

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇAKIŞIK AĞ SİSTEMİNDE İKİ BOYUTLU, SIKIŞTIRILAMAZ VE LAMİNER
AKIŞ PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR PROGRAM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKİNA MÜH. Mustafa SEÇİLMİŞ

Ana Bilim Dalı : Makina
Programı : Isı - Enerji

MART 1994

38936

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇAKIŞIK AĞ SİSTEMİNDE İKİ BOYUTLU, SIKIŞTIRILAMAZ, LAMİNAR
AKIŞ PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR PROGRAM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Mustafa SEÇİLMİŞ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11 Mart 1994

Tezin Savunulduğu Tarih : 1 Nisan 1994

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hüseyin Şinasi ONUR (.....)
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ruhi KAYKAYOĞLU (.....)
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Haluk ÖRS (.....)

MART 1994

ÇAKIŞIK AĞ SİSTEMİNDE İKİ BOYUTLU, SIKIŞTIRILAMAZ, LAMİNER AKIŞ PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR PROGRAM

Mustafa SEÇİLMİŞ

Anahtar Kelimeler: Sıkıştırılmaz Akış, Sonlu Hacim Yöntemi, Çakışık Ağ Sistemi.

Özet: Bu çalışmada iki boyutlu, zamandan bağımsız ve sıkıştırılmaz türden akışkanların laminar akış problemleri sonlu hacimler yöntemiyle çakışık ağ sisteminde incelenmiştir. Bunun için iki boyutlu, zamandan bağımsız ve sıkıştırılmaz türden akışkanlar için kütle, momentum (Navier - Stokes) ve enerji denklemleri çözülmüştür. Bu türden akış problemlerini çözebilmek için çakışık ağ sisteminde bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Çakışık ağ sisteminin getirdiği bir dezavantaj olan, bağımlı değişkenlerin kontrol hacim merkezinde sıralanmasından dolayı akış problemlerinde oluşan fiziksel olarak anlamsız osilasyonları önleyebilmek için, kontrol hacim yüzeylerindeki kütleli akıları hesaplayabilmek için özel bir enterpolasyon işlemi olan momentum enterpolasyon işlemi kullanılmıştır. Basınç - hız arasındaki ilişki için SIMPLE algoritması kullanılmıştır. Bu çözüm yöntemi iki farklı standart akış test problemi için uygulanmıştır. Sonuçlar bazı yazarların deneysel ve Bench - Mark sonuçları ile mukayese edilmiştir ve iyi sonuçlar elde edilmiştir.

**A FINITE VOLUME COMPUTER PROGRAMME FOR 2 - D, LAMINAR
AND INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW PROBLEMS WITH
COLLOCATED GRID**

Mustafa SEÇİLMİŞ

Keywords: Incompressible Fluid Flow, Finite - Volume, Colocated Grid.

Abstract: A finite - volume method has been presented for calculating two - dimensional, steady, laminar, incompressible fluid flows with numerical colocated grid. The differential equations for conservation of mass, momentum and heat have been solved. A computer programme for the prediction of this kind of flows has been written with colocated arrangement of the variables. A special interpolation procedure (momentum interpolation) for evaluating the mass fluxes at the cell - faces has been used to avoid the nonphysical oscillation of flow variables usually encountered with the cell - centered arrangement. The SIMPLE algorithm has been used to handle the pressure - velocity coupling. This calculating procedure has been applied to two different standart test cases. The results have been compared with experimental and Bench - Mark solutions from other authors and. a good agreement between the solutions have been obtained.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Günümüzde önemi artan ve teknolojinin bir çok alanında uygulama sahası bulan sayısal yöntemlerle fiziksel akış olaylarının simülasyonu, günümüzde özellikle çevre sorunların çözümünde, enerji tasarrufu, araba ve uçak endüstrisi alanlarında geniş uygulama sahası bulmaktadır. Sayısal yöntemlerle fiziksel akış olayların simülasyonu konusu, teorik olarak çözülmesi mümkün olmayan ve endüstride uygulama sahası bulan problemlerin çözümünde büyük öneme sahiptir. Mesela bir akış probleminin üç boyutlu olarak çözülmesi veya kompleks sınır şartlara sahip problemlerin çözümü gibi.

Burada, bana bu konuda çalışma olanağı sağlayan, değerli bilgilerinden istifade olanağı bulduğum ve bilimsel katkıları ile bu çalışmayı gerçekleştirdiğim, aynı zamanda asistanı olduğum ve danışmanlığımı yürüten değerli hocam Prof. Dr. Hüseyin Ş. ONUR' a (K.O.Ü.) ve ayrıca bütün K.O.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü personeline göstermiş oldukları yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	x
TABLolar LİSTESİ	xiii
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
1.1 Konunun İncelenmesi	1
1.2 Kaynak Taraması	5
1.3 Çalışmanın Amacı ve İçeriği	8
BÖLÜM 2. İKİ BOYUTLU, ZAMANDAN BAĞIMSIZ, SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞKANLAR İÇİN TEMEL HAREKET DENKLEMLERİ	10
2.1 Akışkanlar Mekaniğinin Genel Hareket Denklemleri	10
2.1.1 Süreklilik denklemi	10
2.1.2 Momentum denklemi	11
2.1.3 Enerji denklemi	13
2.1.4 Boussinesq - yaklaşımı	17
2.1.5 Denklemlerin boyutsuz hale getirilmesi	18
2.2 Uygun Koordinat Sisteminin Seçimi	20
2.3 Sayısal Çözüm Yöntemi	21
2.4 Sonlu Hacimler Yöntemine Göre Ayrıklaştırma İşlemi	23
2.4.1 Konvektif ve difüzyif terimlerin ayrıklaştırılması	25
2.4.2 Kaynak teriminin ayrıklaştırılması	39
2.5 Ağ Biçimi	31
BÖLÜM 3. ÇÖZÜM YÖNTEMİNİN TANITILMASI	33
3.1 Basınç Düzeltme (SIMPLE) Algoritması	33
3.2 Değişkenlerin Sıralanışı ve Momentum Enterpolasyonu	35

3.2.1 Değişkenlerin sıralanışında karşılaşılan temel sorun	36
3.2.2 Kaydırılmış değişkenli ağ sistemi	36
3.2.3 Çakışık değişkenli ağ sistemi	38
3.3 Cebirsel Denklem Sisteminin Çözümü	41
3.3.1 TDMA (Thomas - Algoritması)	41
3.4 Sınır Şartların Yerleştirilmesi	44
3.4.1 Basamaklı geri akış uygulaması için sınır şartlar	44
3.4.2 Doğal konveksiyon uygulaması için sınır şartlar	46
3.5 Yakınsamanın Tartışılması	48
3.6 Alt - Relaksasyon Katsayısının Kullanılması	49
BÖLÜM 4. BİLGİSAYAR PROGRAMI HAKKINDA BİLGİ	50
4.1 Ana ve Alt Programlarda Kullanılan ve Tanımlanan Değişkenler	52
4.2 Ana ve Alt Programların İncelenmesi	56
4.2.1 Ana program	57
4.2.2 Alt program INIT (NI, NJ)	57
4.2.3 Alt program CALCU ve CALCV	58
4.2.4 Alt program CALCP	60
4.2.5 Alt program CALCT	61
BÖLÜM 5. İKİ BOYUTLU LAMİNAR AKIM OLAYLARINA AİT UYGULAMALAR	62
5.1 Bir Kapalı Kaptaki Laminar Doğal Konveksiyon Akış Olayı	62
5.2 Bir Kanalda Geri Basamaklı Laminar Akış Olayı	77
BÖLÜM 6. SONUÇ	82
BÖLÜM 7. KAYNAKLAR	83
BÖLÜM 8. EKLER	85

8.1.1 Konveksiyon teriminin ayrıklaştırılması	86
8.1.2 Difüzyon teriminin ayrıklaştırılması	87
8.1.3 Hybrid yaklaşımı	89
8.2 Basınç Düzeltme Denklemi ve Momentum Enterpolasyonu	90
ÖZGEÇMİŞ	93



SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

- U : x- doğrultudaki kartezyen hız bileşeni
- V : y- doğrultudaki kartezyen hız bileşeni
- W : z- doğrultudaki kartezyen hız bileşeni
- P : Basınç
- T : Sıcaklık
- ρ : Yoğunluk
- t : Zaman
- x, y, z : Kartezyen koordinatları
- μ : Kinematik vizkosite
- ν : Dinamik vizkozite
- f : Hacimsal kuvvet
- τ : Kartezyen koordinat sisteminde gerilme tansörü
- e : Birim hacime düşen toplam enerji miktarı
- Q : Kontrol hacim yüzeyinden konveksiyonla olan toplam enerji kaybı
- q : Konduksiyonla iletilen enerji miktarı
- k : Isı iletim katsayısı
- g : Yerçekim ivmesi
- Φ_{Diss} : Dissipasyon fonksiyonu

- h : Entalpi
- u : İç enerji
- c_p : sabit basınçta özgül ısı kapasitesi
- P_d : Dinamik basınç
- a_0 : Sıcaklık iletim katsayısı
- Ra : Rayleigh sayısı
- Pr : Prandtl sayısı
- Fo : Fourier sayısı
- L : Karakteristik uzunluk
- U_i : Vektörel hız bileşenlerin tensor notasyonu ile ifadesi
- x_i : Konum vektörünün üç bileşeninin ifadesi
- Γ : Değişken büyüklük
- Φ : Skaler büyüklük
- S : Kaynak terim
- J : Kontrol hacim yüzeyinden geçen toplam akış
- C : Kütleli akı
- α : Alt relaksasyon katsayısı
- a : Cebirsel denklemin katsayısı
- R : Hata farkı

V_{dif} : Difüzyon hız

[L] : Katsayılar matrisi

CALCU : Yatay momentum denkleminin çözümüne ait alt program (subroutine)

CALCV : Düşey momentum denkleminin çözümüne ait alt program (subroutine)

CALCP : Basınç düzeltme denkleminin çözümüne ait alt program (subroutine)

CALCT : Enerji denkleminin çözümüne ait alt program (subroutine)

FV : Sonlu hacimler

FD : Sonlu farklar

SIMPLE: Semi - İmplicit Method for Pressure Linked Equations

TDMA : Tri - Diagonal - Matrix - Algoritma veya Thomas Algoritması

CDS : Merkezi farklar yöntemi (Central Differencing Scheme)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Bir ince ve kaba ağ sistemi (Orth (1991))	3
Şekil 2.1 Koordinat dönüşümü (Orth (1991))	20
Şekil 2.2 Kartezyen koordinat sistemi	21
Şekil 2.3 İki boyutlu hal için kontrol hacim	24
Şekil 2.4 Ayırıklaştırma işlemi için göz önünde bulundurulmuş kontrol hacim	27
Şekil 2.5 Çakışık ağ sisteminin kullanılmasında kontrol hacim ve değişkenlerin dizilişi	29
Şekil 2.6 Tek boyutlu çakışık ağ sisteminde basınç değişkeninin yerleşimi	30
Şekil 2.7 Kullanılan ağ biçimi	32
Şekil 3.1 Çakışık ağ sisteminde tek boyutlu kontrol hacim	36
Şekil 3.2 Kaydırılmış ağ sistemi için değişkenlerin sıralanışı (Patankar (1980))	37
Şekil 3.3 Çakışık ağ sistemine göre değişkenlerin sıralanışı (Periç et al. (1988))	39
Şekil 3.4 Basamak üstünden akış için giriş şartı olarak parabolik hız profili	45
Şekil 3.5 Basınç, sıcaklık ve hızların sınırlardaki konumları	47
Şekil 4.1 Bir laminar doğal konveksiyon akışına ait ana program ve alt programlar	51
Şekil 4.2 Bir basamak üzerinden laminar akışa ait ana ve alt programlar	51
Şekil 4.3 Ana programa ait akış diyagramı	57

Şekil 4.4 Alt program INIT için ağ büyüklükleri	58
Şekil 4.5 CALCU ve CALCV alt programa ait akış diyagramı	59
Şekil 4.6 CALCP alt programa ait akış diyagramı	60
Şekil 5.1 İki kenarı farklı sıcaklıklara sahip bir dörtgen boşluğun geometrik şekli	62
Şekil 5.2 $Ra = 10^3$ için yatay hız profilleri ($x/L= 0.225$, $x/L= 0.525$, $x/L= 0.725$)	68
Şekil 5.3 $Ra = 10^3$ için düşey hız profilleri ($x/L= 0.225$, $x/L= 0.525$, $x/L= 0.725$)	69
Şekil 5.4 $Ra= 10^3$ için eş sıcaklık çizgileri (a) Bu çalışma 22*22 b) Vahl de Davis)	70
Şekil 5.5 $Ra = 10^5$ için yatay hız profilleri ($x/L= 0.225$, $x/L= 0.525$, $x/L= 0.725$)	71
Şekil 5.6 $Ra = 10^5$ için düşey hız profilleri ($x/L= 0.225$, $x/L= 0.525$, $x/L= 0.725$)	72
Şekil 5.7 $Ra = 10^5$ için eş sıcaklık çizgileri (a) Bu çalışma 22*22 b) Hortmann et al. c) Vahl de Davis)	73
Şekil 5.8 $Ra = 10^6$ için yatay hız profilleri ($x/L= 0.225$, $x/L= 0.525$, $x/L= 0.725$)	74
Şekil 5.9 $Ra = 10^6$ için düşey hız profilleri ($x/L= 0.225$, $x/L= 0.525$, $x/L= 0.725$)	75
Şekil 5.10 $Ra= 10^6$ için eş sıcaklık çizgileri (a) Bu çalışma 22*22 b) Hortmann et al. c) Vahl de Davis)	76
Şekil 5.11 Bir basamak üzerinden akış problemi için tutunma uzunlukların konumu	77

Şekil 5.12 Armaly et al. (1983)' e göre tutunma uzunlukları ve ölçü verileri 78

Şekil 5.13 Farklı Reynolds sayıları için x1 tutunma uzunlukların mukayesesi 80

Şekil 5.14 Farklı Reynolds sayıları için hesaplanan hız profilleri (a) $Re = 100$
b) $Re = 389$, c) $Re = 1000$) 80 - 81

Şekil 8.1 Konveksiyon ve difüzyon terimlerin ayrıklaştırma işlemi için kullanılan kontrol hacim 85



TABLolar DİZİNİ

Tablo 1.1 Çözüm Yöntemlerin Hesaplama Süreleri ve İşlem Sayısı	2
Tablo 1.2 Konuyla İlgili Olarak Faydalanılan Çalışmaların Listesi	5
Tablo 2.1 Diferansiyel Denklemlerin Birlikte İfade Edilmesi	23
Tablo 3.1 Sıcaklık Sınır Şartları	47
Tablo 4.1 Geometrik Değişkenler	52
Tablo 4.2 Katsayılar	53 - 54
Tablo 4.3 Bağımlı Değişkenler	54
Tablo 4.4 Sabitler	55
Tablo 4.5 İterasyon	55
Tablo 5.1 Hesaplama Kullarılan Akışkan Özellikleri ve Kap Boyutu	63
Tablo 5.2 Hesaplama Kullarılan Ağ Sayıları ve Ağ Yapısının Hassasiyeti	64
Tablo 5.3 Farklı Ağ Sayılarında ve Farklı Ra Sayılarında Çözümlerin Mukayesesi (a) Ra = 10 ³ , (b) Ra = 10 ⁴ , (c) Ra = 10 ⁵ , (d) Ra = 10 ⁶	65 - 66
Tablo 5.4 Çözölme Bölgelerin Tutunma Uzunlukların Mukayesesi	79

1. GİRİŞ

1.1 Konunun Tanıtılması:

Sayısal çözüm işlemi fiziksel bir olayın teorik tahminini gözlemek açısından faydalı bir yoldur. Günümüzde tekniğin bir çok alanında, özellikle enerji tasarrufu ve enerji kazanımı alanlarında önemli bir yere sahiptir. Bunlara örnek olarak aşağıdaki uygulama alanlarını sayabiliriz:

- Akım etkisinde olan rijit cisimlerin dirençlerini azaltmaya yönelik yapılan optimum şekil tasarımında.
- Rüzgar veya su kuvvetleri etkisinde olan yapıların dayanıklılık analizi.
- Kimyasal reaktörlerde gecikme süresinin ve akışkanların karışım miktarlarının optimizasyonunda.
- Yüksek işletme sıcaklıkları için türbinlerin tasarımında.
- Atmosferik akım olaylarında.
- Elektronik yapı parçaların soğutulmasında.

Bir akım olayının sayısal olarak çözümünün temelini, bir fiziksel olayın teorik tahminini yapabilmek için matematiksel modelinin geliştirilmesi oluşturmaktadır. Akım olayları matematiksel olarak birbiriyle bir sistem içerisinde bir araya bağlanmış kısmi differansiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Bu denklemler lineer olmadıkları için, sistemin tam analitik çözümü mümkün olmamaktadır. Sadece çok basit akım olayları için bu denklemler analitik çözüm verebilecek seviyeye kadar sadeleşmektedirler. Fakat uygulamaya yönelik akım olayları çoğunlukla çok karmaşıktır. Bunun anlamı ise, yapılacak bir çok kabullere rağmen, mesela tek boyuta indirgemek veya laminar bir akış kabulü bile analitik bir çözüm için yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle differansiyel denklem sistemlerin yaklaşık çözümünde sayısal yöntemler kullanılmaktadır.

Akışkanlar mekaniği denklemlerinin sayısal yöntemle çözümünün başlangıcını, hesaplama bölgesinin ayrık noktalara bölünmesi oluşturmaktadır. Ağ noktası olarak adlandırılan bu noktalar için differansiyel denkleminin ayrıklaştırılması sonucu çok sayıda cebirsel denklemler elde edilir. Uygulamaya yönelik problemlerin hesaplanmasında 10^5 - 10^6 bilinmeyenli denklem sistemleri ve buna bağlı olarak bir çok sayıda denklemlerle karşılaşmaktadır. Ağ sayısına ve denklem sayısına bağlı olarak problemin çözümü için gerekli olan hesaplama süreside değişmektedir. Bu süre

çözüm yöntemlerin çoğunda denklem sisteminin büyüklüğüne ve kullanılan ağ nokta sayısına bağlı olarak orantılı artış göstermektedir. Hesaplama süresinin birden fazla değişkene bağlı olması, hesaplama süresini oldukça artırmaktadır. Bu nedenle günümüzde yapılan çalışmalar optimum hesaplama süresine ulaşabilmek için çözüm yöntemler geliştirmeye yöneliktir. Burada optimum hesaplama süresi, hesaplama süresinin sadece lineer olarak ağ nokta sayısına bağlı olarak artış göstermesi anlamına gelmektedir.

Trottenberg' in 1983 yılında cebirsel denklem sistemleri için bazı sayısal çözüm yöntemlerin birbiriyle mukayesesini yapmış olduğu bilinmektedir ((Orth 1991)). Tablo 1.1.' de yapılan bu mukayese ait bir parça gösterilmektedir.

Tablo 1.1. Çözüm Yöntemlerin Hesaplama Süreleri ve İşlem Sayısı

N= 65025 Kafes noktalı ayrıklaştırılmış Poisson - Denkleminin IBM 370/ 158 bilgisayarını ile çözümü için gereken hesaplama süreleri. (Trottenberg, 1983)		
Yöntem	Asimptotik İşlem Sayısı	IBM 370 ile Hesaplama Süresi
Cramer Kuralı	$(N+1)!$	10^{284000} Yıl
Gauss-İndirgeme Yöntemi Band Matrisler için	$\sim N^2$	5.5 Saat
Gauss-Seidel İterasyon Yöntemi	$\sim N^{1.5}$	27.7 Saat
SOR	$\sim N \log N$	20 dakika
ADI	$\sim N \log N$	2.2 dakika
Buneman	$\sim N \log N$	15.5 saniye
Çok Katlı Ağ Yöntemi (Multigrid Approximations)	$\sim N$	7.5 saniye

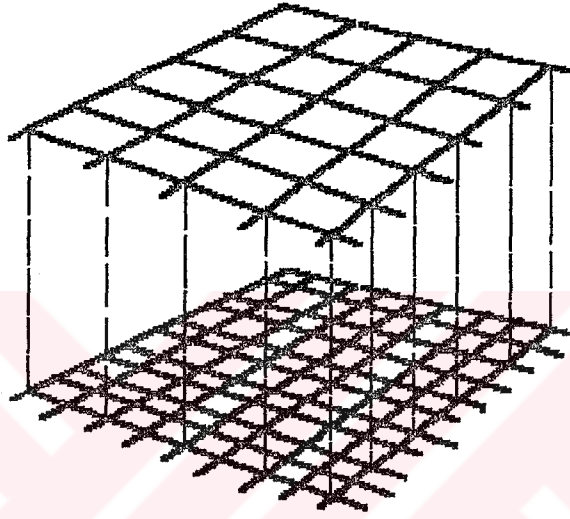
- SOR: Successive Overrelaxation

- ADI: Alternating - Direction Implicit

Tablo 1.1.' den görüleceği üzere çok katlı ağ yöntemleri (Multigrid Approximations) olarak adlandırılan yöntemler günümüzde bilinen en hızlı iteratif yöntemler arasında yer almaktadır. Çok katlı ağ yöntemini takip eden Buneman Yöntemi' de hızlı Poisson denklem çözücü grubuna girsede, pratik uygulamalarda sadece dört köşeli bölgelere

uygulanabilirliği vardır (Orth (1991)). Çok katlı ağ yöntemlerde bu durum söz konusu değildir. Bu yöntemin kullanılmasıyla hesaplama süresi azalacağından, sayısal yöntemin verimliliği de artmış olacaktır.

