A_μ ayar alanı, $A_\mu = \sum_a L^a A_\mu^a$ ile ifade edilebilen bir vektör alanıdır. Genelde kullanılan kompakt basit Lie grubunun jeneratörleri komütasyon bağıntılarına uyan Lineer operatörlerdir. Bunları aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$[L^a, L^b] = L^a L^b - L^b L^a = \sum_c f_c^{ab} L^c ; a, b, c = 1, 2, \dots, N^2 - 1 \quad (2.1.3)$$

burada $f_c^{ab} = f^{abc} = -f^{bac}$ grubun antisimetrik yapı sabitleridir. A_μ , değerlerini bu tanımlamalara göre alırsa, o zaman iz

$$Tr(L^a L^b) = -(1/2)\delta^{ab} \quad (2.1.4)$$

olacaktır.

Eğer $[L^a, L^b] = 0$ ise gruba Abel tipli Lie grubu ve A_μ 'ye Abel tipli ayar alanı; (2.1.3) sıfırdan farklı ise Abel tipli olmayan Lie grubu ve A_μ 'ye Abel tipli olmayan ayar alanı denir. QED (Kuantum Elektrodinamiği) Abel tipli alan teorilerine; Salam-Weinberg modeli ve QCD (Kuantum Kromodinamiği) Abel tipli olmayan alan teorilerine örnek verilebilir ('t Hooft 1974, Huang 1982).

Kuantumlamayı yapabilmek için başka temel bilgilere de gerek duyuyoruz. Bilindiği gibi klasik fizikten kuantum fiziğine geçiş bizim de tercih ettiğimiz Feynman Yol İntegrali Yöntemi kullanılarak sağlanmaktadır (diğ er bir yöntem Kanonik Kuantumlama). Bu integralde yer alan “**ETKİME(action)**” niceliği, klasik fiziğin tüm temel kanunlarını öyle bir matematiksel kurguya göre içermektedir ki bu

fonksiyonel için invaryanslığın analizi yapılırken elde edilenlerden hem klasik hareket denklemleri çıkarılır; hem de bazı fiziksel niceliklerin korunduğu sonucuna varılır. Burada önemli olan “FONKSİYONEL ETKİME” olarak adlandıracağımız bu fonksiyonelin kabul edilebilir bir yapıda kurulmasıdır. Bu nedenle ortaya çok sayıda aday teori ileri sürülmüştür. Modern teorileri de içeren fizik dünyasının gerçek “FONKSİYONEL ETKİME” sine ulaşmak bu sırada mevcut dört etkileşmeyi (Tablo-2.1) tek bir teoride toplamak için çalışmalar devam etmektedir.

Tablo 2.1 Temel Tanecikler arasında mevcut dört etkileşme

Etkileşme türü	Şiddeti	Menzili(m)	Kuantum teorilerinin oluşma yılı
Gravitasyonel	$\sim 10^{-40}$	∞	-
Elektromonyetik (QED)	$\frac{1}{137} \sim 10^{-2}$	∞	1948
Zayıf (Salam-Weinberg Modeli)	10^{-5}	10^{-15}	1968
Kuvvetli (QCD)	1	10^{-17}	1972

Amacımız için, kabullenilmiş teorileri üretmeye yeterli olan bir “FONKSİYONEL ETKİME”yi şöyle kuruyoruz:

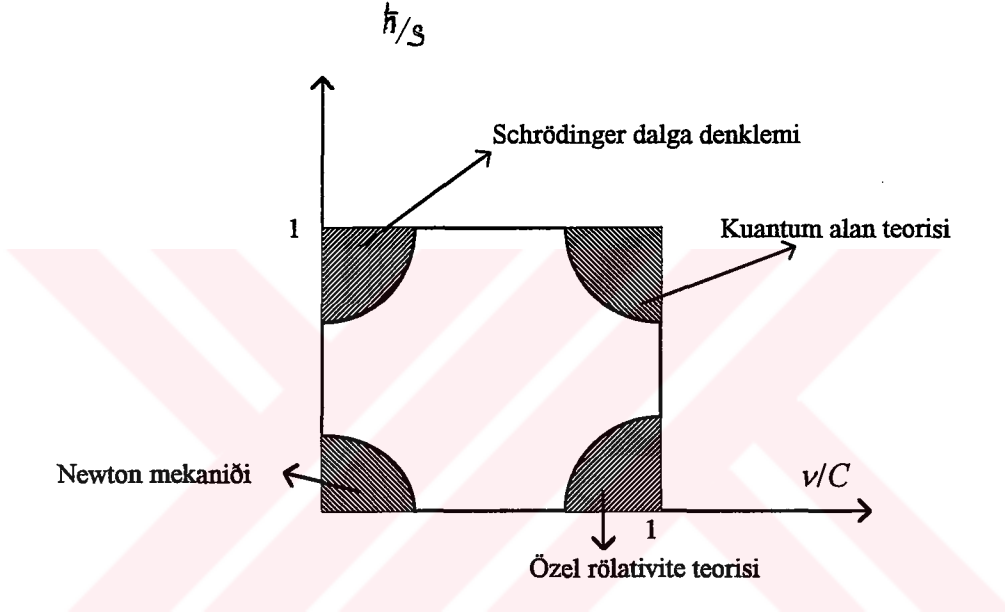
$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x L \quad (2.1.6)$$

yapısında olmalıdır. Buradaki τ_1 ve τ_2 integrasyon sınırlarıdır,

$$d^4x = dt d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 \quad (2.1.7)$$

Minkowski uzayının dört boyutlu integrasyon ölçüsüdür. Uzay-zaman boyutlarının sayısı amaca göre seçilebilir. Bu ölçü Euclid uzayında $d^4x = d\bar{x}_0 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3$

şeklinde alınabilir. Burada $\bar{x}_0 = ix_0$ ve $\bar{x}_i = x_i$ dir. İntegrand L 'ye Lagranj(Lagrange) yoğunluğu veya kısaca Lagranjiyen(Lagrangian) diyeceğiz. Lagranj yoğunluğu L talebimize göre biçimlenecektir. Örneğin, elektrodinamikte fonksiyonel etkiye S, Maxwell ve Dirac gibi klasik hareket denklemlerinin elde edilmesine ve buradan özel rölativite teorisinin sağlanmasına önder olacak yapıda kurulmaktadır. Bu nedenle S, Lorentz (veya Poincaré) ve ayar dönüşümleri altında invaryant kalmalıdır. Bu sırada ayrıca açılal momentum, elektrik yükü ve renk yükü gibi nicelikler de korunmalıdır. S 'nin birimi planck sabiti \hbar nin birimiyle aynıdır. O zaman Şekil 2.1 fiziğin hangi aşamasıyla hangi değerlerde uğraşıldığını temsil eder.



Şekil 1.1 (\hbar/s)-(v/c) çerçevesinde fiziğin aşamaları.

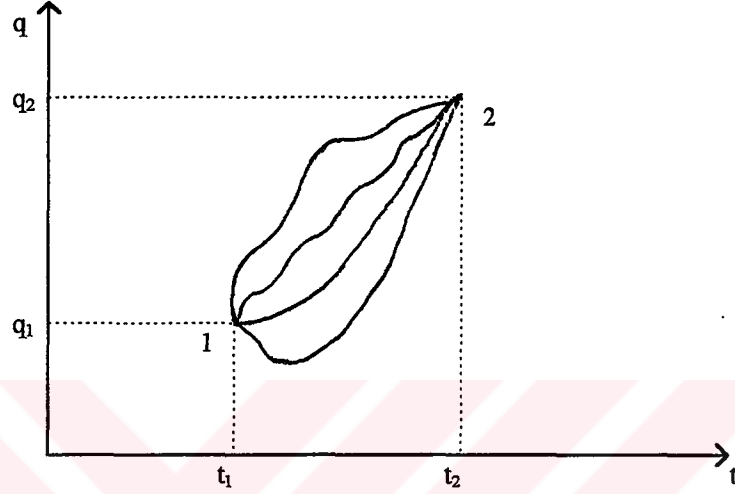
Basit bir başlangıç yapmak, anlaşılabilirlik için kolaylık sağlayacaktır. Tek bir tanecikten oluşan bir sistemi ele alalım. Tanecığın davranışlarıyla dinamik bir sistem oluşturduğu kabul edilebilir. Böyle bir sistemde $i=1,2, \dots, n$ olmak üzere $q_i(t)$, n boyutlu uzayda serbestlik derecesini veya konum vektörünü; $q'(t)$ ise türevlerini gösterebilir. O zaman bu sistemi,

$$L = L(q_i, q'_i, t) \quad (2.1.8)$$

lagranjiyeni ile karakterize edebiliriz. Fonksiyonel etkiye ise $\mathcal{S}([q_i]; t_1, t_2)$ olmak üzere

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, q'_i, t) \quad (2.1.9)$$

şeklinde kurulacaktır.



Şekil 2.2 Uzay-zamanda taneciğin konum değişimi

Şekil 2.2 de görüldüğü gibi tanecik q_1 konumundan q_2 konumuna geçerken, diğer bir deyimle 1 halinden 2 haline geçerken koordinat zamana bağlı olarak nasıl değişmiştir veya hangi yörüngeyi izlemiştir? Bunu yanıtlarsak, problemi de klasik yoldan çözmüş sayılırız. Tanecik bu yörüngelerden öyle birini seçer ki S nin değeri minimum düzeyde kalır. Doğadan kaynaklanan bu davranışa fizikte “**en küçük etkiye ilkesi**” denir. q_i de yapılacak küçük bir δq_i değişimi, S 'de

$$S[q_i, \delta q_i] = S + \delta S \quad (2.1.10)$$

değişikliğini yaptığından, $\delta S=0$ sonucu alınır. Buradan klasik hareket denklemleri ve korunumlar çıkarılır. Bu sonuçlar sistemi karakterize eden lagranjiyenlerin doğru seçilmesinden kaynaklanmaktadır. Eğer sistemin lagranjiyeni doğru seçilirse,

elde edilen bütün teorik sonuçlar deney sonuçlarıyla çakışır. Problemimiz, seçilen lagranjiyenin tanımlanan dönüşümler altında invaryant kalıp kalmamasıdır. Yani mevcut olan bir simetriye sahip olup olmamasıdır (Muta 1987, Ramond 1989).

Fizikte bazı simetriler kendiliğinden kırılır. Bir olayı karakterize edebilmek için kurduğumuz lagranjiyen geniş bir simetriye sahip olsa bile buradan elde ettiğimiz hareket denklemlerinin çözümleri bu simetri altında invaryant kalmayabilir. Bu da simetrinin kendiliğinden kırıldığını ifade eder. Buna en basit örnek ferromanyetik ortamda belli bir sıcaklığın altında dönme simetrisindeki kırılma gösterilebilir. Diğer bir örnek ise elektro-zayıf etkileşmelerdeki simetriye sahip lagranjiyenden elde edilen çözümlerin bu simetrisini vermemesidir (Zuber and Itzykson 1980).

Yang-Mills teorisinde uygun parametreler kullanılırsa sistemi karakterize eden lagranjiyeye eklenen yeterli sayıda skaler alandan bir kısmının değeri, vakum durumu için sıfırdan farklı olabilir. Bu duruma vakumun yerel ayar simetrisinin kendiliğinden kırılması mekanizması veya kısaca Higgs mekanizması denir. Bu durumda lagranjiyen, vakum değerleri sıfır olan yeni alanlar cinsinden kurularak bu skaler alanlardan bazılarının vektör alanları tarafından yutulup bu vektör alanlarına doğal yoldan kütle kazandırılır.

Yukarıdaki açıklamalarımızdan anlaşılmaktadır ki eğer lagranjiyeni gerçeğe uygun olarak seçersek fizik kanunlarının doğruluğuna da ulaşmış olacağız. Kanunların doğruluğunu kanıtlamak öncelikle hareket denklemlerinin elde edilmesiyle sağlanır. Bunun için yapılacak işlemler şu şekildedir. S nin varyasyonunun

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \delta L \quad (2.1.11)$$

olduğu bilindiğinden ve ayrıca

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial [\partial_i q]} \delta (\partial_i q) \quad (2.1.12)$$

yazılabileceğinden ve yine S 'nin minimum kalma ihtiyacından, sınır şartlarını da kullanarak hareket denklemlerinin genel biçimi olan

$$\partial_i \frac{\partial L}{\partial [\partial_i q]} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2.1.13)$$

Euler-Lagrange denklemi elde edilir. Bu denklemi alan teorisine taşıyabiliriz. Alan teorisinde (2.1.13) denklemi; $m=1,2,3,4$ ve $\phi=\phi(x)$ ' x uzay-zaman noktasına isabet eden alan olmak üzere

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial [\partial_\mu \phi]} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (2.1.14)$$

şeklinde yazılabilir. Bu sonuçtan özel durumda Maxwell ve Dirac denklemleri elde edilmektedir. Kuantum elektrodinamiğinin lagranjiyeni (L_{QED}) önce serbest elektron için kurulmuş, invaryantlık sorunu çıkınca diferansiyel geometriden kovaryant türev alınmış ve buna bir A_μ ayar alanı eklenerek kesin bir yapıya ulaşılmıştır. Buna bağlı olarak “**ayar dönüşümleri**” de biçimlenmiştir. Ayar Dönüşümleri, eklenen bu alanın elektronlarla (genelde fermiyonlarla) olan etkileşme biçimini de otomatik olarak belirlemektedir (Ramond 1989).

Kuantum Kromodinamiğinin ilkelerini daha iyi anlamak için önce kuantum Elektrodinamiği Lagranjiyenini açıklayalım.

$$L_{QED} = i\bar{\psi}\gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \quad (2.1.15)$$

Buradaki altindisli çarpımlar Einstein toplam biçimindeki çarpımdır. Yani

$$\gamma_\mu \partial_\mu = \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 + \gamma_3 \partial_3 + \gamma_4 \partial_4 \quad (2.1.16)$$

gibi değerlendirilmelidir. Burada ayrıca $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ şeklinde görülmelidir. Diğer nicelikler

- F_{mn} : Elektromanyetik alan antisimetrik şiddet tensörü,
 ψ : Elektron alanını (veya spinor),
 $\bar{\psi}$: Pozitron alanını,
 A_m : Foton alanını karakterize eder.
 g_m : Dirac matrisidir. Sabit bir matrisdir.
 e : Elektron veya pozitron yükü,
 m : Elektron kütlesi,
 m,n : Lorentz indisleri

olarak adlandırılır. Bunların tanımları aşağıdaki gibidir:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad m,n=1,2,3,4; \quad (2.1.17)$$

$\bar{\psi}$ matrisi ψ nin transpozesi ve (*) üstindisi kompleks eşleniği göstermek üzere

$$\psi^+ = (\bar{\psi})^* \quad (2.1.18)$$

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4 \quad (2.1.19)$$

olarak veriyoruz.

Eğer bu lagranjiyeni açık ifadesiyle yazarsak

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + e\bar{\psi}\psi A_\mu\gamma_\mu - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \quad (2.1.20)$$

şeklinde dört terim elde edilir. Bu terimlerin anlamları şöyledir.

$$\begin{aligned}
i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi & : \text{Elektron-pozitron alanının yayılması,} \\
e\bar{\psi}\psi A_{\mu}\gamma_{\mu} & : \text{Elektron-foton etkileşmesi,} \\
-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 & : \text{Foton alanının yayılması.}
\end{aligned}$$

Kuantum Elektrodinamiği için SU(1) grubuyla çakışan ayar dönüşümlerini, dönüşüm parametresi $a(x)$ keyfi bir reel fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
\psi' &= e^{i\alpha(x)}\psi \\
\bar{\psi}' &= e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi} \\
A'_{\mu} &= A_{\mu} + \frac{1}{e}\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_{\mu}}
\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

olarak veriyoruz. Dönüşüm parametresinin koordinatlara bağlı olması A_m ve ψ fonksiyonlarının farklı uzay-zaman noktalarında farklı dönüşümlere uğrayacaklarını göstermektedir. Koordinatlara yani x' e bağlı böyle dönüşümlere “yerel dönüşümler”, x' e bağlı olmayan dönüşümlere de “global dönüşümler” denir (Soloyev 1993). Gösterilebilir ki (2.1.15) lagranjiyeni, (2.1.21) ayar dönüşümü altında invaryanttır. Ayrıca, klasik denklemleri elde etmek için (2.1.15), (2.1.14) eşitliğinde kullanılırsa en basit hal olan serbest elektron için

$$(i\gamma_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m)\psi = 0 \tag{2.1.22}$$

Dirac denklemini ve serbest foton alanı için

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \tag{2.1.23}$$

Maxwell denklemlerini elde ederiz.

Yukarıdaki açıklamalara benzer olarak Kuantum Kromodinamiğin temel tanecikleri olan kuarklar ve onlar arasındaki kuvvetli etkileşmeyi sağlayan gulyonlardan oluşan dinamik sistemler için lagranjiyen

$$L_{QCD} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}(\partial_{\mu} - ig\frac{\lambda^a}{2}A_{\mu}^a)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \quad (2.1.24)$$

olarak kurulmaktadır. Burada

- $F_{mn}=F_{mn}(x)$: Yang-Mills alanının antisimetrik şiddet tensörü,
 $\psi = \psi(x)$: Kuarkları karakterize eden alan,
 $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x)$: Antikuarkları karakterize eden alan,
 $A_m=A_m(x)$: Gulyonları karakterize eden alan,
 g_m : Dirac matrisleri,
 g : Kuvvetli etkileşme sabiti,
 m : Kuark kütlesi,
 m,n : Laurentz indisleri ($m,u=1,2,3,4$),
 a,b,c : Uzay renk indisleri ($a,b,c=1,2, \dots, 8$),
 f^a : Gell-Man matrisleri (3×3) Hermit matrisler)

anlamlarına gelirler. Bazılarını yeniden tanımlarsak

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu}A_{\nu}^a - \partial_{\nu}A_{\mu}^a + gf^{abc}A_{\mu}^bA_{\nu}^c \quad (2.1.25)$$

yapısındadır. f^{abc} ise SU(3) grubunun antisimetrik ($f^{abc}=-f^{bac}$) reel yapı sabitleridir. Bunlar Lee cebirinin işlemlerine uyarlar. Yani komitasyon bağıntılarını sağlarlar.

$$[L^a, L^b] = if^{abc}L^c \quad (2.1.26)$$

$$Tr(L^a L^b) = 2\delta^{ab} \quad (2.1.27)$$

(2.1.18) ve (2.1.19) tanımları (2.1.24) için geçerlidir. Eğer (2.1.24) lagranjiyenini açık tarzda ifade edersek

$$L_{QCD} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\psi + \bar{\psi}\gamma_{\mu}g\frac{\lambda^a}{2}A_{\mu}^a\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 \quad (2.1.28)$$

biçimini alacaktır. Burada terimlerin anlamları;

$i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$: Kuark alanlarının yayılması

$\bar{\psi}\gamma_{\mu}g\frac{\lambda^a}{2}A_{\mu}^a\psi$: Kuark-Gulyon etkileşme terimi

$-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2$: Gulyonların birbirleriyle etkileşerek yayılması

olarak verilebilir.

Kuantum kromodinamiğinde dönüşüm parametresi

$$\omega = \omega(x) = \omega^a(x)L^a = \omega^1L^1 + \omega^2L^2 + \dots + \omega^8L^8 \quad (2.1.29)$$

şeklinde yazılabilen x 'e bağlı reel bir fonksiyon daha doğrusu bir matris; alanlar ise

$$A_{\mu} = A_{\mu}^a(x)L^a, \quad (2.1.30)$$

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a(x)L^a, \quad (2.1.31)$$

şeklindedir.

$$U = e^{-i\omega^a L^a} \quad (2.1.32)$$

tanımını yaparak QCD'ği için ayar dönüşümlerini

$$A'_{\mu} = UA_{\mu}U^{-1} - \frac{i}{g}U\partial_{\mu}U^{-1}$$

$$F'_\mu = F_{\mu\nu} U^{-1} \quad (2.1.33)$$

$$\psi' = U\psi$$

eşitlikleriyle veriyoruz. Unutulmamalıdır ki

$$e^\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} = I + \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} + \dots \quad (2.1.34)$$

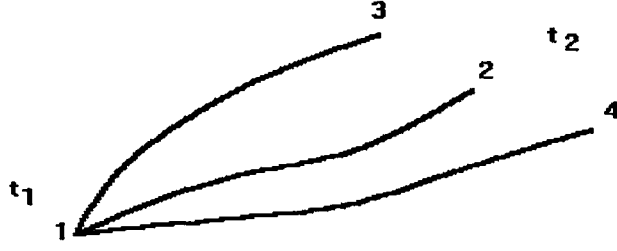
şeklinde bir matrisler serisine açılabilir. Ayrıca $U^{-1} = e^{i\omega}$, $UU^{-1} = I$ ve $\det(UU^{-1}) = \det I = 1$ olduğu ve $\bar{\psi}' = (\psi')^\dagger \gamma_4 = \bar{\psi} U^{-1}$ olduğu görülebilmelidir. Daha önce ifade ettiğimiz gibi parametrenin x 'e bağımlılığı nedeniyle (2.1.33) dönüşümleri yerel dönüşümlerdir ve bu dönüşümleri kullanarak yukarıdaki lagranjiyenin

$$L_{QCD}(\psi, A_\mu, F_{\mu\nu}) = L_{QCD}(\psi', A'_\mu, F'_{\mu\nu}) \quad (2.1.35)$$

şeklinde invariant kaldığını kanıtlamak mümkündür (Huang 1982).

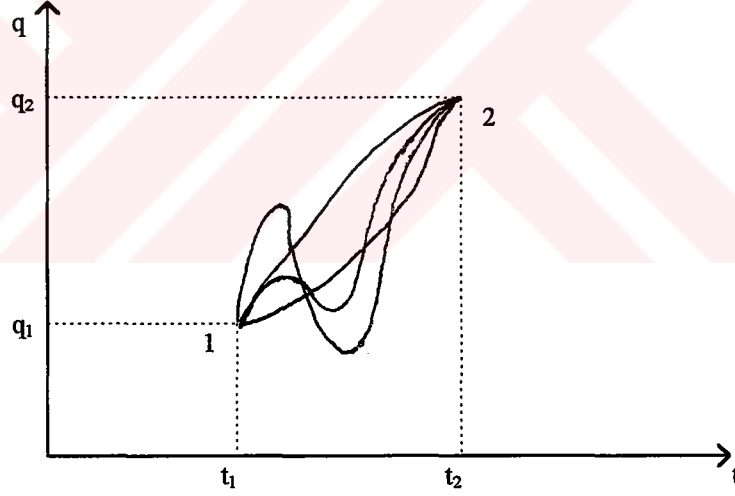
2.2. Alan Teorisinin Fonksiyonel İntegrallerle Kurulması

Feynman Yol İntegral Yöntemi; kuantum alan teorisinin kurulmasında yaygın olarak kullanılan ve Hilbert uzayındaki operatörlerle çalışılan Kanonik Kuantumlama yöntemine eşdeğerdir. Bununla beraber ayar teorilerinde kullanılmaya daha elverişli olduğundan daha çok tercih edilir. Bu yol integrali yönteminin amacı, Hilbert uzayındaki operatörleri ve halleri hesaba almayan klasik Hamiltoniyen $H(p,q)$ 'ye dayanarak **geçiş genliğini** çıkarmaktır. Geçiş genliğini açıklamak için rölativistik olmayan tek serbest dereceli kuantum mekaniğinde tek tanecikli dinamik bir sistem alalım. Taneciğin t_1 anındaki başlangıç halinden (1 hali) t_2 anındaki son haline geçme ihtimalleri çeşitli sayılarda olabilir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3. Hal değiştirme yörüngeleri

Dinamik sistemin algılanabilmesi için bu ihtimallerin hesaplanması çok önemlidir. Şekil 2.4 de görüldüğü gibi $q_1(t_1)$ başlangıç halinden $q_2(t_2)$ son haline geçebilmesi için birçok yörüngeyi izleme ihtimali vardır. Bu geçiş sırasında tanecik “en küçük etkiye ilkesine” uygun davranır.



Şekil 2.4 I'den II'ye geçişte çeşitli yörüngeler.