Çok katlı ağ yöntem temel olarak farklı ağ genişliklerine sahip ağların bir hiyerarşisinin kullanılmasından oluşmaktadır. Şekil 1.1' de çok katlı ağ yönteminde kullanılan bir ince ve buna bağlı bir kaba ağya ait basit bir örnek gösterilmektedir.



Şekil 1.1 Bir ince ve kaba ağ sistemi (Orth (1991))

Yaklaşım hesaplarında, iteratif olarak çözüm hatasını azaltabilmek, büyük oranda kullanılan ağ genişliğinin küçültülmesine bağlıdır. Çözüm hatası kesin ve yaklaşık hesapların çözümleri arasındaki fark olarak tanımlanmaktadır. Çok katlı ağı yönteminde, çözüm hatalarının yüksek frekanslı payları, ağ mesafesine bağlı olarak çok az bir iterasyon adımıyla indirgenmektedir. Küçük frekanslı paylar için ise bu durum söz konusu değildir. Bunun için çok daha fazla iterasyona gerek duyulmaktadır. Bu küçük frekanslı hata payları daha kaba bir ağya transfer edilirse, bu frekanslardan bazıları kaba ağya bağlı olarak yüksek frekanslı olmaktadır ve böylece daha hızlı bir çözüme gitmek mümkün olmaktadır. Bu işlem, küçük frekanslı hataların daha kısa işlem süresi içerisinde indirgenebilecek şekilde, kaba bir ağ elde edilinceye kadar bir çok defa tekrarlanabilir. Bu şekilde çözüm hatasıyla ilgili olarak kaba ağ üzerinde elde edilen bilgiler kademeli olarak ince ağya interpolate edilmekte ve orada zaten elde edilmiş olan yakın çözümü iyileştirmektedir. Sonunda ince ağın hassasiyetine sahip olmaktadır. Esas hesaplama yükü ise kaba ağlar üzerindedir. Bu kaba ağlarda bilinmeyenlerin sayısı fazla olmadığı için daha az hesaplama süresi gerektirmektedir.

Bu çalışmanın amacı nedeniyle çok katlı ağ (Multigrid) yönteme bu çalışmada yer verilmemektedir. Fakat bu çalışmada bu yönteminin kolay uygulanabilirliğini sağlayabilmek için Patankar (1980) tarafından ayrıntılı bir şekilde incelenmiş olan kaydırılmış ağ (staggered grid) sisteminin yerine ilk başarılı uygulaması 1981 yılında Sonlu - Hacimler (Finite - Volume) yöntemiyle akış problemlerine orthogonal olmayan (non - orthogonal) koordinatlarda ve bir çakışık (colocated) değişken düzeninde gerçekleştirilmiş olan ve günümüzde bir çok şahıs ve topluluk tarafından kullanılan, mesela Rhie ana Chow (2), Majumdar et al. (3), Majumdar (4), Perić et al. (5), Rodi et al. (6) ve çakışık ağ (colocated grid) sistemi olarak adlandırılan yöntemin pratikte karşılaşılan sıkıştırılamaz akışkanlar için akım problemlerinin çözümüne uygulanması incelenmektedir.

Kaydırılmış (staggered) ağı yöntemlerin özellikle yüksek Reynold sayılarında oldukça istikrarlı olduğu görülmüştür (Patankar (1980)). Fakat bunların dezavantajı ise büyük hafıza gereksinimi göstermesi ve ayrıca momentum ve süreklilik denklemleri dışında başka denklemlerde dışardan ilave edilmek istenildiği zaman, mesela türbülans modeli veya ilave bir skaler büyüklük çözülmek istenildiği zaman bazı zorluklar oluşmaktadır. Bu denklemler kullanıldığı takdirde ayrı olarak iterasyona tabi tutulması gerekir, bunun sonucunda da diğer denklemler arasında zayıf bir bağlantı mevcut olur. Bu bağlantının zayıflığı ise bütün yöntemin yakınsama hızını belirgin olarak kötüleştirir.

Bu çalışmada sıkıştırılamayan türden akışkanların hareket denklemlerinin çözümünde kullanılan çözüm yöntemiyle, denklemler birbirini izleyen bir dizi şeklinde çözümler ve aralarındaki bağ kullanılan bir iteratif algoritmayla oluşturulur. Burada kullanılan algoritma Patankar (1980)' de ayrıntılı bir şekilde işlenen ve SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) olarak adlandırılan algoritmadır. SIMPLE algoritması ile lineer cebirsel denklem sistemine dönüştürülerek elde edilen denklemler TDMA (Tri - Diagonal - Matrix - Algorithmus) ile çözülmektedir. Bu çalışmanın 3' üncü bölümünde SIMPLE ve TDMA algoritmaları hakkında ayrıntılı bilgi verilmektedir.

1.2. Kaynak Taraması:

Tablo 1.2.' de konuyla ilgili olan ve faydalanılan önemli bazı çalışmalara ait bir bakış verilmiştir.

Tablo 1.2 Konuyla İlgili Olarak Faydalı Çalışmaların Listesi

Yazarlar	Yıl	Çözüm Yöntemi	Düzeltilme Denklemi	Uygulamaları	Türnülan Modeli
1-Periç, Kessler, Scheuerer	1988	FV, çakışık ağ değişkenli	SIMPLE	I-)2-D Backward-facing Step Flow II-) 2-D Lid Driven Square Cavity III-) Circular Pipe	Laminar
2-Rhie, Chow	1983	FV, ordinary grid	SIMPLE	2-D Flow over Airfoils	k-ε
3-Mjumdar, Rodi, Zhu	1992	FV, çakışık ağ değişkenli	SIMPLE	I-) 3-D Flow in a 90 deg Bend of Circularcr. Section II-) 3-D Flow in a S-Shaped Diffuser III-) 3-D Flow over a Surface -Mounted Hemisphere	Laminar
4-Armaly, Durst, Pereira, Schönung	1983	FD ve Deneysel	SIMPLE	2-D Backward-facing step flow	Laminar
5-De Vahl Davis	1983	FD	ADI	2-D Natural Convection in a Square Cavity	Laminar
6-Hortmann, Periç, Scheurer	1990	FV, çakışık ağ değişkenli Multi Grid	SIMPLE	2-D Natural Convection in a Square Cavity	Laminar

ADI- Alternating - Direction Implicit, FD- Sonlu farklar, FV- Sonlu hacimler, coll. değ.= çakışık ağ değişkenli.

Sayısal olarak sıkıştırılmayan ve zamandan bağımsız akışkanların genel hareket denklemlerinin (Navier-Stokes-, Enerji-, Süreklilik- Denklemi) çözümü ile ilgili çok sayıda çalışmalar mevcut olmasına rağmen, bu çalışma içeriği bakımından genel hareket denklemlerinin çözümü ile ilgili sadece bazı temel çalışmalarını kapsamaktadır. Bu çalışmada esas alınan en önemli çalışmaların listesi Tablo 1.2.' de verilmiştir. Ayrıca yukarıdaki listede adı geçmeyen fakat önemli olan bir çalışmada Orth (1991)' un çalışmasıdır. Bu çalışma 1991 yılında Karlsruhe (TH)' da yapılan çok katlı ağ yönteminin sıkıştırılmayan, zamana bağımlı eğrisel kenarlı akım problemlerine uygulamasını kapsayan bir doktora çalışmasıdır. Bu çalışmada 2 ve 3 boyutlu haller

için ve ayrıca laminar ve türbülanslı akış durumları için bazı test problemler, geliştirilen bir yöntemle mukayese edilmiştir. Burada bir türbülans modeli olarak $k-\epsilon$ modeli kullanılmıştır. Bu çalışmanın en önemli özelliğini çakışık ağ kullanılarak çok katlı ağ yöntemiyle genel hareket denklemlerinin çözümünü oluşturmaktır. Bu nedenle bu çalışmada çakışık ağ ve çakışık değişkenler ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca kaydırılmış değişkenli ağ ile mukayesesi yapılmıştır. Bu çalışmada çözüm algoritması olarak SIMPLE kullanılmıştır ve cebirsel denklem sisteminin çözümü için ise Stone (1968) tarafından önerilen ve Perić tarafından 1987 yılında yaptığı bir çalışmayla geliştirilen SIP (SIP- Strongly Implicit Method) yöntemi kullanılmıştır (bak. Orth 1991). Şimdi sırasıyla Tablo 1.2.' de yer alan çalışmaları kısaca inceleyelim.

Bir nolu çalışmada Perić et al. (1988) sonlu hacimler yöntemiyle kaydırılmış değişkenli ağ sistemiyle çakışık olan değişkenli ağ sisteminin mukayesesi incelenmiştir. Mukayese için iki boyutlu hal için üç akış problemi incelenmiştir. Bunlar sırasıyla,

- 1- Üst kenarı hareketli bir dik dörtgen boşlukta laminar akış (lid- driven square cavity flow),
- 2- bir basamak üzerinden laminar akış (backward- facing step flow),
- 3- yuvarlak boruda ani kesit daralması sonucu oluşan akış (circular pipe with a sudden contraction flow).

Kaydırılmış değişkenli ağ sistemine göre çakışık değişkenli ağ sistemi oldukça yeni sayılmaktadır. Buna rağmen sonuçlar mukayese edildiğinde yakınsama hızı, alt relaksasyon parametrelere bağımlılığı, hesapsal çaba ve doğruluk her iki çözüm yöntemi içinde benzerlik göstermektedir. Bazı uygulamalar için çakışık değişkenli ağ yöntemi daha hızlı yakınsamaktadır ve çok katlı ağ tekniğine ve ortogonal olmayan ağlara (ağ) geçişte çok büyük avantajlar sağlamaktadır. Bu çalışmada çakışık değişkenli ağ sisteminin kaydırılmış değişkenli ağ sistemine göre sahip olduğu avantajlar şu şekilde belirtilmiştir: (i) bütün değişkenler bir noktada toplandığı için, burada sadece bir tane kontrol hacim kullanmak yeterli olmaktadır, (ii) bütün değişkenler için konveksiyon teriminin ayrıklaştırılmış denklemindeki katsayısı aynıdır, (iii) karmaşık geometriler için kartezyen hız bileşenleri ortogonal olmayan koordinatlar yardımıyla basit denklemlerle ifade edilebilir, (iv) sayısal ağ olarak elde edilmesi zor olan bazı terimlerin, mesela " eğrisel terimlerin " elde edilmesi basitleşmektedir ve üç boyutluya geçiş kolaylaşmaktadır.

Rhie and Chow (1983) çalışmalarında iki boyutlu, sıkıştırılmayan ve daimi akışta Navier-Stokes denkleminin sonlu hacimler sayısal yöntemiyle eğrisel koordinatlarda

çözümünü incelemişlerdir. Türbülans prosesi için bir $k-\epsilon$ modeli kullanılmıştır. Hesaplama için gövdeye uygun koordinatlar kullanılmıştır. Kaydırılmış ağ yerine, sıradan bir ağ sistemi (çakışık ağ) hesaplama için kullanılmıştır. Bunun sonucu oluşan basınç osilasyonları önleyebilmek amacıyla bir özel yöntem geliştirilmiştir ve bu yöntem hakkında bilgi verilmiştir. Bu yönteme göre basınç düzeltme denkleminin çözümü basit bir yaklaşımla ifade edilecek olursa, momentum sonlu farklar denkleminden türetilerek elde edilmektedir. Sayısal hesaplama sonucu elde edilen sonuçlar deneysel verilerle mukayese edildiğinde, bu çalışmadaki sonuçların deneysel verilerle iyi uyum sağladığı gözlenmiştir.

Majumdar, Rodi ve Zhu (1992) çalışmalarında üç boyutlu eğrisel irregular kenarlar için sıkıştırılamayan akış problemini bir sonlu hacimler yöntemi ile incelemişlerdir. Yöntem yapısal olarak ortogonal olmayan ağ hücre merkezine konumlandırılmış değişkenlerden ve kartezyen hız bileşenlerinden oluşmaktadır. Hücre merkezine konumlandırılmış değişkenlerin problemin fiziğine göre tanımlanmasını sağlamak ve fiziksel olarak anlam taşımayan osilasyonları önleyebilmek için, hücre yüzeylerindeki kütle akılar özel bir enterpolasyon yöntemi ile çözülmektedir (momentum enterpolasyonu). SIMPLE algoritması basınç - hız arasında bir bağ oluşturabilmek için kullanılmıştır. Sayısal çözüm yöntemi bir kaç iç ve dış üç boyutlu laminar akış problemleri için incelenmiştir.

Armaly et al. (1983) bir basamak üzerinden (a single backward-facing step) akışın Laser-Doppler ile ölçülmüş hız dağılımını ve tutunma uzunluğuna bağlı olarak değişimi incelemiştir. Sonuçlar laminar ve türbülanslı hava akışı için $70 < Re < 8000$ değerleri için değerlendirilmiştir. Deneysel sonuçlar, değişik akım rejimlerinin farklı Reynold ve kanal uzunlukların varyasyonlarına bağlı olduğunu göstermiştir. Bu çalışma ayrıca bir kanalda basamaklı laminer geri akışı için sayısal çözülmüş tahmin içermektedir. Kütle ve momentum korunumunun iki boyutlu differansiyel denklemleri çözülmüştür. Sayısal çözümün sonuçları iki boyutlu hal için yapılan yukarıda belirtilen Reynolds aralığı için mukayese edilmiştir ve tartışılmıştır. Bu şartlar altında, deneysel ve sayısal sonuçlar arasında iyi bir uyum elde edilmiştir. Bu çalışma Bölüm 5' de yer alan uygulamalar için aynı akış halı için elde edilen sonuçların mukayesesi için esas oluşturmaktadır.

De Vahl Davis (1983) bu çalışmada düşey yüzeyleri farklı sıcaklıklarda tutulan bir dikdörtgen boşluktaki iki boyutlu doğal konveksiyon problemini tanımlayan denklemlerin doğru bir çözüm verebilmeleri için kullanılan hesaplama yöntemi hakkında ayrıntılı bilgi verilmiştir. İkinci mertebeden merkezi fark yaklaşımı

kullanılmıştır. Kullanılan ağ sayısının artırılmasıyla ve ekstrapolasyon sonucu $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ değerleri için en yüksek Rayleigh sayılarında bile % 1 hatadan daha iyi bir sonuç elde edilmiştir. Bu çalışma bir Bench Mark sayısal sonuç içerdiği için, bu çalışmada geliştirilen programın kontrol edilmesi bakımından ayrı bir öneme sahiptir. (bak. BÖLÜM 5.1).

Hortmann, Perić ve Scheurer' in çalışması bir sonlu hacimli çok katlı ağ yöntemi ile doğal konveksiyon akış probleminin incelenmesini içermektedir. Kullanılan yöntem tamamen korunum prensibine dayanmaktadır ve ikinci mertebeden merkezi farklar konveksiyon ve difüzyon terimleri kullanılmaktadır. Sonuçlar ise, düşey yüzeyleri farklı sıcaklıklarda tutulan ve tavan ve taban yüzeyleri izolasyonlu bir dikdörtgen boşlukta bir akış problemini içermektedir. 10^4 , 10^5 ve 10^6 Rayleigh sayıları için akış problemi incelenmiştir ve Bench - Mark sonuçları içermektedir. Bu çalışmanın özellikle çakışık değişkenli ağ kullanılarak sonuçların elde edilmiş olması açısından ve ayrıca sayısal çözüm sonuçlarının, bu çalışmada benzeri incelenen doğal konveksiyon akış problemin sonuçları ile mukayese etme olanağı sağlaması nedeniyle ayrı bir öneme sahiptir.

1.3. Çalışmanın Amacı ve İçeriği

Bu çalışmanın amacı, daha önceki kısımlarda yüzeysel olarak tanıtılan ve adı geçen bir çakışık değişkenli ağ sisteminde akışkanın temel hareket denklemlerini çözebilen bir bilgisayar programını geliştirmektir.

Rhie et al. (1983), Majumdar et al. (1992), Hortmann et al. (1983), Perić et al. (1988) ve Majumdar (1988) çalışmaları esas alınmak suretiyle zamandan bağımsız, iki boyutlu, sıkıştırılamayan akışlar için, kartezyen koordinatlarda geliştirilen bu programda bütün bağımsız değişkenler bir kontrol hacmin merkezinde depolanmıştır. Temel akım denklemleri kontrol hacim üzerinden integrasyon sonucu kütle ve momentum dengesini ifade eden diferansiyel denklemlere dönüştürülmektedir. Bu şekilde ayrıklaştırılan denklemler ardarda SIMPLE - algoritmasına göre çözülür. Cebirsel denklem sisteminin çözüm yöntemi olarak TDMA (Tri-Diagonal-Matrix- Algoritma) veya Thomas- Algoritması olarak bilinen algoritma kullanılmıştır.

Kontrol için akım problemlerin seçiminde aşağıdaki kriterler gözönünde bulundurulmuştur:

- başka yazarların sayısal veya deneysel verileri mukayese için mevcut olmalı.
- incelenen akım problemleri pratiğe yönelik olmalı ve uygulanabilirliği olmalı.
- sayısal çözüm sonuçlarını doğru değerlendirebilmek için, iyi belgelenmiş standart akım problemlerinin olmasına dikkat edilmeli.

Bölüm 2' de temel hareket denklemlerinin kartezyen koordinat sisteminde ayrıklaştırılması incelendikten sonra Bölüm 3' de çözüm yöntemi hakkında bilgi verilecektir. Burada çakışık değişkenli ağ ile kaydırılmış değişkenli ağ arasında bir mukayese yapılmakta, SIMPLE algoritması, TDMA denklem sisteminin çözüm algoritması ve ayrıca sınır şartların yerleştirilmesi hakkında bilgi verilecektir. Bölüm 4' de bu çalışmanın gayesini oluşturan akış problemlerin çözümü için geliştirilen bilgisayar programı hakkında bilgi yer almaktadır. Bölüm 5' de ise iki boyutlu laminar akış problemlerine ait uygulamalar ve elde edilen sonuçlar yer almaktadır. Bölüm 6' olan son bölüm ise sonuç kısmını oluşturmaktadır.

2. İKİ BOYUTLU, ZAMANDAN BAĞIMSIZ, SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞKANLAR İÇİN TEMEL HAREKET DENKLEMLERİN AYRIKLAŞTIRILMASI

2.1. Akışkanlar Mekaniğinin (Akışkan Ortamların) Genel Hareket Denklemleri:

Akış olaylarının hesaplanması için kütle, momentum ve enerji korunumu denklemleri temel oluşturmaktadır. Matematiksel olarak bakıldığında karşımıza bir kısmi differansiyel denklemler sistemi çıkmaktadır. Taşınım denklemleri olarak da adlandırılan bu denklemler bir fiziksel büyüklüğün, mesela sıcaklık gibi, bir skaler büyüklüğün veya yönü ve şiddeti olan hız gibi bir vektörel büyüklüğün taşınmasını ifade etmektedirler. İki boyutlu, zamandan bağımsız ve sıkıştırılmıyan türden Newtonien akışkan için bir akım olayının eksiksiz olarak incelenebilmesi için beş bağımsız değişken olan yoğunluk, vektörel büyüklük olan hızın iki bileşeni yatay hız bileşeni U ve düşey hız bileşeni V, basınç P ve sıcaklık T gereklidir.

Takiben sırasıyla taşınım denklemlerini oluşturan süreklilik denklemi, momentum denklemi ve enerji denklemi incelenmiştir.

2.1.1. Süreklilik denklemi:

Süreklilik denklemi kütle korunumu prensibinden elde edilir. Hareketsiz sabit bir kontrol hacim için bir kütle korunumu oluşturulursa, giren ve çıkan akışkan akımlarının kütlelerinin kontrol hacimdeki zamanla değişimi süreklilik denklemini verir. Süreklilik denkleminin üç boyutlu hal için genel ifade şekli kartezyen koordinatlar sisteminde şu şekildedir:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho W)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

Burada ρ akışkan yoğunluğu ve U, V ve W ise sırasıyla x, y ve z - doğrultusundaki akışkan hız bileşenlerini göstermektedir.