Kuantum mekaniğinde bir halden diğer hale geçme ihtimali Dirac notasyonuyla

$$P = \left| \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \right|^2 \quad (2.2.1)$$

eşitliği ile ifade edilmiştir. Buradaki

$$\langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \quad (2.2.2)$$

niceliğine “geçiş genliği” denilmektedir. Bu nicelik, \hat{H} , zamandan bağımsız Hamilton operatörü olmak üzere

$$\langle p | H | q \rangle \equiv \left\langle q_2 \left| e^{-\frac{i}{\hbar}(t_2 - t_1)\hat{H}} \right| q_1 \right\rangle \quad (2.2.3)$$

eşitliği ile tanımlanır. Eğer $t_2 - t_1$ zaman aralığını N eşit adıma bölüp normalizasyon ve momentum tanımlarını getirir ve klasik mekanikle kuantum mekaniği arasındaki $H = H(p, q)$ olmak üzere

$$\langle p | \hat{H} | q \rangle \equiv \langle p | q \rangle H \quad (2.2.4)$$

tanımını kullanırsak ve gerekli bazı ara işlemleri yaparsak

$$\langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle = \int Dq Dp e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt [pq' - H]} \quad (2.2.5)$$

integralini elde ederiz. Bu integral, geçişin uç noktalarındaki koordinatlara fiks edilmiş t_1 ve t_2 zamanları arasında, momentum uzayındaki tüm $p(t)$ yolları üzerinden alınan bir integrali gösterir. Yol ve hacim uzayındaki elemanları sırasıyla

$$Dq = \prod_{n=1}^{N-1} dq(t_n), \quad Dp = \prod_{n=1}^{N-1} \frac{dp(t_n)}{2\pi\hbar} \quad (2.2.6)$$

eşitlikleriyle tanımlanarak ve klasik Hamiltoniyan

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad , \quad V: \text{Potansiyel} \quad (2.2.7)$$

şeklinde alınarak önce momentum uzayı üzerinden integrasyon yapılır.

$$\int Dq Dp e^{i \int_{t_1}^{t_2} dt [pq' - H]} = \left(\frac{m}{2\pi \hbar} \right)^{N/2} e^{i \int_{t_1}^{t_2} dt L(q,q')} \quad (2.2.8)$$

Buradaki L, klasik lagranjiyendir ve

$$L(q,q') = \frac{1}{2} m q'^2 - V(q) \quad (2.2.9)$$

şeklindedir. (2.2.8) sonucu, (2.2.5) integralinde yerine koyulursa geçiş genliği

$$\langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle = N \int Dq e^{i \int_{t_1}^{t_2} dt L(q,q')} \quad (2.2.10)$$

olarak elde edilir. Burada N, $(t_2 - t_1)$ zaman aralığını N eşit adıma bölen ve $N \rightarrow \infty$ limitinde sonsuz olan normalizasyon sabitidir. Son olarak “fonksiyonel etkime” yi (2.2.10) da yerine yazarsak

$$\langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle = N \int Dq e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \quad (2.2.11)$$

elde edilir. N'nin fiziksel sonuçlara etkisi yoktur. (2.2.11) integrali, geçiş ihtimalini, başlangıç ve bitiş koşullarına göre olası tüm yollar üzerinden ifade eder. Bu formülasyon klasik ve kuantum mekanikleri arasındaki farklılığı açıkça ortaya koymaktadır. Klasik mekniğe tanecik q_1 den q_2 ye giden sadece tek bir yolu alırken kuantum mekaniğinde olası tüm yolların katkısı sözkonusudur. Klasik limit

olarak tanımladığımız durum, yani $h \rightarrow 0$ iken taneciğin yörüngeler içinden sadece birini seçtiği belli olmaktadır (Huang 1982, Ramond 1989).

(2.2.11) eşitliğini alan teorisi için genelleştirebiliriz. Bu nedenle uzay-zamanın her bir noktasına $\phi = \phi(x)$ olmak üzere bir alan fonksiyonu tekabül ettirerek geçiş genliğini ,

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = N \int D\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)} \quad (2.2.12)$$

eşitliği ile yazabiliriz. Üç noktalarındaki değerler, $t=t_1$ için ϕ_1 ve $t=t_2$ için ϕ_2 olarak alınmıştır. Ayrıca

$$D\phi = \prod_x d\phi(x) \quad (2.2.13)$$

tüm alanları içeren integrasyon ölçüsüdür (McKeon 1993).

Klasik teorilerin karşılığı olan kuantum teorilerini kurmak için genel yöntemlerden biri “fonksiyonel integrasyonla kuantumlama” yöntemidir. Bu yöntemin en önemli özelliği, bulmak istediğimiz herhangi bir niceliğin fonksiyonel integralle ifade edilmesidir. Fonksiyonel integraller bütün alan fonksiyonları üzerinden integralleri içerirler. Bu yöntemde eğer lagranjiyen belli ise (2.2.12) kurulur. Bu integralin alınması geçiş genliğinin elde edilmesini sağlar. Bulunması istenen diğer bütün nicelikler de bu sonuçtan elde edilirler. (2.2.12) integralini, rolü gereği ve literatüre yatkın olmak amacıyla “oluşturucu fonksiyonel” (generating functional) diye adlandırıyoruz. Oluşturucu fonksiyoneli hesaplayabilmek için pertürbasyon teorisindeki seriye açma yöntemi kullanılır. Seriye açarken matematiksel kolaylık sağlasın diye sisteme bir $j(x)$ dış kaynak eklenir. $j(x)$ keyfi bir fonksiyondur. Bazı basit haller dışında hiçbir fiziksel anlamı yoktur. Örneğin, Kuantum Elektrodinamiği için kurulan oluşturucu fonksiyonel

$$z = \int D\psi D\bar{\psi} DA e^{\mathcal{S} + \int j_{\mu}(x)A_{\mu}(x)d^4x} \quad (2.2.14)$$

şeklinde. Hesap tekniğinin uygulanmasından sonra, alınacak sonuçların fiziksel yorumları önemlidir. (2.2.14) eşitliği ince yapı sabiti olarak isimlendirilen ve

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \ll 1 \quad (2.2.15)$$

şeklinde belirlenen α 'nın kuvvetlerine göre seriye ayrılır. Serideki terimlerden ilkinin α^2 ile, ikincinin α^4 ile, üçüncünün α^6 , ..., doğru orantılı olduğu görülür. Bu biçimlendirmeden anlaşılıyor ki ilk terimin önemi çok büyük olacaktır. Diğer terimler ise yaptıkları etkiler çok küçük kalacağından bazı durumlarda ihmal edilebilirler. Dolayısıyla α 'nın küçük olması nedeniyle Kuantum Elektrodinamiğinde pertürbasyon teorisini kullanmak mümkün olmaktadır. Bu işlemleri kısa yoldan gerçekleştirmek için Feynman Diyagram Tekniği kullanılır. Tekniğin sağladığı kolaylık, herhangi bir niceliği her defasında çok geniş formüllerle hesaplara katıp yorumlamak yerine, çok küçük bir diyagramla ifade edebilmektir. Daha sonraki bölümlerde tekrar değineceğimiz bu diyagramlar sınıflara bölünebilirler. Örneğin, ilmek içeren diyagramlar, taneciğin vakumla etkileşmesini ifade ederler. O nedenle bunların rolü daha önemlidir. İster fizikte olsun ister matematikte, teorinin kurulması bakımından önemli rol üstlenmişlerdir (Cheng and Tsai 1986).

Kuantum Elektrodinamiği için izlenen bu yol benzer olarak Kuantum Kromodinamiği için de uygulanabilir. Fakat Kuantum Kromodinamiği için kurulan oluşturucu fonksiyonelin seriye açılmasında başlangıçta sorun çıkıyordu. Çünkü kuvvetli etkileşme sabiti “g” nin değeri nedeniyle serinin terimlerinin değerleri gittikçe büyümekteydi. $g=1$ olması durumunda, serinin terimleri sırasıyla g^2, g^4, g^6, \dots ile doğru orantılı olduklarından hepside aynı mertebeden olacaktı. O zaman da seriye açmanın hiçbir anlamı kalmayacaktı. Bu sorunla uğraşan Gross, Wilzek (1973) ve Politzer birbirlerinden habersiz olarak, Kuantum Kromodinamiğindeki etkileşme sabiti “g”nin, etkileşen taneciklerin ilk hızlarına ve onlar arasındaki uzaklığa bağlı olduğunu kanıtladılar. Yani kuplaj sabiti “g” nin değeri taneciklerin (örneğin kuarkların)

momentumuna göre değişiyordu. Momentumun büyük değerlerinde $g \ll 1$, momentumun küçük değerlerinde ise $g=1$ oluyordu. Yani momentum büyüdükçe etkileşme zayıflıyor, küçüldükçe artıyordu. Bu duruma asimptotik serbestlik (asimptotic freedom) dendi. c herhangi bir sabit ve Λ sabit bir parametre olmak üzere etkileşme sabiti günümüzde

$$\alpha = \frac{g^2}{4\pi} \approx \left(\frac{c}{\ln \frac{p^2}{\Lambda^2}} \right)_{p \rightarrow \infty} \quad (2.2.16)$$

şeklinde veriliyor. (2.2.16) ya göre momentum büyüdükçe α sifıra yaklaşmaktadır (Delbourgo et al 1974). O zaman pertürbasyon teorisi güvenle kullanılabilir. Ancak momentumun küçük değerlerinde kullanılamaz. O nedenle günümüzde Kuantum Kromodinamiğinde pertürbasyon ve pertürbasyon olmayan yöntemler kullanılmaktadır (Bassetto et al 1983).

Momentumun büyük değerlerinde pertürbasyon yöntemi kullanılmakta ve bu nedenle fonksiyonel oluşturucu tüm alanlar üzerinden

$$z[j] = N \int \mathcal{D}\phi(x) e^{-S + \int j(x)\phi(x)} \quad (2.2.17)$$

olarak alınmaktadır. Daha önce ifade ettiğimiz gibi dış kaynak $j(x)$ 'in fiziksel bir anlamı olmasa da (2.2.17),

$$z[j] = \sum \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n G(x_1, \dots, x_n) j(x_1) \dots j(x_n) \quad (2.2.18)$$

şeklinde seriye açıldığında, serinin katsayıları olan Green fonksiyonlarını elde edebilmek için matematiksel avantaj sağlamaktadır. Bu katsayıları bulmak için fonksiyonel oluşturucu $z[j]$ 'nin dış kaynaklara göre varyasyonu alınmakta ve propagatör dediğimiz Green fonksiyonları,

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^{(1)} z[j]}{\delta j_\mu(x_1) \dots \delta j_\mu(x_n)} \quad (2.2.19)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Yukarıdaki formüllerden görüldüğü gibi oluşturucu fonksiyonele ait Green fonksiyonlarının ve diğer niceliklerinin bulunması fonksiyonel integrallerin hesaplanmasını gerektirmektedir. Bu nedenle fonksiyonel integrallerin hesaplanmasındaki önemli aşamaları gözönünde bulunduralım. Öncelikle lagranjiyenin alan fonksiyonlarına göre kuadratik kısmını ele alalım. Bu durumda

$$j = \int D U e^{-Q(U)} \quad (2.2.20)$$

biçiminde bir integrali çözmek gerekir. Burada $U=U(x)$ bir fonksiyon, $Q=Q(U)$ ise n tane değişkenin karelerini veya karışık çarpımlarını içeren bir fonksiyondur. Amacımız için şu basit integralleri hatırlatalım:

$$j_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.21)$$

dir.

$$j_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Q(x)} dx \quad \text{ve} \quad Q(x) = \frac{1}{2} ax^2 - bx \quad (2.2.22)$$

olarak verilsin. Burada

$$Q(x) = \frac{a}{2} \left(x^2 - \frac{2b}{a} x \right) = \frac{a}{2} \left[\left(x - \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{b^2}{a^2} \right]$$

ve

$$y = x - \frac{b}{a}, \quad Q(x) = \frac{a}{2} \left(y^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) = \frac{a}{2} y^2 - \frac{b^2}{2a}$$

dönüşümleri yapıp (2.2.21) kullanılırsa

$$j_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}y^2} e^{\frac{b^2}{2a}} dx = \left(\frac{\pi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{b^2}{2a} \right) \quad (2.2.23)$$

eşitliğiyle bulunmuş olur. Bunları unutmadan daha karmaşık bir integrale ilgilenelim.

$$j_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n e^{-x_i A_{ij} x_j}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (2.2.24)$$

şeklinde verilmiş olsun. Burada x_n bir sütun matris, A ise simetrik matrisdir. Yani $A^T = A$ dır. A_{ij} 'ler A'nın elemanlarıdır ($x_i A_{ij} x_j = X^T A X$). Eğer böyle ise (2.2.24) integraline (2.2.22) ye getirdiğimiz çözümü uyguluyoruz. A matrisi simetrik değil ise, o zaman simetrik ve antisimetrik iki matrisin toplamı olarak yazabilmek daima mümkündür. Çünkü antisimetrik matrisin $x_i x_j$ ile çarpımları sifira eşit olur. O zaman simetrik kısım kalır. Buna göre A'yı simetrik matris olarak gözönüne almak genelliği bozmaz. Lineer cebirden bilindiği üzere, $\det A \neq 0$ ise her zaman öyle bir R matrisi bulmak mümkündür ki A'yı köşegen matrise dönüştürsün. O zaman $A = R^T D R$ ve $R R^T = R^T R = I$ olacaktır. Buradaki D köşegen matrisdir ve $\det(I) = \det(R R^T) = 1$ $\det R \cdot \det R^T = (\det R)^2 = 1$ dir. Öyleyse $\det R = \pm 1$ olur. Yani $\det A = \det D$ olduğu görülüyor. Eğer biz böyle bir R matrisi bulabilirsek (2.2.24) integrali ,

$$j_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n e^{-X^T R^T D R X} \quad (2.2.25)$$

integraline dönüşür. X değişkeninden Y değişkenine geçilerek $Y = R X$ ve $Y^T = X^T R^T$ alınırsa (2.2.25) integrali

$$\begin{aligned}
j_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n e^{-Y^T D Y} \stackrel{1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots dy_n e^{-y_1^2 d_1 \dots d_n y_n^2} \\
&= \frac{(2\pi)^{1/2}}{(d_1 \dots d_n)^{1/2}} = \frac{(2\pi)^{1/2}}{(\det D)^{1/2}} = (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

olarak hesaplanabilir. (2.2.26) nın hesaplanmasında yeni integralleme değişkenlerine geçište jakobiyenin 1'e efitliği kullanılmıştır. Çok katlı integrallerde x_1, \dots, x_n integralleme değişkenlerinden y_1, \dots, y_n değişkenlerine geçiliyorsa jakobiyen,

$$J \begin{pmatrix} y_1, \dots, y_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\delta y_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta y_n}{\delta x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta y_1}{\delta x_n} & \dots & \frac{\delta y_n}{\delta x_n} \end{vmatrix} \tag{2.2.27}$$

ve

$$\frac{\delta y_i}{\delta x_j} = R_{ij}$$

alınarak

$$J = \begin{vmatrix} R_{11} & \dots & R_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{n1} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} = \det R = 1 \tag{2.2.28}$$

şeklinde bulunur. D köşegen matris olduğundan $Y^T D Y$ nedeniyle n katlı integralimiz n tane integralin çarpımına dönüşür. Bu integrallerin herbirini (2.2.23)'e göre sonuçlandırabiliriz. Bu bilgileri edindikten sonra (2.2.20) integraline geri dönelim. Burada

$$DU = dU_1 \dots dU_n \tag{2.2.29}$$

şeklinde integraleme ölçüsüdür. Öyleyse (2.2.20) n katlı bir integraldir. Burada Q, n tane değişkenin karelerini veya bunların karışık çarpımlarını içeren kuadratik bir fonksiyonel olsun:

$$Q(U) \equiv \frac{1}{2}(U, AU) - (b, U) \quad (2.2.30)$$

Şimdi Q fonksiyoneli biraz değiştiriyoruz. Bu amaçla

$$(b, U) = \sum_i b_i u_i = \int d^4 x b(x) U(x) \quad (2.2.31)$$

skaler çarpımını tanımlıyoruz. O zaman bu fonksiyoneli

$$Q(U) \equiv \frac{1}{2}((U - U_0), A(U - U_0)) - \frac{1}{2}(b, A^{-1}b) \quad (2.2.32)$$

değişik biçimiyle yazabiliriz. (2.2.32) eşitliğini (2.2.20)'de yerine yazıp (2.2.26) sonucunu hatırlayarak

$$j = \exp\left[\frac{1}{2}(b, A^{-1}b)\right] \int \mathcal{D}U e^{-\frac{1}{2}(U-U_0), A(U-U_0)}$$

ve

$$j = (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2}(b, A^{-1}b)\right] \quad , \quad (2.2.33)$$

daha genel şekliyle

$$\begin{aligned} I &= \int \mathcal{D}U e^{-Q[U]} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2}(b, A^{-1}b)\right] \\ &= N(\det A)^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2}(b, A^{-1}b)\right] \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

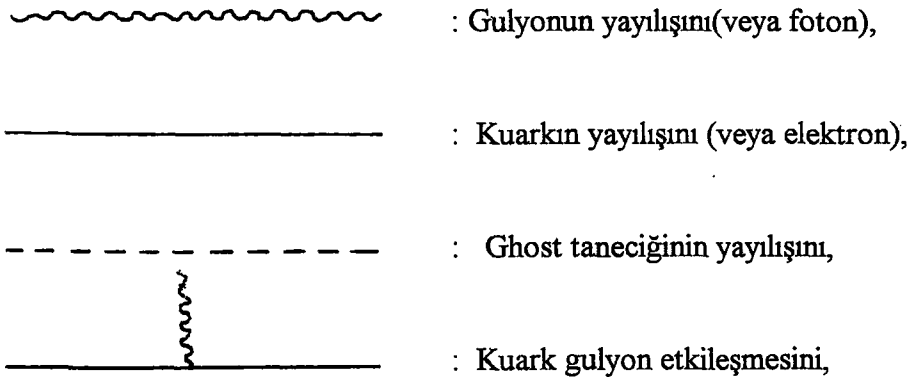
elde edilir. Bu sonucu integral işlemlerinde defalarca kullanıyoruz.

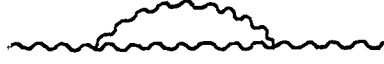
2.3 Ayar Alanlarının Kuantumlanması

Daha önce ayar taneciği dediğimiz foton ve gulyon gibi vektöriyel tanecik alanlarını “ayar alanı” olarak isimlendiriyoruz. (2.1.24) lagranjyeninin, (2.1.33) ayar dönüşümlerine göre invaryantlığı ayar alanlarının kuantumlanmasında, sorun çıkarmaktadır. Bu sorunu gidermek alan teorisinin öncelik taşıyan konularından biridir. Uğraşmaya çalıştığımız sorun Green fonksiyonlarının belirlenmesinde çıkan problemdir. Konunun akışına göre önce bazı basit halleri dikkate alıp gözden geçirmekte yarar vardır.

Kuantum Kromodinamiğinde (veya QED de) herhangi bir niceliği bulmak için oluşturucu fonksiyonel yazılıp seriye ayrılıyor. Bu serinin dış kaynaklara göre varyasyonundan Green fonksiyonları yine seri şeklinde bulunmuş oluyor. Bu serinin sadece birinci terimini yeterli kabul etsek bu fonksiyona “çıplak Green fonksiyonu” (bare Green function) denir. Çıplak Green fonksiyonunun temsil ettiği dinamik sistemde gulyon hiçbir tanecikle hatta fiziksel vakumla etkileşmeden yayılmaktadır. Serinin diğer terimleri birinci terimden yararlanılarak bulunur. Bu son derece zor bir işlemdir. Her seferinde çok uzun ve karmaşık formülasyonları gerektirir (Gribov 1978, Singer 1978, Zuber and Itzykson 1980).

Bu durumu kolaylaştırmak için Feynman diyagramları kullanılmaktadır. Feynman diyagramlarında her olay bir şemayla temsil edilmektedir. Örneğin;





: Tek ilmek (one-loop) yaklaşımını
(Gulyonun vakumla etkileşmesi)

ifade etmektedir. Oluşturucu fonksiyoneli seriye ayırma işleminde matematiksel terimler yerine Feynman diyagramlarını kullanarak gulyon propagatörü,

$$\begin{aligned}
 & \text{wavy line} + \alpha \text{ (one-loop diagram)} + \beta \text{ (two-loop diagram)} + \gamma \text{ (three-loop diagram)} \\
 & + \delta \text{ (four-loop diagram)}
 \end{aligned}$$

şeklinde diyagramlar serisi halinde elde edilir. Fakat bu şematik serinin katsayılarını belirlemek gerekir. İlk problem, ilk terimi belirlemektir. (2.3.1)'deki ilk terim, gulyon alanının hiçbir etkileşmede bulunmadığını göstermektedir. Hiçbir etkileşmede bulunmaması o anlama gelir ki Yang-Mills alanı için şiddet tensöründe(2.1.25) yalnız ilk iki terimle yetinilecektir. Çünkü üçüncü terimi dikkate almıyoruz. Eğer üçüncü terimi dikkate alsak göreceğiz ki A 'nın üçüncü ve dördüncü dereceleri ortaya çıkıyor. Bu terimler Feynman diyagramıyla



şeklinde ifade edilirler. Fiziksel anlamı ise, etkileşme anında bir gulyonun iki veya üç gulyona parçalanması (veya iki, üç gulyonun tek gulyona dönüşmesi, gulyonun kendiliğinden gulyon bırakması veya yutması) demektir. Etkileşme olmadığını varsayarsak ilk iki terimle yetiniriz. Yani lagranjiyen,

$$L_0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha)^2, \quad (2.3.3)$$

fonksiyonel etkiye ise

$$\mathcal{S}_0 = -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2, \quad (2.3.4)$$

eşitlikleriyle verilmiş olacaktır. Bu eşitlikler serbest gulyon alanını ifade etmektedirler. Serbest gulyon alanını skaler alana benzer yoldan kuantumlarsak Green fonksiyonunu tayin edemiyoruz. Çünkü matematiksel bir çelişki ile karşılaşyoruz. Bunu kısaca özetleyelim. (2.3.4) eşitliğinde parantezin karesi açılıp

$$\mathcal{S}_0 = -\frac{1}{4} \int d^4x \left((\partial_\mu A_\nu^a)^2 - 2(\partial_\mu A_\nu^a)(\partial_\nu A_\mu^a) + (\partial_\nu A_\mu^a)^2 \right),$$

eşitliği elde edildikten sonra kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\mathcal{S}_0 = -\frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a (\partial^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu^a \quad (2.3.5)$$

şekline dönüşür. Bunu (2.2.17) ye taşırsak oluşturucu fonksiyonel, dış kaynağa bağlı olarak

$$z_0[j] = \int \mathcal{D}A e^{-\int [A_\mu^a (\partial^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu^a + J_\mu^a A_\mu^a]} d^4x \quad (2.3.6)$$

şeklinde elde edilir. (2.3.6) daha önce uğraştığımız (2.2.34) tipindeki bir integraldir. Çözümü bulunup varyasyon alınırsa Green fonksiyonu ,

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = \frac{\delta^2 \ln z}{\delta J_\mu^a(x) \delta J_\nu^b(x)} \quad (2.3.7)$$

olarak bulunur. Fourier dönüşümü yapıp koordinat uzayından momentum uzayına geçerek, momentum uzayında ters Green fonksiyonu için

$$D^{-1}(p) = p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu \quad (2.3.8)$$

yapısında bir ifade buluruz. D^{-1} matrisi D matrisinin tersi ise $DD^{-1}=I$ olması gerekir. O zaman (2.3.8) eşitliğini,

$$(p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) D_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda} \quad (2.3.9)$$

şeklinde yazıp her iki tarafı p_μ ile çarparsak karşımıza

$$(p^2 p_\nu - p^2 p_\nu) D_{\nu\lambda} = p_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, 3, 4 \quad (2.3.10)$$

durumu çıkar. Burada, sol taraftaki parantezin sıfıra eşit olduğu anlaşılmaktadır. Yani $p_\mu=0$ çıkıyor. Halbuki, p_μ herhangi bir keyfi dört boyutlu momentum vektörüdür. Neden sıfıra eşit olsun? Anlaşıyor ki bir çelişki ile karşı karşıyayız. Çünkü böyle bir keyfi vektörün bileşkesi sıfıra eşit olamaz. Bunun olamazlığı da gösteriyor ki bu matrisin tersi yoktur. Yani Green fonksiyonu tayin olunamıyor. İşte bu çelişkinin nedeni ayar simetrisini dikkate almadan kuantumlama yapmamızdan ileri gelmektedir. Ayar simetrisini gözönüne alarak sistemi ifade eden oluşturucu fonksiyonel kurulduğunda “**ayar koşulu**” (gauge condition) dediğimiz terimlerin lagranjiyene eklenmesi gerektiğini görmekteyiz. Çeşitli ayar koşulları vardır. Lorentz ayar koşulu, Coulomb ayar koşulu, aksenal ayar koşulu v.b. mevcuttur (Frenkel and Taylor 1976). Örneğin; Lorentz ayar koşulu,

$$F^a = \partial_\mu A_\mu^a = 0 \quad (2.3.11)$$

ile verilmektedir (Schwinger 1963). Bu ayarda serbest gulyon alanı için lagranjiyen

$$L_1 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A_\mu^a)^2 \quad (2.3.12)$$

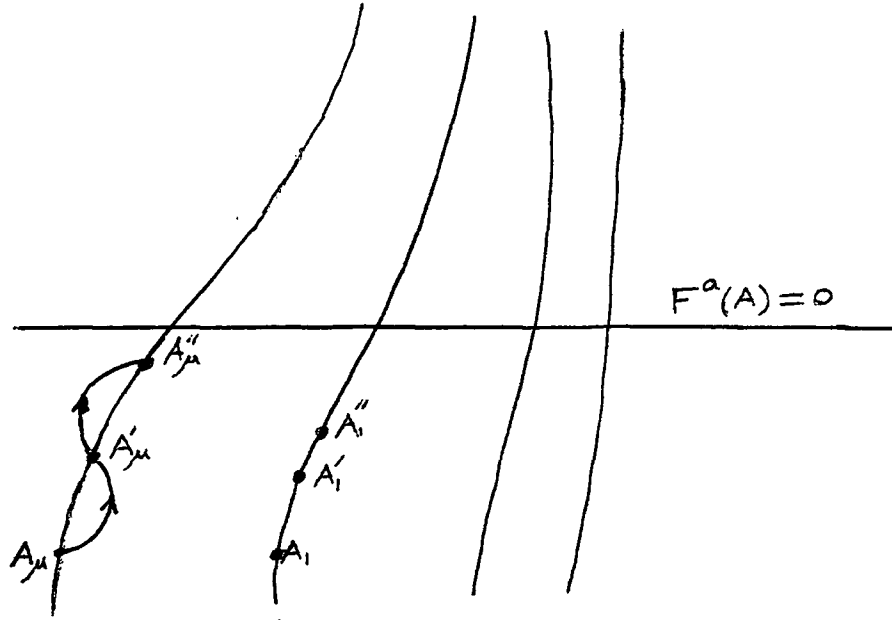
yapısında olacaktır. O zaman Green fonksiyonu

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p-\nu) = \frac{\delta^{ab}}{p^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1-\lambda) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (2.3.13)$$

şeklinde tayin olunacaktır. Burada λ ayar parametresidir. Demek ki ayarı fiks eden terim lagranjiyene eklenmemiş ise Green fonksiyonu tayin olunamıyor. Bu durum ayar alanlarının kendi özellikleri nedeniyle farklı bir tarzda kuantumlanması gerektiğini göstermektedir. Bu özellik, ayar alanlarını ifade eden lagranjiyenin, (2.1.33) dönüşümlerinden biri olan,

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1} \quad (2.3.14)$$

dönüşümüne göre invariant kalması ile ilgilidir. Oluşturucu fonksiyonel $z(j)$ 'nin ifadesinde bulunan integrasyonu alırken skaler alanlar için yaptığımız gibi bütün alan fonksiyonları üzerinden değil de sadece birbirinden ayar dönüşümü ile alınamayan; yani birbirinden farklı fiziği olan, alan fonksiyonları üzerinden integrallemek gerekir. Çünkü, alanlar uzayındaki A_m noktasından w_1 parametresiyle ayar dönüşümü yaparak A'_μ noktasını ve w_2 parametresiyle A'_μ noktasından A''_μ noktasını v.b. giderek sonsuz tane nokta buluyoruz. Bu noktalar bir eğri oluşturur. Bu eğri alan uzayında bir fonksiyonu göstermektedir. Eğer alan uzayında, yine, başka bir nokta alsak başka bir eğri buluruz. Çizdiğimiz bu eğrilere ayar grubunun yörüngesi denmektedir (Şekil 2.5). Bu uzayda bu yörüngelerle yalnız bir defa kesişen bir $F^a=0$ yüzeyi göz önüne alalım. Kesişen bu noktaları karakterize eden fonksiyonlar, birbirinden ayar dönüşümüyle alınamayan noktaları temsil etmektedirler. Bu noktaların fiziği birbirinden farklıdır. O halde yüzeyin denklemi $F^a(A)=0$, o şekilde olmalıdır ki farklı fiziği olan A fonksiyonları bu yüzey üzerinde yalnız bir defa bulunsunlar. Bu yüzeye, yani $F^a(A)=0$ eşitliğine ayar koşulu dendiğini daha önce ifade etmiştik. Dirac δ fonksiyonu,



Şekil 2.5. Ayar dönüşümüyle bulunan eğriler ve onları kesen yüzey

$$\delta(F) = \begin{cases} 0 & F \neq 0 \text{ ise} \\ \infty & F = 0 \text{ ise,} \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(F) dF = 1 \quad (2.3.15)$$

şeklinde tanımlandığından, ve aynı fiziksel durumu ifade eden alan fonksiyonlarından yalnız birisi üzerinden integral almak gerektiğinden oluşturucu fonksiyonel,

$$z[j] \approx \int \mathcal{D}A e^{-S + \int j A d^4 x} \delta[F(A)] \quad (2.3.16)$$

şeklinde yazılabilir. Yani, integral ölçüsü $\mathcal{D}A = \prod_{a,\mu} dA_\mu^a(x)$ 'in içerdiği istenmeyen

serbestlik derecelerini yani fiziksel olmayan ve birbirinden ayar dönüşümüyle alınabilen alan fonksiyonlarını ayıklamamız daha doğrusu elimine etmemiz gerektiği anlaşılıyor.