Yoğunluğun her bir akışkan elemanı için sabit olduğu bir akım olayı, sıkıştırılmıyan türden akışkan ortamında akım olayı olarak adlandırılır. Bunun matematiksel olarak ifadesi ise,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.2)$$

şeklindedir. Buda denklem (2.1)' i iki boyutlu, sıkıştırılamıyan türden ve homojen akışkanın akım olayını kartezyen koordinat sisteminde denklem (2.3) indirgemektedir.

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

2.1.2. Momentum denklemi:

Momentum denklemi bir kontrol elemanın kuvvetler veya momentum (itme) korunumu ifadesinden elde edilen bir vektörel denklemdir. Bu denklemin akışkanın birim hacmi için kartezyen koordinat sisteminde x - ve y - doğrultusundaki hız bileşenlerin genel hali ise,

x - doğrultusunda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + U \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + V \frac{\partial(\rho U)}{\partial y} + W \frac{\partial(\rho U)}{\partial z} \\ = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{4}{3} \mu \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

y - doğrultusunda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + U \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} + V \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} + W \frac{\partial(\rho V)}{\partial z} \\ = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{4}{3} \mu \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Denklemler (2.5) ve (2.6)' nin sol tarafındaki terimler kontrol hacim içerisindeki momentumun zamanla değişimini ve ayrıca kontrol hacmin kontrol yüzeyinden momentum taşınımı ifade etmektedir. Momentumun bu değişimi kontrol hacme etki eden kuvvetler (basınç kuvveti, normal- ve kayma gerilmeleri, hacimsel kuvvet f) ile dengede olmalı.

Newtonien türden bir akışkan için iki boyutlu hal için kartezyen koordinat sisteminde gerilme tansör bileşenleri

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{yy} = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \tau_{zy}$$

(2.7)

burada U, V, W hız vektörün üç bileşenini göstermektedir; x, y, z ise konum vektörün üç bileşenini göstermektedir; μ ise genelde basınç ve sıcaklığa bağlı olan akışkanın özgül dinamik viskozitesidir.

(2.5) ve (2.6) nolu denklemlerde hacimsel kuvvet f_x ve f_y burada göz önüne alınan hal için doğal konveksiyonda bir ağırlık alanı oluşturmaktadır. Bu ağırlık alanı ρg değerinde ve bir ağırlık vektörüdür.

İfade edilen (2.5) ve (2.6) nolu hareket denklemleri, iki boyutlu sıkıştırılamayan türden ve zamandan bağımsız Newtonien akışkan ortamlar için ele alınacak olur ise; Süreklilik denklemi (2.1) yardımıyla,

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ olması nedeniyle, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ olduğundan; ve ayrıca zamandan bağımsız

olması nedeniyle $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ olacağından, x - ve y - doğrultularındaki hareket denklemleri sırasıyla denklem (2.8) ve denklem (2.9) 'daki hali alır.

x - doğrultusunda,

$$\rho U \frac{\partial(U)}{\partial x} + \rho V \frac{\partial(U)}{\partial y} = \rho f_x + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.8)$$

y - doğrultusunda,

$$\rho U \frac{\partial(V)}{\partial x} + \rho V \frac{\partial(V)}{\partial y} = \rho f_y + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.9)$$

2.1.3 Enerji denklemi:

Enerji denklemi iç enerji, kinetik ve potansiyel enerjiden oluşan toplam enerjinin korunumundan elde edilir. Bir kontrol hacim içerisinde birim kütleyle bağlı olan toplam enerji e , basınç ve gerilmelerin neden oldukları iş'lerden ve ısı taşınımı q' lardan dolayı değişebilir. Termodinamiğin birinci kanununu sınırsız yüzeyli bir kontrol hacimden geçen bir akışkana uygularsak, üç boyutlu hal için ve kartezyen koordinat sisteminde enerji için taşınım denklemi olarak (2.10) nolu denklemi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\rho U e)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V e)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho W e)}{\partial z} \right) &= \frac{\partial Q}{\partial t} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} U + \tau_{yx} V + \tau_{zx} W) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} U + \tau_{yy} V + \tau_{zy} W) \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} U + \tau_{yz} V + \tau_{zz} W) \right] - P \left(\frac{\partial(U)}{\partial x} + \frac{\partial(V)}{\partial y} + \frac{\partial(W)}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Bu denklemde sol taraftaki ilk terim, toplam enerjinin birim hacim başına kontrol hacim içerisindeki değişimini göstermektedir. İkinci terim ise konveksiyonla olan toplam enerji kaybını birim hacim için kontrol yüzeyden göstermektedir. Denklemin sağ tarafında bulunan ilk terim dış etki sonucu birim hacim başına üretilen enerjiyi, 2. terim ise konduksiyon sonucu birim hacim başına kontrol yüzeyden kaybolan ısı miktarını ifade etmektedir. En son iki terim ise yüzey kuvvetler tarafından birim hacim başına uygulanması sonucu kontrol hacim tarafından yapılan işi ifade etmektedir. (2.10) nolu denklemin sağ tarafında yer alan 3. terim aynı zamanda dissipasyon fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır ve Φ_{Diss} simgesi ile gösterilmektedir. Genel enerji korunumu denklemi olan (2.10) nolu denklemi Kartezyen koordinat sisteminde, iki boyutlu hal için ve sıkıştırılamayan türden akışkanlar için (2.11) nolu denklem ile ifade edebiliriz.

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\rho Ue)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Ve)}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + \Phi_{Diss} - P \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (2.11)$$

Bu (2.11) nolu denklemde yer alan toplam enerji miktarı e iç enerjiden u , kinetik enerjiden $1/2 U^2$ ve potansiyel enerjiden oluşmaktadır. Bu denklemde sabit bir ağırlık alanı için x -, y - doğrultularında $\rho U g$ yerçekim kuvveti etkilidir ve potansiyel enerjide meydana gelen değişim, bu yer çekim kuvvetinin yapmış olduğu iş olarak alınabilir.

Enerji denkleminin sıcaklığa göre ifade edilmesi:

x - ve y - doğrultularındaki momentum denklemleri (2.8) ve (2.9) hız vektörü ile çarpıldıkları zaman, kinetik enerji $1/2 U^2$ için bir taşınım denklemi vermektedirler. Bu taşınım denklemi (2.11) nolu denklemden çıkartıldığı takdirde, iç enerji için bir taşınım denklemi (2.12) elde edilir.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\rho Uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Vu)}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + \Phi_{Diss} - P \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (2.12)$$

İki boyutlu hal için verilen enerji denkleminde (2.12) u iç enerji yerine entalpi $h = u + P / \rho$ kullanıldığı takdirde, entalpi h için bir taşınım denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\rho U h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V h)}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial(PU)}{\partial x} + \frac{\partial(PV)}{\partial y} + \Phi_{Diss} - P \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Burada entalpi sıcaklığın ve basıncın fonksiyonu olarak ele alındığında

$$h = h(T, p) \rightarrow dh = c_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T dP \quad (2.14)$$

burada $c_p = (\partial h / \partial T)_p$ sabit basınçta özgül ısı değer.

Sonunda entalpi ve süreklilik denklemi ($\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$) yardımıyla ve Fourier' in ısı iletim kanununun dikkate alınmasıyla

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.15)$$

($k = k(P, T)$ akışkanın ısı iletim katsayısı) ve sıcaklık terimi ile çarpılmış süreklilik denkleminin (2.13) nolu denkleme eklenmesiyle sıcaklığın korunumunu ifade eden sıcaklığa bağlı bir taşınım denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\rho U T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V T)}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{c_p} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{\Phi_{Diss} + \Pi}{c_p} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Denklem (2.16)' da $c_p = c_p(P, T)$ sabit basınçtaki özgül ısı kapasitesidir, Φ_{Diss} ifadesi dissipasyonu ifade etmektedir, yani kinetik enerjinin iç enerjiye dönüşümünü ifade etmektedir.

$$\Phi_{Diss} = \mu \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

ve Π ise basınç değişimi sonucu sıcaklığın değişimi nedeniyle kullanılmıştır.

$$\Pi = (1 - \delta_T) \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (2.18)$$

burada $\delta_T = \rho \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = \delta_T(P, T)$ izobar kısma katsayısını ifade etmektedir (ideal gaz için $\delta T = 0$ dır).

Doğal konveksiyon hallerinde hal büyüklüklerin basınca bağımlılığı ihmal edilebilir. Çünkü kritik noktaya yakın haller ve büyük geometrilerde atmosferik ortamlardaki akım olayları, ideal gaz olarak kabul edilebilir. Sıkıştırılmayan türden Newtonien akışkanlarda $\Pi = 0$ olduğundan, iki boyutlu hal için ve zamandan bağımsız sıkıştırılmayan türden akışkan için sıcaklığın korunumunu ifade eden sıcaklığa bağlı enerji denklemi ise şu şekilde ifade edilir:

$$\left(\frac{\partial(\rho UT)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho VT)}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{c_p} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \frac{\Phi_{Diss}}{c_p} \quad (2.19)$$

burada Φ_{Diss} ise,

$$\Phi_{Diss} = \mu \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.20)$$

eşit dir.

2.1.4 Boussinesq -Yaklaşımı:

Doğal konveksiyon akımların hesaplamalarında ise çoğunlukla Boussinesq tarafından yapılan bir öneriye göre taşınım denklemleri basitleştirilmektedir (Heiss 1987). Bunun için aşağıdaki kabuller yapılır:

- 1) Sıcaklığa ve basınca göre değişim gösteren bütün madde değerleri sabit kabul edilir (yani $\mu = \mu_0$, $c_p = c_{p0}$, $k = k_0$).
- 2) Yoğunluk ise ağırlık etkisinin bulunduğu Navier-Stokes denkleminin (ρg) dışında diğer bütün terimlerde sabit olarak kabul edilir. Ağırlık etkisinin bulunduğu terimde ise yoğunluğun lineer bir sıcaklık bağımlılığı gösterdiği kabul edilir.

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)]. \quad (2.21)$$

Burada β izobar genleşme katsayısı $\beta_0 = - 1/\rho_0 (\partial \rho / \partial T)_p$ dır.

- 3) Dissipasyon sonucu oluşan sıcaklık yükselmesi ihmal edilir (yani $\Phi_{Diss} = 0$).
- 4) Basınç değişiminin sıcaklık üzerine olan etkisi ise dikkate alınmamaktadır (yani $\nabla = 0$).

Basınç gradyenini $\frac{\partial P}{\partial x}$ hidrostatik ve dinamik olmak üzere iki basınca ayırırsak, bunun sonucu

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P_d}{\partial x} = \rho_0 g + \frac{\partial P_d}{\partial x} \quad (2.22)$$

1) - 4)' de kadar olan kabuller ile ve 2.22 ifadesi ile süreklilik denklemi, momentum denklemi ve enerji denklemi basitleştirilmiş olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Süreklilik denklemi,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.23)$$

Momentum denklemi (y - doğrultuda),

$$\rho U \frac{\partial V}{\partial x} + \rho V \frac{\partial V}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial P_d}{\partial y} - \beta_0 (T - T_0) g \quad (2.24)$$

Enerji Denklemi,

$$\frac{\partial(UT)}{\partial x} + \frac{\partial(VT)}{\partial y} = a_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.25)$$

(2.23 - 2.25) denklemlerinde U, P_d ve T gibi bağımlı değişkenler dışında sıcaklık iletim katsayısı a₀ = k₀ / (ρ₀·cp₀) bulunmaktadır.

2.1.5 Denklemlerin Boyutsuz Hale Getirilmesi:

Genellikle akışkanlar mekaniği denklemleri boyutsuz hale getirilmektedir. Bunun faydası ise sabit bir geometri için çözümün sadece Ra, Pr, Fo ve Re sayıları gibi sayılara ve ayrıca başlangıç ve kenar şartlara bağlı olması sağlanmış olunur. Ayrıca denklemlerin boyutsuz hale getirilmesi ile akım değişkenlerin 0 ve 1 limit değerleri arasında tanımlı olacak şekilde normalize edilmiş olunur (Anderson et al. 1984). (2.23) - (2.25)' ye kadar olan denklemlerin boyutsuz hale getirilmesi karakteristik bir uzunluk L, maksimum sıcaklık farkı ∇T_{max} ve sıcaklık iletim katsayısı a ile aşağıdaki şekilde gerçekleştirilir.

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_i} = 0 \quad (2.23a)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{U}_j \bar{U}_i)}{\partial \bar{x}_j} = -\frac{\partial \bar{P}_d}{\partial \bar{x}_i} + Pr \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_j \partial \bar{x}_j} - Pr Ra_i \bar{T} \quad (2.24a)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{U}_i \bar{T})}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_i} \quad (2.25a)$$

burada $\bar{U}_i = \frac{U_i L}{a_0}$; $\bar{x}_i = \frac{x_i}{L}$; $\bar{T} = \frac{T - T_0}{T_{\text{maks}} - T_{\text{min}}}$

$\bar{t} = \frac{t a_0}{L^2}$ ve $\bar{P}_d = \frac{P_d L^2}{\rho_0 a_0^2}$

ve katsayılar ise

$$\text{Rayleigh Sayısı } Ra_i = \frac{g_i \beta_0 \nabla T L^3}{\nu_0 a_0}$$

$$\text{Prandtl Sayısı } Pr = \frac{\nu_0}{a_0}$$

$$\text{Fourier Sayısı } Fo = \frac{a_0 t}{L^2}$$

Bu şekilde sabit bir geometri için akışkanlar mekaniği denklemlerin çözümü yalnız Ra , Pr ve Fo katsayılarına ve başlangıç ve kenar sınır şartlarına bağlanmış olur.

Yukarıdaki ifadelerde, ifade kolaylığı olması bakımından kartesyen koordinatlarda Tensor notasyonu kullanılmıştır. Tensor notasyonunun en genel ifade şekli ise aşağıda ifade edilmiştir.

x_1, x_2, x_3 konum vektörün üç bileşenini göstermektedir

veya $x_i \rightarrow i = 1, 2, 3$

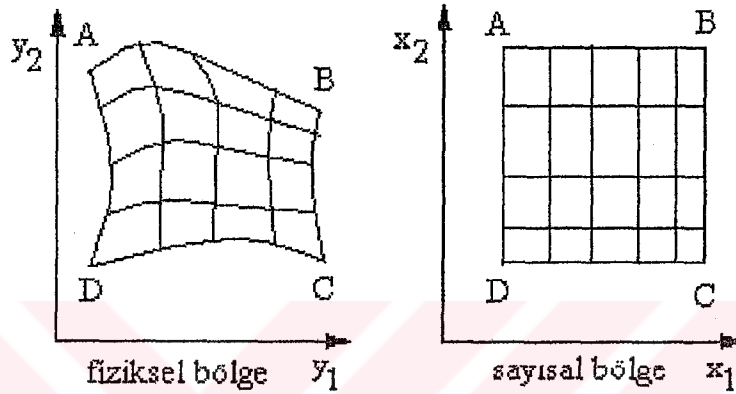
$U_i \rightarrow u_1, u_2, u_3$ üç hız bileşenleri

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \text{div } \vec{U} \quad (2.26)$$

Denklem (2.26)' de kartezyen koordinatlarda tensor notasyonuna göre hız vektörünün i üç hız bileşenine bağlı olarak ifade biçimi görülmektedir.

2.2 Uygun Koordinat Sisteminin Seçimi:

Uygun bir koordinat sisteminin seçimi denildiği zaman, o koordinat sisteminin hesaplanacak olan akım bölgesine veya akıntı etkisinde kalan cismin oluşturduğu akım bölgesine uygunluk göstermesidir. Sayısal hesaplamalarda bir fiziksel bölgeyi dört köşe sayısal bir bölgeye benzetmek amacıyla koordinat dönüşümü yapılır. Bu koordinat dönüşümüne ait bir örnek Şekil 2.1' de gösterilmiştir.

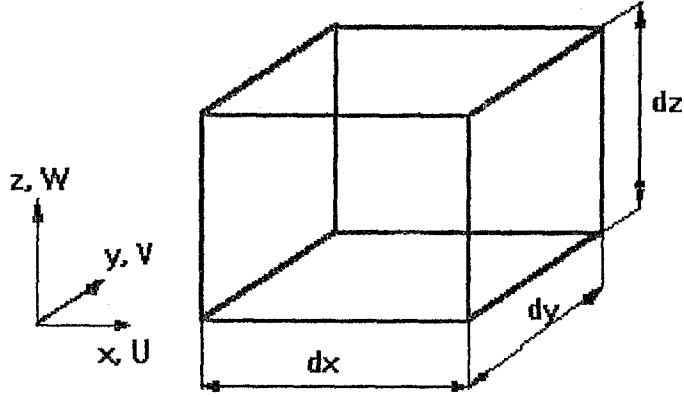


Şekil 2.1 Koordinat dönüşümü (Orth (1991))

Bu şekilde (y_1, y_2) fiziksel bölgenin kartezyen koordinatları ve (x_1, x_2) ise seçilen koordinat sistemin koordinatları. Genel bir koordinat sisteminde ise, sayısal bir yöntemin uygulanabilirliği ve hızı bundan önemli bir şekilde etkilenmektedir. Bu nedenle uygun bir koordinat sisteminin seçimi birlikte bazı kolaylıklar getirebilir. Bu kolaylıkları şu şekilde sıralayabiliriz:

- Bağımsız değişkenlerin sayısının indirgenmesi → Ağ noktalarının sayısının azalması.
- Sayısal yöntemin geliştirilmesinde zaman kazancı.
- Sayısal yöntemin çözüm hızının hızlanması.
- Eksenel simetrik akım olayların incelenebilirliği.
- Sınır tabaka akımlarında koordinat dönüşümü mümkün olması.

Bu yukarıda sayılan kolaylıkları (iyileştirmeleri) birlikte getirdiği için bu çalışmada fiziksel bir bölgenin sayısal bir bölgeye dönüşümde kullanılan koordinat sistemi olarak kartezyen koordinat sistemi seçilmiştir.



Şekil 2.3 Kartezyen koordinat sistemi

Şekil 2.2' e göre x , y ve z koordinat sisteminin yönlerini göstermektedir, U , V ve W ise o yönlere bulunun hızları ifade etmektedir. dx , dy ve dz ise her üç yönde meydana gelen konumsal değişimi ifade etmektedir.

2.3 Sayısal Çözüm Yöntemi:

Kısım 2.1' de incelenen birbiriyle bağlantılı kısmi differansiyel denklemler sistemini çözebilmek için (çözülebilen basit analitik problemler dışında), sayısal yöntemler kullanılması gerekir, yani kısmi differansiyel denklemler cebirsel yaklaşım denklemlerine dönüştürülmesi gerekir ve bunun sonucu oluşan birbiriyle bağlantılı cebirsel denklem sistemi sayısal olarak çözülmesi gerekir. Bu iki çözüm adımları için bir çok yöntem mevcuttur. Yaygın olarak kullanılan sayısal çözüm yöntemleri şunlardır:

- İntegral Yöntemi
- Sonlu Elemanlar Yöntemi
- Sonlu Farklar/ Hacimler Yöntemi

Fakat bu bölümde sadece bu çalışmada kullanılan sonlu hacimler yöntemi incelenecektir.

Sonlu Farklar / Sonlu Hacimler Yöntemi:

Sonlu farklar ve sonlu hacimler yöntemleri birbirine benzemektedir. Her iki yöntemde de akım bölgesi ağlara bölünmektedir ve bu esnada oluşan ağ noktalarında bağımlı

değişkenler tanımlanmakta ve hesaplanmaktadır. Sonlu farklar yönteminde differansiyel denklemlerinden yola çıkarak bu denklemlerin içerdiği differansiyel payları fark payları ile doldurularak hesaplama yapılırken, sonlu hacimler yönteminde ise her bir kontrol hacim için korunum ifadesi oluşturulur ve değişkenlerin kafes noktalar arasındaki hareketi ile ilgili olarak uygun kabullerin yapılmasıyla cebirsel fark (differenz) ifadeleri elde edilir. Burada sonlu hacimler yöntemi kütlenin, momentumun ve enerjinin korunumunu sağladığı için, bu çalışmada bu yöntem sonlu farklar yöntemine tercih edilmiştir (Patankar (1980)).



2.4 Sonlu Hacimler Yöntemine Göre Ayrıklaştırma İşlemi:

İki boyutlu hal için momentum bileşenlerini ve enerji denklemini birlikte bir ifadeyle, genel bir skaler büyüklük Φ ve değişken büyüklük Γ kullanmak suretiyle gösterebiliriz.

$$\frac{\partial(\rho U \Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V \Phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S_{\mu} + S_{\Phi} \quad (2.27)$$

Bu denklemde Φ yerine genel olarak şu değişkenler kullanılabilir:

- Hız bileşeni
- Entalpi ve sıcaklık
- Kimyasal bir bileşenin konsantrasyonu
- Bir türbülans büyüklük
- Elektrik veya manyetik potansiyel ve v.s..

Γ değişkeni ise her Φ değişkeni için spesifik bir anlam ifade etmektedir. Tablo 2.1' de her bir denklem için, iki boyutlu hal ve sıkıştırılamıyan türden akışkan ortamı için terimler ve büyüklükler gösterilmektedir.

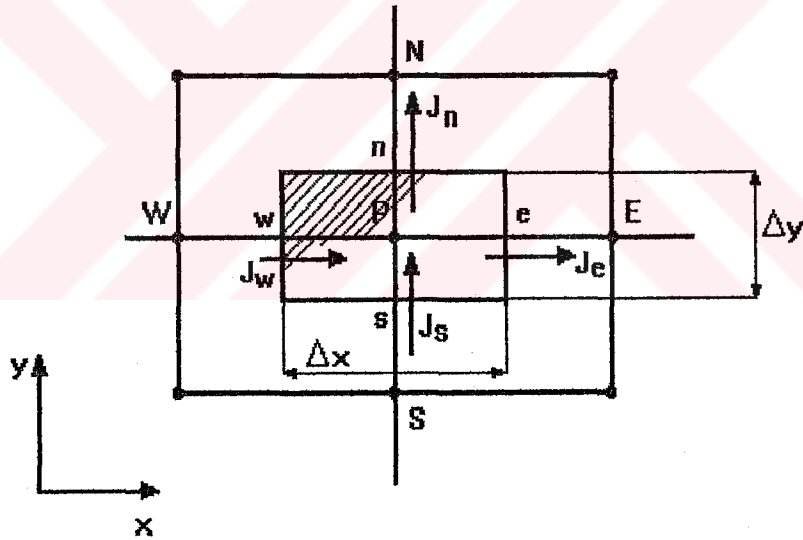
Tablo 2.1 Differansiyel Denklemlerin Birlikte İfade Edilmesi

Taşıyım Denklemleri	Φ	Γ	S_{μ}	S_{Φ}
x - yönünde momentum denklemi	U	μ	0	$\frac{\partial P}{\partial x}$
y - yönünde momentum denklemi	V	μ	0	$\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g$
Enerji denklemi	T	$\frac{k}{c_p}$	0	0

Kontrol Hacim Formulasyonu (Patankar (1980)):

- Her bir ağ noktası bir kontrol hacim tarafından çevrelenecek şekilde, hesaplanacak olan bölge kontrol hacimlere bölünür.
- Differansiyel denklem her bir kontrol hacime göre integre edilir.
- İntegralin hesaplanabilmesi için Φ bağımlı değişkenin ağ noktaları arasındaki değerlerin değişimini tanımlayan bir profil kabulü yapılır. Genel koordinat sistemi bu şekilde noktadan noktaya lineer hale getirilir.
- Sonunda ise bir grup noktalar için Φ - değerleri içeren ayrıklaştırılmış denklem elde edilir.

Bu şekilde elde edilen ayrıklaştırılmış denklemler kontrol hacim içerisinde bulunan Φ değeri için korunum prensibini ifade etmektedir. Bu nedenle kütle, enerji ve momentum gibi korunum büyüklükleri için integral balansı hacmin her parçasında sağlanmış olunur. Şekil 2.3' de iki boyutlu hal için bir kontrol hacim gösterilmektedir.



Şekil 2.3 İki boyutlu hal için kontrol hacim

Şekil 2.3' de P noktası gözlenen noktadır, yani skaler büyüklük olan Φ nin yerini alan merkez noktadır. E, W, N ve S ise İngilizce olarak batı, doğu, kuzey ve güney yönleri gösteren komşu noktalardır. Taralı hacim ise kontrol hacmi göstermektedir. e, w, n ve s ise batı, doğu, kuzey ve güney olmak üzere kontrol hacim duvarlarının yönünü göstermektedir. z yönündeki kalınlığı birim kalınlık olarak alırsak hacim $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot 1$ 'ye eşit olur. J_e , J_w , J_n ve J_s : batı, doğu, kuzey ve güney yönünde akışı (flux) ifade etmektedir ve konvektif ve difüzyon terimlerini içermektedir.

2.4.1 Konvektif ve difüzyon terimlerin ayrıştırılması:

(2.27) nolu denklemin içerisinde yer alan konveksiyon ve difüzyon terimlerini ayrıştırılabilmek için Δx ve Δy kenar uzunluklarına sahip iki boyutlu bir kontrol hacim gözönüne alındıktan sonra (Şekil 2.3), bu denklem bu kontrol hacime göre integre edilirse (bak. EKLER 8.1), aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
 0 = & \left[\left(\rho U \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w - \left(\rho U \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e \right] \Delta y \\
 & + \left[\left(\rho V \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s - \left(\rho V \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n \right] \Delta x \\
 & + \iint_{xy} (S_\mu + S_\Phi) dx dy
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Şekil 2.3' deki gibi kontrol hacmin kenar yüzeyleri indislenirse burada

$$\rho \bar{\Phi} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint_{xy} \rho \Phi dx dy = (\rho \Phi)_p \text{ veya } \bar{\Phi}_e = \frac{\int (\rho U \Phi)_e dy}{(\rho U)_e \Delta y} \text{ dir.}$$

Skaler büyüklüğün konvektif ve difüzyon terimleri kontrol hacmin kenar yüzeyleri üzerinde toplanırsa

$$\text{mesela } J_w = \left(\rho U \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \text{ v.s.,}$$

bunun sonucu denklem (2.28 a) elde edilir.

$$(J_e - J_w) \Delta y + (J_n - J_s) \Delta x = \iint_{xy} (S_\mu + S_\Phi) dx dy \tag{2.28 a}$$

Burada J terimi kontrol yüzeyindeki akış hızını (flux) ifade etmektedir ve difüzyon ve konveksiyon terimlerini içermektedir. Bu denklemde ayrıştırma işlemi için konveksiyon ve difüzyon terimi ayrı olarak incelenecektir. Difüzyon terimleri ise kararlılık (stabilite) ve oluşan lineer denklem sisteminin basitleşmesi nedeniyle

explizit olarak işlenmektedir (Patankar (1980)). İki boyutlu hal için Şekil 2.4' deki kontrol hacim gözönüne alınarak (2.28) denklemindeki dört difüzyon terimi denklem (2.29)' deki gibi explizit olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w &= \Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{(\delta x)_w}; & \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e &= \Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{(\delta x)_e} \\ \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s &= \Gamma_s \frac{\Phi_P - \Phi_S}{(\delta y)_s}; & \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n &= \Gamma_n \frac{\Phi_N - \Phi_P}{(\delta y)_n} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ayrıklaştırılacak olan denklemde bazı kısaltmalar yapmak için yeni büyüklükler tanımlayalım

$$C_e = (\rho U)_e \Delta y, C_w = (\rho U)_w \Delta y, C_n = (\rho V)_n \Delta x, C_s = (\rho V)_s \Delta x$$

ve

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \Delta y, D_w = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} \Delta y, D_n = \frac{\Gamma_n}{(\delta y)_n} \Delta x, D_s = \frac{\Gamma_s}{(\delta y)_s} \Delta x$$

Burada D_e , D_w , D_s ve D_n kontrol hacmin sırasıyla doğu, batı, güney ve kuzey yönlerinde bulunan difüzyon terimleri ve C_e , C_w , C_s ve C_n ise kütleli akıları ifade etmektedir.

Skaler büyüklük olan Φ terimi ise sadece kontrol hacmin merkezinde tanımlandığı ve hesaplandığı için, kontrol hacmin kenar yüzeylerinde bulunan Φ (e, w, n, s) değerleri bilinmemektedir. Bu değerlerin hesaplanması bilinen komşu noktalardan (E, W, N, S) belirlenmesi gerekir. Çakışık ağ sisteminde kontrol hacim yüzeylerinde yer alan hız bileşenleri (U, V), Bölüm 3' de ayrıntılı olarak anlatılan özel bir enterpolasyon tekniği ile komşu noktalardan belirlenmektedir. Burada konveksiyon ve difüzyon terimlerini ayrıklaştırabilmek için iki boyutlu hal için gerekli olan Φ_e , Φ_w , Φ_n ve Φ_s kontrol hacim kenar yüzey değerleri Φ_E , Φ_W , Φ_N , Φ_S ve Φ_P gibi kontrol hacim merkezinde bulunan değerlerden hesaplanmaktadır gerekir. Bunun için kullanılan yöntem Taylor serisinden türetilen bir merkezi farklar yöntemine benzemektedir. CDS (Central Differencing Scheme) olarak adlandırılan merkezi farklar yöntemi ikinci derecedendir. Konveksiyon akışının difüzyon akışına oranla daha yüksek olduğu durumlarda simülasyon sonucu gerçek akım durumunda var olmayan fiziksel olarak

anlamsız akım bölgeleri oluşmaktadır ve sayısal olarak kararsızlıklar meydana gelmektedir (Patankar (1980)).

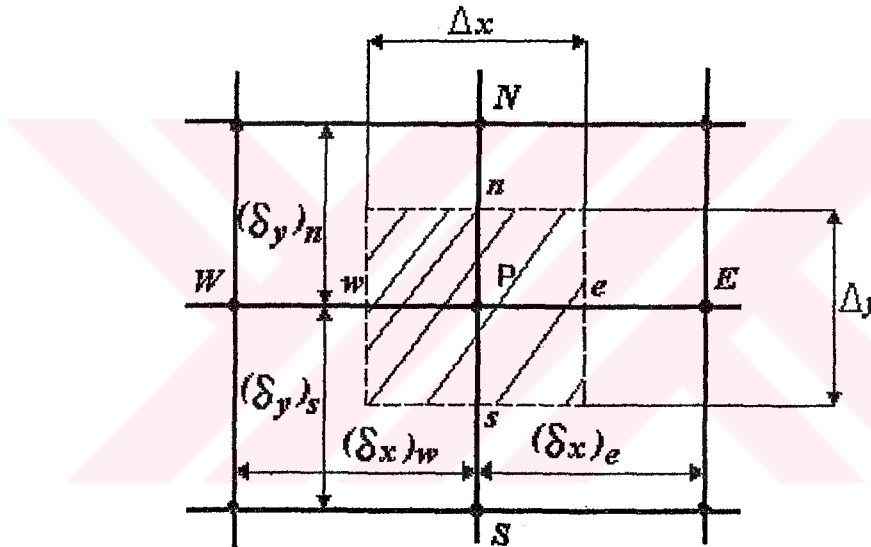
Merkezi farklar yöntemine bir alternatif olarak UDS (Upwind Differencing Scheme) yöntemi kullanılabilir. Bu yöntemde göre difüzyon terimi değişmemektedir, konveksiyon terimi ise akım yönüne bağlı olarak şu değerleri almaktadır:

$$J_e < 0 \text{ ise } \Phi_e = \Phi_E$$

$$J_e > 0 \text{ ise } \Phi_e = \Phi_P$$

$$J_w > 0 \text{ ise } \Phi_w = \Phi_W$$

$$J_w < 0 \text{ ise } \Phi_w = \Phi_P$$



Şekil 2.4 Ayırıklaştırma işlemi için göz önünde bulundurulmuş kontrol hacim

Buna benzer şekilde Φ_s ve Φ_n değerleri içinde tanımlama yapılır. Bu yöntem oldukça kararlı olmasına rağmen yüksek sayısal difüzyondan dolayı, 2. dereceden kesme hatasından kaynaklanan, yüksek hız gradyan bölgelerinde hassas olmayan sonuçlar vermektedir. Bu çalışmada her iki yöntemin bir karışımı olan **Hybrid- Yöntemi** kullanılmıştır. Peclet sayısı (Pe) ile tanımlanan konveksiyon akışının difüzyon akışına oranı, her bir kontrol hacim için, $Pe = C_e / D_e$ şeklinde ifade edilirse, bu Peclet sayısının değerine bağlı olarak merkezi fark yöntemi veya upwind fark yöntemi kullanılır. Bu yöntemde göre $Pe > 2$ durumunda Φ_e değerinin belirlenmesi için Upwind yöntemi kullanılır, bunun dışında merkezi farklar yöntemi (CDS) kullanılır (Patankar (1980)). Hybrid yöntemiyle yukarıda anlatıldığı şekilde konveksiyon teriminin kontrol hacmin kenar yüzeylerindeki değerler belirlenir.

EKLER 8.1' de konveksiyon ve difüzyon terimlerin ayrıklaştırılmasıyla ilgili ve hybrid yöntemi hakkında ayrıntılı bir bilgi verilmiştir.

Taşınım denklemleri artık bilinen ayrıklaştırılmış şekli ile iki boyutlu olarak takiben belirtildiği şekilde 1. mertebeden differansiyel denklem olarak yazılabilir (Patankar (1980)):

$$a_p \Phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + S \quad (2.31)$$

daha açık bir yazılış şekli ise denklem (2.26)' da görülmektedir.

$$a_p \Phi_p = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + S \quad (2.32)$$

(2.31) ve (2.32) denklemlerinde yer alan terimlerden a_{nb} , merkez düğüm noktası Φ_p ' nin komşu noktalarını içine alan Φ_{nb} teriminin katsayısıdır. a_p ise Φ_p ' nin katsayısıdır ve *hybrid - yöntemine* göre şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} a_E &= \text{AMAX} 1(\text{ABS}(0.5 \cdot C_e), D_e) - 0.5 \cdot C_e \\ a_W &= \text{AMAX} 1(\text{ABS}(0.5 \cdot C_w), D_w) + 0.5 \cdot C_w \\ a_N &= \text{AMAX} 1(\text{ABS}(0.5 \cdot C_n), D_n) - 0.5 \cdot C_n \end{aligned} \quad (2.33 a)$$

$$\begin{aligned} a_S &= \text{AMAX} 1(\text{ABS}(0.5 \cdot C_s), D_s) + 0.5 \cdot C_s \\ a_p &= a_E + a_W + a_N + a_S + S_p \end{aligned} \quad (2.33 b)$$

Yukarıdaki ifadede kullanılan AMAX1 ve ABS birer FORTRAN dilli operatörüdür. Ayrıca yukarıdaki ifadede S_p , aşağıdaki şekilde lineer hale getirilmiş b teriminin negatif terimlerini içeren kısmıdır.

$$S = S_C + S_P \Phi_P \quad (2.34)$$

Bu denklemde S_C terimi basınç gradyen terimlerini içermektedir ve bu yöntemde explizit olarak işlenen büyüklüklerdir. Φ_p büyüklüğüne sahip negatif terimler ise S_p ' de ($S_p \leq 0$ dir) toplanmıştır. Kaynak teriminin bu şekilde lineerleştirilmesiyle a_p katsayısı büyütülmektedir ve lineer denklem sisteminin matrisinin diyagonal dominansı

yükseltilmiş (sağlamlaştırılmış) olunur. a_{nb} katsayıları ise konvektif ve difüzyif kısımlar içermektedir (Patankar (1980)). (2.31) veya (2.32) denklemleri hesaplama bölgesi içerisinde bulunan kontrol hacimlerin bütün merkez noktaları P için çözülürse, lineer denklemlerden oluşan bir sistem elde edilmiş olunur. Bu lineer denklemler sistemi Matris olarak şu şekilde ifade edilebilir:

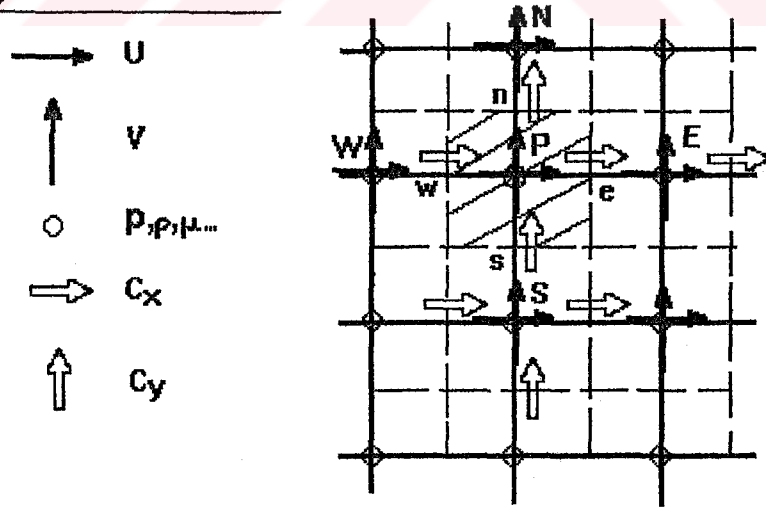
$$[L]\vec{\phi} = \vec{S} \quad (2.35)$$

Burada [L] katsayılar matrisidir ve diagonal yapıya sahiptir. $\vec{\phi}$ ise çözüm vektörü ve \vec{S} ' de bütün kaynak terimleri içermektedir. (2.35) ifadesinin çözümü Kısım 3.4' de işlenmiştir. Çözüm yöntemi olarak Thomas - Algoritması kullanılmıştır.

2.4.2 Kaynak teriminin ayrıklaştırılması:

Momentum denkleminde yer alan kaynak terimi basınç gradyenlerinden ve hacimsal kuvvetten oluşmaktadır. Burada basınç gradyenlerini çakışık ağ sistemine göre ayrıklaştırabilmek için Şekil 2.5' da gösterilen bağımlı değişkenlerin dizilişi esas alınmıştır (Periç (1988)).

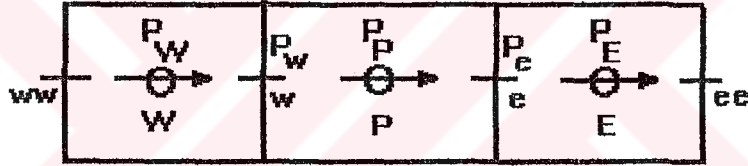
Değişkenlerin Konumları:



Şekil 2.5 Çakışık ağ sisteminin kullanılmasında ağ hücresi ve değişkenlerin dizilişi

Çakışık ağ sistemine göre Şekil 2.5' da görüldüğü gibi bağımlı değişkenler olan U, V, T, P, ρ , μ ve v.s. kafesin düğüm noktalarında (kontrol hacmin merkezinde bulunan noktada) konumlandırılmıştır. Cx ve Cy terimleri kontrol hacmin kenar yüzeylerinde

bulunmaktadır ve sırasıyla x ve y doğrultularındaki süreklilik denklemi için esas teşkil eden kütleli akıyı göstermektedir. Çakışık ağ sisteminde Momentum denklemi için kontrol hacim kenar yüzeylerinde bulunan ve konvektif terimi için gerekli olan hızlar ve ayrıca basınç gradyeni için gerekli olan kontrol hacim kenar yüzeyindeki basınç terimleri (P_e , P_w , P_n , P_s) bir entropolasyon işlemi ile hesaplanırlar. Süreklilik denklemi için ise entropolasyon sadece kontrol hacim kenar yüzeyindeki hızların hesaplanmasında kütle korunumunu sağlamak amacıyla kullanılır. Periç et al. (1988), Rhie et al. (1983), Orth (1991) çalışmalarında basınç terimlerin hesaplanmasında lineer entropolasyonu ve hızların hesaplanmasında momentum entropolasyonu başarılı bir şekilde uygulamışlardır. Momentum entropolasyonu hakkında Kısım 3.3' de ayrıntılı bir bilgi verilmektedir. Burada sadece basınç gradyeninin hesaplanması dikkate alındığı için, lineer entropolasyon işlemi esas alınmıştır. Basınç terimlerinin çakışık ağ sisteminde yerleşiminin daha anlaşılır bir şekli, Şekil 2.6' da tek boyutlu hal için gösterilmiştir.



Şekil 2.6 Tek boyutlu çakışık ağ sisteminde basınç değişkeninin yerleşimi
(Majumdar (1988))

Şekil 2.6' ya göre basınç gradyenleri kontrol hacim kenar yüzeyi basınç değerleri şu şekilde elde edilir:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_e - P_w}{\Delta x} \quad (2.36)$$

Burada merkez noktada bulunan hızlar kontrol hacim kenar yüzeyi basınç değerleri arasında oluşan fark sonucu sürülmektedir. x - doğrultusu için uygulanan yaklaşım y- doğrultusu içinde uygulanırsa, (2.36) denkleminin benzer ifade y- doğrultusu içinde denklem (2.37)' de gösterilmiştir.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_s - P_n}{\Delta y} \quad (2.37)$$

Ayrıca y- doğrultusunda bulunan kaldırma terimi ρg Boussinesq - Yaklaşımı gözönünde bulundurulursa, düşey hızların kontrol hacmi için şu şekilde bir ifade elde edilir:

$$\int \int_{x y} \rho g dx dy = \rho g (T - T_0) \beta_0 \Delta x \Delta y \quad (2.38)$$

(2.36) ve (2.37) denklemlerinde yer alan kontrol hacim kenar yüzeyi basınç terimleri (P_e, P_w, P_n, P_s) lineer enterpolasyonla, yani burada merkez noktaların aritmetik ortalamasından yararlanarak hesaplanmıştır. Eğer P_e değeri P ile E noktaları

arasında lineer olarak değişiyor ise, $P_e = \frac{P_P + P_E}{2}$ şeklinde ifade edilebilir. Sınırlardaki basınç değerlerin hesaplanmasında ise lineer ekstrapolasyon uygulanmıştır.