Bu fonksiyonların eliminasyonu Fadeev-Popov(1967) yöntemiyle gerçekleştirilmektedir. Fadeev-Popov yönteminin algoritması uygulandığı zaman klasik lagranjiyenin değiştirmek zorunda kaldığımızı ve artık bu yeni lagranjiyenin (2.1.33) dönüşümlerine göre invariant olmadığını görüyoruz. Lagranjiyen bu yeni haliyle

$$L_{eff} = L + \overline{C}^a \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^c} D_\mu^{cb} C^b + \frac{1}{2\alpha} [F^a(A_\mu^b)]^2 \quad (2.3.17)$$

şekline dönüşür. Buradaki ilk terim L, (2.1.24) eşitliğini yani klasik alanları; ikinci terim

$$L_{ghost} = \overline{C}^a \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^c} D_\mu^{cb} C^b \quad (2.3.18)$$

gost taneciklerini ifade eden terimdir. $C(x)$ ve $\overline{C}(x)$ antikomitatif gost alanlarını temsil eder. Bose istatistiğine uyan bu taneciklere C veya fiktif Fermi tanecikleri de denir. Üçüncü terim ise ayar koşulu ile ilgilidir. (2.3.17) lagranjiyeni aşağıdaki BRS dönüşümlerine göre invaryanttır.

$$\begin{cases} \delta A_\mu^a = \frac{1}{g} \varepsilon (D_\mu \overline{C})^a \\ \delta C^a = -\frac{1}{\alpha g} \varepsilon F^a(A_\mu^a) \\ \delta \overline{C}^a = \frac{1}{2} \varepsilon f^{abd} c^b c^d \\ \delta \psi = -i \varepsilon \overline{C}^a \end{cases}$$

Burada, ε , Grassmann değişkenidir ve $\varepsilon^2=0$ dır. Bu dönüşümler global dönüşümlerdir.

Burada D_μ^{cb} ye kovaryant türev denir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$D_\mu^{cb} = \partial_\mu \delta^{cb} + g f^{cbd} A_\mu^d \quad (2.3.19)$$

a ise (2.3.12) deki 1 yerine kullanılmıştır. Bu tanımlara dayanarak oluşturucu fonksiyonel,

$$z[j] = \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x L_{eff}(A) + \int d^4x J_\mu^a A_\mu^a} \quad (2.3.20)$$

şeklinde ortaya çıkar. (2.3.20) kullanılarak kuantumlamayı gerçekleştirmek için (2.3.17) nin içerdiği ayar koşulunun da hangi yapıda olacağını belirlemek gerekiyor. Bu problem, bizim ayar teorisini irdelerek amacımıza destek olanları seçmek ve uygun bir koşul koyarak kuantumlama sorununu çözmek şeklinde karşımıza çıkmaktadır.



3. ABEL TİPLİ OLMAYAN AYAR ALANLARININ KUANTUMLANMASI

3.1. Fadeev-Popov Yöntemi

Günümüzde ileri sürülen ayar simetrisine sahip bir teoriyi kuantumlamak için, fonksiyonel integralin alınmasında bizi çıkmaza sokan fiziksel olmayan serbestlik derecelerini elimine etmek gerekmektedir. Standart işlem, alan değişkenlerine bağlı olan bir ayar koşulu koyarak simetriyi kırmaktır. Bu ayar koşulu verilen teoriye göre açıkça biçimlendirilir ve uzun hesaplarla test edilerek sunulur. Ayar simetrisi kavramına dayanan çok sayıda teori ileri sürülmüştür. Bu teorilerin kuantumlanması çeşitli ayar koşullarını gerektirebilir. Bu ayarların bazıları lineer ve kovaryant, lineer olmayanlardan bazıları homojen fakat kovaryant olmayanlardır. Bu ayarlar genelde iki kategoriye (bkz. Tablo 2 ve 3) ayrılmakla birlikte ikisinin de dışında yorumlananlar bulunmaktadır. Örneğin çok ünlü olan Feynman ayarı ve Landau ayarı kovaryant ayarlara girerler; Coulomb ayarı, eksenel (axial) ayar, düzeysel (planar) ayar, ışık konisi (light-cone) ayarı, geçici (temporal) ayar kovaryant olmayan ayarlar kategorisine girerler. Örneğin Poincaré ayarı bu ikisinin de dışındadır.

Teorisyenler arasında hala en çok tercih edilen ayar, lineer kovaryant ayardır. Bunun nedenleri; kuantumlama işlemlerinin, hem kanonik hem de fonksiyonel integralleme yöntemlerinde iyi tanımlanması, tek ve çift ilmekli integrallerin etkili bir donanıma sahip olması ve boyutsal regülarizasyon çerçevesinde Feynman integrallerine ait teknik problemlerinin uygun çözümlerinin bulunmasıdır. Kovaryant ayarların pratik iki üstünlüğü rölativistik invaryanlığın sağlanması ve propagatörlerdeki tekilliği gideren ünlü ($i\epsilon$) reçetesinin varlığıdır. Zayıflıkları ise Gribov belirsizliğini kaldıramaması ve gost taneciklerini giderememesidir. Ayar koşulu genelleştirilmiş Lorentz ayarından elde edilen

$$\partial_\mu A_\mu^a(x) = B^a(x) \quad (3.1.1)$$

ifadesiyle verilir. Burada B^a keyfi bir fonksiyondur. Ayarı sağlayan lagranj yoğunluğu ise

$$L_{fix} = -\frac{1}{2\lambda} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \quad (3.1.2)$$

şeklinde olup $1 \rightarrow 1$ için Feynman, $1 \rightarrow 0$ için Landau ayarını verir (Ramond 1989).

Literatürde kovaryant olmayan en eski ayarlardan birisi bilhassa Kuantum Elektrodinamiğinde fizikçilerin uyguladığı Coulomb ayarı veya diğer adıyla radyasyon ayarıdır. Ayar koşulu

$$\frac{\partial}{\partial x_k} A^k(x) = 0, \quad k=1,2,3 \quad (3.1.3)$$

olarak verilir. Ayarı sağlayan lagranjiyen

$$L_{fix} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_k A_k^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (3.1.4)$$

şeklinde. Abel tipli olmayan modellerde en çok ağırlık taşıyan kovaryant olmayan ayar eksenel(axial) ayardır. Ayar koşulu

$$n_\mu A_\mu^a(x) = B(x), \quad n^2 < 0 \quad (3.1.5)$$

şeklinde ise homojen olmayan, $B(x)=0$ ve $n^2=n_0^2-n^2$ ise homojendir.

$$L_{fix} = -\frac{1}{2\alpha} (n_\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (3.1.6)$$

olarak tanımlanır (Frenkel and Taylor 1976). Burada $n_\mu = (n_0, \underline{n})$ ayarı sağlayan ve uzayda tercih edilen bir eksenini ifade eden sabit ve keyfi bir vektördür. Eksenel ayar

adı buradan gelmektedir (Şekil 3.1). Bazı önemli ayarlar için bu bilgiler Tablo 3.3’de verilmiştir. Kovaryant olmayan ayarların, kovaryant ayarlara göre en önde gelen üstünlüğü gost’ların fiziksel saçılma matrisi S ’nin elemanlarından giderilmesidir. Çünkü bunların etkime (tesir) kesiti üzerine katkısı yoktur. Olmayan bir şeyin varmış gibi hesaplanmasının da bir anlamı yoktur. Gostlar skaler taneciklerdir ve (2.3.17) eşitliği ile hesaplara katılmasının amacı fiziksel olmayan tekillikleri kapalı ilmeklerde elimine etmektir. Kısaca, onlar saçılma matrisinin üniterliğini ve saçılma genliğinin enine olmasını restore ederler. Bu nedenle Fadeev-Popov yönteminin üzerinde durma gerekir. Ayar koşulunu, $A = A_\mu^a(x)$ olmak üzere

$$F^a(A)=0 \quad , \quad a =1,\dots,N \quad (3.1.7)$$

Tablo 2 Başlıca kovaryant ayarlar

1. Genelleştirilmiş Lorentz ayarı

$$F^a \equiv \partial_\mu A_\mu^a(x) = B^a(x) \quad , \quad \mu =0,1,2,3$$

$$L_{fx} = -\frac{1}{2\lambda} (\partial_\mu A_\mu^a)^2$$

- a) $\lambda \rightarrow 0$ için Landau ayarı (veya enine Landau ayarı)
- b) $\lambda \rightarrow 1$ için Feynman ayarı
- c) $B^a=0$ için Laurentz ayarı (Fermi ayarı da denir)

2. ‘t Hooft ayarları

$$F^a \equiv \partial_\mu A_\mu^a - i\xi(v, L^a \phi) = B^a$$

ξ ayar parametresidir. $v/\sqrt{2}$, Higgs alanı jeneratörleri f ve L^a ’nın vakum beklenen değeri

- a) $\xi \rightarrow 0$ için renormalize edilebilir Landau ayarı
- b) $\xi \rightarrow 1$ için üniter ayar

şeklinde alıyoruz. (2.3.15) eşitliğini hatırlayarak, $M[A]$ jakobiyen olmak üzere

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{M}[A] \prod_a \delta[F^a(A)] = 1 \quad (3.1.8)$$

şeklinde yazıyoruz. Eğer (2.3.14) ayar dönüşümünü dikkate alırsak (3.1.7) için aynı zamanda

$$F^a(A') = 0 \quad (3.1.9)$$

yazabilmemiz gerekir. $u = e^{-i \omega^a(x)L^a} = e^{-i \omega L}$ olduğunu bilmekteyiz. $U(x)$ 'in ayar grubu içindeki yörüngelerden birini çizdiği ve bu yörüngenin hacminin de $1/\Delta_F[A]$ olduğu gösterilerek $\mathcal{D}\omega = \prod_x \prod_a d\omega^a(x)$ tanımıyla

$$\Delta_F[A] \int \mathcal{D}\omega \delta[F^a(A')] = 1 \quad (3.1.10)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\delta[F^a(A)] = \prod_a \delta[F^a(A)] \quad (3.1.11)$$

olduğundan

$$\Delta_F[A] = \Delta_F[A'] \quad (3.1.12)$$

invarianttır. (3.1.10) eşitliğinin her iki tarafı A üzerinden integre edilirse $\Delta_F[A], \mathcal{M}[A]$ jakobiyeni ile orantılı olduğundan

$$\frac{\int \mathcal{D}\omega}{\int \mathcal{D}A} \int \mathcal{D}A \Delta_F[A] \delta[F^a(A)] = 1 \quad (3.1.13)$$

Tablo 3. Kovaryant olmayan önemli ayarlar

1. Coulomb Ayarı

$$F^a \equiv \partial_k A_k^a(x) = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

$$L_{fx} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_k A_k^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$

2. a) Eksenel (axial) ayar

$$F^a \equiv n_\mu A_\mu^a(x) = 0, \quad n^2 < 0, \quad n^2 = n_0^2 - n^2,$$

$$L_{fx} = -\frac{1}{2\alpha} (n_\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$

b) Homojen olmayan eksenel ayar

$$F^a \equiv n_\mu A_\mu^a(x) = B^a(x), \quad n^2 < 0,$$

$$L_{fx} = -\frac{1}{2\alpha} (n_\mu A_\mu^a)^2,$$

3. Düzeysel (planar) ayar (Bassetto et al 1983)

$$F^a \equiv n_\mu A_\mu^a(x) = B^a(x), \quad n^2 < 0,$$

$$L_{fx} = -\frac{1}{2\alpha n^2} A^a \partial^2 n A^a, \quad \alpha \rightarrow +1$$

4. Işık konisi (light-cone) ayarı (Mandelstam 1983)

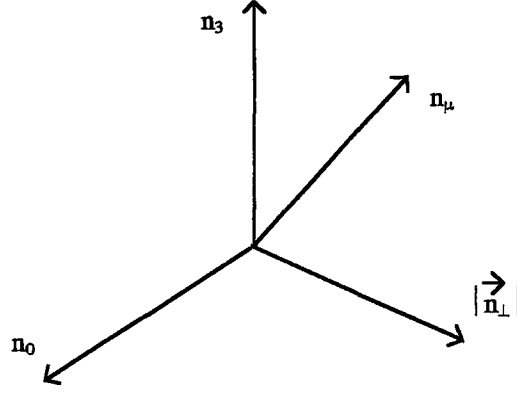
$$F^a \equiv n_\mu A_\mu^a(x) = 0, \quad n^2 = 0,$$

$$L_{fx} = -\frac{1}{2\alpha} (n_\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$

5. Geçici (temporal) ayar (Steiner 1986)

$$F^a \equiv n_\mu A_\mu^a = A_0^a, \quad n^2 < 0, \quad n_\mu = (1, 0, 0, 0)$$

$$L_{fx} = -\frac{1}{2\alpha} (n_\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$



Şekil 3.1. Eksenel vektör n_m , uzaydaki bir ekseni sembolik olarak tanımlar.

$\Delta_F[A]$ yı hesaplamak için, $f_a(x)$, x için $F^a[A]$ nın sayısal değerini göstermek üzere

$$f^a(x) = F^a[A(x)] \quad (3.1.14)$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \Delta_F^{-1}[A] &= \prod_x \prod_a \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega^a(x) \delta(f^a(x)) \\ &= \prod_x \prod_a \int_{-\infty}^{+\infty} df^a(x) \delta(f^a(x)) \frac{\partial(\omega_1(x) \dots \omega_N(x))}{\partial(f_1(x) \dots f^N(x))} \quad (3.1.15) \\ &= \prod_x \det \left\| \frac{\partial \omega^a(x)}{\partial f^b(x)} \right\|_{f=0} \equiv \det \left(\frac{\delta \omega}{\delta f} \right)_{f=0} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.15) eşitliği satırları (a,x) ve sütunları (b,y) ile gösterilen sürekli $d\omega^a(x)/df^b(y)$ matrisinin fonksiyonel determinantıdır ve ayara uyan bir A için $f=0$ yerine $w=0$ alınarak sonsuz hacim faktörü

$$\Delta_F[A] = \det \left| \frac{\delta f}{\delta \omega} \right|_{\omega=0} \quad (3.1.16)$$

elde edilir. (2.3.19) kovaryant türevi ve (3.1.16) jakobiyeni göz önüne alınarak

$$\frac{\delta f^a(x)}{\delta \omega^b(y)} = \frac{\partial f^a(x)}{\partial A_\mu^c(x)} \frac{\delta A_\mu^c(x)}{\delta \omega^b(y)} = \frac{\partial f^a(x)}{\partial A_\mu^c(x)} D_\mu^{cb} \delta(x-y)$$

ve

$$M_{ab}(x,y) = \left. \frac{\delta F^a[A(x)]}{\delta \omega^b(y)} \right|_{\omega=0} \approx \frac{\delta F^a}{\delta A_\mu^c} D_\mu^{cb} \delta^4(x-y) \quad (3.1.17)$$

olarak yazabiliriz. $M_{ab}(x,y)$ matrisinin determinantı

$$\det(M_F) = \det \left[\frac{\delta F^a[A]}{\delta A_\mu^c(x)} D_\mu^{cb} \delta^4(x-y) \right] \neq 0 \quad (3.1.18)$$

dir. Bu determinant literatürde gösrların yorumuyla ilgili önemli bir araçtır. Ayrıca istenmeyen serbestlik derecelerini gidermektedir.

Şimdi kovaryant olan Lorentz ayarını Abel ve Abel tipli olmayan teorilere uygulayalım. Ayar koşulu

$$F^a[A_\mu] \equiv \partial_\mu A_\mu^a(y) = 0 \quad (3.1.19)$$

şeklindedir. $w(x)$ yerel ayar parametresi olmak üzere QED için

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \omega(x) \quad (3.1.20)$$

ve $\delta F / \delta A_\mu(x) = \partial_{\mu,y} \delta(x-y)$ olduğunda gözönüne alarak (3.1.18) ve $D_\mu = \partial_\mu \delta$ için

$$\det(M_F) = \det \left[\frac{\delta F}{\delta A_\mu} D_\mu \right] = \det(\partial_\mu \partial_\mu) = \det(\partial^2) \quad (3.1.21)$$

elde edilir. Bir sabittir ve normalizasyon sabitine katılabilir. Bu nedenle gosterlerin ayar alanlarıyla etkileşmediklerini görürüz. Yani QED için gosterlar kovaryant ayarda gerekli değildir.

Ancak Abel tipli olmayan Yang-Mills alanı için (2.3.19) eşitliğini dikkate alırsak

$$\det(M_F) = \det[\partial^2 \delta^{ab} + g f^{abd} A_\mu^d(x) \partial_\mu] \quad (3.1.22)$$

ayar alanına bağımlı ve sabit değildir. Üstelik (3.1.18) eşitliği (2.3.18) de yerine konursa

$$L_{ghost} = \bar{C}^a \det(M_F) C^b \quad (3.1.23)$$

biçimiyle yazılabilir. (3.1.23) açılırsa

$$L_{ghost} = \bar{C}^a \delta^{ab} \partial_\mu \partial_\mu + g \bar{C}^a f^{abd} \partial_\mu (A_\mu^d C^b) \quad (3.1.24)$$

elde edilir. Burada parantez içindeki terim bu kuramsal taneciklerle ayar alanının açıkça etkileşim içinde olduğunu göstermektedir.

Kovaryant olmayan aksenal ayara bakalım. Burada ayar koşulu

$$F^a[A_\mu^b] \equiv n_\mu A_\mu^a = 0 \quad (3.1.25)$$

olarak verilsin. $F^a = n_\mu A_\mu^a = n_\nu A_\nu^a$ olduğundan

$$\frac{\delta F^a}{\delta A_\mu^c} = n_\nu \delta^{ac} \delta_{\mu\nu} \delta(x-y) = \delta^{ac} n_\mu \delta(x-y) \quad (3.1.26)$$

ve

$$\begin{aligned} \det(M_F) &= \det\left(\delta^{ac} n_\mu \left[\delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abd} A_\mu^d \right]\right) \\ \det(M_{axial}) &= \det\left(n \cdot \partial \delta^{ab} + g f^{abc} n \cdot A^c\right) \\ &= \det(n \partial \delta^{ab}) \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

yani (3.1.23) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} L_{ghost} &= \bar{C}^a \delta^{ac} n_\mu \left(\delta^{cb} \partial_\mu + g f^{abd} A_\mu^d \right) C^b \\ &= \bar{C}^a \delta^{ac} n_\mu \partial_\mu C^b + g \bar{C}^a f^{abd} (n_\mu A_\mu^d) C^b \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

elde edilir. Buradaki ilk terim gost alanının yayılmasını ifade eder. İkinci terim sifira eşit olur. Çünkü parantez içindeki terim sifira eşittir. O zaman

$$L_{ghost} = \bar{C}^a \delta^{ab} n_\mu \partial_\mu C^b$$

şeklinde elde edilir. Bu durum aksenel ayarın üstünlüğünü gösterir. Çünkü aksenel ayarda ayar alanının gostlarla etkileşim içinde olmadığını göstermektedir. Fakat gost alanları hala mevcuttur.

Şimdi ayar koşulu olarak daha genel bir yaklaşım olan

$$F^a \left[A_\mu^b(x); \varphi(x) \right] = 0, \quad a, b = 1, \dots, N \quad (3.1.29)$$

eşitliğini göz önüne alalım. N , grubun boyutudur, F^a, A_μ^b ve j nin yerel bir fonksiyonudur. j diğer alanları gösterir. (3.1.29) eşitliği; Feynman ayarı gibi kovaryant, düzeysel veya ışık konisi ayarları gibi bir olağan dışı yüzeyi ifade etmektedir. Coulomb ayarı gibi çoğunlukla lineerdir. Fakat lineer de olmayabilir. (3.1.29) koşulunu Green fonksiyonlarını üreten fonksiyonele katalım. $L(x)$ 'in basit

kompakt Lie grubu altında invaryant kalan Lagranjiyen ve $J_\mu^a(x)$ 'in A_μ^a alanı için dış kaynak fonksiyonu olduğunu varsayalım. O zaman oluşturucu fonksiyonel

$$z[J_\mu^a] \equiv e^{iw[J_\mu^a]} = N \int \mathcal{D}A \det(M_F) \prod_x \delta(F^a[A]) \exp\left[i \int d^4x [L(x) + J_\mu^b A_\mu^b(x)]\right] \quad (3.1.30)$$

olarak yazılabilir. Burada integrale ölçüsü

$$\mathcal{D}A = \prod_\mu \prod_x \prod_a dA_\mu^a(x), \quad a=1, \dots, N$$

şeklindedir. (3.1.30) eşitliğinin j 'ye bağımlılığı giderilmiştir. $\mathcal{W}[J_\mu^a]$, bağı Green fonksiyonlarını üretir. Normalizasyon faktörü N , $J_\mu^a = 0$ için $\mathcal{W}[J_\mu^a]$ 'nin sifıra eşit olmasına engel olmamalıdır. (3.1.30)'un integrasyonu 't Hooft tekniği yardımıyla kolaylaştırılmaktadır. Bu amaçla oluşturucu fonksiyonel z , Jakobiyen determinanti $\det(M_F)$ ile fonksiyonel $\delta[F^a[A]]$ 'nin her ikisi de "fonksiyonel etkime" nin üsteli olarak yeniden yazılmaya çalışılır. Bu pratikliği elde etmek için (3.1.29),

$$F^a[A_\mu^b(x)] = B^a(x) \quad (3.1.31)$$

biçimine getirilirse $\delta F^a, B^a(x)$ 'in Lie cebirindeki değerini kullanarak (3.1.30) eşitliğini

$$z[J_\mu^a] = N \int \mathcal{D}A \det(M_F) \prod_x \delta(F^b - B^b) \exp\left[i \int d^4x [L(x) + J_\mu^c A_\mu^c]\right] \quad (3.1.32)$$

durumuna getirir. (3.1.32), B^b 'den bağımsız olduğu için

$$\sigma[B^b] = \exp\left[-\frac{i}{2\lambda} \int d^4x [B^a(x)]\right] \quad (3.1.33)$$

şeklindeki bir ağırlık fonksiyonu yardımıyla integre edilebilir. α , reel bir parametre olmak üzere

$$z[J_\mu^a] = N \int \mathcal{D}A \det(M_F) \exp \left[i \int d^4x \left[\mathcal{L}(x) - \frac{1}{2\alpha} (F^b[A])^2 + J_\mu^b A_\mu^b \right] \right] \quad (3.1.34)$$

eşitliği ile yazılabilir. Buradaki yerel olmayan $\det(M_F)$ değişik yöntemlerle üstel yapılabilmektedir. Antikomitatif olan iki alan alınmaktadır. Bunlar $C^a(x)$ ve $\bar{C}^a(x)$ olmak üzere (3.1.17) ile

$$\det(M_F) = \int \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \exp \left[i \int d^4x C^a(x) M_{ab} C^b(x) \right], \quad (3.1.35)$$

üstel şekliyle elde edilmektedir. Eğer (3.1.35), (3.1.34)'e yerleştirilirse oluşturucu fonksiyoneli

$$z[J_\mu, \bar{\xi}, \xi] = N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}'(x) \right] \quad (3.1.36)$$

eşitliği ile verebiliriz. Bu ifadede bulunan $\mathcal{L}'(x)$, daha önce geçen (1.3.17)'deki klasik lagranjiyenden farklıdır. Açık şekliyle yazarsak;

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}_{inv} + \mathcal{L}_{fix} + \mathcal{L}_{ghost} + \mathcal{L}_{ext} \equiv \mathcal{L}'(A, \bar{C}, C; \alpha, g) \quad (3.1.37)$$

yapısındadır. Buradaki terimler

$$\mathcal{L}_{inv} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.1.38)$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha} (F^a[A_\mu^b])^2 \quad (3.1.39)$$

$$\mathcal{L}_{ghost} = \bar{C} M C \quad (3.1.40)$$

$$\mathcal{L}_{ext} = J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\xi} C^a + \bar{C} \xi^a \quad (3.1.41)$$

Burada M, (3.1.17) eşitliği ile verilmiştir. ξ^- ve ξ sırasıyla C ve \bar{C} alanları için antikomitatif kaynaklardır. Bu tanımlara göre Green fonksiyonlarını (3.1.36)'dan elde edebiliriz. Burada ortaya çıkan L_{fix} simetriyi kırar. Unutulmamalıdır ki bu terimi daha önce (2.3.12) ile simetriyi kırmak için kullanmıştık. L_{gost} ise istenmeyen serbestlik derecelerini ortadan kaldırır.

3.2. Ayar Teorilerinde Hesaplama Teknikleri

Oluşturucu fonksiyoneli elde etmek için önce dış kaynaklara (J_μ^a) göre varyasyon alınarak Green fonksiyonları bulunur. Sonra Fourier dönüşümü yapılarak momentum uzayına geçilir. Burada karşımıza çıkan integralleri çözmek için tensör yöntemi kullanılmaktadır. Bir kaç integrali çözmek yeterlidir. Diğerleri ondan yararlanılarak bulunur. Tensör yöntemi, tartışmalı integralin simetrisini ve rölativistik invaryantlığını kullanır. Teknik, biraz temel integral alt bilgisini varsayar. Bir tensör olan integrand, değiştirildikten sonraki yapısıyla uyuşum içinde olduğundan ve kutup sorununu kaldıran (ie) reçetesi integralde oluşan parametre sayısını değiştirmedikten kovaryant ayarda beğeniyle kullanılır. Şimdi bu yöntemi iki ranklı bir integral için Euclid uzayında örnekleyelim:

$$I_{\mu\nu}(p) = \int \frac{dq}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 (q-p)^2}, \quad dq \equiv d^{2\omega} q. \quad (3.2.1)$$

şeklinde bir integral alıyoruz. İntegral, sadece bir p_m parametresi içerdiğinden değeri

$$\int \frac{dq}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 (q-p)^2} = A(p^2, \omega) \delta_{\mu\nu} + B(p^2, \omega) p_\mu p_\nu \quad (3.2.2)$$

şeklinde düşünülebilir. Buradaki A,B katsayılarını bulmak için önce bu katsayılar $p_\mu p_\nu$ ile çarpılır. Sonra $\mu = \nu$ kabul edilerek toplam yapılırsa

$$\int \frac{dq}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(q \cdot p)^2}{q^2 (q-p)^2} = p^2 A + p^4 B, \quad (3.2.3a)$$

$$\int \frac{dq}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{q^2}{q^2 (q-p)^2} = 2\omega A + p^2 B, \quad \delta_{\mu\mu} = 2\omega \quad (3.2.3b)$$

iki denklem elde edilir. Buradaki (3.2.3b) integrali “tadpole” diyagramlarını temsil ettiğinden sifıra eşittir. (3.2.3a) integralini hesaplamak için

$$2p \cdot q = p^2 + q^2 - (q-p)^2$$

eşitliğini kullanırız. O zaman bu denklemler

$$p^2 A + p^4 B = \frac{1}{4} p^4 \int \frac{dq}{(2\pi)^{2\omega} q^2 (q-p)^2}, \quad (3.2.4a)$$

$$2\omega A + p^2 B = 0 \quad (3.2.4b)$$

şeklinde iki denkleme indirgenmiş olurlar. Bu sistemin çözümü ise

$$A = \frac{-p^2}{4(2\pi)^{2\omega} (2\omega - 1)} I, \quad (3.2.5a)$$

$$B = \frac{\omega}{2(2\pi)^{2\omega} (2\omega - 1)} I, \quad (3.2.5b)$$

$$I_{\mu\nu} = \frac{I}{4(2\pi)^{2\omega} (2\omega - 1)} (2\omega p_\mu p_\nu - p^2 \delta_{\mu\nu}), \quad (3.2.5c)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki I integralinin değeri Feynman’ın (ie) reçetesinde verilmiştir (bkz. 3.2.21).

Basit kutuplu integrallerle karşılaşılır. Kutuplu kısımlar daima p_m dış momentumun yerel fonksiyonlarıdır.

Tensör yöntemi kovaryant olmayan aksenel-ayarda ve Euclid uzayında ($n^2 \neq 0$)

$$I_\mu = \int d^{2\omega} q q_\mu \left[q^2 (q-p)^2 q n \right]^{-1} \quad (3.2.6)$$

tipindeki bir integrale uygulanırsa, p_m ve n_m serbest parametreler olmak üzere integral

$$I_\mu^{axial} = a p_\mu + b n_\mu \quad (3.2.7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemin her iki tarafı p_m ve n_m ile çarpılarak ve sonra “a”nın ve “b”nin iraksak kısımlarının çözümleri

$$a|_{div} = 0$$

$$b|_{div} = \frac{\bar{I}}{n^2}$$

elde edilirler. Böylece integralin çözümü

$$\begin{aligned} I_\mu^{axial}|_{div} &= \int d^{2\omega} q q_\mu \left[q^2 (q-p)^2 q n \right]^{-1} \\ &= n_\mu \bar{I} / n^2 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\bar{I} = \pi^2 / (2-\omega)$ dır.

Kapalı ilmeklerin hesaplanması sırasında ortaya çıkan sorunları aşmak için kabul gören ve yarar sağlayan bir takım reçeteler ileri sürülmüştür.

Bu reçetelerin ilki Feynman tarafından verilen ünlü (ie) reçetesidir. Bu reçete kovaryant ayardaki Feynman integraline uygulanır. Feynman integrali genel haliyle p_m , dış momentum; m , kütle ve Minkowski uzayındaki integral ölçüsü, $d^4 q \equiv dq_0 dq_1 dq_2 dq_3$ ($q^2 = q_0^2 - q^2$) olmak üzere

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{((q-p)^2 - m^2)(q^2 - m^2)} \quad (3.2.8)$$

şeklindedir. Bu integralin kutupları reel q_0 düzleminindedir. Reçete, paydadaki terimlere (her faktöre) $i\epsilon$ gibi küçük bir sanal sayı ekler ($\epsilon > 0$ dır). Böylelikle kutupları q_0 ekseninden uzaklaştırır. O zaman integral,

$$I_\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq dq_0}{((q-p)^2 - m^2 + i\epsilon)(q^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad \epsilon > 0 \quad (3.2.29)$$

haline dönüşür. Bu integral, dış momentumun fiziksel bir bölgesi üzerinden alınmadığı için fiziksel değildir. (3.2.8) integrali ise

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon$$

şeklindedir. (3.2.9) Cauchy rezidü teoremiyle integre edilirse C hattının Şekil 2.2 deki gibi $C = C_0 + C_R$ olarak seçilmesi gerekir. C_R , q_0 ekseninin altında veya üstünde olabilir. Yarı dairenin çapını gösteren R , $R^2 \equiv (\text{Im}q_0)^2 + (\text{Re}q_0)^2$ eşitliği ile belirlenmiştir. Genel olarak sınır koşulu

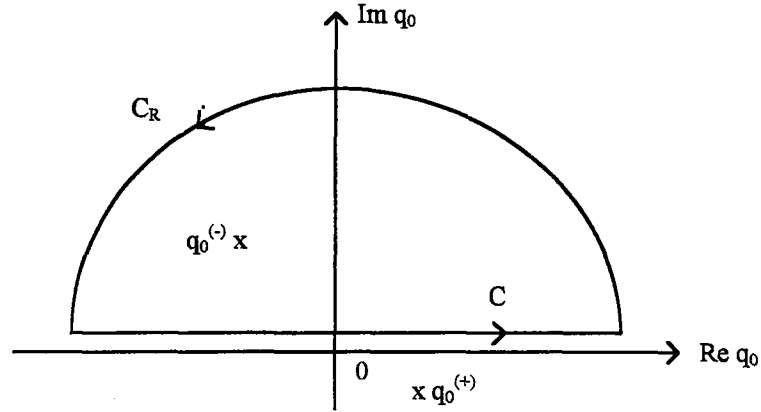
$$\int_{C_R} dRf(R, m) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \quad (3.2.10)$$

olarak kabul edilir. $(q^2 + m^2 + i\epsilon)^{-1}$ kutupları, $q_0^2 = m^2 + q^2 - i\epsilon$ veya

$$q_0^{(\pm)} \equiv \pm \sqrt{m^2 + q^2} \pm i\epsilon, \quad \epsilon' \equiv \epsilon / \left(2\sqrt{m^2 + q^2}\right) \quad (3.2.11)$$

civarında yer alır. (3.2.8)'in paydasındaki faktörler çok önemli iki özelliğe sahiptir. Dış momentum p , sıfır olursa q_m 'ye göre kuadratik olurlar. Ayrıca kutuplar özel olarak q_0 düzleminin 2. ve 4. çeyreklerinde yer alırlar. $(-, +, +, +)$ ile ölçülü olarak kutupların q_0 düzleminin 1. ve 3. çeyreklerine düşmesi istenir.

I_ϵ integrali Euclid uzayında da hesaplanabilir. Minkowski uzayından Euclid uzayına geçiş, $C=C_0+C_R$ (Şekil 3.2) hattında saat yönü tersine 90° dönerek yapılır ($q_0=iq_4$, $q=q$). Bu dönüşte çaprazlık yoksa, yani reçete kutupları 2. ve 4. çeyreklere yerleştiriyorsa buna Wick dönmesi denir.



Şekil 3.2 q_0 kompleks düzleminde kutupların yerleşme durumu

Örnek olarak Minkowski uzayında, $m,n=0,1,2,3$ ve p_m dış momentum olmak üzere kütleli alanları ifade eden Feynman diyagramlarının hesaplanması sırasında ortaya çıkan mor ötesi ıraksak

$$I_{\mu\nu}(p) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 (p-q)^2} \quad (3.2.12)$$

integralini ele alalım. $i\epsilon$ reçetesini uygularsak, $\epsilon > 0$ olmak üzere

$$I_{\mu\nu}(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 + i\epsilon)((p-q)^2 + i\epsilon)} \quad (3.2.13)$$

şekliyle yazılabilir. $2w$ kompleks uzay-zaman boyutunda, bu integral,

$$I_{\mu\nu}(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^{2w} q}{(2\pi)^{2w}} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 + i\epsilon)((p-q)^2 + i\epsilon)} \quad (3.2.14)$$

eşitliği ile verilir. Burada Schwinger gösterimiyle (veya a gösterimi)

$$\frac{1}{(q^2 \pm i\varepsilon)^N} \Big|_{Mink} = \frac{(\pm i)^N}{\Gamma(N)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{N-1} e^{\pm i\alpha(q^2 \pm i\varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0 \quad (3.2.15)$$

$$\frac{1}{(q^2)^N} \Big|_{Eucl} = \frac{1}{\Gamma(N)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{N-1} e^{-\alpha q^2}, \quad q^2 > 0 \quad (3.2.16)$$

eşitliklerine dayanarak üstelleştirme yapabiliriz (N:kompleks). İntegrali Euclid uzayında ($q_0=iq_4$, $q=q; m, n=1, 2, 3, 4$) ele alalım. Wick dönmesi yaparsak

$$I_{\mu\nu}(p) = i \int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 (p-q)^2} \quad (3.2.17)$$

olur. Bu momentum integrali genelleştirilmiş Gauss integraliyle hesaplanır.

$$\int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \exp[-\alpha q^2 + 2qp] = \frac{(\pi/\alpha)^\omega}{(2\pi)^\omega} \exp(p^2/\alpha), \quad \alpha > 0 \quad (3.2.18)$$

a ve b integrasyon değişkenlerini avantaj sağlamak için l ve x ile değiştirelim. O zaman

$$\alpha = \lambda(1-\xi), \quad \beta = \lambda\xi, \quad \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta = \int_0^1 d\xi \int_0^\infty d\lambda \lambda, \quad (3.2.19)$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$I_{\mu\nu}(p) = \frac{i}{2(2\omega-1)(2\pi)^{2\omega}} \left(\omega p_\mu p_\nu - \frac{1}{2} p^2 \delta_{\mu\nu} \right) I(p), \quad (3.2.20)$$

elde edilebilir. $I(p)$ integrali

$$I(p) = \int \frac{d^{2\omega} q}{q^2 (q-p)^2} = \frac{\pi^\omega \Gamma(2-\omega) [\Gamma(\omega-1)]^2 (p^2)^{\omega-2}}{\Gamma(2\omega-2)} \quad (3.2.21)$$

olarak verilir. Sonuçta $w=2$ civarında Laurent serisine açılırsa

$$I_{\mu\nu} = \frac{G_{\mu\nu}(p^2)}{\omega-2} + F_{\mu\nu}(p^2) + O(\omega-2) \quad (3.2.22)$$

eşitliğini elde ederiz. O zaman I_{mm} 'nin yakınsak kısmı,

$$I_{\mu\nu}^{\text{reg}}(p) = F_{\mu\nu}(p^2) + O(\omega-2) \quad (3.2.23)$$

ile verilir. Bu integral işlemleri sırasında, Laurent serisine açma işlemi, momentum integrali alındıktan sonra yapılmalıdır. Ayrıca, $d^4(0)$ ile orantılı ifadeler ve $\int d^{2\omega} q (q^2)^{-\beta}$, $\beta=1,2,3,\dots$ tipindeki integraller, boyutsal regülarizasyonda sifıra eşit olur. Yani

$$\int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{q^2} \equiv 0 \quad (3.2.24)$$

dır. Bu integralin momentum birimine sahip olması, ancak integralin içinde q 'dan başka momentum birimine sahip parametre bulunmaması nedeniyle sifıra eşitliği doğaldır.

Kovaryant olmayan ayarlar için verilen bir başka reçete Baş-değer Reçetesi'dir (The principal-value prescription). Bu kısaca PV büyük harfleriyle ifade edilir. Baş-değer Reçetesi

$$\frac{1}{x \pm i\mu} = PV \frac{1}{x} \pm i\pi\delta(x), \quad \mu > 0 \quad (3.2.25)$$

şeklindeki operatör bağıntısından kaynaklanır. Bunun anlamı, eğer bu operatör $1/x$ 'e uygulanırsa

$$PV \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x+i\mu} + \frac{1}{x-i\mu} \right) \quad (3.2.26)$$

biçimine dönüştüreceği yönündedir. O zaman bizim hiç kaçınmadığımız $(q.n)^{-b}$, $b=1,2,\dots,N$ tarzındaki kovaryant olmayan faktörler için bu reçete, $m>0$ ve $b=1,2,\dots,N$ olmak üzere

$$PV \frac{1}{(q.n)^\beta} = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(q.n+i\mu)^\beta} + \frac{1}{(q.n-i\mu)^\beta} \right) \quad (3.2.27)$$

şeklinde uygulanabilir. Reçete, kutupları kompleks q_0 düzleminin $(q.n>0)$ birinci ve dördüncü çeyreklerine yerleştirebilir (Şekil 3.3). $b=1,2$ ise (3.2.27) formülü sırasıyla

$$PV \frac{1}{q.n} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{q.n}{(q.n)^2 + \mu^2}, \quad \mu > 0 \quad (3.2.28)$$

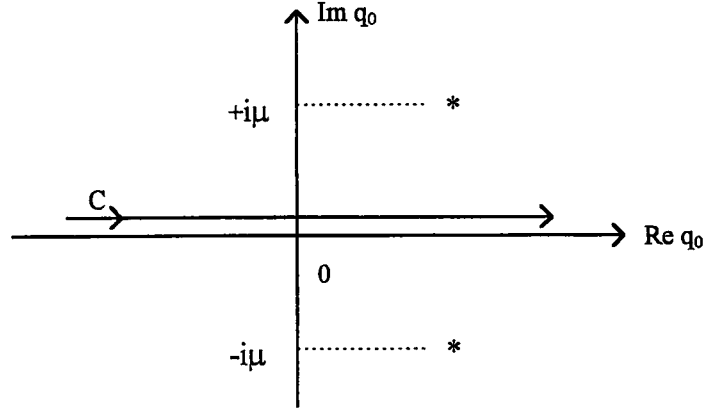
ve diğeri

$$PV \frac{1}{(q.n)^2} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{(q.n^2) - \mu^2}{((q.n)^2 + \mu^2)^2} \quad (3.2.29)$$

kısaltılarak

$$PV \frac{1}{(q.n)^2} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(1 + 2\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \right) \frac{1}{(q.n)^2 + \mu^2} \quad (3.2.30)$$

ifadelerini verir. PV reçetesi, kutuplar çevrelenmeden onları 1. ve 4. çeyreklerle yerleştirir. Bu durum C hattının 90° 'lik integrasyon dönmesini engeller. Yani Baş-değer reçetesi Minkowski uzayından Euclid uzayına Wick dönmesini yasaklar. Bu sonuç ışık-konisi ayarı gibi eksenel ayar için de zaten bilinir (Leibbrandt 1994).



Şekil 3.3. Baş-değer reçetesi (3.2.27) eşitliğindeki kutupları kompleks q_0 düzleminin birinci ve dördüncü çeyreklerine yerleştirir.

Eğer $n^2 \neq 0$ ise PV reçetesi tek ilmek seviyesinde uygun sonuçlar verir. Ama kutupların katkısı hesaplanmalıdır. PV reçetesi tek ilmek seviyesinde ışık-konisi ($n^2=0$) ayarında kesinlikle başarısızdır. Wilson ilmeği için yanlış sonuçlar verir. Sonraki bölümde PV reçetesinin üstünde geniş olarak duracağız.

Kovaryant olmayan ayarlar için verilen bir başka reçete de n_m^* reçetesidir. Burada n_m^* bir çift (dual) vektördür. $n_m = (n_0, n)$ ve $n_m^* = (n_0, -n)$ şeklindedir ve ışık-konisi ayarı için verilmiştir. Örneğin Leibbrandt tarafından verileni (diğeri Mandelstam tarafından)

$$\frac{1}{(qn)} \Big|^{ic} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{qn^*}{pnqn^* + i\varepsilon} \quad (3.2.31)$$

şeklindedir. Bu reçete daha sonra aksenal ve düzeysel ayarlar için de geliştirilmiştir. Fakat iki ve üç ilmekli hesaplar için test aşamasındadır.

4. EKSENEL AYARDA KUANTUMLAMANIN KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

4.1 Kovaryant Olmayan Ayarların Özellikleri

Bu bölümün amacı eksenel ayarda kuantumlanmanın özelliklerini incelemektir. Eksenel ayar kovaryant olmayan bir ayardır. Kovaryant olmayan bu ayarı analiz ederken diğer kovaryant olmayan ayarların sonuçlarına da zaman zaman değinmek gerekir. Tam (veya homojen) eksenel ayar Minkowski uzayında

$$n_{\mu} A_{\mu}^a = 0 \quad , \quad n^2 < 0 \quad (4.1.1)$$

şeklinde verilir. Burada $n^2 = n_{\mu}^2 = n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2$ ve $n_{\mu} = (n_0, n)$ 4 boyutlu keyfi bir vektördür. n_{μ} , 4 boyutlu uzayda seçilen bir eksenin (Şekil 3.1) üzerinde olduğundan (4.1.1) koşuluna eksenel ayar koşulu denir. Eğer Euclid uzayında çalışıyorsak $n_{\mu}^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2$ almamız gerekir.

Düzeysel ve ışık konisi ayarları da eksenel tipdeki ayarlardır. En basiti ışık konisi ayarıdır. Düzeysel ayar ise tam aksiyal ayarın bir değişimidir. Bu “eksenel ayar” şeklindeki ifademizden tam veya homojen eksenel ayar anlaşılmalıdır.

Kovaryant olmayan ayarlar, ayar teorilerinde gost alanlarını ortadan kaldırdığından böylece gostsuz, yani sadece fiziksel alanları seçtiği için son yıllarda asıl fiziksel ayarlar olarak nitelendirilmeye başlanmıştır. Fakat bu ayarların başarısına $(q,n)^b$, $b=1,2,3,\dots$ ile ilgili sorunlarla, özellikle yerel olmayan terimlerin ortaya çıkması gölge düşürmektedir.

Bu ayarda kullanılan Feynman integralleri kovaryant ayardakilerden çok farklı değildir. Temel tek ilmekli integrallerin ıraksak kısımları dış momentumun yerel fonksiyonlarıdır. Tekilmek integrallerinin ıraksak kısımları sadece basit kutupları

içerirler. İntegrasyon eğrisi herhangi bir kutbu çevrelemeksizin Wick dönmesi (Minkowski uzayından Euclid uzayına geçiş tekniği) yapılabilir. Bu integraller kovaryant ayarlarda olduğu gibi geleneksel tensör yöntemiyle hesaplanabilir. Bu özellikler aksenal ayarda uygun bir reçeteyeleştirilerek kullanılır. Doğal olarak uygun bir kutuplama da bu reçetede bulunmalıdır. Yani (ie) reçetesinde olduğu gibi q_0 düzleminin 2. ve 4. çeyreklerine yerleşmemelidir.

Kovaryant olmayan ayarlar Lorentz kovaryanslığını açıkca bozarlar. $(q.n)^{-1}$ için verilen reçetedeki sabit ikinci bir n_m^* vektörünün oluşumu kovaryant ayarlarda bulunanlardan daha karmaşık değerleri hesaplayan yeni integraller üretir. Bu ayarda, iki veya daha fazla kovaryant olmayan terimle orantılı olan Feynman integrandları, sürekli olarak $(p.n)^{-1}$ biçimindeki yerel olmayan terimler oluşturur. Bu terimler formüllerin

$$\frac{1}{q.n(p-q).n} = \frac{1}{p.n} \left(\frac{1}{q.n} + \frac{1}{(p-q).n} \right), \quad p_\mu \neq 0$$

şeklinde ayrışmasından ortaya çıkar. Bu teknik tuhaflıklar, renormalizasyonun amacını karmaşılaştırır ve kovaryant olmayan ayarlarda potansiyel zorluklarla karşılaşacağımızı hatırlatır (Soloyev 1993).