Konveksiyon, difüzyon ve basınç terimleri ayrıklaştırıldıktan sonra, ayrıklaştırılmış genel sonlu farklar denklemi düşey doğrultu için şu şekilde ifade edilebilir:

$$a_p \Phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + \Delta x (P_s - P_n) + \rho g \beta_0 (T - T_0) \Delta x \Delta y + \Phi_p^0 S_p \quad (2.39)$$

Burada Φ_p^0 değeri, Φ_p değerinin bir önceki iterasyona ait değeridir.

2.5 Ağ Biçimi:

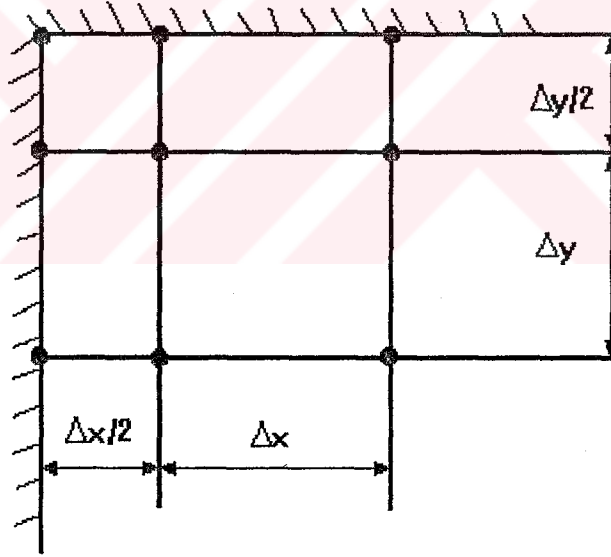
Akışkanlar mekaniğinde sayısal yöntemlerin temelini, hesaplama bölgesinin ağ noktalara bölünmesi oluşturmaktadır. Ağ noktaların sayısı ise çözüm sonuçlarının hassasiyetini, hesaplama süresini ve hafıza kapasitesini belirlemektedir. Bunun dışında ağ biçimi yakınsama hızını ve buna bağlı olarak yöntemin ekonomikliliğini etkilemektedir. Bu çalışmanın uygulama kısmında yer alan, Yüksek Rayleigh sayılarında doğal konveksiyon akım olayları ve yüksek Reynolds sayılarında bir basamak üzerinden laminar akış (backward- facing step flow) problemleri, sınır tabaka akış karakteri gösterdikleri için, akım büyüklükleri olan bağımlı değişkenler o bölgelerde büyük farklılıklar göstermektedirler. Bu nedenle, cidar kenar bölgelerinde

kafesin inceltilmesi gerekiyor. Bu çalışmada orta düzlemler için ağ düğüm noktaları arasındaki mesafe iki boyutlu hal için şu şekilde alınmıştır:

$$\Delta x = \frac{L}{(NI - 2)}$$

$$\Delta y = \frac{L}{(NJ - 2)}$$
(2.40)

burada L yükseklik veya uzunluk. Δx , x - yönünde kafes düğüm noktaları arasındaki mesafe ve Δy , y-yönünde kafes düğüm noktaları arasındaki mesafeyi göstermektedir. NI ve NJ ise ağ noktalarının x ve y yönündeki sayısını göstermektedir. Cidar kenarlarında ise Δx ve Δy mesafelerin yarısı alınarak, cidar kenarlarındaki akım bölgeleri için kafes boyutu orta düzlemlerdeki kafeslerin boyutunun yarısı kadar inceltmiştir. Şekil 2.8' de ağ cidar kenarı için bir örnek gösterilmiştir.



Şekil 2.8 Kullanılan kafes biçimi.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİNİN TANITILMASI

3.1 Basınç Düzeltme (SIMPLE) Algoritması:

Bu bölümde süreklilik denkleminde verilen indirekt bilgileri basınç hesabı için diğer denklemler arasında bir ilişki kurarak direkt bir algoritmaya dönüştürme işlemi incelenecektir. Bunun için kullanılan yöntem ayırık olarak adlandırılan bir çözüm yöntemidir (Patankar (1980)). Bu çözüm yöntemine göre her bir denklem bütün bölgede parçalı (ayırık) olarak, başka denkleme ait bağlı olduğu değişken önceki iterasyona ait değer kullanmak suretiyle çözülür. Denklemler arasındaki bağ dış iterasyon olarak da adlandırılan bir iterasyon işlemi ile gerçekleştirilmektedir. Basınç için herhangi bir denklem mevcut olmadığı için, denklem sistemini kapalı hale getirebilmek için bir çok farklı yöntem geliştirilmiştir. Mevcut olan denklemlerin kombinasyonu ile basınç için, veya bir basınç düzeltme için bir differansiyel denklem oluşturulabilir. Bu çalışmada denklem sistemini kapalı hale getirebilmek için mevcut olan denklemlerden yararlanarak, Patankar (1980) tarafından önerilen, bir basınç düzeltme denklemi oluşturulmuştur. Bu denklem esas alınarak cebirsel denklem sisteminin iteratif çözümüne esas teşkil eden SIMPLE (Semi- Implicit Method for Pressure- Linked Equations) algoritması elde edilmiştir (Patankar (1980)).

Çakışık ağ sistemi için bu yöntem aşağıdaki algoritmaya göre çalışmaktadır (Patankar (1980), Orth (1991)):

1) Momentum denkleminin kabul edilen basınç alanı P ve hız alanı U_i ($i=1, 2, 3$) ile yaklaşık çözümü yapılır. Momentum denkleminde hesaplanmayan hızlar için, bir önceki iterasyondaki değerler alınır. Takiben U_i hız bileşenleri bağlı oldukları momentum denklemini sağlamaktadır. Süreklilik denklemleri ise daha sağlanmamıştır.

2) Bir Basınç düzeltme denkleminin çözümü. Bu basınç düzeltme denklemi momentum denkleminin süreklilik denklemleri ile birleştirilmesi ile elde edilir (bak. Ekler 8.2). Bu denklemin çözümü basınç ve hız düzeltmelerini aşağıdaki şekilde vermektedir:

$$\begin{aligned} U_i &= U_i^* + U_i' \\ P &= P^* + \alpha_P P' \end{aligned} \quad (3.1)$$

Düğüm noktalarındaki değişkenlerin düzeltilmesi yukarıdaki ifadeye göre süreklilik denklemini sağlayacak şekilde yapılır. Yukarıdaki ifadede U' hız düzeltme katsayısı ve P' ise basınç düzeltme katsayısıdır. U_i^* ve P^* değerleri bir önceki iterasyona ait değerlerdir. Hız ve basınç düzeltme katsayısının önünde çarpan olarak bulunan α_u ve α_p katsayıları alt relaksasyon katsayılarıdır, ve yöntemin kararlılığı için (stabilitesi) gereklidir. Bu değerler arasında çözüm yönteminin verimliliği bakımından şu ilişki tercih edilmektedir:

$$\alpha_p \approx 1 - \alpha_u \quad (3.2)$$

Burada α_u genelde, $0.5 \leq \alpha_u \leq 0.9$ arasında bulunmaktadır (bak. Perić et al. (1987)). Alt relaksasyon işlemi hakkında ilerki bölümlerde daha ayrıntılı bilgi verilecektir. Yukarıdaki basınç ve hız düzeltme ifadesiyle, ayrıca süreklilik denklemini hız alanı değerleri U_i ile sağlanırsa, basınç düzeltme terimi P' ve hız düzeltme terimi U' sıfıra doğru gitmesi sağlanmış olunur. Basınç düzeltme denkleminin elde edilmesi çakışık ağ sistemi için Perić et al. 1987 çalışması esas alınarak Ekler 8.2 kısmında yer almaktadır.

Basınç ve hızlar dışında çakışık ağ sisteminde kontrol hacim sınırlarındaki kütleli akılar içinde düzeltme yapılır:

$$\begin{aligned} C_w &= \rho_w \Delta y (U_w^* + U_w') \\ C_e &= \rho_e \Delta y (U_e^* + U_e') \\ C_n &= \rho_n \Delta x (V_n^* + V_n') \\ C_s &= \rho_s \Delta x (V_s^* + V_s') \end{aligned} \quad (3.3)$$

Yukarıdaki ifadede e, w, n, s yönlerindeki kütleli akılara ait düzeltme ifadeleri gösterilmiştir.

3) P' ve U' sıfıra gidiyorlarsa, 2) nolu düzeltmeye göre momentum denklemini ve süreklilik denklemini sağlanmış olunur. Arzulanan hassasiyete ulaşamamış ise, 1) nolu

adıma geri dönüş söz konusudur. Fakat bu sefer tahmini değerler olarak (3.4) değişkenleri esas alınır:

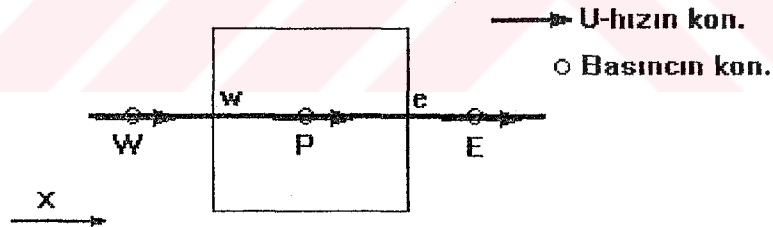
$$P^* = P, U_i^* = U_i \quad (3.4)$$

Bu denklemler dışında, bu dış iterasyon prosesi dahilinde çözülmesi istenilen denklemler, 1) nolu adıma gidilmeden önce 3) nolu adımı takiben çözülür (mesela enerji denklemi, türbülans model v.s.).

3.2 Değişkenlerin Sıralanışı ve Momentum Enterpolasyonu:

3.2.1 Değişkenlerin sıralanışında karşılaşılan temel sorun:

Sıkıştırılamiyan türden akım olaylarının kaydırılmış olmayan bir ağ kullanılarak hesaplanmasında karşılaşılan temel sorun, değişkenler arasında bir bağlantı sorununun mevcut olmasıdır (bak. Patankar, 1980). Şekil 3.1' de tek boyutlu bir kontrol hacim bu sorunu inceleyebilmek için çizilmiştir.



Şekil 3.1 Çakışık ağ sisteminde tek boyutlu kontrol hacim (Orth (1990))

Sabit yoğunluk için süreklilik denkleminin kontrol hacim üzerinden integrasyonu sonucu şu ilişki elde edilir:

$$\int_w^e \frac{dU}{dx} dx = U_e - U_w = 0 \quad (3.5)$$

Burada kontrol hacim sınır yüzeylerinde bulunan U_e ve U_w hızları lineer enterpolasyon yardımıyla hesaplanırsa, düğüm noktaları arasındaki mesafenin eşit olduğu durum için,

$$U_E - U_W = 0 \quad (3.6)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade hızların sadece birbirini takip eden her ikinci ağ noktaları ile birbiryle bağlantılı olduğunu göstermektedir. Momentum denklemi içerisindeki basınç gradyeni içinde benzer yaklaşımla şu ifade elde edilir:

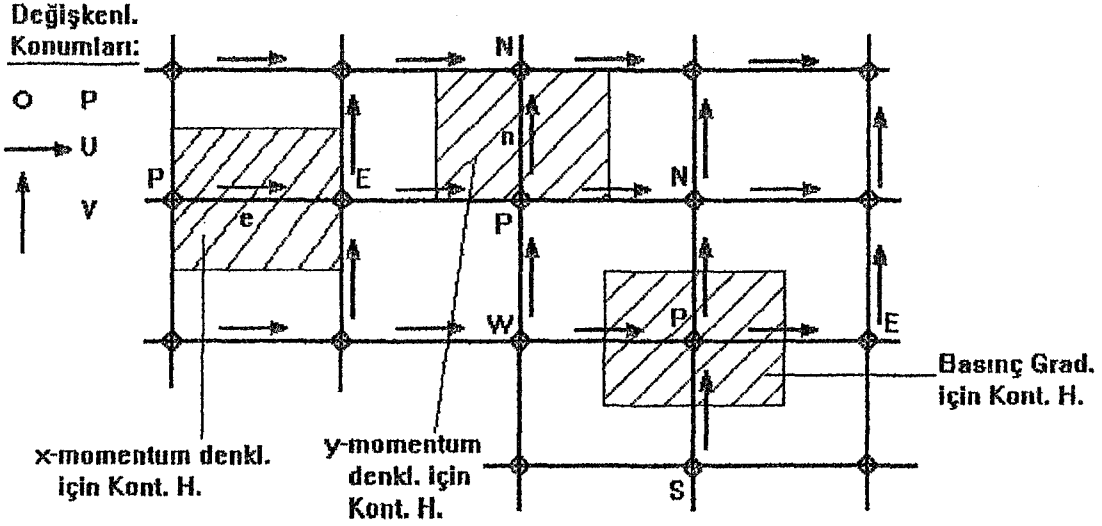
$$\int_w^e \frac{dp}{dx} dx = \frac{1}{2} (P_E - P_W) \quad (3.7)$$

Bu ifadede de ağ noktası üzerindeki değerler arasında bir ilişki (bağlantı) sorunu mevcuttur. Bunun sonucu basınç ve hızlarda osilasyonlar meydana gelebilir. Matematiksel olarak denklem sistemi bu çözümle sağlanmış olabilir; fakat fiziksel olarak anlamsız sonuçlar vermektedir. Bu konuda ayrıntılı bilgi Patankar (1980)' ın çalışmasında yer almaktadır.

Bu sorunu giderebilmek için, bir çok yöntem geliştirilmiştir. Bu geliştirilen yöntemlerden en önemlileri olan kaydırılmış değişkenli ve çakışık değişkenli ağ sistemlerini sırasıyla inceleyelim:

3.2.2 Kaydırılmış değişkenli ağ sistemi:

Basit ve çok yaygın olarak kullanılan yöntem kaydırılmış değişkenli yöntemdir. Burada basınç değerleri kontrol hacmin merkezinde ve hızlar ise kontrol hacmin kenarlarında bulunmaktadır. Şekil 3.2' de değişkenlerin sıralanışına ait bir örnek gösterilmektedir.



Şekil 3.2 Kaydırılmış ağ için değişkenlerin sıralanışı (Patankar (1980))

Bu şekile göre kaydırılmış ağ sistemi üç farklı kontrol hacimden oluşmaktadır. Bunlar x - yönündeki momentum denklemi, y - yönündeki momentum denklemi ve basınç gradyeni için kontrol hacimlerdir. İki boyutlu bir hal için, kontrol hacim kenarlarında bulunan iki kartezyen hız bileşenini çözebilmek için kontrol hacim başına üç momentum denklemi çözülmesi gerekir.

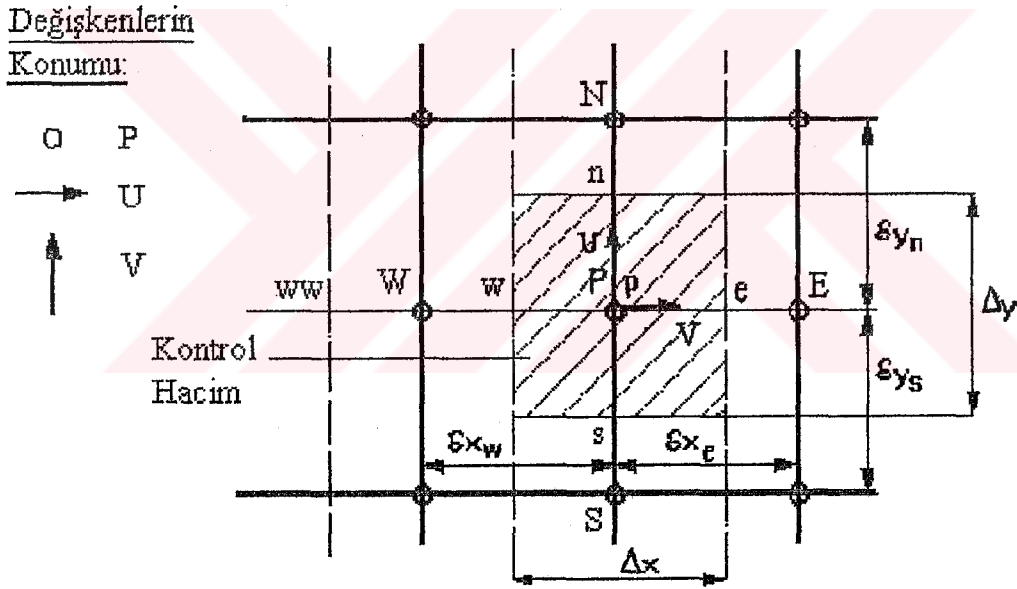
Bu yöntemin en büyük avantajı yukarıda açıklanan bağ sorununu çözmesidir. Diğer bir avantajı ise, kontrol hacim sınırlarında ihtiyaç duyulan kütleli akıların, direkt olarak o noktalarda bulunan hızlardan hesaplanmasını mümkün kılmasıdır ve bu işlem için enterpolasyon işlemine gerek duyulmamasıdır. Ayrıca hızları sürükleyen basınç gradyenide merkez düğüm noktalarında bulunan basınçların farkı olarak hesaplanır. Kaydırılmış bir değişken sıralanışının kullanılmasıyla, ayrıca hesaplama bölgesinin sınır kenarları boyunca herhangi bir basınç değerine ihtiyaç duyulmamaktadır, yani sınır noktalarında basınç terimi konumlandırılmamıştır. Bunun sonucu kenar şart olarak basıncın verilmesi ortadan kalkmaktadır.

Bu yöntemin dezavantajı fiziksel yapıdan daha çok algoritmik yapıya dayanmaktadır. Farklı kontrol hacimlerin kullanılması değişkenlerin zahmetli bir şekilde indislendirilmesini gerektirmektedir. Özellikle sınır kenarlarına yakın bölgelerinde eksik düğüm noktaları nedeniyle ve ayrıca farklı kontrol hacim sınırlarından dolayı zahmetli algoritmalar kullanmak gerekir. Bu durum bilgisayar programının geliştirilmesi bakımından oldukça hataya müsait bir durum oluşturmaktadır, yani karmaşık ve zahmetli oluşundan dolayı daha çok dikkat ister. Bir den fazla ağ düzlemlerinin kullanıldığı durumlarda, mesela çok katlı ağ yönteminde zorunlu olduğu gibi,

değişkenlerin indislenmesi daha karmaşık bir yapıya kavuşmaktadır. Buna benzer problem differansiyel denklemlerin yüksek mertebede ayrıklaştırma işlemine tabi tutulduklarında da ortaya çıkmaktadır.

3.2.3 Çakışık değişkenli ağ sistemi:

Bu çalışmada yukarıda sözü edilen sebeplerden dolayı çakışık değişkenli bir ağ sistemi seçilmiştir. Şekil 3.3' de çakışık değişkenli ağ sisteminin kontrol hacimleri gösterilmektedir. Bu şekle göre bütün değişkenler bir kontrol hacmin merkezinde bulunan P noktasında toplanmıştır ve bütün değişkenler için sadece bir kontrol hacim yeterli olmaktadır. Ayrıca o noktalarda kütle akıları hesaplayabilmek için gerekli olan değerlerde bulunmaktadır.