4.2. Kuramsal Taneciklerin Giderilmesi

Kütlesiz bir A_μ^a vektör alanının Yang-Mills Lagranj yoğunluğu, uzay-zaman değişkenlerine bağlı olan ve $J_\mu^a(x)$ ile tanımlanan dış kaynakların eklenmesiyle

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_{inv} + \mathcal{L}_{fix} + \mathcal{L}_{ghost} + \mathcal{L}_{ext}, \quad (4.2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki terimler

$$\begin{aligned}
L_{inv} &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2, \\
L_{fix} &= -\frac{1}{2\alpha}(n_\mu A_\mu^a)^2, \\
L_{ghost} &= \bar{C}^a n_\mu D_\mu^{ab} C^b, \\
L_{ext} &= J_\mu^a A_\mu^a
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

eşitlikleriyle verilmiştir. \bar{C}^a ve C^a daha önce belirttiğimiz gibi gost taneciklerini simgelemektedirler. Kovaryant türev,

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu + gf^{abc} A_\mu^c \tag{4.2.3}$$

yapısında, ayar koşulu ise (4.1.1) de verilmiştir. α , keyfi bir parametredir. limit $\alpha \rightarrow 0$ için aksenal ayar elde edilir. Aksenal ayarın en önemli üstünlüğü, hesaplara sokmak zorunda kaldığımız kuramsal taneciklerin etkin olarak giderilmesini mümkün kılmasıdır. Taylor'a (1986) göre bu durum kapalı gost çizgilerinin (Feynman diyagramlarındaki) giderilmesi ile açık gost çizgilerinin giderilmesi arasındaki farka da uygun düşer. Herhangi bir Feynman diyagramında kapalı gost çizgileri oluştuğu zaman BRS özdeşliklerine giren terimlerin sadece bazılarında açık gost çizgileri oluşur. Oysa kapalı gost çizgileri herhangi bir Feynman diyagramında oluşabilir. Gostların giderilmesini iki farklı yoldan göstereceğiz. Gost Lagranjyenini ele alalım.

$$L_{ghost} = \bar{C}^a n_\mu D_\mu^{ab} C^b \tag{4.2.4}$$

(4.2.3) kovaryant türevini dikkate alırsak

$$n_\mu D_\mu^{ab} = \delta^{ab} n_\mu \partial + gf^{abc} n_\mu A_\mu^c \tag{4.2.5}$$

elde edilir. (4.2.5) eşitliği ile verdiğimiz gost **tepe fonksiyonu (vertex)**, n_μ ile orantılı olduğundan gulyon propagatörü $G_{\mu\nu}$, $\alpha=0$ için

$$n_\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (4.2.6)$$

eşitliğini sağladığından gost tanecikleri, (gost çizgileri açık veya kapalı olan herhangi bir Feynman diyagramından) giderilmiş olur (Konetschny and Kummer 1975). Bu basit yol, hem aksenal hem de ışık konisi ayarlarının ($n^2=0$) her ikisine de uygulanır. Gostların giderilmesinde ikinci yol giderilme işlemi aşamasında karşılaştığımız Fadeev-Popov determinantından yararlanmaktadır. Bu determinant,

$$\det(M_F) = \det(n.\partial\delta^{ab} + gf^{abc}n.A^c) \quad (4.2.7)$$

şeklindedir. Determinantı daha açık olarak

$$\begin{aligned} \det(M_F) &= \exp(\text{Tr} \ln M_F) \\ &= \exp\left[\text{Tr} \ln n.\partial + \text{Tr} \ln\left[1+g(n.\partial)^{-1} f^c n.A^c\right]\right] \\ &= \det(n.\partial) \exp\left[\text{Tr} \ln\left[1+g(n.\partial)^{-1} f^c n.A^c\right]\right] \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\text{Tr} \ln(1+L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr}(L^n) \quad (4.2.9)$$

alınırsa $\det(M_F)$ şöyle elde edilir:

$$\det(M_F) = \det(n.\partial) \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-g)^{n+1}}{n} \text{Tr}\left[(n.\partial)^{-1} f^c n.A^c\right]^n \quad (4.2.10)$$

İz (trace) koordinatlar üzerinden integrasyon içerdiğinden daha açık olarak şunu elde ederiz (Kummer 1975):

$$\begin{aligned}
\det(M_F) &= \det(n.\partial) \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-g)^{n+1}}{n} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \right. \\
&\quad \left. *Tr \left[n_\mu G(x_1 - x_2) f^a A_\sigma^a(x_2) n_\sigma G(x_2 - x_1) \dots G(x_n - x_1) f^b A_\mu^b(x_1) \right] \right] \\
\det(M_F) &= \det(n.\partial) \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-g)^{n+1}}{n} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \right. \\
&\quad \left. *Tr \left[n_\mu G(x_1 - x_2) f^a A_\sigma^a(x_2) n_\sigma G(x_2 - x_1) \dots G(x_n - x_1) f^b A_\mu^b(x_1) \right] \right]
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

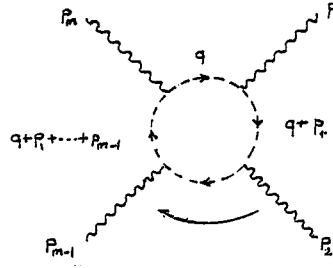
Burada x_i , $i=1, \dots, n$ olmak üzere Euclid koordinatlarıdır. $G(x_i - x_j)$, bildiğimiz gibi

$$n.\partial G(x_i - x_j) = \delta^4(x_i - x_j) \quad , i, j = 1, 2, \dots, n \tag{4.2.12}$$

eşitliği ile tanımlanır (Fradkin and Kalashnikov 1976). $2w$ boyutlu momentum uzayında

$$G^{ab}(q) = \frac{-i\delta^{ab}}{(2\pi)^{2w} qn} \tag{4.2.13}$$

ifadesi verilir (Landshoff 1986). (4.2.11) eşitliğindeki $\det(n.\partial)$ sabit olduğu için (3.1.30) eşitliğinde bulunan normalizasyon sabitine katılabilir. Bu nedenle önemsizdir. Fakat aynı yerdeki toplama sembolü içinde bulunan her terim n . dereceden tek bağlantılı göst ilmeklerini sergilemektedir. Bu durum göst ilmeğinin n tane ayar alanı ile etkileşmede bulunduğu anlamına gelir (Şekil 4.1). Bu diyagram $2w$ -boyutlu momentum uzayında



Şekil 4.1 m' tane yar alanı ile etkileşen gost ilmeği. Kesik çizgiler, gost taneciklerini, dalgalı çizgiler ayar alanlarını gösteriyor.

$$I = \int \frac{d^{2\omega} q}{(q.n)^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (4.2.14)$$

ile orantılı integraller üretir. O nedenle de boyutsal regülarizasyonda sıfıra eşit olur. (4.2.14) integralindeki q ile Şekil 4.1'deki q 'nun farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Elde edilen kesin sonuç gost taneciklerinin etkin olarak $z[J_\mu^a]$ 'dan giderilmesidir. Fadeev-Popov determinantı ve (4.2.14) integrali sadece kapalı gost ilmeklerine uygulanır. Hem aksenel (axial) hem de düzeysel (planar) ayar için geçerlidir. Aksenel ayar için söylediklerimiz, her ne kadar $F^a[A] \equiv n.A = 0$ tarzındaki özel bir ayar koşulunun hedef almış olsa da daha genel olan

$$F^a \equiv n.A^a = B^a(x) \quad (4.2.15)$$

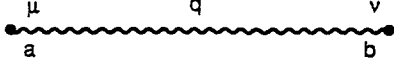
homojen olmayan ayar koşulu için de geçerlidir. Buradaki B^a , ayar alanından bağımsız keyfi bir uzay-zaman fonksiyonudur.

4.3. Aksenel Ayar Tekniği

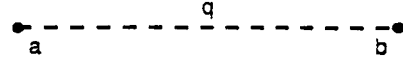
Çıplak ayar alanını Bölüm 3.1'de tanımlamıştık. Fiziksel bir niceliğe karşılık gelen bir kavram olmayan Green fonksiyonunun aşağıdaki şekilde seriye açılımının 1. terimiyle ifade edilmektedir (Cheng and Tsai 1986).

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = \frac{\delta^2 \ln z}{\delta J_\mu^a(x) \delta J_\nu^b(x)} \equiv \text{1.terim} + \text{2.terim} + \text{3.terim} + \dots \quad (4.3.1)$$

Eksenel ayardaki Feynman kuralları (4.2.1) Lagranj yoğunluğuna dayanılarak aşağıda gösterilmiştir. Eksenel ayarda $\alpha \neq 0$ durumu için çıplak ayar alanı propagatörü Şekil 4.2’de verilmiştir. Bu propagatör



Şekil 4.2. Ayar alanı propagatörü



Şekil 4.3 Gost propagatörü

$$G_{\mu\nu}^{ab}(q, \alpha) = \frac{-i\delta^{ab}}{(2\pi)^{2\omega}(q^2 + i\varepsilon)} \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu n_\nu + q_\nu n_\mu}{qn} + q_\mu q_\nu \frac{n^2 + \alpha q^2}{(qn)^2} \right], \quad \varepsilon > 0 \quad (4.3.2)$$

eşitliği ile belirlenir. Buradan $\alpha \rightarrow 0$ için çıplak ayar alan propagatörünü

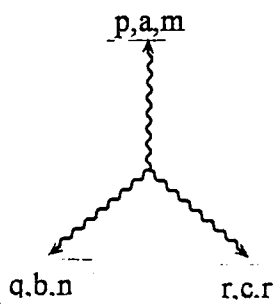
$$G_{\mu\nu}^{ab}(q, \alpha = 0) = \frac{-i\delta^{ab}}{(2\pi)^{2\omega}(q^2 + i\varepsilon)} \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu n_\nu + q_\nu n_\mu}{qn} + q_\mu q_\nu \frac{n^2}{(qn)^2} \right], \quad \varepsilon > 0 \quad (4.3.3)$$

olarak yazabiliriz. Gost propagatörünü (Şekil 4.3) ise

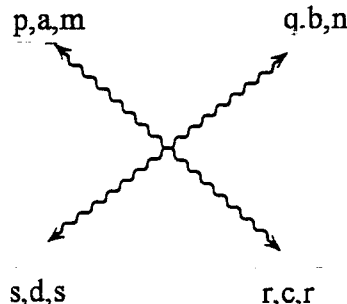
$$G^{ab}(q) = \frac{-i\delta^{ab}}{(2\pi)^{2\omega} qn} \quad (4.3.4)$$

şeklinde elde ederiz (Chan and Halpern 1985). Buradaki fiziksel olmayan kutbu daha sonra tartışacağız.

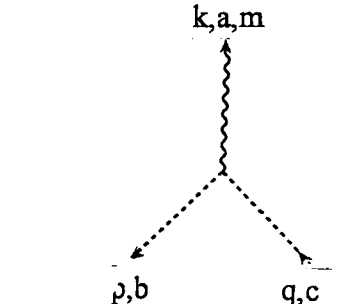
Şimdi (4.2.1) Lagranjiyeni için eksenel ayarda tepe fonksiyonlarını gösterelim.



Şekil 4.4 Üç-gulyonlu tepe fonksiyonu



Şekil 4.5 Dört-gulyonlu tepe fonksiyonu



Şekil 4.6 Gost-gost-gulyon fonksiyonu

Üç gulyonlu tepe fonksiyonu (Şekil 4.4)

$$V_{\mu\nu\rho}^{abcd}(p,q,s,r) = -ig^2(2\pi)^{2\omega} \delta^{2\omega}(p+q+r+s) [g_{\mu\nu}(p-q)_\rho + g_{\nu\rho}(q-r)_\mu + g_{\rho\mu}(r-p)_\nu] \quad (4.3.5)$$

Dört gulyonlu tepe fonksiyonu (Şekil 4.5)(Papavassiliou 1993)

$$W_{\mu\nu\sigma\rho}^{abcd}(p,q,s,r) = -ig^2(2\pi)^{2\omega} \delta^{2\omega}(p+q+r+s) [f^{ecb} f^{ecd} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) + f^{eac} f^{ead} (g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}) + f^{ead} f^{ebc} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu})] \quad (4.3.6)$$

ve son olarak Şekil 4.6'da verilen gost-gost-gulyon tepe fonksiyonunu

$$U_\mu^{abc}(p,k,q) = -igf^{abc} n_\mu (2\pi)^{2\omega} \delta^{2\omega}(k+p-q) \quad (4.3.7)$$

eşitlikleriyle ifade edebiliriz (Leibbrandt 1987).

(4.3.2)-(4.3.4) propagatörlerini kullanarak ilmekli Feynman diyagramlarını hesapladığımızda

$$\int \frac{dq}{(qn)(q-p)^2}, \int \frac{dq \cdot q_\mu}{q^2 (qn)^2 (q-p)^2}, \dots, d^{2\omega} q \equiv dq \quad (4.3.8)$$

yapısındaki integrallerle karşılaşyoruz. Görüldüğü gibi bu integraller $(q.n)^{-1}$ faktörünü içermektedir. Buradaki $2w$ kompleks uzay-zaman boyutudur. $w=2$, 4-boyutlu Minkowski uzayına tekabül eder (Frolov and Slavnov 1993). Karşılaştığımız sorun $(q.n)=0$ olduğu zaman $(q.n)^{-1}$ veya $(q.n)^{-2}$ den kaynaklanan fiziksel olmayan kutupların nasıl yönlendirileceğidir. Eksenel ayarda karşılaştığımız bu integralleri çözmek için

sırasıyla yapacağımız işlemleri verelim. Sonra çift kutuplu bir örnek sunalım. Daha basit ve daha kabul edilebilir olması nedeniyle Euclid uzayında çalışalım. Euclid uzayında tanımlanmış 4-boyutlu ıraksak bir integral, genel olarak $m=1,2,3,4$, $n_m=(n_4, \underline{n})$ ve $q.n=q_4 n_4 + q.\underline{n}$, ayrıca $n^2=n_4^2 + \underline{n}^2$ olmak üzere $M(q,p,n)$ tipik bir $(q-p)^2$, $(q.n)$, q_m , ... v.s. fonksiyonu ise

$$I(p,n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} M(p,q,n) \quad (4.3.9)$$

şeklinindedir. Bu integrali çözmek için boyutsal regülarizasyon kullanacağız (Bern et al 1993). Yani momentum uzayının boyutunu $2w$ kabul edeceğiz. $dq \equiv d^{2w} q$ olmak üzere integral

$$I(p,n) = \int \frac{dq}{(2\pi)^{2w}} M(p,q,n) \quad (4.3.10)$$

durumuna gelir. Sonra integralde karşımıza çıkan

$$\frac{1}{(qn)(q-p)n}, \frac{1}{(qn)^2(q-p)n}, \dots$$

gibi n_m faktörleri içeren ifadeleri

$$\frac{1}{(qn)(q-p)n} = \frac{1}{pn} \left[\frac{1}{(q-p)n} - \frac{1}{qn} \right]$$

şeklinde sadeleştireceğiz. $(q.n)^{-b}$ çarpanına PV reçetesini uygulayacağız.

$$PV \frac{1}{(qn)^\beta} = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(qn+i\mu)^\beta} + \frac{1}{(qn-i\mu)^\beta} \right]$$

Tüm integrallerin hesabı tamamlanıncaya kadar $\mu \neq 0$ kabul etmemiz gerekiyor. Daha sonra elde ettiğimiz integralleri hesaplamak için $A > 0$ olmak üzere a gösterimiyle

$$\frac{1}{A^N} = \frac{1}{\Gamma(N)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{N-1} e^{-\alpha A} \quad (4.3.11)$$

parametreleştirmesi kullanılır. Bundan sonra Gauss integralleri kullanılarak momentumlar üzerinden integrasyon yapılır:

$$\int d^{2\omega} q \exp[-\alpha q^2 - 2\beta q \cdot p - \gamma (q \cdot n)^2] = \left[\frac{\pi}{\alpha} \right]^\omega \frac{\alpha^{1/2}}{(\alpha + \gamma n^2)^{1/2}} \exp \left[\frac{\beta^2 p^2}{\alpha} - \frac{\gamma \beta^2 (p \cdot n)^2}{\alpha(\alpha + \gamma n^2)} \right], \quad (4.3.12a)$$

$$\int d^{2\omega} q q_\mu \exp[-\alpha q^2 - 2\beta q \cdot p - \gamma (q \cdot n)^2] = - \left[\frac{\pi}{\alpha} \right]^\omega \frac{\beta \alpha^{-1/2}}{(\alpha + \gamma n^2)^{1/2}} \left[p_\mu - n_\mu \frac{\gamma p \cdot n}{\alpha + \gamma n^2} \right] \\ * \exp \left[\frac{\beta^2 p^2}{\alpha} - \frac{\gamma p^2 (p \cdot n)^2}{\alpha(\alpha + \gamma n^2)} \right] \quad (3.3.12b)$$

Burada geçen a, b, ve g, Feynman parametreleri olup değerleri 0 ile ∞ arasında değişir. Payında $q_m q_n$, $q_m q_n q_s$ gibi terimler yer alan bu ifadeler bu denklemin her iki tarafını sırasıyla $\partial^2 / \partial p_\mu \partial p_\nu$, $\partial^3 / \partial p_\mu \partial p_\nu \partial p_\sigma$ gibi operatörlerle etkileyerek işlemden çıkarılabilir. Ondan sonra Feynman parametreleri üzerinden integral alınır. Bu işlemler, (4.3.10) integralinin veya diğer aksenel-ayar integrallerinin ıraksak ve sonlu kısımlarını hesaplamamıza imkan vermektedir. Örnek olarak

$$j = \int dq q_\mu [(q-p)^2 (q \cdot n)]^{-1} \quad (4.3.13a)$$

yapısındaki bir integralin ıraksak kısmı,

$$j_{div} = div \int \frac{dq q_\mu}{(q-p)^2 q \cdot n} = \frac{2pn}{n^2} \left[p_\mu - \frac{pn}{n^2} n_\mu \right] I_{div} \quad (4.3.13b)$$

şeklindedir. Buradaki I_{div} faktörü, $\omega \neq 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
I_{div} &\equiv \text{div} \int dq [q^2 (q-p)^2]^{-1} \\
&= \frac{i(-n)^\omega \Gamma(2-\omega) [\Gamma(\omega-1)]^2}{(p^2)^{2-\omega} \Gamma(2\omega-2)}
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

ile verilir. Minkowski ve Euclid uzaylarındaki değerleri

$$I_{div}^{Mink} = \frac{i\pi^2}{(2-\omega)} \quad , \quad I_{div}^{Eucl} = \frac{\pi^2}{(2-\omega)} \tag{4.3.15}$$

sonuçlarıyla elde edilmektedir. Diğer kütleli aksel-ayar integralleri de bu tarzda hesaplanabilir. Payında q_m bulunan integraller tensör yöntemi ile hesaplanabilirler.

(3.2) Bölümünde verdiğimiz Baş-değer (PV) reçetesi aksel ve düzelysel ayarların her ikisinde de birbirine benzeyen tek ilmek integrallere uygulanan bir tekniktir. Fakat bu tekniğin kusursuz olduğu söylenemez. Herhangi bir ayara gelişigüzel uygulanmamalıdır. Örneğin temporal (geçici) ayar için uygun olmadığı bilinmektedir. Ayrıca ışık-konisi ayarı için yanlış sonuç vermektedir. Uygulama sırasında kızıl ötesi ıraksama işleminde de güçlüklerle karşılaşırız. Son yıllarda PV'nin rolü n_m^* reçetesinin gelişimiyle azalmış olsa da aksel-ayar için çok önemlidir. Şimdi aksel-ayar için yukarıda verdiğimiz işlemleri destekleyen bir örnek verelim (Davydychev and Tausk 1993). Bu örnek, çift kutuplu bir Euclid uzayı integrali için aksel-ayarda PV reçetesinin uygulamasını kapsamaktadır. İntegralimiz 2ω boyutunda

$$I = \int \frac{d^{2\omega} q}{q^2 (q-p)^2 (q.n)^2} \tag{4.3.16}$$

yapısındadır. (3.2.30) eşitliğinde olduğu gibi $(q.n)^{-2}$ faktörüne uygulanmış şeklini ele alalım. Bu ifade

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left(1 + 2\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \right) \frac{1}{(qn)^2 + \mu^2}, \quad (4.3.17)$$

yapısında. Buna göre integralimizi

$$I = \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(1 + 2\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \right) \int \frac{d^{2\omega} q}{q^2 (q-p)^2 [(qn)^2 + \mu^2]}, \quad (4.3.18)$$

$$\equiv \lim_{\mu \rightarrow 0} K, \quad K \equiv \left(I_1 + 2\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} I_1 \right), \quad (4.3.19)$$

şeklinde alalım. Burada $m > 0$ olmak üzere

$$I_1 = \int \frac{d^{2\omega} q}{q^2 (q-p)^2 [(qn)^2 + \mu^2]}, \quad (4.3.20)$$

integralini tanımlayalım. Sonra (3.2.16) ifadesini kullanarak propagatör üstelleştirme yapıyoruz.

$$\begin{aligned} & \int d^{2\omega} q \exp[-\alpha q^2 - 2\beta q \cdot p - \gamma (qn)^2] \\ &= \left[\frac{\pi}{\alpha} \right]^\omega \frac{\alpha^{1/2}}{(\alpha + \gamma^2)^{1/2}} \exp \left[\frac{\beta^2 p^2}{\alpha} - \frac{\gamma \beta^2 (pn)^2}{\alpha(\alpha + \gamma^2)} \right], \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

I_1 , integrali için

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma e^{-\beta p^2 - \gamma \mu^2} \int d^{2\omega} q e^{-(\alpha + \beta)q^2 + 2\beta q \cdot p - \gamma (qn)^2}, \\ &= \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma e^{-\beta p^2 - \gamma \mu^2} \left\{ \frac{\pi^\omega}{(\alpha + \beta)^\omega} \frac{(\alpha + \beta)^{1/2}}{(\alpha + \beta + \gamma^2)^{1/2}} \right. \\ & \quad \left. * \exp \left(\frac{\beta^2 p^2}{\alpha + \beta} - \frac{\gamma \beta^2 (pn)^2}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + \gamma^2)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

eşitliğini elde ediyoruz. Eğer burada g 'yi g/n^2 olarak alıp

$$\begin{aligned}\alpha &= (r \sin \theta \sin \phi)^2, & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ \beta &= (r \sin \theta \cos \phi)^2, & 0 \leq \phi \leq \pi/2, \\ \gamma &= (r \cos \theta)^2, & 0 < r < \infty,\end{aligned}\quad (4.3.23)$$

şeklinde küresel koordinatlarda

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{-8\pi^\omega}{n^2} \int_0^\infty dr r^5 \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin^3 \theta \int_0^{\pi/2} d\phi \cos \phi \sin \phi \\ &* (r^2 \sin^2 \theta)^{-\omega+1/2} r^{-1} e^{-A(\theta, \phi; \mu^2) r^2},\end{aligned}\quad (4.3.24)$$

olarak yazabiliriz. Daha basitleştirmek için $\sin \theta \equiv x$ ve $\sin^2 \phi \equiv y$ tanımlayarak

$$I_1 = -\frac{2\pi^\omega}{n^2} \Gamma(3-\omega) \int_0^1 dx x^{4-2\omega} \int_0^1 dy [A(x, y; \mu^2)]^{\omega-3} \quad (4.3.25)$$

$$A(x, y; \mu^2) = x^2 y (1-y) p^2 + \frac{\mu^2}{n^2} (1-x^2) + \frac{(pn)}{n^2} (1-x^2) x^2 y^2 \quad (4.3.26)$$

ifadelerini elde ederiz. Bu aşamaya gelmeden, daha önce, $m^2=0$ alsaydık, x üzerinden integrasyon tanımsız olacaktı. Bu nedenle de I_1 dolayısıyla I için yanlış bir değer bulmuş olacaktık. Şimdi A 'yı aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$\begin{aligned}A &= y(1-y)x^2 p^2 [1+g(1+\alpha)], \\ g &\equiv \frac{y(1-x^2)(pn)^2}{(1-y)n^2 p^2}, & \alpha &\equiv \frac{\mu^2}{x^2 y^2 (pn)^2},\end{aligned}\quad (4.3.27)$$

O zaman

$$I_1 = -\frac{2\pi^\omega}{n^2} \Gamma(3-\omega) (p^2)^{\omega-3} \int_0^1 \int_0^1 dx dy x^{-2} y^{\omega-3} (1-y)^{\omega-3} \quad (4.3.28)$$

$$* [1+g(1+\alpha)]^{\omega-3}, \quad \text{Re}(3-\omega) > 0$$

durumuna gelir. $[1+g(1+\alpha)]^{\omega-3}$ faktörü için b keyfi ve $|\arg(z)| < \pi$ olmak üzere $(1+z)^n$ şeklindeki bir ifadenin $(1+z)^n = F(-n, b; b; -z)$ olmasından yararlanıyoruz. Çünkü

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dt \Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)\Gamma(-t)z^t}{\Gamma(\gamma+t)}, \quad (4.3.29)$$

şekindedir.. Buradaki integrasyon yolu; $g(-t)$ fonksiyonunun kutupları, integrasyon yolunun sağına düşerken, $g(a+t)$ ve $g(b+t)$ fonksiyonlarının kutupları soluna düşecek şekilde seçilmiştir. Buna göre (4.3.23) formülü $[1+g(1+\alpha)]^{\omega-3}$ faktörüne uygulanırsa

$$[1+g(1+\alpha)]^{\omega-3} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dt \Gamma(3-\omega+t)\Gamma(-t)[g(1+\alpha)]^t}{\Gamma(3-\omega)}, \quad (4.3.30)$$

$$|\arg(g(1+\alpha))| < \pi,$$

elde edilir. Burada dönüşüm yaparak I_1 için

$$I_1 = \frac{-2\pi^\omega (p^2)^{\omega-3}}{2\pi i n^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dt \Gamma(3-\omega+t) \Gamma(-t) \left[\frac{(pn)^2}{n^2 p^2} \right]^t \quad (4.3.31)$$

$$* \left[1 + \frac{\mu^2}{x^2 y^2 (pn)^2} \right]^t \int_0^1 \int_0^1 dx dy x^{-2} (1-x^2)^t y^{\omega-3+t} (1-y)^{\omega-3-t}$$

ifadesi elde edilir. Buradaki iç faktör,

$$\left[1 + \frac{\mu^2}{x^2 y^2 (pn)^2} \right]^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz \Gamma(z-t)\Gamma(-z)}{\Gamma(-t)} \left[\frac{\mu^2}{x^2 y^2 (pn)^2} \right]^z, \quad (4.3.32)$$

eşitliği ile tanımlıdır. O zaman

$$I_1 = \frac{-2\pi^\omega (p^2)^{\omega-3}}{(2\pi i)^2 n^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz dt \Gamma(3-\omega+t)\Gamma(z-t)\Gamma(-z)^t$$

$$* \left(\frac{(pn)^2}{n^2 p^2} \right)^t \left(\frac{\mu^2}{(pn)^2} \right)^z XY, \quad \text{Re}z < 0, \quad (4.3.33)$$

elde edilir. X ve Y,

$$X \equiv \int_0^1 dx x^{-2-2z} (1-x^2)^t = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}-z)\Gamma(t+1)}{2\Gamma(\frac{1}{2}+t-z)}, \quad (4.3.34a)$$

$$Y \equiv \int_0^1 dy y^{\omega-3+t-2z} (1-y)^{\omega-3-t}, \quad (4.3.34b)$$

$$Y = \frac{\Gamma(\omega-2t-2z)\Gamma(\omega-2-t)}{\Gamma(2\omega-4-2z)}$$

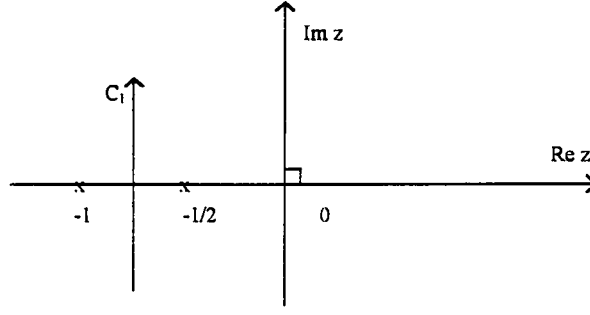
şeklinindedir. Sonuç olarak I_1 için sadece (m^2) 'ye bağımlı

$$I_1 = \frac{-2\pi^\omega (p^2)^{\omega-3}}{(2\pi i)^2 n^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz dt \Gamma(3-\omega+t)\Gamma(z-t)\Gamma(-z)^t$$

$$* \left(\frac{(pn)^2}{n^2 p^2} \right)^t \left(\frac{\mu^2}{(pn)^2} \right)^z \quad (4.3.35)$$

$$* \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}-z)\Gamma(t+1)\Gamma(\omega-2+t-2z)\Gamma(\omega-2-t)}{\Gamma(\frac{1}{2}+t-z)\Gamma(2\omega-4-2z)},$$

ifadesi elde edilir. (4.3.34) sonuçları t ve z yüzünden farklı sınırlamalar getirir. Bunlardan biri (4.3.34a)'dan gelen $\text{Re}(z+1/2) < 0$ ve $\text{Re}(t+1) > 0$ sınırlaması, diğeri (4.3.34b)'den gelen $\text{Re}(\omega-z-t) > 0$ ve $\text{Re}(\omega-2+t-2z) > 0$ sınırlamasıdır. Örneğin $\text{Re}(z+1/2) < 0$ koşulu bize Şekil 4.7'deki C_1 hattının, $z = -1/2$ noktasının soluna düşmesi