Şekil 3.3 Çakışık ağ sistemine göre değişkenlerin sıralanışı (Perić et al. (1988))

Bir kontrol hacim için süreklilik denkleminde bulunan kütle akıları şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} C_w &= \rho U_w \Delta y, & C_e &= \rho U_e \Delta y \\ C_s &= \rho V_s \Delta x, & C_n &= \rho V_n \Delta x \end{aligned} \quad (3.8)$$

Daha önceki kısımda söz edilen bağlantı sorununu giderebilmek için, kontrol hacim kenarlarında bulunan hızlar U_e , U_w , V_n ve V_s hızları düğüm noktalarda bulunan

hızlardan lineer enterpolasyonla hesaplanmaması gerekir. Aksi halde basınç ve hız osilasyonları oluşabilir. Rhie et al. (1983), Perić et al. (1988), Rodi et al. (1992) ve Orth (1991) çalışmalarında çakışık ağ sistemi için bu hızları düğüm noktalarda bulunan komşu hızların enterpolasyonundan hesaplanmasını önermektedirler. Bu enterpolasyon işlemi için ayrıklaştırılmış momentum denklemi esas alınmaktadır. P noktası için momentum denkleminin en genel ayrıklaştırılmış hali:

$$a_P U_P = \sum_{nb} a_{nb} U_{nb} + \Delta y_P (P_w - P_e) + S_U \quad (3.9)$$

(3.9) denkleminde eşitliğin sol tarafında bulunan u_p hız ifadesi, a_p teriminin sağ tarafa bölüm olarak geçirilerek yalnız bırakıldıktan sonra, lineer enterpolasyonu sonucu kontrol hacim kenar yüzeylerindeki hız bileşenleri hesaplanır. Buna örnek olarak kontrol hacmin batı w kenarındaki hız bileşenini hesaplayalım. Bunun için önce komşu olan düğüm noktaların P ve W için ayrıklaştırılmış x- yönündeki momentum denklemlerini yazalım:

$$U_P = \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} U_{nb} + \Delta y_P (P_w - P_e) + S_U}{a_P} \right]_P$$

$$U_W = \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} U_{nb} + \Delta y_W (P_{ww} - P_w) + S_U}{a_P} \right]_W \quad (3.10)$$

Kontrol hacim kenarında bulunan U_w hızı bu iki terimin lineer enterpolasyonundan elde edilir. Fakat basınç gradyeni P_e ve P_w basınç değerlerin enterpolasyonundan oluşmamaktadır, bunun yerine merkezi basınçların P_p ve P_w ' nin farkı kullanılmaktadır. Sonuçta U_w hız bileşeni için şu şekilde bir ifade elde ederiz:

$$U_w = \left(\frac{\sum_{nb} a_{nb} U_{nb}}{a_p} \right)_w - \left(\frac{1}{a_p} \right)_w \Delta y (P_p - P_w) \quad (3.11)$$

(3.11) denkleminde parantez üzerinde bulunan çizgiler, o terimlerin iki komşu düğüm noktaların lineer enterpolasyonu sonucu hesaplandığını göstermektedir. Ayrıca bu denklemde görüleceği üzere basınç terimi iki komşu düğüm noktaların basınçından hesaplanmaktadır. Yani hızı sürükleyen basınç gradyeni olarak komşu düğüm noktalarında bulunan basınçların farkı alınmıştır. Bu da kaydırılmış değişkenli ağ sisteminin fikrinin esasını oluşturmaktadır. Buradan çıkartılabilecek bir sonuç, çakışık değişkenli ağ sisteminin değişkenlerinin sıralanışı dolaylı olarak kaydırılmış değişkenli ağ sisteminin fikrine dayanmaktadır. Majumdar (1988) alt relaksasyon katsayısının etkiside işleme katarak bu enterpolasyonu iyi yönde geliştirmiştir. Sonuç olarak i' ninci hız bileşenini hesaplayabilmek için kontrol hacmin batı w tarafı için iki boyutlu hal için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$U_w = \alpha_u \left[H_p \right] + D (P_w - P_p) + (1 - \alpha_u) U_w^0$$

burada : $H_p = \frac{1}{a_p} \left(\sum_{nb} a_{nb} U_{nb} + S_U \right)$, $D = \frac{\Delta y}{a_p}$ (3.12)

Bu ifadede çizgiler yine aynı şekilde, büyüklüklerin bir lineer enterpolasyon işlemi ile kontrol hacim merkez nokta değerleri olan P ve W' den hesaplandığını göstermektedir. U_w^0 değeri ise U_w değerinin bir önceki iterasyondaki değeridir.

Kontrol hacim kenar yüzeylerinde bulunan hızların hesaplanması için uygulanan bu enterpolasyon işlemine, momentum denkleminde işleme dahil edildiği için, **momentum enterpolasyon** işlemi olarak adlandırılmaktadır. Bu enterpolasyon işlemi çakışık değişkenli ağ sisteminin başarısı için çok önemlidir.

Perić et al. (1987) bu yöntemle kaydırılmış değişkenli ağ sistemi arasında farklı uygulamalar için bir mukayese yapmışlardır. Momentum enterpolasyonun kullanılmasıyla (3.12) her hangi bir dezavantaj görememişlerdir. Fakat yazarlar, çakışık değişkenli ağ sisteminin algoritmik yapı açısından büyük avantajları

olduğundan söz etmektedirler. Bu yöntemin kullanılmasıyla momentum denklemindeki basınç gradyeninden (3.9) görüleceği üzere, sınırlardaki basınç değerlere (P_W ve P_E) ihtiyaç duyulmaktadır. Bu değerler ise sınır kenara en yakın olan iç noktadaki basınç değerlerin ekstrapolasyonundan elde edilirler.

3.3 Cebirsel Denklem Sisteminin Çözümü

Navier-Stokes ve enerji denklemleri lineer olmayan denklem sistemleridir. İteratif çözüm algoritmasının kullanılmasıyla ayrıklaştırılmış denklemde bulunan katsayılar, hızlara veya kütleli akılara bağlı olarak bir önceki iterasyonla hesaplanmaktadır. Bunun sonucu lineer denklemlerden oluşan bir sistem oluşur. Bu denklem en genel hali ile iki boyutlu hal için daha önceki kısımlarda gösterildiği gibi şu şekildedir

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + S_P \quad (3.13)$$

(2.32) ifadesiyle verilen (3.13) denkleminde ait matris [L] $\Phi=S$, Gauss - Eliminasyon çözüm yönteminin tridiagonal sistem için Thomas tarafından (1949) yılında geliştirilen hızlandırılmış çözüm yöntemi ile çözülmektedir. Bu yöntemin iki boyutlu hal için Fortran dilinde geliştirilmiş olan bir TDMA (Tri-Diagonal-Matrix-Algorithmus) Subroutine kullanılmıştır.

3.3.1 TDMA (Thomas -Algoritması):

Bu Thomas - Algoritmasına göre (3.13)' nolu denklem sistemini çözebilmek için, bu denklem sistemini iki boyutlu hal için genelleştirmemiz gerekir. Bunun için şu şekilde bir genelleştirme yapabiliriz:

$$\underbrace{a_P \Phi_P = a_N \Phi_N + a_S \Phi_S}_{\text{Tridiagonal-Denklem - Sistemi}} + \underbrace{[a_E \Phi_E + a_W \Phi_W]}_{\text{Sabit}} + S_P \quad (3.14)$$

$S-N$ yönünde çözüm

Denklem (3.14)' dü daha genel olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$a_j \Phi_{j-1} + b_j \Phi_j + c_j \Phi_{j+1} = S_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

(3.14) nolu denklem $j = 1'$ den N' ne kadar her ağ noktası için yazıldığı takdirde, N bilinmeyenli Φ_{j+1} değeri için (3.15) gibi bir tridiyagonal lineer denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 b_1 \Phi_1 + c_1 \Phi_2 &= S_1 \\
 a_2 \Phi_1 + b_2 \Phi_2 + c_2 \Phi_3 &= S_2 \\
 a_3 \Phi_2 + b_3 \Phi_3 + c_3 \Phi_4 &= S_3 \\
 &\vdots \\
 a_N \Phi_{N-1} + b_N \Phi_N &= S_N
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Bu denklem sistemi Matris yazılış şekli ile daha kısa olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix}
 b_1 & c_1 & & & & \\
 a_2 & b_2 & c_2 & & & \\
 & a_3 & b_3 & c_3 & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & a_N & b_N
 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Her satırdan a_N katsayılı terim elimine edilirse, en son satırda sadece bir tane bilinmeyenli terim kalmaktadır Φ_N ve bununla bütün terimler aşağıdan yukarıya doğru hesaplanabilir. Eliminasyon için sistematik olarak ilk önce ilk diyagonal elemanı 1 yapabilmek için, birinci denklemini b_1' e bölmek gerekir. (3.17) ve (3.18) nolu ifadelerde görüldüğü gibi.

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1 & & & & \\ & 1 & r_2 & & & \\ & & 1 & r_3 & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_N \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

burada,

$$r_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad Q_1 = S_1 / b_1 \quad (3.18)$$

Şimdi birinci denklem ($-a_2$) ile çarpılır, sonuç ikinciye ilave edilir ve b_2' nin yeni değerine bölünür. Bunun sonucu a_2 yerine 0, b_2 yerine 1 ve c_2 yerine $r_2 = c_2 / (b_2 - a_2 r_1)$) değerleri elde edilir. $N = 2, 3, \dots, N-1$ e kadar genel olarak ifade edilecek olursa katsayılar matrisinde

$$r_j = c_j / (b_j - a_j r_{j-1}) \quad (3.19)$$

ifadesi gözükür. Denklem sisteminin sağ tarafı buna uygun olarak dönüştürülmesi gerekiyor:

$$Q_j = \frac{S_j - a_j Q_{j-1}}{b_j - a_j r_{j-1}} \quad (3.20)$$

Yeni terimler Φ_N buna göre aşağıdan yukarıya doğru şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \Phi_N &= Q_N \\ \Phi_j &= Q_j - r_j \Phi_{j+1} \\ j &= N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Bu şekilde sırasıyla $\Phi_{N-1}, \Phi_{N-2}, \Phi_{N-3}, \dots, \Phi_2, \Phi_1$ terimleri elde edilir ve N bilinmeyenli lineer tridiagonal denklem sistemi çözülmüş olunur.

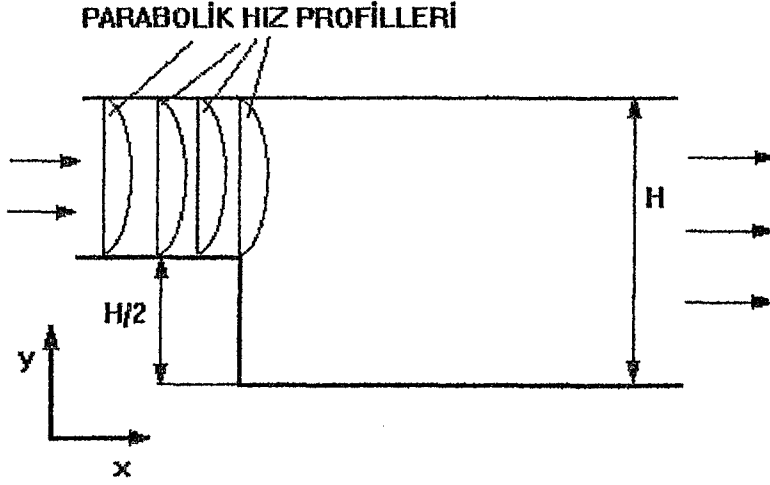
3.4 Sınır Şartların Yerleştirilmesi:

Akımı belirleyici differansiyel denklemler sonsuz büyüklükte bir bölge için integre edilmesi gerektiği için, her bağımlı değişken için kenarlarda değerler verilmesi gerekir. Yöntemin stabilitesi ve hassasiyeti büyük ölçüde kenar şartların formülasyonuna bağlıdır. Bu nedenle aşağıdaki kısımlarda kenar şartların formülasyonu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu çalışmada iki farklı uygulama olan - basamak üzerinden akış ve - doğal konveksiyon uygulamaları için program test edildiği için, bu iki uygulama için sınır şartlar ayrı ayrı incelenecektir.

3.4.1 Bir basamak üzerinden akış problemi için sınır şartlar (backward - facing step flow):

Basamak üzerinden akış problemlerine ait giriş şartı olarak bir analitik hesaplanmış veya çoğunlukla ölçü verilerine dayanan bir hız profili verilmektedir. Sayısal ağda ise sınırlarda, ölçü değeri bulunmayan düğüm noktalarındaki değerler, komşu olan deneysel veri noktalarından enterpolasyonla hesaplanır. Basamaklı akış uygulamasında sadece süreklilik ve momentum differansiyel denklemleri çözülmektedir.

Hesaplama işleminin başlangıcında ise momentum denkleminin çözümü için bütün giriş kütleli akılar verilen sınır şartlardaki hız değerlerine göre hesaplanır ve ardından bir daha değiştirilmez. Momentum enterpolasyonu için gerekli olan sınırlardaki basınç değerleri ise kenarlara en yakın olan iki değerden lineer ekstrapolasyon ile hesaplanır ve çevre noktadaki basınçların etkisi ise bu sırada ihmal edilir. Batıda sınır şartı olarak basamaklı akış uygulaması için, yatay hız bileşeni U için bir parabolik hız profili giriş şartı olarak verilmiştir. Bu hız profili Şekil 3.4' de gösterilmiştir.



Şekil 3.4 Basamak üzerinden akış için giriş şartı olarak parabolik hız profili

Bu hız profilinin bir kanalda sıkıştırılamayan akışkanlar için, zamandan bağımsız olarak analitik ifadesi ise şu şekildedir:

$$U(I, J) = 16 \cdot (Y(J) - 0.5) \cdot (1.0 - Y(J)) \quad (3.14)$$

Şekil 3.4' de göre parabolik hız profili $H/2$ yüksekliğinden itibaren başlamaktadır, yani bu hız $H/2$ ile H yükseklikleri arasında geçerlidir. $H/2$ yüksekliğinin altında kalan batı sınırındaki düğüm noktalarındaki yatay hız bileşenlerin değerleri ise sıfırdır. Düşey hız bileşenlerin (V) değeri ise H yüksekliği boyunca batıdaki sınır kenarındaki düğüm noktalarında tamamen sıfırdır.

Akım bölgesinin doğu sınırında ise, akışın çıkış bölgesi olduğu için normal olarak herhangi bir sınır değeri bilinmemektedir. Bu nedenle doğu sınırındaki değerlerin, akıma olan etkisini mümkün mertebede asgariyeye indirgeye bilmek için, bu sınır bölgesi uzun alınmaktadır. Genellikle bağımlı değişken Φ için bir sıfır gradyan şartı kullanılmaktadır:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

Bunun sonucu akımın çıkış bölgesinde difüzyonun etkisi ortadan kaldırılmaktadır, yani sıfır olmaktadır. Hesaplamalarda doğu sınırındaki yatay ve düşey hız bileşenleri için sıfır gradyan şartı kullanılmıştır. Fakat burada dikkat edilmesi gereken husus ise, bir akım çıkış kenarının, yani sıfır gradyanında yer alan en son bağımlı değişkenin,

hesaplama çözüm bölgesi içerisinde bulunmamasıdır. Aksi takdirde fiziksel olarak anlamsız çözümler elde edilebilir.

Kuzey ve güney sınır şartlarında ise düşey ve yatay hız bileşenleri, herhangi bir hareket olmadığı için sıfır alınmıştır.

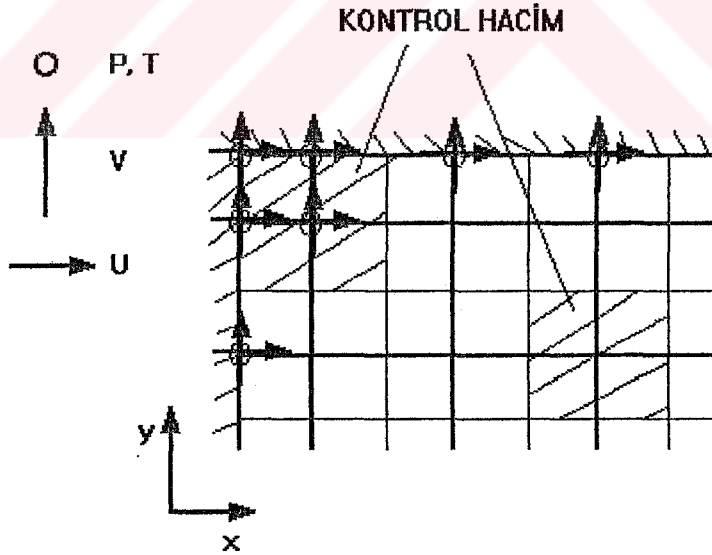
3.4.2 Doğal konveksiyon problemi için Sınır Şartlar:

Doğal konveksiyon uygulaması için süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinden oluşan differansiyel denklem sistemini çözebilmek için, bütün akım bölgesi için hız bileşenleri ve sıcaklık başlangıç şartı ve sınır kenarlardaki düğüm noktalarındaki sınır şartlar verilmesi gerekir. Başlangıç şartı olarak iki boyutlu doğal konveksiyon uygulaması için sakin hal $U = V = 0$ ve başlangıç sıcaklık olarak $T_{ref} = T_{soğuk} = T_c$ seçilmiştir. İncelenen kare kutu için sınır şartlar ise Tablo 3.1' de gösterilmiştir. Bütün kenarlarda hız bileşenlerin değerleri sıfır alınmıştır. Sıcaklık şartı olarak batı kenarındaki yüzey T_h gibi sabit sıcaklıkta ve doğu tarafı ise T_c gibi sabit bir sıcaklıkta tutulmaktadır. Bu sırada tavan ve taban yüzeyleri ideal bir şekilde izole edilmiş (adyabatik $\Rightarrow \partial T / \partial x = 0$) olarak kabul edilmektedir, yani o yüzeylerden herhangi bir şekilde ısı alış verişi söz konusu değildir. Ağırlık vektörü ise dikey duvarlara paralel kabul edilmektedir $g = (0, -g)$, burada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Sınırlardaki basınç değerleri ise, birinci uygulamada olduğu gibi, kenarlara en yakın olan iki değerden lineer ekstrapolasyon ile hesaplanır ve çevre noktalarındaki basınçların etkisi ise bu sırada ihmal edilir.

Basınç, sıcaklık ve hızların sınırlardaki konumları Şekil 3.5' gösterilmektedir.

TABLO 3.1 Sıcaklık Sınır Şartları

Kenar:	Sıcaklık Sınır Şartları:
1- Batı	$T(x=0, y) = T_h$
2- Doğu	$T(x=L, y) = T_c$
3- Güney (Taban)	$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right _{y=0} = 0$ (<i>adyabatik</i>)
4- Kuzey (Tavan)	$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right _{y=L} = 0$ (<i>adyabatik</i>)



Şekil 3.5 Basınç, sıcaklık ve hızların sınırlardaki konumları

3.5 Yakınsamanın Tartışılması:

Bu çalışmada incelenen denklemler genel olarak lineer olmayan ve birbiriyle bağlantılı denklemlerdir. Bu çalışmada lineer olmayan ve birbiri arasında bağ olan denklemler iteratif olarak ve yakınsama olana kadar tekrar edilerek çözülmektedir. İterasyon işlemi ise, arzu edilen bir yakınsama kriterine ulaşıldığı zaman kesilmektedir. Yakınsama kriterini belirleyebilmek için kullanılabilir anlamlı ve doğru bir yöntem ise, ayrıklaştırılmış denklemin bağımlı olduğu değişkenlerin anlık değerleriyle ne kadar hassas olarak sağlandığını kontrol etmektir. Her kafes noktası için bir hata farkı R , yani ayrıklaştırılmış denklemin sağ ve sol taraflarının farkından, hesaplanabilir:

$$R = \sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + S - a_P \Phi_P. \quad (3.16)$$

Burada sadece ayrıklaştırılmış denklemin sağlandığı takdirde, $R = 0$ olmaktadır. Doğru toleransın ε seçimi için, aşağıdaki kriter göz önünde bulundurulmuştur:

$$|R| \leq \varepsilon. \quad (3.17)$$

Buradaki $| \quad |$ parantez mutlak değeri ifade etmektedir. Ayrıca bu çalışmada birden fazla ayrıklaştırılmış denklemin çözümü söz konusu olduğundan (yani yatay momentum denklemleri, düşey momentum denklemleri ve basınç düzeltme denklemleri) birden fazla R değeri göz önünde bulundurulması gerekir. Bu durumda hesaplanan hata farkının en büyüğü kritik değer olarak dikkate alınmaktadır. Bu durumda şu şekilde ifade edebiliriz:

$$R_{krit} = \max(R_U, R_V, R_P) \quad (3.18)$$

(3.18) nolu denklemde R_U yatay momentumun, R_V düşey momentumun ve R_P basınç düzeltme denkleminin hata farkı göstermektedir. Buna göre iterasyon işlemi

$$R_{krit} \leq \varepsilon \quad (3.19)$$

şartı sağlandığı takdirde son bulmaktadır. ε hata toleransların seçimi istenilen sonucun hassasiyetine bağlıdır. Pratiğe yönelik uygulamalarda bu değer $10^{-3} \leq \varepsilon \leq 10^{-4}$ arasında değişmektedir.

3.6 Alt-Relaksasyon Katsayısının Kullanılması:

Cebirsel denklemlerin iteratif çözümünde veya iteratif olarak lineer olmayan denklem sistemlerin işlenmesinde bağımlı değişkenlerde meydana gelen değişimleri hızlandırabilmek veya sönmüleyebilmek için relaksasyon katsayıları kullanılmaktadır. SIMPLE - yöntemini sağlayabilmek için, hızlar ve basınç düzeltmeler için alt-relaksasyon gereklidir. Aksi halde lineer olmayan problemler iraksarlar (bak. Patankar, 1980). Burada alt relaksasyon katsayıları, yeni hız ve basınç değerleri için denklem (3.20)' ye göre uygulanır:

$$\begin{aligned} U^{yeni} &= (1 - \alpha_u) U^{eski} + \alpha_u \cdot U' \\ V^{yeni} &= (1 - \alpha_v) V^{eski} + \alpha_v \cdot V' \\ p^{yeni} &= (1 - \alpha_p) p^{eski} + \alpha_p \cdot p' \end{aligned} \quad (3.20)$$

Alt relaksasyon katsayısı ayrıklaştırılmış yatay momentum differansiyel denkleme ise şu şekilde yerleştirilir (bak. Patankar (1980), Van Doormaal et al. (1984)):

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_u} U_p = \sum_{nb} a_{nb} U_{nb} + S + (1 - \alpha_u) \frac{\alpha_p}{\alpha_u} U_p' \quad (3.21)$$

Burada alt relaksasyon katsayısı her zaman $0 < \alpha < 1$ arasında olması gerekir. Bu şekilde bağımlı değişkenlerin yavaş değişimi sağlanmış olunur. α_u veya α_v ile α_p arasında Perić et al. (1988) farklı uygulamalar için Kısım 3.2' de verilen $\alpha_p \approx 1 - \alpha_u$ ifadesini verimli bir yakınsama için önermektedir.

4. BİLGİSAYAR PROGRAMI HAKKINDA BİLGİ

Bu çalışmanın amacını çakışık değişkenli ağ sisteminde, sıkıştırılmayan türden akışkanların ve zamandan bağımsız (stasyonery) akım uygulamaların çözümü için sayısal çözüm yapan bir program geliştirmek olduğunu, bu çalışmanın giriş kısmında söz etmiştik. Bu amaca ulaşabilmek için bilgisayar programı, ileri bir programlama dili olan FORTRAN 77 programlama dilinde kodlanmıştır. Bu ileri programlama dili bir FORTRAN 77- compiler (derleyici) kullanmak suretiyle sahip olduğu standart program yazılış biçiminden dolayı, her türlü bilgisayara uygulanabilir. Bu programın hazırlanmasında KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ' ne ait bir ESCORT 486 DX 33 bilgisayarından yararlanılmıştır. Bu bilgisayarın sahip olduğu sınırlı hafızadan (4 Mbyte Ram, 170 Mbyte Harddisk) ve işlemcinin sahip olduğu işlemci hızının yavaş oluşundan dolayı bu çalışmada yer alan akım uygulamaları sınırlı ağ sayısında yapılabilmektedir (bak. Kısım 5).

Bilgisayar programı Kısım 5' de yer alan iki farklı uygulama için başlangıç şartlar, sınır şartlar ve alt programlar (subroutine) göz önünde bulundurularak geliştirilmiştir. Birinci uygulama olan Kısım 5.1' de yer alan laminar doğal konveksiyon akış problemi için program, bir ana (main) programdan ve 7 alt programdan (subroutine) oluşmaktadır. İkinci uygulama olan Kısım 5.2' de yer alan basamak üzerinden laminar akış problemi ise bir ana (main) programdan ve 6 alt programdan oluşmaktadır. Birinci uygulama fazladan dikdörtgen boşluk içerisindeki sıcaklık alanın hesaplanabilmesi için enerji denkleminin çözümüne ait bir alt program (subroutine) içermektedir. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2' de ana program ve buna bağlı olan alt programların şematik olarak her iki uygulama için kaba sıralanışları gösterilmektedir.

ANA PROGRAM

```

— ALT PROGRAM " CALL INIT ( NI, NJ ) "

— ALT PROGRAM " CALL CALCU "
— ALT PROGRAM " CALL CALCV "
— ALT PROGRAM " CALL CALCP "
— ALT PROGRAM " CALL CALCT "
— ALT PROGRAM " CALL LISOLV "
  ( TDMA İLE ÇÖZÜM )

— ALT PROGRAM " CALL PRINT "

```

Şekil 4.1 Bir laminar doğal konveksiyon akışına ait ana program ve alt programlar

ANA PROGRAM

```

— ALT PROGRAM " CALL INIT ( NI, NJ ) "

— ALT PROGRAM " CALL CALCU "
— ALT PROGRAM " CALL CALCV "
— ALT PROGRAM " CALL CALCP "
— ALT PROGRAM " CALL LISOLV "
  ( TDMA İLE ÇÖZÜM )

— ALT PROGRAM " CALL PRINT "

```

Şekil 4.2 Bir basamak üzerinden laminar akışa ait ana program ve alt programlar

Şekil 4.1 ve 4.2' de yer alan " LISOLV " altprogramı Tri - Diagonal - Matris - Algoritmasına ait bir alt programdır. Momentum, enerji ve basınç düzeltme denklemlerinin çözümünde kullanıldığı için, bu alt program çözümünü yaptığı denklemin yer aldığı alt programda yer almaktadır. Bu ana ve alt programları incelemeden önce, o programlarda yer alan ve alan tanımlaması yapılan büyüklükler olan değişkenleri inceleyelim.

4.1 Ana ve Alt Programlarda Kullanılan ve Tanımlanan Değişkenler:

Tablo 4.1 Geometrik Değişkenler

ADLANDIRILMASI	ANLAMI
NI	x - eksenini doğrultusunda kafes sayısı
NJ	y - eksenini doğrultusunda kafes sayısı
X(I)	Kontrol hacmin x - koordinatı
Y(J)	Kontrol hacmin y - koordinatı
XU(I)	Kontrol hacmin kenar yüzeylerin x - koordinatı
YV(J)	Kontrol hacmin kenar yüzeylerin y - koordinatı
DXPW(I)	Ağ noktaları arasındaki W - P uzaklığı
DXEP(I)	Ağ noktaları arasındaki P - E uzaklığı
DYPS(J)	Ağ noktaları arasındaki S - P uzaklığı
DYNP(J)	Ağ noktaları arasındaki P - N uzaklığı
SEW(I)	Kontrol hacmin x - doğrultusundaki uzunluğu
SNS(J)	Kontrol hacmin y - doğrultusundaki uzunluğu

Tablo 4.2 Katsayılar

ADLANDIRILMASI	ANLAMI
AW(I, J)	Ayrıklaştırılmış denklemin batı yönündeki ana katsayısı
AE (I, J)	Ayrıklaştırılmış denklemin doğu yönündeki ana katsayısı
AS(I, J)	Ayrıklaştırılmış denklemin güney yönündeki ana katsayısı
AN(I, J)	Ayrıklaştırılmış denklemin kuzey yönündeki ana katsayısı
AP(I, J)	Ayrıklaştırılmış denklemin kontrol hacmin merkez noktasının ana katsayısı
SU(I, J)	Kaynak terimi
SP(I, J)	Kaynak terimin negatif terimlerini içeren katsayı
DU(I, J)	x - doğrultudaki basınç terimine ait bir çarpan
DV(I, J)	y - doğrultudaki basınç terimine ait bir çarpan
CW(I, J)	Kontrol hacmin batı yönündeki kütleli akı
CE (I, J)	Kontrol hacmin doğu yönündeki kütleli akı
CS(I, J)	Kontrol hacmin güney yönündeki kütleli akı
CN(I, J)	Kontrol hacmin kuzey yönündeki kütleli akı
DW(I, J)	Kontrol hacmin batı yönündeki difüzyon katsayısı
DE(I, J)	Kontrol hacmin doğu yönündeki difüzyon katsayısı
DS(I, J)	Kontrol hacmin güney yönündeki difüzyon katsayısı

DN(I, J)	Kontrol hacmin kuzey yönündeki difüzyon katsayısı
HIX(I, J)	Momentum enterpolasyonuna ait yatay hız bileşenleri için katsayı
HIY(I, J)	Momentum enterpolasyonuna ait düşey hız bileşenleri için katsayı
DUE(I, J)	Momentum enterpolasyonuna için x - doğrultudaki basınç terimine ait bir çarpan
DVE(I, J)	Momentum enterpolasyonu için y - doğrultudaki basınç terimine ait bir çarpan

Tablo 4.3 Bağımlı Değişkenler

ADLANDIRILMASI	ANLAMI
U(I, J)	Yatay hız bileşeni
V(I, J)	Düşey hız bileşeni
P(I, J)	Basınç bileşeni
PP(I, J)	Basınç düzeltme bileşeni
PHIOLD(I, J)	Bir önceki iterasyona ait bileşenlerin değerlerini içeren terim
T(I, J)	Sıcaklık terimi

Tablo 4.4 Sabitler

ADLANDIRILMASI	ANLAMI
GAMA(I, J)	Viskozite bileşeni
RHO	Yoğunluk
VIS	Viskozite değeri

Tablo 4.5 İterasyon

ADLANDIRILMASI	ANLAMI
MAXIT	İterasyon sayısı
MAXITU	U - momentum denklemi için iterasyon sayısı
MAXITV	V - momentuö denklemi için iterasyon sayısı
GREAT	10 ^ 30 gibi büyük bir sayı değeri
RESORU	Ayrıklaştırılmış yatay momentum denkleminin hata farkı
RESORV	Ayrıklaştırılmış düşey momentum denkleminin hata farkı
RESORP	Ayrıklaştırılmış basınç düzeltme denkleminin hata farkı
E	Alt relaksasyon katsayısı
RESORT	Ayrıklaştırılmış enerji denkleminin sağlarlığı
RHOREF	Referans Yoğunluk Değeri
TREF	Referans sıcaklık değeri
PR	Prandtl katsayısı

Bu kısımda programda yer alan ve ana programda olduğu gibi alt programlarda da tanımlı olan katsayılar ve değişkenler tanıtıldı. Bu değişkenler iki boyutlu akış uygulamaları için düzenlendikleri için x - ve y - koordinatlarındaki değişimi gösteren I ve J terimlerini içermektedirler.

4.2 Ana ve Alt Programların (Main Program and Subroutines) İncelenmesi:

4.2.1 Ana program:

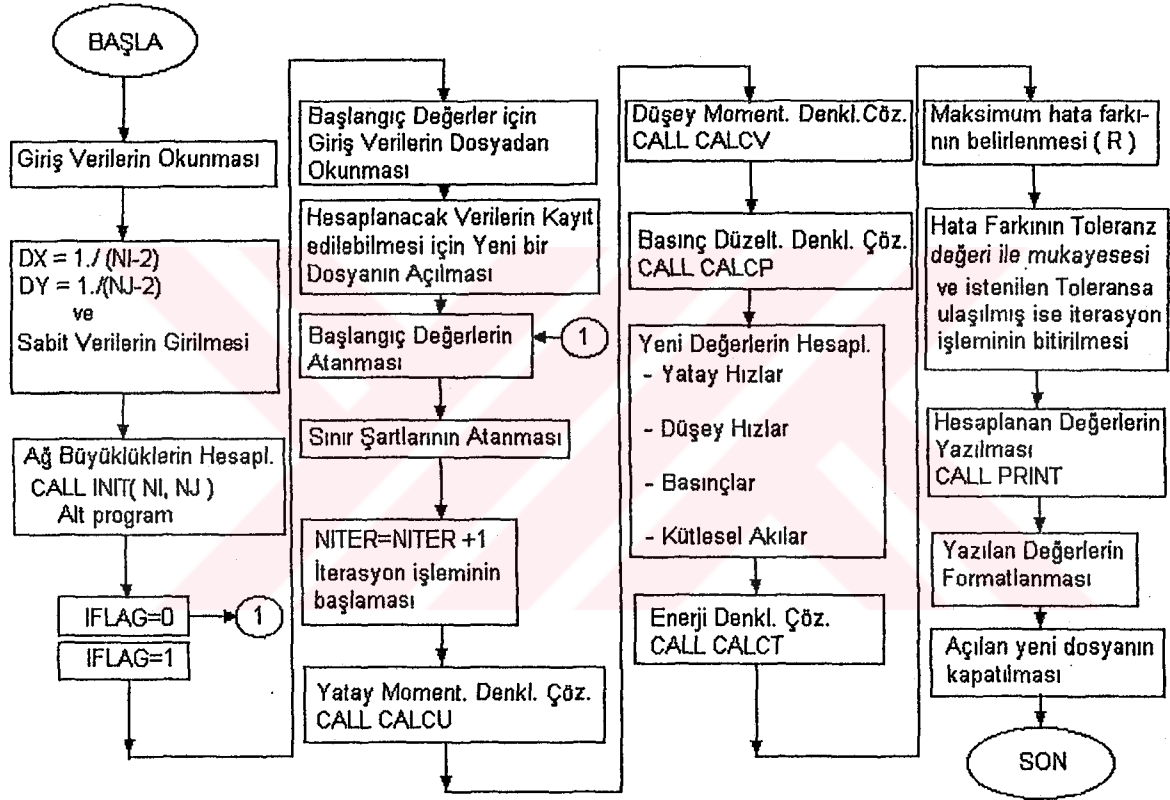
Ana program, uygulamalara ait veri giriş, başlangıç ve sınır şartları ve programda yer alan alt programların (subroutines) işlem sırasını belirler. Mesela momentum, basınç düzeltme ve enerji denklemlerin çözülmesi için hesaplama bölgesinin ağ büyüklükleri bilinmesi gerektiği için, önce ağ yapısına ait verilerin hesaplanmasını sağlamak amacıyla bu işlemi yapan alt programı INIT (NI, NJ) işleme alır. Başlangıç ve sınır şartlar uygulamadan uygulamaya geçtiği gibi sadece ana programda yer alır ve alt programlar bu şartlara göre çözülür. Başlangıç şartları bir veri dosyasının bulunması halinde bir veri dosyasından atanabileceği gibi, bütün başlangıç şartlar sıfır olarak da atanabilir. Ana program ayrıca hız, basınç değişkenlerin ve kütleli akıların yeni değerlerinin hesaplanması için düzeltme denklemlerinde içermektedir (bak. Kısım 3.2). İterasyon işlemi sonunda ayrıklaştırılmış denklemlerde elde edilen maks hata farkı belli bir tolerans değeri ile mukayese edilerek (bak Kısım 3.6) iterasyon işleminin devam edip etmeyeceğide bu programda karar verilmektedir. En son olarak ana programda hesaplama işlemi sonucu elde edilen verilerin yazma (Print) alt programı ile ekrana yazılması sağlanır ve bir veri dosyasına kayıt eder. Ana programın kabaca program yapısı şu şekildedir:

- Giriş verilerin okunması.
- Verilerin dosyadan okunması (başlangıç şartları).
- Sınır şartların atanması.
- Gerekli olan verilerin hesaplanması için işlem sırasını belirlemek.
- Değişkenlerin yeni değerlerinin hesaplanması

- İterasyon işleminin devamına karar vermek.

-Hesaplanan verilerin belli bir dizilişe göre bir veri dosyasına yazılmasını sağlamak ve kayıt etmek.

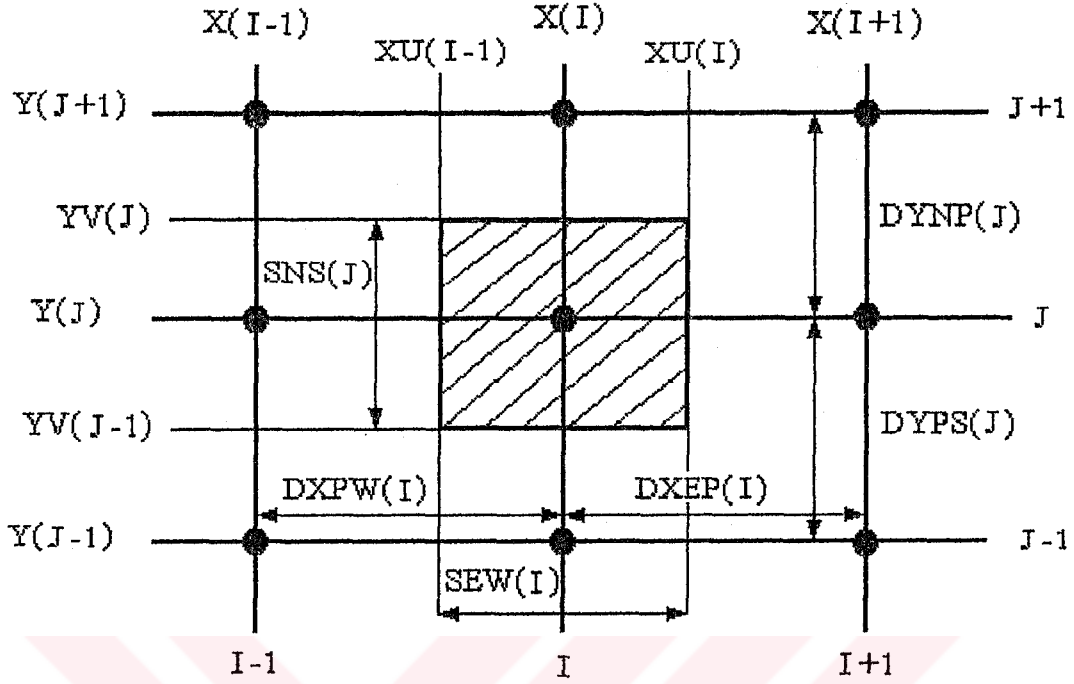
Şekil 4.3' de ana programa ait bir akış diyagramı verilmiştir.



Şekil 4.3 Ana programa ait akış diyagramı

4.2.2 Alt program INIT(NI, NJ):

Bu alt programda hesaplama bölgesinin ağ yapısının büyüklükleri hesaplanmaktadır. Bu hesaplama için çakışık ağ sisteminde bütün bağımlı değişkenler bir kontrol hacmin merkezinde bulunduğu için, sadece bir çeşit kontrol hacim gözönünde bulundurulmuştur. Bu kontrol hacime ve ağ yapısına ait büyüklükler Şekil 4.4' de gösterilmektedir.



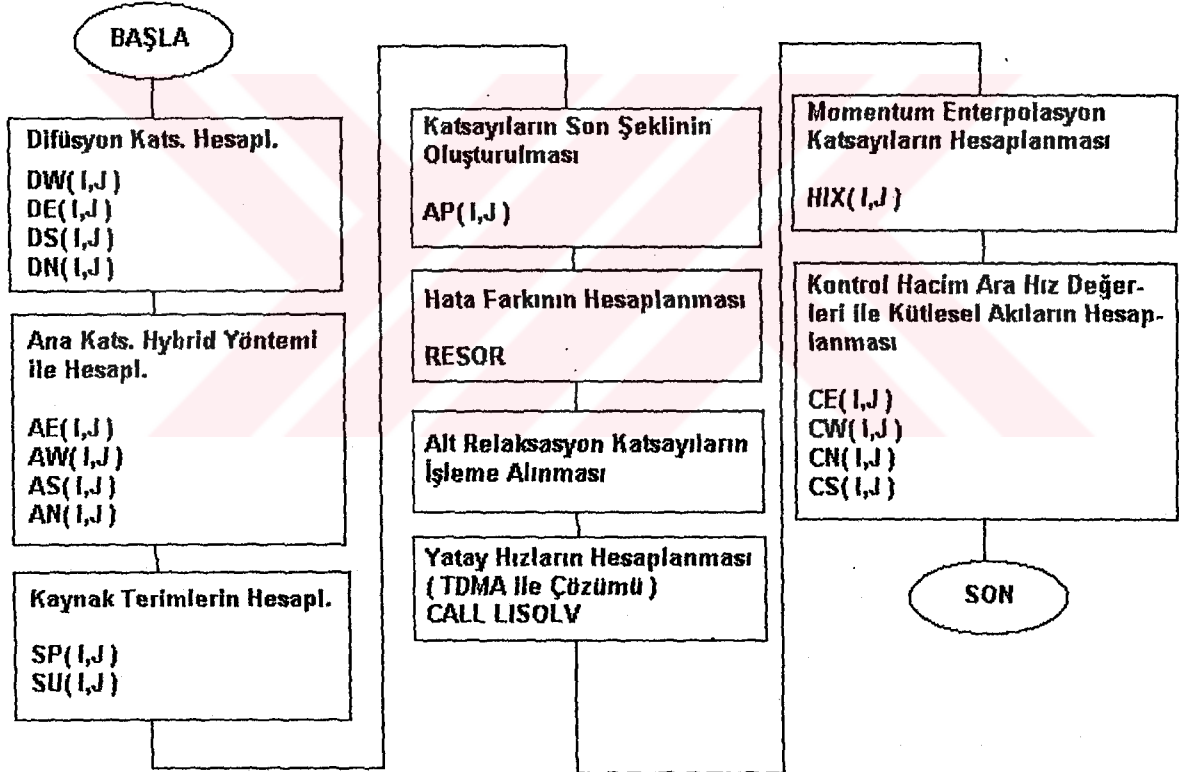
Şekil 4.4 Alt program INIT için ağ büyüklükleri