Şekil 4.7 C_1 hattının orijinal pozisyonu

gerektiğini ifade eder. (4.3.19) denklemindeki K 'yı hesaplamak için $(m^2)^z$ ye uygulamak yeterlidir. Buna göre,

$$(1+2\mu^2 \partial/\partial\mu^2)(\mu^2)^z = -2(-\frac{1}{2}-z)(\mu^2)^z, \quad (4.3.36)$$

eşitliği elde edilir. Buradaki $-2(-\frac{1}{2}-z)$, (4.3.35) denklemindeki $\Gamma(-\frac{1}{2}-z)$ ifadesi ile birleştirilerek

$$-2(-\frac{1}{2}-z)\Gamma(-\frac{1}{2}-z) = -2\Gamma(\frac{1}{2}-z) \quad (4.3.37)$$

elde edilir. Böylece

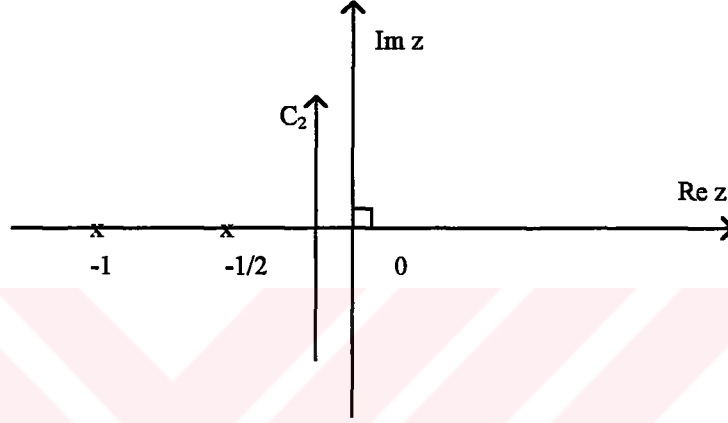
$$K = -2(-\frac{1}{2}-z)I_1 = \frac{2\pi^\omega (p^2)^{\omega-3}}{(2\pi)^2 n^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz dt \Gamma(\frac{1}{2}-z)\Gamma(t+1) \\ * \frac{\Gamma(3-\omega+t)\Gamma(z-t)\Gamma(-z)\Gamma(\omega-2+t-2z)\Gamma(\omega-2-t)}{\Gamma(\frac{1}{2}+t-z)\Gamma(2\omega-4-2z)} \quad (4.3.38) \\ * \left(\frac{\mu^2}{(pn)^2}\right)^z \left(\frac{(pn)^2}{n^2 p^2}\right)^t$$

elde edilir. Burada $\Gamma(\frac{1}{2}-z)$ fonksiyonunun bulunması şimdi integralleme hattının $z=1/2$ nin sağına, fakat orijinin soluna düşen yeni bir C_2 hattı olduğunu göstermektedir (Çünkü (4.3.13) denkleminde $\text{Re } z < 0$ dır). Bu durum Şekil 4.8'de tasvir edilmiştir. Denklem (4.3.38) eşitliğindeki z üzerinden integral için C_2 hattını sağdan kapayarak ve $m^2 \rightarrow 0$ alarak

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dz \frac{\Gamma(z-t)\Gamma(\frac{1}{2}-z)\Gamma(\omega-2+t-2z)\Gamma(-z)}{\Gamma(\frac{1}{2}+t-z)\Gamma(2\omega-4-2z)} \left(\frac{\mu^2}{(pn)^2}\right)^z \quad (4.3.40)$$

$$\Rightarrow -2\pi i \frac{\Gamma(-t)\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\omega-2+t)}{\Gamma(\frac{1}{2}+t)\Gamma(2\omega-4)}$$

ifadesini elde ederiz. Kompleks z-düzleminde başka kutuplar da vardır, fakat (4.3.38)



Şekil 4.8 $z = -1/2$ çizgisinin sağına düşen C_2 hatının pozisyonu

eşitliğindeki $m^2 \rightarrow 0$ olduğu için önemsizdirler. Şimdi K 'yı indirgeyelim:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} K = \frac{-2\pi^\omega (p^2)^{\omega-3}}{2\pi i n^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dt \frac{\Gamma(3-\omega+t)\Gamma(t+1)\Gamma(-t)}{\Gamma(\frac{1}{2}+t)\Gamma(2\omega-4)} \quad (4.3.40)$$

$$* \Gamma(\omega-2-t)\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\omega-2+t) \left(\frac{(pn)^2}{n^2 p^2}\right)^t$$

$$= + \frac{-2\pi^\omega (p^2)^{\omega-3}}{2\pi i n^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dt \frac{\pi^2 \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\omega-2+t)a^t}{\Gamma(\frac{1}{2}+t)\Gamma(2\omega-4)\sin(\pi t)\sin \pi(\omega-2-t)}, \quad (4.3.41)$$

Burada (4.3.40) eşitliğinden (4.3.41) eşitliğine geçmek için

$$\Gamma(-t)\Gamma(t+1) = -\pi/\sin(\pi t), \quad a = (pn)^2/(p^2 n^2),$$

$$\Gamma(3-\omega+t)\Gamma(\omega-2-t) = \pi/\sin(\pi(\omega-2-t)).$$

eşitliklerini kullandık. Son adım, t üzerinden alınan integralde hattın saat yönünde kapanmasından ibarettir. Hat orijinin soluna düşer, fakat ona keyfi bir yakınlıkta bulunabilir. (4.3.41) integraline katkılar, sadece t=0 ve t=w-2 kutuplarından gelir. Bu nedenlerden dolayı

$$\begin{aligned}
\lim_{\mu \rightarrow 0} K &= \frac{-2\pi^\omega (p^2)^{\omega-3}}{2\pi i n^2} - [2\pi i \text{Res}(t=0) + 2\pi i \text{Res}(t=\omega-2)], \\
&= \left\{ \frac{2\pi^{\omega+1} (p^2)^{\omega-3}}{n^2} \left[\frac{\Gamma(\omega-2)}{\Gamma(2\omega-4)} \frac{1}{\sin \pi(\omega-2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \alpha^{\omega-2}}{\Gamma(\omega-\frac{3}{2}) \Gamma(\omega-1) \sin \pi(\omega-2)} \right] \right\}_{\omega \rightarrow 2+} \\
&= \frac{2}{n^2 p^2} \bar{I}, \quad \bar{I} = -\pi^2 / (\omega-2)
\end{aligned} \tag{4.3.42}$$

şeklinde elde edilir (Leibbrandt 1994). (4.3.16) integralinin iraksak kısmı

$$\text{div} \int \frac{d^{2\omega} q}{q^2 (q-p)^2 (qn)^2} = \text{div} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} K \right) = \frac{2}{n^2 p^2} \bar{I} \tag{4.3.43}$$

şekliyle elde edilir. Örneğin (4.3.26) eşitliğinde olduğu gibi m^2 , zamansız bir aşamada sifira eşitlenirse I'nın değeri hatalı olarak elde edilir.

4.4. Eksenel-Ayarda Ward Özdeşliği

Eksenel ayardaki öz-enerji için Ward Özdeşliği $L_{fix} = -(2\alpha)^{-1} (n.A^a)^2$ ile tam Green fonksiyonlarının “oluşturucu fonksiyonel”inden türer (Ward 1950, Takahashi 1957). Burada oluşturucu fonksiyoneli,

$$\begin{aligned}
Z &= [J_\mu^b] = N \int D A \bar{Z} \\
\bar{Z} &= \exp \left[i \int d^4 z \left[-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\alpha} (n.A^a)^2 + J_\mu^a A_\mu^a \right] \right],
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

$$D(A) \equiv \prod_x \prod_a \prod_\mu dA_\mu^a(x),$$

şeklinde tanımlıyoruz. Kuramsal taneciklerin giderilmesi (4.2.) bölümünde gösterildiği için L_{gost} , burada ihmal edilmiştir. Ayar dönüşümünün z üzerindeki etkisi

$$\delta A_\mu^a(x) = (\delta^{ac} \partial_\mu + gf^{abc} A_\mu^b) \omega^c(x) \quad (4.4.2)$$

olmak üzere $dz=0$ sonucunu verir. Buna göre $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$ tanımıyla

$$i \cdot N \int D(A) \bar{Z} \left[\frac{1}{\alpha} n \partial_\mu n \cdot A^a - \partial_\mu J_\mu^c - gf^{bca} J_\mu^b A_\mu^c \right] = 0, \quad (4.4.3)$$

denklemini ortaya koyar. Bu denklemin dış kaynak $J_n(y)$ 'ye göre diferansiyelini alırsak ve $J_\mu^a = 0$ yaparsak koordinat uzayında

$$\left\langle 0 \left| T \left[-\frac{i}{\alpha} n \partial^x n \cdot A^a(x) A_\alpha^p(y) + \partial_\alpha^x \delta^{2\omega}(x-y) \delta^{ap} - gf^{pca} \delta^{2\omega}(x-y) A_\alpha^c(y) \right] \right| 0 \right\rangle = 0, \quad (4.4.4)$$

elde edilir. Burada T zaman sıralama operatörüdür. Sonra

$$\delta^{2\omega}(x-y) = (2\pi)^{-2\omega} \int d^{2\omega} q e^{iq \cdot (x-y)},$$

$$\left\langle 0 \left| T \left[A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \right] \right| 0 \right\rangle = \int d^{2\omega} q e^{-iq \cdot (x-y)} D_{\mu\nu}^{ab}(q),$$

tanımları yardımıyla (4.4.4) eşitliğine Fourier dönüşümü uygulayarak Ward Özdeşliğine ulaşırız.

$$\frac{1}{\alpha} n_\mu q_\nu n D_{\mu\nu}^{ab}(q) + i(2\pi)^{-2\omega} q_\nu \delta^{ab} - g(2\pi)^{-2\omega} f^{abc} B_\nu^c(q) = 0 \quad (4.4.5)$$

$A_\nu^c(y)$ 'nin Fourier dönüşümünün vakuma göre beklenen değeri olan $B_\nu^c(q)$ 'nun kütleli tadpole karşı geldiği görülmektedir. Boyutsal regülarizasyonda $B_\nu^c(q)$ sıfıra eşittir. Bu nedenle (4.4.5) denklemi,

$$\frac{1}{\alpha} q n_\mu G_{\mu\nu}^{ab}(q) + i(2\pi)^{-2\omega} q_\nu \delta^{ab} = 0, \quad (4.4.6)$$

eşitliğine indirgenmiş olur. Buradaki

$$G_{\mu\nu}^{ab} = G_{\mu\nu}(q) \delta^{ab}$$

terimi (4.3.2) eşitliğinde verdiğimiz a 'ya bağlı çıplak tek ilmek propagatörüdür. (4.4.6) eşitliğinin,

$$\left(G_\mu^{ab}\right)^{-1} = \left(G_{\mu\nu}^{ab}\right)^{-1} - \prod_{\mu\nu}^{ab}$$

ile çarpımı

$$q_\mu \prod_{\mu\nu}^{ab}(q) = 0 \quad (4.4.7)$$

Ward özdeşliğini verir (Capper and Leibbrandt 1982). Yukarıda

$$\left(G_{\mu\nu}\right)^{-1} = \left(q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu\right)$$

olduğu gözönüne alınmıştır (Lee and Milgram 1985). $\prod_{\mu\nu}^{ab}(q)$ gulyon öz-enerjisini göstermektedir ve tek ilmekli yaklaşımda

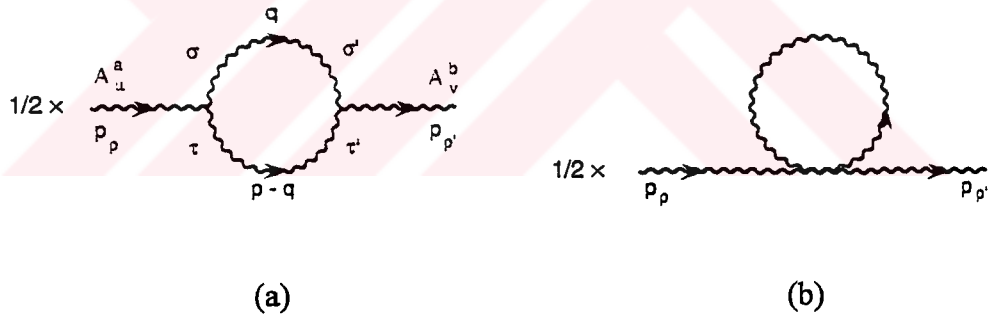
$$\begin{aligned} \prod_{\mu\nu}^{ab}(p, \alpha \neq 0) = & g^2 f^{acd} f^{bcd} \left[\left[-\frac{11}{3} + \frac{4\alpha p^2}{3\pi^2} \right] (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \right. \\ & \left. + \frac{4\alpha}{3(n^2)^2} (p_\mu n_\nu - p_\nu n_\mu) (p_\mu n_\nu - p_\nu n_\mu) \right] \bar{I} \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

eşitliği ile ifade edilir.

Bu bilgiler aksel-ayarın Kuantum kromadamiği için sağladığı yararı göstermektedir. Örneğin tek ilmek yaklaşımında $\prod_{\mu\nu}^{ab}$ gulyon öz enerjisini dikkate alalım ($\alpha=0$).

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\alpha} (n_\mu A_\mu^a)^2 \quad (4.4.9)$$

Lagranj yoğunluğundan Şekil 4,9(a) da gösterilen gulyon ilmeği için



Şekil 4.9 Yang-Mills öz enerji diyagramları . (a) Aksel ayar tek ilmek öz enerji. Tüm çizgiler Yang-Mills alanına tekabül eder; (b) Kütlesiz tadpole diyagramı

$$\prod_{pp}^{ab}(p) = \frac{1}{2} (factors) \int dq V_{\rho\sigma\tau}^{acd}(p, q, -(p-q)) G_{\sigma\sigma'}^{cc'}(q) V_{\rho'\sigma'\tau'}^{bc'd'}(p, q, -(p+q)) G_{\tau\tau'}^{dd'}(p-q), \quad (4.4.10)$$

ifadesini elde ederiz. Şekil 4,9(b) ise tadpole diyagramını ifade etmektedir ve boyutsal regülarizasyonda sifra eşittir. Buradaki $G_{\sigma\sigma'}^{ab}(q)$, $\alpha \rightarrow 0$ limitinde çıplak gulyon propagatörüdür ((4.3.3) eşitliği). $V_{\rho\sigma\tau}^{acd}$ üç gulyonlu tepe fonksiyonu olup,

$$V_{\rho\sigma\tau}^{abc}(p,q,-(p+q)) = gf^{abc}(2\pi)^{2\omega} \left[-g_{\rho\sigma}(p-q)_\tau - g_{\sigma\tau}(2q+p)_\rho + g_{\tau\rho}(2p+q)_\sigma \right] \quad (4.4.11)$$

eşitliği ile verilmektedir.

(4.4.10) eşitliğinde tepe fonksiyonlarının ve propagatörlerin bilinen ifadelerini yerlerine yazıp gerekli hesaplamaları yapıp sadeleştirme formüllerini uygulayarak $(q.n)^m$ veya $[(p-q).n]^m$ ile orantılı ($m=0,1,2$) fonksiyonlar içeren integrallerin toplamı şeklinde bir ifade buluruz. Sonra q_m 'den $(p-q)_m$ ye geçip $[(p-q).n]^m$ yerine $(q.n)^m$ koyarak yalnız $(q.n)^m$ ile orantılı olan öz enerji integralleriyle karşılaşırız. Uygun formülleri kullanarak aksenel-ayarda

$$\int dq/q^2 = 0, \quad \int dq/(q.n)^2 = 0, \quad \dots$$

gibi tadpole integrallerini göz önüne alarak tek ilmek gulyon öz enerjisini,

$$\prod_{\mu\nu}^{ab}(p) = -\frac{11}{3} g^2 \delta^{ab} C_{YM} (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) \bar{I}, \quad (4.4.12)$$

şeklinde buluruz. Buradaki $f^{acd} f^{bcd} = C_{YM} d^{abcd}$ ve \bar{I} , (4.3.13b) ile tanımlanmıştır.

Açıkça belli olur ki $\prod_{\mu\nu}^{ab}(p)$ eninedir ve (4.4.7) deki Ward Özdeşliği ile uyumdadır.

İkinci örneği genel aksenel-ayar için verelim. Burada $\alpha \neq 0$ olmalıdır. Gulyon öz enerji hesabı $\alpha = 0$ durumundaki (yukarıda verdiğimiz) işlemlere özdeştir. Sadece hesapların güçlük derecelerinde fark vardır. $L_{fix} = -(1/2\alpha)(n.A)^2$ ve $V_{\rho\sigma\tau}^{abc}$, (4.4.9) ve (4.4.11) eşitliklerindeki gibi aynıdır. Fazladan güçlük $G_{\mu\nu}^{ab}$ propagatöründeki α 'ya bağlı terimden çıkar. $G_{\mu\nu}^{ab}$,

$$G_{\mu\nu}^{ab}(q, \alpha \neq 0) = \frac{-i\delta^{ab}}{(2\pi)^{2\omega}(q^2 + i\varepsilon)} \left[g_{\mu\nu} - \frac{(q_\mu n_\nu - q_\nu n_\mu)}{qn} + q_\mu q_\nu \frac{(n^2 + \alpha q^2)}{(qn)^2} \right], \quad \varepsilon > 0 \quad (4.4.13)$$

şeklindedir. Bu propagatör gulyon öz enerjisinin ıraksak kısmının ifadesini

$$\begin{aligned} \prod_{\mu\nu}^{ab}(p, \alpha \neq 0) = & g^2 \delta^{ab} C_{YM} \left[\left[-\frac{11}{3} + \frac{4\alpha p^2}{3n^2} \right] (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \right. \\ & \left. + \frac{4\alpha}{3(n^2)^2} (p_\mu p_\nu - p^2 n_\mu)(p_\mu p_\nu - p^2 n_\nu) \right] \bar{I} \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

sonucuyla verir. (4.4.14) eşitliği tümüyle (4.4.7) özdeşliğine uygun olarak $p_\mu \prod_{\mu\nu}^{ab}(p, \alpha \neq 0) = 0$ şeklindeki enine olma koşuluna uyar. Şimdi $\prod_{\mu\nu}^{ab}$, n_μ ye bağlı olduğu kadar a 'ya da bağımlı olacak ve daha karmaşık kontur terimlere gerek duyulacaktır (Frenkel and Meuldermans 1976).

5. PROPAGOTÖRLERİN TAYİNİ

5.1. Serbest Gulyon Propagatörünün Hesabı

Aşağıdaki ayarı gözönüne alalım:

$$(n_\mu - i\varepsilon\partial_\mu^\perp)A_\mu^a(x)=0 \quad (5.1.1)$$

Burada

$$\partial_\mu^\perp = \partial_\mu - n_\mu(n\partial) \quad (5.1.2)$$

eşitliği ile verilmektedir. Bu ifadeyi momentum uzayında

$$k_\mu^\perp = k_\mu - n_\mu(nk) \quad (5.1.3)$$

şeklinde yazabiliriz. O zaman (5.1.1) ayarı,

$$\bar{n}_\mu A_\mu^a = (n_\mu + i\varepsilon k_\mu^\perp)A_\mu^a = 0 \quad (5.1.4)$$

olarak yazılabilir. (5.1.4) eşitliğinden görüldüğü gibi gözönüne alınan ayar koşulu $\varepsilon \rightarrow 0$ limitinde standart aksenal ayar koşuluna dönüşür. Buradaki n_m , keyfi dört boyutlu sabit bir vektör olduğu için bundan sonraki hesaplamalarda $n^2=1$ kabul edeceğiz. Böylece

$$k_\mu'' = n_\mu(nk) \quad , \quad k_\mu^\perp n_\mu = 0 \quad , \quad k_\mu'' n_\mu = (kn) \quad (5.1.5)$$

alınır. Başka bir deyimle (5.1.4) ayarında $n_\mu A_\mu^a = 0$ yüzeyine dik yönde ayar serbestlik dereceleri fiks edilir. Daha sonra standart, fonksiyonel integrallerle kuantumlama yöntemini kullanarak oluşturucu fonksiyoneli,

$$Z[j] = N \int \mathcal{D}A \det(\bar{n}_\mu D_\mu^{ab}) \exp \left\{ -\mathcal{S}_0 - \frac{1}{2\alpha} \int d^4 y (\bar{n}_\mu A_\mu^a) f(\bar{n}_\nu A_\nu^a) - \int d^4 y J_\mu^a A_\mu^a \right\} \quad (5.1.6)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada serbest gulyon için fonksiyonel etkiye ,

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{4} \int d^4 y (F_{\mu\nu}^a)^2 \quad (5.1.7)$$

eşitliği ile verilmektedir. Serbest gulyon propagatörünü bulmak için (5.1.6) eşitliğindeki kinetik terimi ,

$$\begin{aligned} & \int d^4 y \left[\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{1}{2\alpha} (\bar{n}_\mu A_\mu^a) f(\bar{n}_\nu A_\nu^a) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 y A_\mu^a(y) \left[-\partial^2 \delta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} \bar{n}_\mu f \bar{n}_\nu \right] A_\nu^a(y) \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

olarak yazabiliriz. Burada köşeli parantez içindeki ifade ters gulyon propagatörünü göstermektedir. O zaman momentum uzayındaki ters gulyon propagatörü,

$$D_{\mu\nu}^{-1}(k) = \delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu + \frac{1}{\alpha} \bar{n}_\mu^* \bar{n}_\nu \quad (5.1.9)$$

şeklinde ifade edilir. Daha ayrıntılı yazarsak

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{-1}(k) &= \delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu + \frac{1}{\alpha} (n_\mu - i\epsilon k_\mu^\perp) (n_\nu + i\epsilon k_\nu^\perp) \\ &= \delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu + \frac{1}{\alpha} (n_\mu n_\nu + \epsilon^2 k_\mu^\perp k_\nu^\perp) - \frac{1}{i\epsilon} (k_\mu^\perp n_\nu - n_\mu k_\nu^\perp) \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

elde ederiz. Şimdi notasyon değişikliği yapalım ve

$$k_{\mu}^{\perp} = a_{\mu} \quad , \quad k'' = b_{\mu} \quad (5.1.11)$$

olduğunu kabul edelim. O zaman aşağıdaki eşitliklerin,

$$\begin{aligned} k_{\mu} &= a_{\mu} + b_{\mu} \\ a_{\mu}^2 &= k^2 - (nk)^2 \\ b_{\mu}^2 &= (nk)^2 \\ a_{\mu} b_{\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

şeklinde olduğu görülür. Bu yeni notasyonlarla ters propagatör,

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{-1} &= \delta_{\mu\nu} (a^2 + b^2) - \left(\frac{\alpha - \varepsilon^2}{\alpha} a_{\mu} a_{\nu} + b_{\mu} b_{\nu} + a_{\mu} b_{\nu} + a_{\nu} b_{\mu} \right) \\ &+ \frac{1}{\alpha} n_{\mu} n_{\nu} - \frac{i\varepsilon}{\alpha} (a_{\mu} n_{\nu} - n_{\mu} a_{\nu}) \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

olarak elde edilir. Burada görüldüğü gibi

$$D_{\mu\nu}^{-1}(-k) = [D_{\mu\nu}^{-1}(k)]^* \quad (5.1.14)$$

olur. Gulyon propagatörünün tanımından anlaşılacağı üzere $D_{mn}(k)$ iki ranklı bir tensördür. Elimizde a_m , b_m ve n_m vektörleri bulunduğundan $D_{mn}(k)$ 'nin genel tensör yapısını

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu} &= A\delta_{\mu\nu} + Ba_{\mu} a_{\nu} + Cb_{\mu} b_{\nu} + D(a_{\mu} b_{\nu} + a_{\nu} b_{\mu}) + En_{\mu} n_{\nu} + F(a_{\mu} n_{\nu} + n_{\mu} a_{\nu}) \\ &+ G(b_{\mu} n_{\nu} + n_{\mu} b_{\nu}) + iH(a_{\mu} n_{\nu} - n_{\mu} a_{\nu}) + iK(b_{\mu} n_{\nu} - n_{\mu} b_{\nu}) + iL(a_{\mu} b_{\nu} - b_{\mu} a_{\nu}) \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

şeklinde düşünebiliriz. Buradaki A, B, C, D, E, F, G, H, K, L katsayıları belirsiz katsayılardır. Şimdi

$$t = \frac{\alpha - \varepsilon^2}{\alpha} \quad (5.1.16)$$

olduğunu kabul edelim. O zaman belirsiz katsayıları bulmak için

$$D_{\mu\nu}(k)D_{\nu\kappa}^{-1}(k) = \delta_{\mu\kappa} \quad (5.1.17)$$

ilişkisinden aşağıdaki gibi bir denklemler sistemi elde ederiz.

$$\begin{aligned} -At + B(k^2 - t\alpha^2) - Db^2 + \frac{i\varepsilon}{\alpha}D(bn) - F(bn) + \frac{i\varepsilon}{\alpha}F - iH(bn) - \frac{\varepsilon H}{\alpha} + iLb^2 - \frac{\varepsilon L}{\alpha}(bn) &= 0 \\ -A + C(k^2 - b^2) - Da^2 - E(bn) - G(bn) - iK(bn) + iLa^2 &= 0 \\ \frac{A}{\alpha} + Ek^2 + \frac{E}{\alpha} - \frac{i\varepsilon}{\alpha}a^2F - \frac{G}{\alpha}(bn) - \frac{\varepsilon H}{\alpha}a^2 - \frac{iK}{\alpha}(bn) &= 0 \\ -A - Ba^2 + Dk^2 - Db^2 - F(bn) - iH(bn) + iLk^2 - iLb^2 &= 0 \\ -\frac{i\varepsilon}{\alpha}A - \frac{i\varepsilon}{\alpha}a^2B + \frac{D}{\alpha}(bn) + Fk^2 + \frac{F}{\alpha} + iHk^2 + \frac{iH}{\alpha} + \frac{iL}{\alpha}(bn) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Burada (5.1.16) eşitliğindeki değer yerine konularak ve sadeleştirme amacıyla dönüşümler ve kısaltmalar yaparak (5.1.18) denklem sistemi aşağıdaki denklem sistemine indirgenir.

$$\begin{aligned} -A - Ba^2 + Dk^2 - Db^2 - F(bn) &= 0 \\ -H(bn) + Lk^2 - Lb^2 &= 0 \\ \frac{D}{\alpha}(bn) + Fk^2 + \frac{F}{\alpha} &= 0 \\ -\frac{\varepsilon A}{\alpha} - \frac{\varepsilon a^2}{\alpha}B + Hk^2 + \frac{H}{\alpha} + \frac{L}{\alpha}(bn) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

Bu sistemden

$$\begin{aligned}\varepsilon a^2 F + K(bn) &= 0 \\ a^2 L - K(bn) &= 0\end{aligned}\quad (5.1.20)$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca

$$F = -\frac{K(bn)}{\varepsilon a^2}, \quad K = -\frac{\varepsilon a^2}{(bn)} F, \quad K = \frac{a^2 L}{(bn)}, \quad L = \frac{K(bn)}{a^2}\quad (5.1.21)$$

oldukları görülmektedir. O zaman

$$L = \varepsilon F\quad (5.1.22)$$

olur ve (5.1.19) sisteminin üçüncü denkleminde

$$D(bn) + F a k^2 + F = 0\quad (5.1.23)$$

alınır buradan

$$D = -\frac{F(a k^2 + 1)}{(bn)}\quad (5.1.24)$$

elde edilir. Yine (5.1.19) sisteminin ikinci denkleminde

$$H(bn) = L(k^2 b^2)\quad (5.1.25)$$

alınarak buradan

$$H = -\varepsilon \frac{k^2 - b^2}{(bn)} F\quad (5.1.26)$$

bulunur. Ayrıca (5.1.24) eşitliğini (5.1.19) sisteminin birinci denkleminde kullanırsak

$$-A - Ba^2 - (k^2 - b^2) \frac{\alpha k^2 + 1}{(bn)} F - F(bn) = 0 \quad (5.1.27)$$

eşitliğini elde ederiz. Daha sonra (5.1.18) sisteminin ilk denklemini dikkate alıp burada (5.1.24) eşitliğini kullanarak

$$-At + B(k^2 - ta^2) + \left(\frac{\alpha k^2 + 1}{(bn)} b^2 - (bn) + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} (bn) + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \frac{k^2 - b^2}{(bn)} \right) F = 0 \quad (5.1.28)$$

şeklinde yeni bir denklem elde edilir. Burada (5.1.27) denklemine göre gerekli değişiklik yapılırsa

$$-A - Ba^2 - \left(\frac{\alpha k^2 + 1}{(bn)} (k^2 - b^2) + (bn) \right) F = 0 \quad (5.1.29)$$

sonucu çıkar.

Şimdi işlemlerde kolaylık amacıyla

$$\beta = \frac{\alpha k^2 + 1}{(bn)} b^2 - (bn) + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} (bn) + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \frac{k^2 - b^2}{(bn)}$$

$$\gamma = (k^2 - b^2) \frac{\alpha k^2 + 1}{(bn)} + (bn) \quad (5.1.30)$$

tanımlarının yapıldığını kabul edelim. O zaman (5.1.28) ve (5.1.29) denklemlerinden

$$-At + B(k^2 - ta^2) + \beta F = 0 \quad , \quad (5.1.31)$$

$$-A - Ba^2 - \gamma F = 0 \quad (5.1.32)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden

$$B = -\frac{\beta + t\gamma}{\beta a^2 + t\gamma a^2 - \gamma k^2} A$$

$$F = \frac{k^2}{\beta a^2 + a^2 t\gamma - \gamma k^2} A$$
(5.1.33)

sonuçları çıkar. Bu sonuçları (5.1.22) - (5.1.26) eşitliklerinde kullanırsak katsayılar

$$L = \frac{-\varepsilon k^2}{\beta a^2 + a^2 t\gamma - \gamma k^2} A, \quad K = -\frac{\varepsilon a^2}{(bn)} \frac{k^2}{\beta a^2 + a^2 t\gamma - \gamma k^2} A,$$

$$H = -\frac{\varepsilon a^2}{(bn)} \frac{k^2}{\beta a^2 + a^2 t\gamma - \gamma k^2} A, \quad D = -\frac{-\alpha k^2 + 1}{(bn)} \frac{k^2}{\beta a^2 + a^2 t\gamma - \gamma k^2} A$$
(5.1.34)

şeklinde elde edilir. Benzer olarak

$$C = \frac{\varepsilon L a^2 - G(\alpha k^2 + 1)}{(bn)},$$

$$G = \frac{-A(bn) - \varepsilon L a^2 b^2 - D + a^2 (bn) - \frac{\varepsilon k}{\alpha} (bn) + D(bn)k^2}{(bn)^2 - (\alpha k^2 + 1)b^2}$$
(5.1.35)

oldukları gösterilebilir. (5.1.30) eşitliklerinden

$$\beta + t\gamma = k^2 \frac{\alpha k^2 + 1}{(bn)} - \frac{\varepsilon^2}{\alpha} a^2 \frac{\alpha k^2}{(bn)}$$

$$\beta a^2 + a^2 t\gamma - \gamma k^2 = -k^2 (bn) - \varepsilon^2 a^4 \frac{k^2}{(bn)}$$
(5.1.36)

oldukları görülmektedir. (5.1.36) bağıntılarını (5.1.33), (5.1.34) ve (5.1.35) eşitliklerinde yerine koyarsak ve sadeleştirme dönüşümlerini yaparsak belirsiz katsayılar için aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$A = \frac{1}{k^2}, \quad B = \frac{\alpha k^2 + 1 - \varepsilon^2 a^2}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4},$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\alpha k^2 + 1 + \varepsilon^2 a^2}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} A, & D &= \frac{\alpha k^2 + 1}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} A, \\
E &= 0, & F &= -\frac{(bn)}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} A, \\
G &= -\frac{(bn)}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} A, & H &= \frac{\varepsilon a^2}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} A, \\
K &= \frac{\varepsilon a^2}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} A, & L &= \frac{\varepsilon (bn)}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} A
\end{aligned} \tag{5.1.37}$$

Yukarıda bulduğumuz bu katsayıları (5.1.15) ifadesinde yerine koyarsak serbest gulyon propagatörü için

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{k^2} \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + n_\mu k_\nu}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} (bn) + \frac{\alpha k^2 + 1}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} k_\mu k_\nu \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon^2 a^2}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} (b_\mu b_\nu - a_\mu a_\nu) + i \left[\frac{\varepsilon^2 a^2}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} (k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\varepsilon^2 a^2}{(bn)^2 + \varepsilon^2 a^4} (a_\mu b_\nu - b_\mu a_\nu) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.1.38}$$

ifadesi elde edilir. (5.1.12) eşitliklerini hatırlarsak propagatör daha sade olarak

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{k^2} \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + n_\mu k_\nu}{(kn)^2 + \varepsilon^2 a^4} (nk) (1 - \varepsilon^2 a^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha k^2 + 1 - \varepsilon^2 a^2}{(kn)^2 + \varepsilon^2 a^4} k_\mu k_\nu + i \varepsilon (k_\mu n_\nu - n_\mu k_\nu) \frac{k^2}{(kn)^2 + \varepsilon^2 a^4} \right\}
\end{aligned} \tag{5.1.39}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $a=0$ ve $n_m=(0,0,0,1)$ olarak alınırsa $D_{mn}(k)$ fonksiyonu basit şekle dönüşür.

$$D_{ij}(k) = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{ij} + \frac{1 - \varepsilon^2 k^2}{k^2 + \varepsilon^2 k^4} k_i k_j \right)$$

$$D_{i4}(k) = -D_{4i}(k) = i\varepsilon \frac{k_i}{k_4^2 + \varepsilon^2 \underline{k}^4}$$
$$D_{44}(k) = \frac{\underline{k}^2}{k_4^2 + \varepsilon^2 \underline{k}^4}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.1.40)$$



5.2. Kullanılan İntegrallerin Tanımlanması

Bu çalışmayla elde ettiğimiz sonuçlara göre incelenmesi amaçlanan oluşturucu fonksiyonel ve diğer niceliklerin hesaplanması sırasında çeşitli ifadelerle karşılaşılmaktadır. Bu ifadelerde aşağıdaki yapıda integraller bulunmaktadır.

$$J(\mu, \nu, \rho; i, j, \dots, k) = \int \frac{q_i q_j \dots q_k d^{2\omega} q}{(q^2)^\mu [(p-q)^2]^\nu (qn+i\epsilon)^\rho} \quad (5.2.1)$$

Bu tip bir integralin hesaplanması için

$$J^+(\mu, \nu, \rho) = \int \frac{d^{2\omega} q}{(q^2)^\mu [(p-q)^2]^\nu (qn-i\epsilon)^\rho} \quad (5.2.2)$$

$$J^-(\mu, \nu, \rho) = \int \frac{d^{2\omega} q}{(q^2)^\mu [(p-q)^2]^\nu (qn+i\epsilon)^\rho} \quad (5.2.3)$$

tanımlarını kabul ediyoruz. Ayrıca

$$J(\mu, \nu, \rho) = \frac{1}{2} [J^+(\mu, \nu, \rho) + J^-(\mu, \nu, \rho)] \quad (5.2.4)$$

olsun. (5.2.4) integralini, r 'nin $r=2k+1$ gibi tek değerlerinde $J_1(m, n, r)$ ve $r=2k$ gibi çift değerlerinde de $J_2(m, n, r)$ olarak isimlendiriyoruz. Minkowski uzayında Schwinger'in standart, a üstel gösterimine geçerse

$$\frac{1}{(qn \pm i\epsilon)^\rho} = \frac{i^{\pm\rho}}{\Gamma(\rho)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{\rho-1} \exp[-i\alpha(qn)] \quad (5.2.5)$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda (5.2.4) eşitliği

$$\begin{aligned}
J(\mu, \nu, \rho) &= \frac{i^{-\mu-\nu-\rho}}{2\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)} \int d^{2\omega} q \int_0^\infty d\alpha \alpha^{\mu-1} \\
&* \int_0^\infty d\beta \beta^{\nu-1} \int_0^\infty d\gamma \gamma^{\rho-1} \exp\left[i(\alpha + \beta)q^2 - 2i\beta(pq) + i\beta\rho^2\right] \\
&* \left\{ \exp[i\gamma(qn)] + (-1)^\rho \exp[-i\gamma(qn)] \right\}
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

şeklinde gösterilebilir. Buna göre (5.2.1)-(5.2.4) integralleri arasındaki bağıntıyı

$$\begin{aligned}
J^+(\mu, \nu, \rho) &= J_1(\mu, \nu, \rho) + J_2(\mu, \nu, \rho) \\
J^-(\mu, \nu, \rho) &= (-1)^{\rho+1} [J_1(\mu, \nu, \rho) - J_2(\mu, \nu, \rho)]
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

şeklinde yazabiliriz. (5.2.7) ifadesinde öncelikle q momentumuna göre integral alınır. Daha sonra, elde edilen sonuç a , b ve g parametreleri üzerinden integre edilir. Sonuçlar aşağıdaki gibi olacaktır (İntegral işlemleri çalışmamızın EK kısmında açıkça gösterilmiştir).

$$\begin{aligned}
J_2(\mu, \nu, \rho) &= \pi^\omega i^{1-\rho-2\omega} 2^\rho (\hbar^2)^{-\frac{\rho}{2}} (p^2)^{\omega-\mu-\frac{\rho}{2}} \frac{\Gamma(\mu + \nu + \frac{\rho}{2} - \omega) \Gamma(\frac{\rho}{2})}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)} \\
&* \left\{ B\left(\omega - \mu - \frac{\rho}{2}, \omega - \nu - \frac{\rho}{2}\right) {}_3F_2\left(\mu + \nu - \omega + \frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}, \omega - \mu - \frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}, \nu + \frac{\rho}{2} + 1 - \omega; y\right) \right. \\
&+ y^{\omega-\nu-\frac{\rho}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu)\Gamma(\omega-\nu)\Gamma(\nu+\frac{\rho}{2}-\omega)}{\Gamma(\mu+\nu-\omega+\frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{\rho}{2})\Gamma(\omega-\nu-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2})} \\
&\left. * {}_3F_2\left(\mu, \omega - \nu, n - \mu - \nu - \rho; \omega - \nu - \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2}, \omega - \nu - \frac{\rho}{2} + 1; y\right) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $y = \frac{p^2 n^2}{(pn)^2}$ dir.

$$\begin{aligned}
J_1(\mu, \nu, \rho) &= \pi^\omega i^{2-\rho-2\omega} 2^\rho (n^2)^{\frac{\rho+1}{2}} (p^2)^{-\mu-\nu+\omega-\frac{\rho-1}{2}} (pn) \\
& * \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\mu + \nu + \frac{\rho}{2} - \omega + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\omega - \mu - \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu) \Gamma(\rho) \Gamma(2\omega - \mu - \nu - \rho)} \right. \\
& * \Gamma\left(\omega - \nu - \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2}\right) F_{3,2}\left(\mu + \nu - \omega + \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2}, -\mu - \frac{\rho}{2} + \omega + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \nu + \frac{\rho}{2} - \omega + \frac{3}{2}; y\right) \\
& + y^{\omega - \frac{1}{2} - \nu - \frac{\rho}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(\omega - \nu) \Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2} - \omega + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu) \Gamma(\rho) \Gamma\left(-\nu - \frac{\rho}{2} + \omega + 1\right)} \\
& \left. * F_{3,2}\left(\mu, \omega - \nu, 2\omega - \mu - \nu - \rho; -\nu - \frac{\rho}{2} + \omega + 1, -\nu - \frac{\rho}{2} + \omega + \frac{1}{2}; y\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$F_{2,1}(0, b; c; y) = F_{2,1}(a, b; c; 0) = 1,$$

$$F_{2,1}(a, b; c; y) = F_{2,1}(b, a; c; z) = (1-y)^{-a} F_{2,1}\left(a, c-b; c; \frac{y}{y-1}\right),$$

$$F_{3,2}\left(a, b, \frac{a+b}{2}; a+b-1, \frac{a+b+1}{2}; y\right) = F_{2,1}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}; \frac{a+b-1}{2}; y\right) F_{2,1}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{a+b+1}{2}; y\right),$$

5.3. Kullanılan İntegrallerin Tensör Yapısının Sadeleştirilmesi

Bu çalışmada ie reçetesini kullanarak yaptığımız hesaplamalarda aşağıdaki türde integrallerle karşılaşmaktadır.

$$J^+(\mu, \nu, \rho; i, j, \dots, k) = \int \frac{q_i q_j \dots q_k d^{2\omega} q}{(q^2)^\mu [(p-q)^2]^\nu (qn + i\varepsilon)^\rho} \quad (5.3.1)$$

Kolaylıkla gösterilebilir ki bu integral eğer $r > l$ ise

$$J^+(\mu, \nu, \rho; i, j, \dots, k) = (-1)^l \frac{(\rho-l-1)!}{(\rho-1)!} \frac{\partial^l}{\partial n_i \partial n_j \dots \partial n_k} J^+(\mu, \nu, \rho-l) \quad (5.3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $l, J^+(m,n,r;i,j,\dots,k)$ tensörünün rankıdır. Böylece $J^+(m,n,r)$ nin türevini alarak (5.3.1) türündeki integrallerin sonucuna ulaşmış oluruz. Örnek olarak aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz.

$$1) J(\mu, \nu, \rho; i) = \left[\frac{\rho n_i}{\rho-1} - \frac{p_i}{(\rho-1)(pn)} \right] J_1(\mu, \nu, \rho-1) + n_i J_2(\mu, \nu, \rho-1)$$

$$2) J(\mu, \nu, \rho; i, j) = -\frac{\delta_{ij}}{\rho-2} J_1(\mu, \nu, \rho-2) - \frac{n_i p_j + n_j p_i}{(\rho-2)(pn)} J_1(\mu, \nu, \rho-2) \\ + \frac{\rho+1}{\rho-2} n_i n_j J_1(\mu, \nu, \rho-2) + \left[-\frac{\delta_{ij}}{\rho-1} + \frac{\rho}{\rho-1} n_i n_j \right] J_2(\mu, \nu, \rho-2),$$

$$3) J(\mu, \nu, \rho; i, j, k) = \left[-\frac{\rho}{(\rho-1)(\rho-3)} (\delta_{ij} n_k + \delta_{jk} n_i + \delta_{ik} n_j) \right. \\ + \frac{\delta_{ij} p_k + \delta_{ik} p_j + \delta_{jk} p_i}{(\rho-1)(\rho-3)(pn)} - \rho \frac{n_i n_k p_j + n_j n_k p_i + n_i n_j p_k}{(\rho-1)(\rho-3)(pn)} \\ \left. + \frac{\rho(\rho+2)}{(\rho-1)(\rho-3)} n_i n_j n_k \right] J_1(\mu, \nu, \rho-3) + \left[-\frac{1}{\rho-2} (\delta_{ij} n_k + \delta_{ik} n_j + \delta_{jk} n_i) \right. \\ \left. + \frac{\rho+1}{\rho-2} n_i n_j n_k \right] J_2(\mu, \nu, \rho-3)$$

Yukarıda örneklediğimiz yöntem sadece $r > l$ için geçerlidir. Fakat bu çalışmada karşılaşılan integrallerde $\rho \geq l$ olabilir. $r=l$ durumu için karşılaşılan integralleri belirsiz katsayılar yöntemini uygulayarak hesaplayabiliriz. Bu yöntemde izlenen yol şöyledir. Hesaplanan integral mümkün olabilen tüm tensör yapılarının toplamı şeklinde gösterilir. Toplamın her teriminin belirsiz bir katsayısı vardır. Elde edilen eşitlik $n_i n_j \dots n_k p_i p_m \dots p_n$ türündeki tensörlerle çarpılarak belirsiz katsayılar için bir lineer denklem sistemi elde edilir. Örneğin;

$$J(\mu, \nu, l; i) = \int \frac{q_i d^{2\omega} q}{(q^2)^\mu [(p-q)^2]^\nu (qn + i\varepsilon)} = Ap_i + Bn_i \quad (5.3.3)$$

şeklinde düşünülür. Bu eşitliğe tekabül eden terimleri n_i ve p_i ile çarparsak A ve B katsayıları için aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} A(pn)+B &= R(\mu,\nu) \\ Ap^2 + B(pn) &= \frac{p^2}{2} J(\mu,\nu,1) + \frac{1}{2} J(\mu-1,\nu,1) - \frac{1}{2} J(\mu,\nu-1,1) \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Burada

$$R(\mu,\nu) = \int \frac{d^{2\omega} q}{(q^2)^\mu [(p-q)^2]^\nu}$$

yapısında bir integraldir. Buna göre (5.3.4) sistemindeki katsayıların bulunmasıyla (5.3.3) integralinin çözümü

$$\begin{aligned} J(\mu,\nu,1;i) &= \frac{1}{2} \frac{p_i - (np)n_i}{p^2 (np)^2} \left[p^2 J(\mu,\nu,1) + J(\mu-1,\nu,1) - J(\mu,\nu-1,1) \right] \\ &\quad - \frac{p^2 n_i - (np)p_i}{p^2 - (np)^2} R(\mu,\nu) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki

$$R(\mu,\nu) = \pi^\omega \frac{\gamma(\omega - \mu)\Gamma(\omega - \nu)\Gamma(\mu + \nu - \omega)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(2\omega - \mu - \nu)} (p^2)^{-(\mu+\nu-\omega)}$$

değerindedir.

SONUÇ ve TARTIŞMALAR

Belli olduğu gibi Kuantum Kromodinamiğinde herhangi bir olayın incelenmesi , bizi, bu olayı ifade eden Feynman diyagramlarının hesaplanması problemine getirmektedir. Bu diyagramların hesaplanma kuralları, oluşturucu fonksiyonelin seriye açılımından alınmaktadır. Bu kurallara göre, ilmek içeren diyagramlar hesaplanırken iç çizgiler üzerinden hesaplamalar yapılması gerekir. Eksenel ayarda gulyon propagatörü $1/(nk)^l$ şeklinde kutba sahip olduğundan ilmekli integraller hesaplanırken zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu zorlukları gidermek için bir takım reçeteler (PV , n_m^* ve diğerleri) ileriye sürülmüştür. Fakat bu reçeteler ortaya çıkan güçlükleri yapay olarak gideriyordu. Reçetelerin içeriğindeki ifadelerin, teorinin temel kavramlarıyla uyum sağlayıp sağlamadığı belli değildi. İleriye sürülen bu reçeteler bir takım soruları da meydana çıkarıyordu. Bu sorularından önemli olanları aşağıda ifade edilmektedir:

1. Eksenel ayarda gulyon propagatörünün kutba sahip olmasının sebebi nedir (diğer ayarlarda gulyon propagatörü kutba sahip değildir.)?
2. İntegrallerin sonuçları kutupların çevrenme şekline bağlı olduğu için, ileri sürülen reçetenin elde ettiği sonucun doğruluk derecesi belirsizlik taşıyordu. Öyleyse, ilmekli diyagramların hesaplanmasında ileri sürülen bu reçeteler teorinin temel özellikleriyle (Üniterlik, Ward Özdeşliği'nin sağlanması, gost taneciklerinin giderilmesi v.d.) uyum sağlıyor mu?
3. Acaba yapay yolla değil de doğrudan doğruya kuantumlama yöntemlerinden kutupların çevrenme kuralını bulabilirmiyiz ?

Bu çalışmada eksenel ayarda gulyon propagatöründeki kutuplarla ilgili güçlüklerin giderilmesi, yukarıdaki ve benzer türdeki soruların yanıtlanması yer almaktadır.

Bu çalışmada, $(n_\mu - i\varepsilon \partial_\mu^\perp)A_\mu^a(x)=0$ şeklinde genelleştirilmiş aksel ayar ileri sürülmüş ($\varepsilon \rightarrow 0$ limitinde standart aksel ayar koşuluna dönüşür) ve fonksiyonel integrasyon yöntemi kullanılarak gulyon propagatörü hesaplanmıştır. Bu propagatörde kutuplar artık mevcut değildir. İlmekli diyagramların hesaplanmasında ortaya çıkan tekilliklerin giderilmesi kuantumlama yönteminden doğrudan doğruya elde edilmiştir (Reçetelerde olduğu gibi yapay yolla değil!). Reçeteler yalnız tek ilmekli diyagramları hesaplamaya olanak sağlayıp çok ilmekli diyagramların nasıl hesaplanacağını açıklayamıyorlardı. Bu çalışmada gösterilen yöntem çok ilmekli diyagramlara da uygulanabilir. Öte yandan öne sürdüğümüz genelleştirilmiş aksel ayarda $\varepsilon \neq 0$ değerlerinde Ward Özdeşliği'nin, gulyon-gost-gost tepe fonksiyonunun, gost propagatörünün ve diğer niceliklerin nasıl değiştiğini izlemeye olanak sağlayacaktır (Reçetelerden farklı olarak!).

Böylece incelenen teorinin özellikleri kaybedilmeden, aksel ayarda, ilmekli diyagramların hesaplanmasında karşılaşılan güçlükler giderilmiş olacaktır.

Son olarak şunu da eklemeliyiz ki Abel tipli olmayan ayar teorilerinin kuantum istatistiğinde benzer zorluklar mevcuttur. Bu çalışmada ileri sürülen yöntemlerin kullanılması kuantum istatistiğindeki benzer problemlerin de giderilmesini sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- BASSETTO, A. , CLAFALONI , M. , MARCHESINI , G . ,1983.JET Structure and infrared sensitive quantities in perturbative QCD.Phys.Rev., 100-4,201-272.
- BASSETTO , A. , LAZZIZZERA , I . , SOLDATI , R . ,1983.A absence of Gribov copies in the space-like planar gauge.Phys.Lett.,131B-1-2-3,177-178.
- BASSETTO, A. , 1993. Renormalization of Yang-Mills Theories in Light-Cone Gauge. Phys. Rev. D-47, 727-729.
- BECCHI , C . , 1992 , Renormalization of Gauge Theories - A Regularization Independent Approach. Nucl . Phys . , B-S29B , 11-18.
- BERN , Z . , DIXON , L . , KOSOWER , D . A . , 1993. Dimensionally Regulated One-Loop Integrals . Phys. Lett. B-302, 299-308.
- CALLAN , C . G . , DASHEN , R . , GROSS , D . J . ,1978 . Toward A Theory of The Strong Interactions.Phys. Rev., D17-10, 2717-2763.
- CAPPER , D . M . , LEIBBRANDT , G . ,1982. Ward Identities in A General Axial Gauge. I. Yang-Mills Theory, Phys. Rev., D25-4, 1002-1008.
- CARACCILO , S . , CURCI , G . , MENOTTI , P . , 1982. The Propagator in The $A_0=0$ Gauge , Phys.Lett.113B-4 , 311-314.
- CHAN, H . S . , HALPERN , M . B . , 1985. New Ghost-Free Infrared-soft Gauges. Phys. Rev. D33-2,540-547.
- CHENG , H . , TSAI , E . C . ,1986 . Ghostless Feynman Rules in Non-Abelian Gauge Theories,Phys. Rev.,D34-12, 3858-3862.
- CHENG , H . , TSAI , E . C . , 1986. Inconsistency of Feynman Rules via Path Integration , Phys, Rev.Lett., 57-5,511-514.
- DAVYDYCHEV, A . I . , TPUSK , J . B . , 1993. 2-Loop Self-EnergyDiagrams With Different Masses and The Momentum Expansion. Nucl.Phys. B-397, 123-142.
- DELBOURGO , R . , SALAM , A . , STRATHDEE , J . , 1974. Scalar Multiplets and Asymptotic Freedom. Nuovo Cim.,23A-2 , 237-256.
- FACHIN , S . P . , 1993. Quantization of Yang-Mills Theory Without Gribov Copies Perturbative Renormalization . Phys.Rev., D-47, 3487-3495.

- FADEEV , L. D. and SLAVNOV , A . A . , 1980. Introduction to Quantum Theory. Benjamin / Cummings, Reading , MA.
- FRADKIN , E . S . , KALASHNIKOV, O.K., 1976. Renormalized Set of Equations for The Green Functions and Its Asymptotical Solution in The Gauge Field Theory With Fermions. Acta . Phys. 75-1-2, 81-95, Austriaca.
- FRENKEL , J . , TAYLOR , J.C., 1976 . Asymptotic Freedom in The Axial and Coulomb Gauges. Nucl. Phys., B108-3, 397-408.
- FRENKEL , J . , MEULDERMANS , R . , 1976. Infrared Behaviour of Self-Energy Functions in The Axial Gauge. Phys. Lett., 65B-1, 64-68.
- FROLOV , S . A., SLAVNOV. A.A., 1993. An Invariant Regularization of The Standard Model. Phys.Lett., B-309. 304-350.
- GELL-MANN , M . , 1964. A Schematic Model of Baryons and Mesons. Phys. Lett., 8-3, 214-215.
- GRIBOV, V . N . , 1978. Quantization of Non-Abelian Gauge Theories. Nucl.Phys., B139-1, 1-19.
- GROSS, P . J . , WILZEK , F., 1973. Ultraviolet Behaviour of Non-Abelian Gauge Theories. Phys. Rev.Lett., 30-26, 1343-1346.
- HUANG , K . , 1982. Quarks, Leptons and Gauge Fields. World Scientific. Massachusetts, USA .
- KONETSCHNY , W . , KUMMER, W., 1975. Ghost-Free Non-Abelian Gauge Theory Renormalization and Gauge Invariance. Nucl.Phys., B100-1, 106-124.
- KONETSCHNY , W . , KUMMER, W., 1976. Unitarity in The Ghost-Free Axial Gauge. Nucl.Phys., B108-3, 397-408.
- KUMMER , W . , 1975. Ghost-Free Non-Abelian Gauge Theory. Acta. Phys., 41-3-4, 315-334, Austriaca.
- LANDSHOFF, P.V. , 1986. The Propagator in Axial Gauge. Phys.Lett., 69B-1, 69-72.
- LEE , H . C . , MILGRAM , M . S . , 1985. On The Axial Gauge: Ward Identities and The Separation of infrared and Ultraviolet Singularities by Analytic Regularization. J.Math.Phys., 26-7, 1793-1804.
- LEIBBRANDT , G . , 1987. Introduction to Noncovariant Gauges. Rev.Mod.Phys., 59-4. 1067-1119.
- LEIBBRANDT , G . , 1994. Noncovariant Gauges. World Scientific , USA.

- MANDELSTAM , S . , 1983. Light-Cone Superspace and The Ultraviolet Finiteness of the N=4 Model. Nucl.Phys., B213-1, 149-168.
- MCKEON , D . G . C . , 1993. On Using The Quantum Mechanical Path-Integral in Quantum Field Theory. Annals of Physics, 224,139-154.
- MUTA , T . , 1987. Foundations of Quantum Chromodynamic World Scientific. Singapore.
- PAPAVASSILIOU , J . , 1993. Gauge-Invariant 4-Gluon Vertex and Its Ward Identity.Phys.Rev. D-47,4728-4738.
- PARWANI , R . R . , 1993. Dimensionality of Spacetime as a Gauge-Invariance Parameter in Yang-Mills Calculations. Phys.Rev., D-48,3852-3859.
- POLYAKOV, A . M . , 1975, Compact Gauge Fields and The Infrared Catastrophe . Phys.Lett., 59B-1,82-84.
- RAMOND, P.,1989 . Field Theory A Modern Primer.2 nd ed. Addison-Wesley,USA.
- RIVERS , R . J . , 1987. Path Integral Methods in Quantum Field Theory . Cambridge University Press. Cambridge.
- SCHWINGER , J . , 1963. Non-Abelian Gauge Fields.Lorentz Gauge Formulation. Phys.Rev.,130-1, 402-405.
- SINGER , I . M . , 1978. Some Remarks On TheGribov Ambiguity. Commun. Math. Phys.,60-1,7-12.
- SOLOYEV, M . A . ,1993. Local Gauge and UV Divergences.Jetp.Lett., 57, 397-399.
- STEINER , F . , 1986. A New Improved Temporal Gauge: The Soft Temporal Gauge. Phys.Lett., 173B-3, 321-326.
- TAKAHASHI , Y . , 1957. On The Generalized Ward Identity. Nuovo Cim., 6-2, 371-375.
- TAYLOR . J . C . ,1971. Ward Identities and Charge Renormalization of The Yang-Mills Field.Nucl.Phys., B33-2, 436-444.
- 'T HOOFT , G . , 1974. A Two Dimensional Model For Mesons. Nucl. Phys. B75-3, 461-470.
- VELIEV , E. Kh.,KARNAUKHOV , S.N., FAINBERG , V. Ya . , 1988. Quantization of Yang-Mills Field in Modified Axial Gauge. Sov.s.Nucl.Phys.49(6), 21,21, USSR.

- WARD , J . C . , 1950. An Identity in Quantum Electrodynamics Phys.Rev., 78-2, 182.
- WILSON , K . G . , 1974. Confinement of Quarks. Phys. Rev.,D10-8, 2445-2459.
- YANG , C . N . , MILLS, R.L., 1954. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance Phys.Rev., 96-1, 191-195.
- ZUBERD , J.B. , ITZYKSON, C. , 1980. Quantum Field Theory. Mc Graw-Hill, New York.
- ZWEIG , G . , 1964. CERN Preprints, 401-412.



EK

$$\frac{1}{(k^2 + i\varepsilon)} = \frac{i^{-\mu}}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} d\alpha \alpha^{\mu-1} \exp(i\alpha k^2),$$

$$\frac{1}{((p-k)^2 + i\varepsilon)^\nu} = \frac{i^{-\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} d\beta \beta^{\nu-1} \exp(i\beta(p-k)^2),$$

$$\frac{1}{((k\eta) + i\varepsilon)^\rho} = \frac{i^{-\rho}}{\Gamma(\rho)} \int_0^{\infty} d\gamma \gamma^{\rho-1} \exp(i\gamma(k\eta)),$$

$$\frac{1}{((k\eta) - i\varepsilon)^\rho} = \frac{i^{2\rho}}{(-(k\eta) + i\varepsilon)^\rho} = \frac{i^\rho}{\Gamma(\rho)} \int_0^{\infty} d\gamma \gamma^{\rho-1} \exp(-i\gamma(k\eta)),$$

$$\begin{aligned} I(\mu, \nu, \rho) &= \frac{i^{-\mu-\nu-\rho}}{2\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)} \int d^n k \int_0^{\infty} d\alpha \alpha^{\mu-1} \int_0^{\infty} d\beta \beta^{\nu-1} \exp(i\alpha k^2 + i\beta(p-k)^2), \\ &\quad * \int_0^{\infty} d\gamma \gamma^{\rho-1} \left[\exp(i\gamma(k\eta)) + (-1)^\rho \exp(-i\gamma(k\eta)) \right] \\ &= \frac{i^{-\mu-\nu-\rho}}{2\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)} \int_0^{\infty} d\alpha \alpha^{\mu-1} \int_0^{\infty} d\beta \beta^{\nu-1} \int_0^{\infty} d\gamma \gamma^{\rho-1} \\ &\quad * \exp(i\beta p^2) \int d^n k \exp\left[i\left[\alpha + \beta\right]k^2 - 2\beta(pk)\right] \\ &\quad * \left[\exp(i\gamma(k\eta)) + (-1)^\rho \exp(-i\gamma(k\eta)) \right], \end{aligned}$$

$$\int d^n k \exp\left[i\left((\alpha + \beta)k^2\right) - (2\beta p \pm \gamma\eta, k)\right] = \pi^{n/2} i^{1-n/2} (\alpha + \beta)^{-n/2} \exp\left\{-i \frac{(2\beta p \pm \gamma\eta)^2}{4(\alpha + \beta)}\right\},$$

$$\begin{aligned} I(\mu, \nu, \rho) &= \frac{1}{2} \pi^{n/2} i^{1-\mu-\nu-\rho-n/2} \frac{1}{2\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)} \\ &\quad * \int_0^{\infty} d\alpha \alpha^{\mu-1} \int_0^{\infty} d\beta \beta^{\nu-1} \int_0^{\infty} d\gamma \gamma^{\rho-1} (\alpha + \beta)^{-n/2} \\ &\quad * \exp\left[i(\beta p^2)\right] \left\{ \exp\left[-i \frac{(2\beta p - \gamma\eta)^2}{4(\alpha + \beta)}\right] + (-1)^\rho \exp\left[-i \frac{(2\beta p + \gamma\eta)^2}{4(\alpha + \beta)}\right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \pi^{n/2} i^{1-\mu-\nu-\rho-n/2} \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)} \\
& * \int_0^\infty d\alpha. \alpha^{\mu-1} \int_0^\infty d\beta. \beta^{\nu-1} \int_0^\infty d\gamma. \gamma^{\rho-1} (\alpha + \beta)^{-n/2} \\
& * \exp \left[i \left[\beta p^2 - \frac{\beta^2}{(\alpha + \beta)} p^2 - \frac{\gamma \eta^2}{4(\alpha + \beta)} \right] \right] \\
& * \left\{ \exp \left[i \frac{\beta \gamma (p \eta)}{(\alpha + \beta)} \right] + (-1)^\rho \exp \left[-i \frac{\beta \gamma (p \eta)}{(\alpha + \beta)} \right] \right\}, \quad \rho \text{ çift sayıdır.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(\mu, \nu, \rho) &= \pi^{n/2} i^{1-\mu-\nu-\rho-n/2} \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)} \\
& * \int_0^\infty d\alpha. \alpha^{\mu-1} \int_0^\infty d\beta. \beta^{\nu-1} \int_0^\infty d\gamma. \gamma^{\rho-1} (\alpha + \beta)^{-n/2} \\
& * \exp \left[i \left[\frac{\alpha \beta p^2}{(\alpha + \beta)} - \frac{\gamma \eta^2}{4(\alpha + \beta)} \right] \right] \cos \left[\frac{\beta \gamma (p \eta)}{(\alpha + \beta)} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= \lambda \\
\alpha &= \lambda \xi \\
\beta &= \lambda(1-\xi) \\
\frac{D(\alpha, \beta)}{D(\lambda, \xi)} &= \begin{vmatrix} \xi & 1-\xi \\ \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = -\xi \lambda - \lambda + \xi \lambda = -\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(\mu, \nu, \rho) &= \pi^{n/2} i^{1-\mu-\nu-\rho-n/2} \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)} \\
& * \int_0^\infty d\lambda. \lambda^{\mu+\nu-1-n/2} \int_0^1 d\xi \xi^{\mu-1} (1-\xi)^{\nu-1} \\
& * \int_0^\infty d\gamma. \gamma^{\rho-1} \exp \left[i \left[\lambda \xi (1-\xi) p^2 - \frac{\gamma^2 \eta^2}{4\lambda} \right] \right] \cos[(1-\xi)\gamma(p\eta)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty d\gamma. \gamma^{\rho-1} \exp \left[-i \frac{\gamma^2 \eta^2}{4\lambda} \right] \cos[(1-\xi)\gamma(p\eta)] \\
& * \int_0^\infty d\lambda. \lambda^{\mu+\nu-1-n/2} \exp \left[i \left[\lambda \xi (1-\xi) p^2 - \frac{\gamma^2 \eta^2}{4\lambda} \right] \right] \\
& = 2 \left[\frac{\gamma^2 \eta^2}{4\xi(1-\xi)^2} \right]^{\frac{1}{2}(\mu+\nu-n/2)} e^{i\frac{\pi}{2}(\mu+\nu-n/2)} K_{(\mu+\nu-n/2)} \left(\gamma \sqrt{p^2 \eta^2 \xi(1-\xi)} \right) \\
& = 2 \left[\frac{\gamma^2 \eta^2}{4\xi(1-\xi)p^2} \right]^{\frac{1}{2}(\mu+\nu-n/2)} i^{(\mu+\nu-n/2)} K_{(\mu+\nu-n/2)} \left(\gamma \sqrt{p^2 \eta^2 \xi(1-\xi)} \right)
\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty d\gamma. \gamma^{\mu+\nu+\rho-1-n/2} \cos[(1-\xi)\gamma(p\eta)] K_{(\mu+\nu-n/2)} \left(\gamma \sqrt{p^2 \eta^2 \xi(1-\xi)} \right)$$

$$\alpha = \mu + \nu + \rho - n/2$$

$$b = (1-\xi)(pn)$$

$$\nu = (\mu + \nu - n/2)$$

$$c = \sqrt{p^2 \eta^2 \xi(1-\xi)}$$

$$\delta = 0$$

$$-\frac{b^2}{c^2} = -\frac{(1-\xi)^2 (pn)^2}{p^2 \eta^2 \xi(1-\xi)} = -\frac{(1-\xi)y}{\xi}$$

$$= \frac{2^{\mu+\nu+\rho-n/2-2}}{[p^2 \eta^2 \xi(1-\xi)]^{1/2(\mu+\nu+\rho-n/2)}} \Gamma\left(\mu + \nu + \frac{\rho}{2} - \frac{n}{2}\right) \\ * \Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} \mu + \nu + \rho/2 - n/2, \rho/2 \\ 1/2 \end{matrix} \middle| -\frac{(1-\xi)y}{\xi}\right)$$

$$I(\mu, \nu, \rho) = \pi^{n/2} i^{1-\rho-n} 2^{2-\mu-\nu+n/2+\mu+\nu+\rho-n/2-2-1} \\ *(p^2)^{-1/2(\mu+\nu-n/2)-1/2(\mu+\nu+\rho-n/2)} (\eta^2)^{1/2(\mu+\nu-n/2)-1/2(\mu+\nu+\rho-n/2)} \\ * \frac{\Gamma(\mu + \nu + \rho/2 - n/2)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)} \int_0^1 d\xi \xi^{\mu-1-1/2(\mu+\nu-n/2)-1/2(\mu+\nu+\rho-n/2)} \\ *(1-\xi)^{\nu-1-1/2(\mu+\nu-n/2)-1/2(\mu+\nu+\rho-n/2)} \\ * {}_2F_1\left(\begin{matrix} \mu + \nu + \rho/2 - n/2, \rho/2 \\ 1/2 \end{matrix} \middle| -\frac{(1-\xi)y}{\xi}\right)$$

$$I(\mu, \nu, \rho) = \pi^{n/2} i^{1-\rho-n} 2^{\rho-1} (p^2)^{n/2-\mu-\nu-\rho/2} (\eta^2)^{-\rho/2} \\ * \frac{\Gamma(\mu + \nu + \rho/2 - n/2)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)} \int_0^1 d\xi \xi^{\mu-1-\rho/2-1} (1-\xi)^{n/2-\nu-\rho/2-1} \\ * {}_2F_1\left(\begin{matrix} \mu + \nu + \rho/2 - n/2, \rho/2 \\ 1/2 \end{matrix} \middle| -\frac{\xi y}{1-\xi}\right)$$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds (-z)^s \frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)}$$

$$\int_0^1 d\xi \xi^{\mu-1-\rho/2-1} (1-\xi)^{n/2-\nu-\rho/2-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \mu + \nu + \rho/2 - n/2, \rho/2 \\ 1/2 \end{matrix} \middle| -\frac{\xi y}{1-\xi}\right) \\ = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\mu + \nu + \rho/2 - \eta/2)\Gamma(\rho/2)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds y^s \frac{\Gamma(-s)\Gamma(\mu + \nu + \rho/2 - \eta/2 + s)\Gamma(\rho/2 + s)}{\Gamma(1/2 + s)} \\ * \int_0^1 d\xi \xi^{\mu-1-\rho/2-1+s} (1-\xi)^{n/2-\nu-\rho/2-1-s}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu + \nu + \frac{\rho}{2} - \frac{\eta}{2})\Gamma(\frac{\rho}{2})} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds y^s \\
&\quad * \frac{\Gamma(-s)\Gamma(\mu + \nu + \frac{\rho}{2} - \frac{\eta}{2} + s)\Gamma(\frac{\rho}{2} + s)\Gamma(\frac{\eta}{2} - \mu - \frac{\rho}{2} + s)\Gamma(\frac{\eta}{2} - \nu - \frac{\rho}{2} - s)}{\Gamma(\frac{1}{2} + s)\Gamma(n - \mu - \nu - \rho)} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu + \nu + \frac{\rho}{2} - \frac{\eta}{2})\Gamma(\frac{\rho}{2})\Gamma(n - \mu - \nu - \rho)} \\
&\quad * \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-y)^j}{j!} \frac{\Gamma(\mu + \nu - \frac{\rho}{2} - \frac{\eta}{2} + j)\Gamma(\frac{\rho}{2} + j)\Gamma(\frac{\eta}{2} - \mu - \frac{\rho}{2} + j)\Gamma(\frac{\eta}{2} - \nu - \frac{\rho}{2} - j)}{\Gamma(\frac{1}{2} + j)} \right. \\
&\quad \left. + y^{n/2 - \nu - \rho/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-y)^j}{j!} \frac{\Gamma(\mu + \nu - \frac{\rho}{2} - \frac{\eta}{2} - j)\Gamma(\frac{\rho}{2} + j)\Gamma(\frac{\eta}{2} - \mu + \frac{\rho}{2} + j)\Gamma(\frac{\eta}{2} - \nu - \frac{\rho}{2} - j)}{\Gamma(\frac{\eta}{2} - \nu - \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2} + j)} \right\}
\end{aligned}$$

Kutuplar:

$$1) s = j, \quad j = 0, 1, \dots$$

$$2) s = n/2 - \nu - \rho/2 + j, \quad j = 0, 1, \dots$$

$$\operatorname{Re} z \Gamma(-j) = \frac{(-1)^j}{j!}$$

Buradaki birinci toplam:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \frac{\Gamma(\mu + \nu + \frac{\rho}{2} - \frac{\eta}{2} + j)\Gamma(\frac{\rho}{2} + j)\Gamma(\frac{\eta}{2} - \mu - \frac{\rho}{2} + j)}{\Gamma(\frac{1}{2} + j)\Gamma(\nu + \frac{\rho}{2} - \frac{\eta}{2} + 1 + j)} \\
&\quad * \Gamma(\frac{\eta}{2} - \nu - \frac{\rho}{2})\Gamma(\nu + \frac{\rho}{2} - \frac{\eta}{2} + 1)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu + \nu + \frac{\rho}{2} - \frac{\eta}{2})\Gamma(\frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{\eta}{2} - \mu - \frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{\eta}{2} - \nu - \frac{\rho}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$* {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \mu + \nu + \frac{\rho}{2} - \frac{\eta}{2}, \frac{\rho}{2}, \frac{\eta}{2} - \mu - \frac{\rho}{2} \\ \frac{1}{2}, \nu + \frac{\rho}{2} - \frac{\eta}{2} + 1 \end{matrix} \middle| y \right)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z - j)} = (-1)^j \frac{\Gamma(1 - z + j)}{\Gamma(z)\Gamma(1 - z)}$$

$$n = 4 + 2\varepsilon$$

İkinci toplam:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \frac{\Gamma(\mu+j)\Gamma(\frac{n}{2}-\nu+j)\Gamma(n-\mu-\nu-\rho+j)}{\Gamma(\frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}-\frac{1}{2}+j)\Gamma(\frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}+1+j)}$$

$$*\Gamma(\nu+\frac{\rho}{2}-\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}+1)$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\frac{n}{2}-\nu)\Gamma(n-\mu-\nu-\rho)\Gamma(\nu+\rho-\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2})}$$

$$*_F\left(\begin{matrix} \mu, \frac{n}{2}-\nu, n-\mu-\nu-\rho \\ \frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2}, \frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}+1 \end{matrix} \middle| y\right)$$

$$I(\mu, \nu, \rho) = \pi^{n/2} i^{1-\rho-n} 2^{\rho-1} (p^2)^{n/2-\mu-\nu-\rho/2} (\eta^2)^{-\rho/2}$$

$$* \frac{\Gamma(\mu+\nu+\frac{\rho}{2}-\frac{n}{2})\Gamma(\frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)\Gamma(n-\mu-\nu-\rho)}$$

$$*\left\{ \frac{\Gamma(\mu+\nu+\frac{\rho}{2}-\frac{n}{2})\Gamma(\frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-\mu-\frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \right.$$

$$*_F\left(\begin{matrix} \mu+\nu+\frac{\rho}{2}-\frac{n}{2}, \frac{\rho}{2}, \frac{n}{2}-\mu-\frac{\rho}{2} \\ \frac{1}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}-\frac{n}{2}+1 \end{matrix} \middle| y\right)$$

$$+ y^{n/2-\nu-\rho/2} \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\frac{n}{2}-\nu)\Gamma(n-\mu-\nu-\rho)\Gamma(\nu+\rho-\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2})}$$

$$\left. *_F\left(\begin{matrix} \mu, \frac{n}{2}-\nu, n-\mu-\nu-\rho \\ \frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2}, \frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}+1 \end{matrix} \middle| y\right) \right\}$$

$$I(\mu, \nu, \rho) = \pi^{n/2} i^{1-\rho-n} 2^{\rho-1} (p^2)^{n/2-\mu-\nu-\rho/2} (\eta^2)^{-\rho/2}$$

$$*\left\{ \frac{\Gamma(\frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-\mu-\frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2})\Gamma(\mu+\nu+\frac{\rho}{2}-\frac{n}{2})}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)\Gamma(n-\mu-\nu-\rho)} \right.$$

$$*_F\left(\begin{matrix} \frac{n}{2}-\mu-\frac{\rho}{2}, \mu+\nu+\frac{\rho}{2}-\frac{n}{2}, \frac{\rho}{2} \\ \nu+\frac{\rho}{2}-\frac{n}{2}+1, \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| y\right)$$

$$+ y^{n/2-\nu-\rho/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\rho-\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2})}$$

$$\left. *_F\left(\begin{matrix} n-\mu-\nu-\rho, \mu, \frac{n}{2}-\nu \\ \frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}+1, \frac{n}{2}-\nu-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| y\right) \right\}$$

ρ : çifttir.

ÖZGEÇMİŞ

1946 yılında Kağızmanda doğdu. Kars Alpaslan Lisesi'ni bitirdi. 1973 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nden mezun oldu. 1984 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Nükleer Enerji Enstitüsü'nde yüksek lisansı tamamladı.

Öğretmen ve Öğretim Görevlisi olarak çalıştı. Kocaeli Meslek Yüksekokulu'nda müdür yardımcısı olarak bulundu. 1992 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde başkan yardımcısı olarak çalışmaktadır.