4.2.3 Alt program CALCU:ve CALCV:

Bu alt programda CALCU ve CALCV sırasıyla yatay ve düşey momentum denklemlerin çözümünü içermektedir. Ayırıklaştırılmış momentum denkleminin çözümünü yapabilmek için ilk işlem olarak bu programda, denklemin katsayıları hesaplanır. Yani konveksiyon, difüzyon ve kaynak terimleri bu alt programda hesaplanmaktadır. Ayrıca hesaplanan bu kaynak terimlerine bağlı olarak ayırıklaştırılmış momentum denkleminin bir önceki iterasyona ait bağımlı hız değişkenleri kullanılarak sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmektedir. Ayırıklaştırılmış denklemin katsayıları hesaplandıktan sonra Kısım 3' de ayrıntılı olarak incelenen TDMA çözüm yöntemine ait bir alt program yardımıyla momentum denklemleri çözülür. Momentum denkleminin çözümü sonucu hesaplanan düğüm noktalarındaki hız bileşenlerinden yararlanarak kütleli akılar için gerekli olan kontrol hacminin ara hız değerlerinin momentum enterpolasyon işlemi ile hesaplanması sağlanmaktadır. Burada ana katsayıların hesaplanmasında Kısım 2' de anlatıldığı gibi hybrid yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemle ana katsayıların çözümü FORTRAN 77 dilinde denklem (4.1)' de olduğu gibi Hybrid çözüm yöntemi kullanılarak ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}
AW(I,J) &= AMAX\ 1(ABS(0.5*CW(I,J)), DW(I,J)) + 0.5*CW(I,J) \\
AE(I,J) &= AMAX\ 1(ABS(0.5*CE(I,J)), DE(I,J)) - 0.5*CE(I,J) \\
AS(I,J) &= AMAX\ 1(ABS(0.5*CS(I,J)), DS(I,J)) + 0.5*CS(I,J) \\
AN(I,J) &= AMAX\ 1(ABS(0.5*CN(I,J)), DN(I,J)) - 0.5*CN(I,J)
\end{aligned}
\tag{4.1}$$

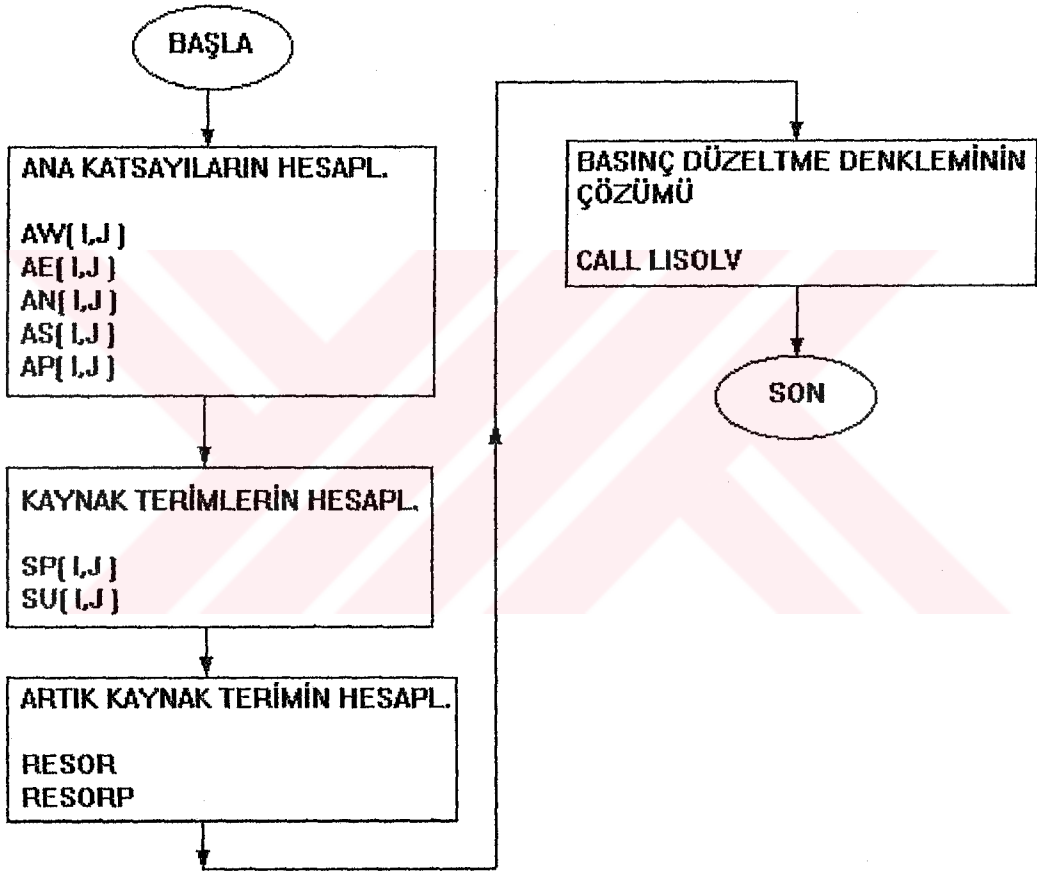
Bu alt programa ait bir akış diyagramı Şekil 4.5' de verilmiştir.



Şekil 4.5 CALCU VE CALCV alt programa ait akış diyagramı

4.2.4 Alt Program CALCP:

Bu alt program ayrıklaştırılmış basınç düzeltme denklemini (bak. Ekler 8.2) içermektedir. Buradaki basınç düzeltme denklemi yatay ve düşey momentum denklemlerinden hesaplanan bağımlı hız değişkenlerinden, daha doğrusu kütsel akılar olan $CE(I, J)$, $CW(I, J)$, $CN(I, J)$ ve $CS(I, J)$ ' den yararlanarak hız ve basınçların yeni değerleri için gerekli olan düzeltme değerlerini hesaplamaktadır. Şekil 4.6' de bu alt programa ait bir akış diyagramı verilmiştir.



Şekil 4.6 CALCP alt programa ait akış diyagramı.

4.2.5 Alt program CALCT:

Bu alt programda ise yeni hesaplanmış hız değerlerinden yararlanarak ayrıklaştırılmış enerji denklemi çözülmektedir. Yani doğal konveksiyon uygulaması için gerekli olan sıcaklık alanı hesaplanmaktadır. Bunun için enerji denkleminin çözümü için gerekli olan ana katsayılar hesaplanır. Burada ana katsayıların hesaplanmasında momentum

denkleminde olduğu gibi hybrid yöntemi kullanılmıştır. Ayrıklaştırılmış enerji denkleminin çözümü için gerekli olan ana katsayılar hesaplandıktan sonra bir önceki iterasyona ait sıcaklık verileri esas alınarak enerji denkleminin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir ve ardından yine TDMA alt program yardımıyla hesaplama bölgesi için düğüm noktalarda bulunan sıcaklıklar hesaplanır (yani sıcaklık alanı). Bu programda işlem olarak diğer alt programlarda takip edilen yolun benzeri takip edilmektedir.

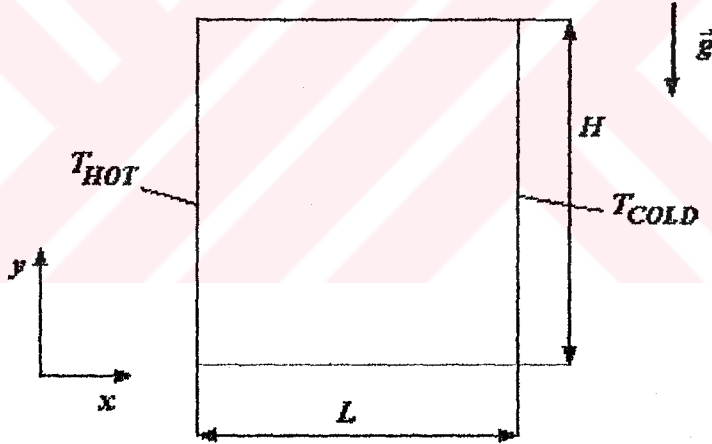
Yukarıdaki alt programlar CALCU, CALCV, CALCT ve CALCP' de yer alan lineer olmayan denklemlerin ayrıklaştırılmış denklemlerinin TDMA ile çözümü için Kısım 3' de ayrıntılı olarak anlatılan bir subroutine programı kullanılmıştır.



5. İKİ BOYUTLU LAMİNAR AKIM OLAYLARINA AİT UYGULAMALAR

5.1 Laminar Doğal Konveksiyon Akış Problemi:

Bir ağırlık kuvveti etkisi altında yoğunluk farklarından dolayı oluşan akım olayları bir çok tabii ve teknik proseslerde önemli rol oynamaktadır. Bunun sonucu bir katı cisim ile bir akışkan arasında ısı geçişi veya bir akışkan içerisindeki enerji taşınımı önemli derecede etkilenmektedir. Bu birinci uygulama olan bir kapalı kaptaki laminar doğal konveksiyon akış olayında bir kenarı T_{HOT} sıcaklığında sabit tutulurken, diğer kenarı bir kaç derece daha düşük bir T_{COLD} sıcaklığında sabit tutulmaktadır. Bu sıcaklık farkından dolayı kapalı kabın içerisinde homojen olmayan bir sıcaklık dağılımı oluşmaktadır. Şekil 5.1' de bir kapalı kapa ait iki boyutlu bir geometrik şekil görülmektedir.



Şekil 5.1 İki kenarı farklı sıcaklıklara sahip bir dörtgen boşluğun geometrik şekli

Bu oluşan sıcaklık dağılımına göre sıcaklığı yüksek olan duvarda akışkan ısınmakta, yoğunluğu buna bağlı olarak azalmaktadır ve ağırlık kuvveti etkisi sonucu oluşan hacimsel kuvvet, sıcaklığı yüksek olan kenar yakınında bulunan sınır tabakayı yukarıya doğru ivmelendirmektedir. Soğuk kenarda ise yoğunluk artmakta, ve bunun sonucu bu kenarda daha ağır olan akışkan negatif yönde, yani aşağı doğru bir hareket oluşturmaktadır.

Yukarıdaki mekanizmaya göre oluşan doğal konveksiyon akım olayı kenar uzunluğu L ve yüksekliği H olan bir kap için $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ ve 10^6 sayılarında ve $Pr = 0.71$

sayılarında iki boyutlu hal için akım ve sıcaklık alanı Boussinesq yaklaşımı kullanılarak hesaplanmıştır. Bu uygulamada Kısım 3' de verildiği gibi tavan ve taban adyabatik olarak kabul edilmiştir. Burada Rayleigh sayısı şu şekilde tanımlanmıştır:

$$Ra = \frac{g\beta L^3 \Delta T Pr \rho^2}{\mu^2} \quad (5.1)$$

(5.1) denkleminde g yerçekimi ivmesi, β termal genişleme katsayısı, L karakteristik uzunluk, ΔT sıcaklık farkı, ρ yoğunluk, μ dinamik viskozite ve Pr Prandtl sayısıdır. Bu denklemde yer alan ifadeler dikkate alınarak farklı Rayleigh sayıları için akım olayının sayısal çözümü yapılmıştır. Bu uygulamada farklı Rayleigh sayıları için denklem (5.1)' de yer alan ifadeler için, yani akışkan özellikleri için dikkate alınan rakamlar Tablo 5.1' de gösterilmiştir.

Tablo 5.1 Hesaplama Kullanılan Akışkan Özellikleri ve Kap Boyutu

Ra	ρ	μ	β	Pr	g	T _{HOT}	T _{COOLD}	L	H
10 ³	1.182	2.5475*10 ⁻²	0.00333	0.71	9.81	320	300	1	1
10 ⁴	1.182	8.1*10 ⁻³	0.00333	0.71	9.81	320	300	1	1
10 ⁵	1.182	2.5475*10 ⁻³	0.00333	0.71	9.81	320	300	1	1
10 ⁶	1.182	8.1*10 ⁻⁴	0.00333	0.71	9.81	320	300	1	1

İki boyutlu hal için bu uygulamada ağ boyutu olarak Tablo 5.2' de gösterilen üç farklı ağ yapısı kapalı kap için esas alınmıştır. Esas alınan ağ yapısı homojen ve kare biçimindedir. Bu uygulama sırasıyla 12*12, 22*22 ve 32*32 ağ sayıları için çözülmüştür. Ağ sayısına bağlı olarak düğüm noktaları arasındaki mesafede değişmektedir, yani ağ sayısı artıkça düğüm noktaları arasındaki mesafeler olan δx ve δy değerleri azalmakta ve ağ sayısı azaldıkça bu değerler artmaktadır. Bu değerler ağ yapısının hassasiyetini ifade etmektedir. Bu ağ sayısı ve düğüm noktaları arasındaki mesafe belirlenirken, bu uygulamanın hesaplama sonuçlarının mukayese edildiği çalışma olan Hortmann et al. (1990) çalışmasında kullanılan ağ sayıları dikkate alınmıştır.

Tablo 5.2 Hesaplama Kullanan Ağ Sayıları ve Ağ Yapısının Hassasiyeti

Ağ Sayısı:	12*12	22*22	32*32
Homojen Yapı	0.1	0.05	0.0333

Bu uygulamada sayısal hesaplama sonuçlarının mukayesesi olarak dikkate alınan çalışmalar De Vahl Davis (1983) ve Hortmann et al. (1990) çalışmalarıdır. De Vahl Davis' in çalışmasında bu uygulamaya yönelik 10^3 , 10^4 , 10^5 ve 10^6 Rayleigh sayıları için bir bench - mark çözüm yer almaktadır ve 11*11 ile 81*81 ağ sayıları arasında sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Hortmann et al. (1990) çalışmalarında ise 10^4 , 10^5 ve 10^6 Rayleigh sayıları için $10*10$ ve $640*640$ ağ sayıları arasında farklı ağ sayıları için difüzyon ve konveksiyon terimlerin hesaplanmasında ikinci mertebeden (second order) merkezi farklar kullanarak sonlu hacimler çok katlı ağ yöntemi (FV Multigrid) ile çözülen Bench - Mark sonuçları yer almaktadır.

Tablo 5.3' de farklı Rayleigh sayıları için bu çalışmada geliştirilen program ile elde edilen çözümler ile yukarıdaki iki çalışmaların çözümleri arasında bir mukayese yer almaktadır. Bu tabloda mukayese edilen değerler ise şu şekilde seçilmiştir:

- 1) Yatay hız bileşeni U için, $x = L / 2$ noktasının dikey ekseninde yer alan maksimum yatay hız bileşeni U_{max} seçilmiştir ve dikey eksenindeki konumu ise y_{max} .
- 2) Dikey hız bileşeni V için, $x = H / 2$ noktasının yatay ekseninde yer alan maksimum düşey hız bileşeni V_{max} seçilmiştir ve yatay eksenindeki konumu ise x_{max} dir.

Bu tabloda yer alan x- ve y- koordinatları L kap uzunluğu ile normalize edilmişlerdir, ve hızlar ise aşağıdaki ifade ile tanımlanan difüzyon hızı ile normalize edilmişlerdir.

$$V_{dif} = \frac{\mu}{Pr \rho L} \quad (5.2)$$

Tablo 5.3 Farklı Ağ Sayılarında ve Farklı Ra Sayılarında Çözümlerin Mukayesesi: (a)
 $Ra = 10^3$; (b) $Ra = 10^4$; (c) $Ra = 10^5$; (d) $Ra = 10^6$

(a)

Ağ Mesafesi:	De Vahl Davis U_{max} (y_{max})	Hortmann et al. U_{max} (y_{max})	Bu Çalışma U_{max} (y_{max})	De Vahl Davis V_{max} (x_{max})	Hortmann et al. V_{max} (x_{max})	Bu çalışma V_{max} (x_{max})
0.1	3.427 (0.801)	-----	-----	3.449 (0.193)	-----	-----
0.05	3.589 (0.811)	-----	3.6375 (0.825)	3.629 (0.181)	-----	3.6918 (0.175)
0.033	-----	-----	-----	-----	-----	-----
0.025	3.634 (0.813)	-----	-----	3.679 (0.179)	-----	-----

(b)

Ağ Mesafesi:	De Vahl Davis U_{max} (y_{max})	Hortmann et al. U_{max} (y_{max})	Bu Çalışma U_{max} (y_{max})	De Vahl Davis V_{max} (x_{max})	Hortmann et al. V_{max} (x_{max})	Bu çalışma V_{max} (x_{max})
0.1	16.243 (0.808)	15.0954 (0.8366)	15.5644 (0.85)	18.055 (0.139)	18.1414 (0.0838)	17.605 (0.15)
0.05	16.189 (0.820)	15.8602 (0.8155)	15.999 (0.825)	19.197 (0.125)	19.1925 (0.0994)	19.3675 (0.125)
0.033	-----	-----	16.041 (0.8167)	-----	-----	19.4918 (0.1167)
0.025	16.182 (0.823)	16.0955 (0.8283)	-----	19.509 (0.120)	19.5303 (0.1278)	-----

Tablo 5.3 (Devamı) Farklı Ağ Sayılarında ve Farklı Ra Sayılarında Çözümlerin
Mukayesesi: (a) $Ra = 10^3$; (b) $Ra = 10^4$; (c) $Ra = 10^5$; (d) $Ra = 10^6$

(c)

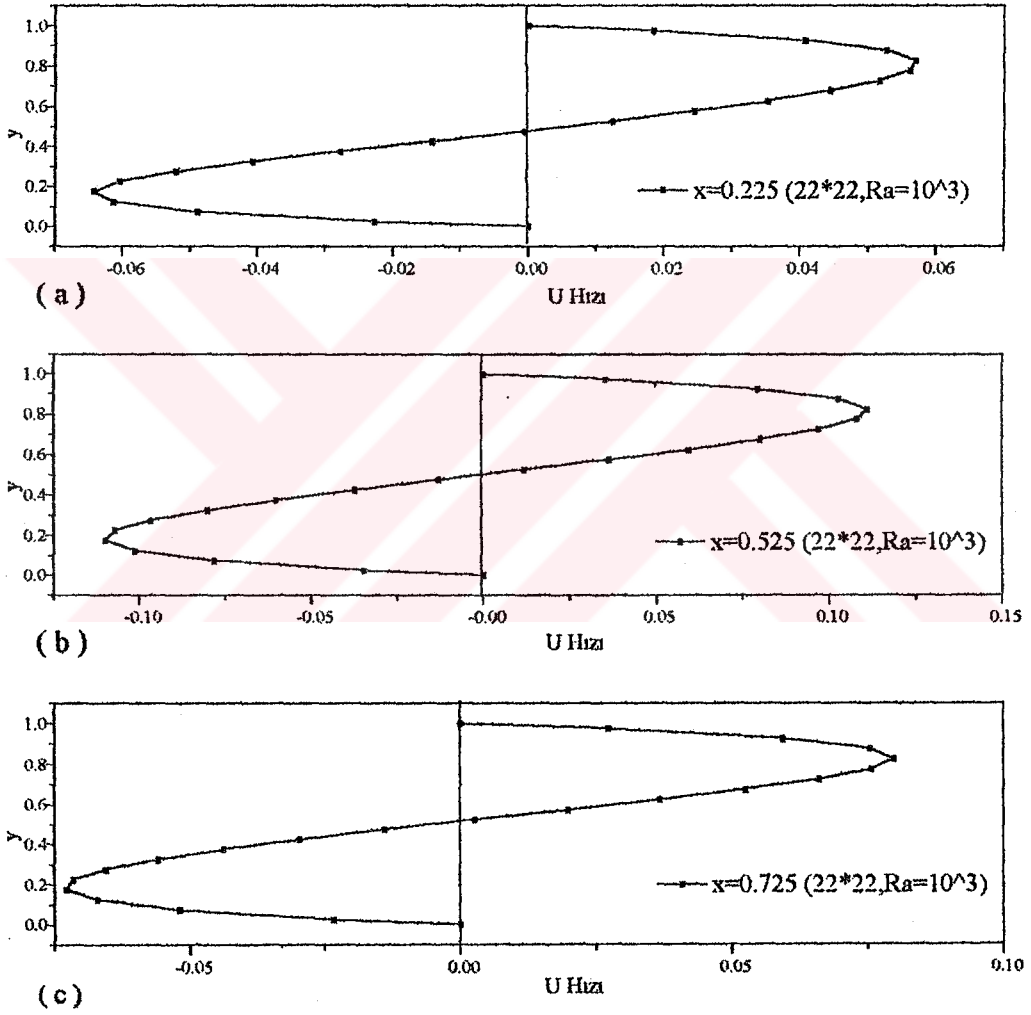
Ağ Mesafesi:	De Vahl Davis U_{max} (y_{max})	Hortmann et al. U_{max} (y_{max})	Bu Çalışma U_{max} (y_{max})	De Vahl Davis V_{max} (x_{max})	Hortmann et al. V_{max} (x_{max})	Bu çalışma V_{max} (x_{max})
0.1	40.90 (0.846)	33.498 0.8500	33.7672 (0.85)	59.71 (0.083)	74.774 (0.05)	73.475 (0.05)
0.05	36.46 (0.854)	34.5813 (0.875)	34.777 (0.875)	62.79 (0.075)	66.4046 (0.075)	66.457 (0.075)
0.033	-----	-----	34.908 (0.85)	-----	-----	67.429 (0.05)
0.025	35.07 (0.855)	34.7396 (0.8625)	-----	66.73 (0.068)	68.8438 (0.0625)	-----

(d)

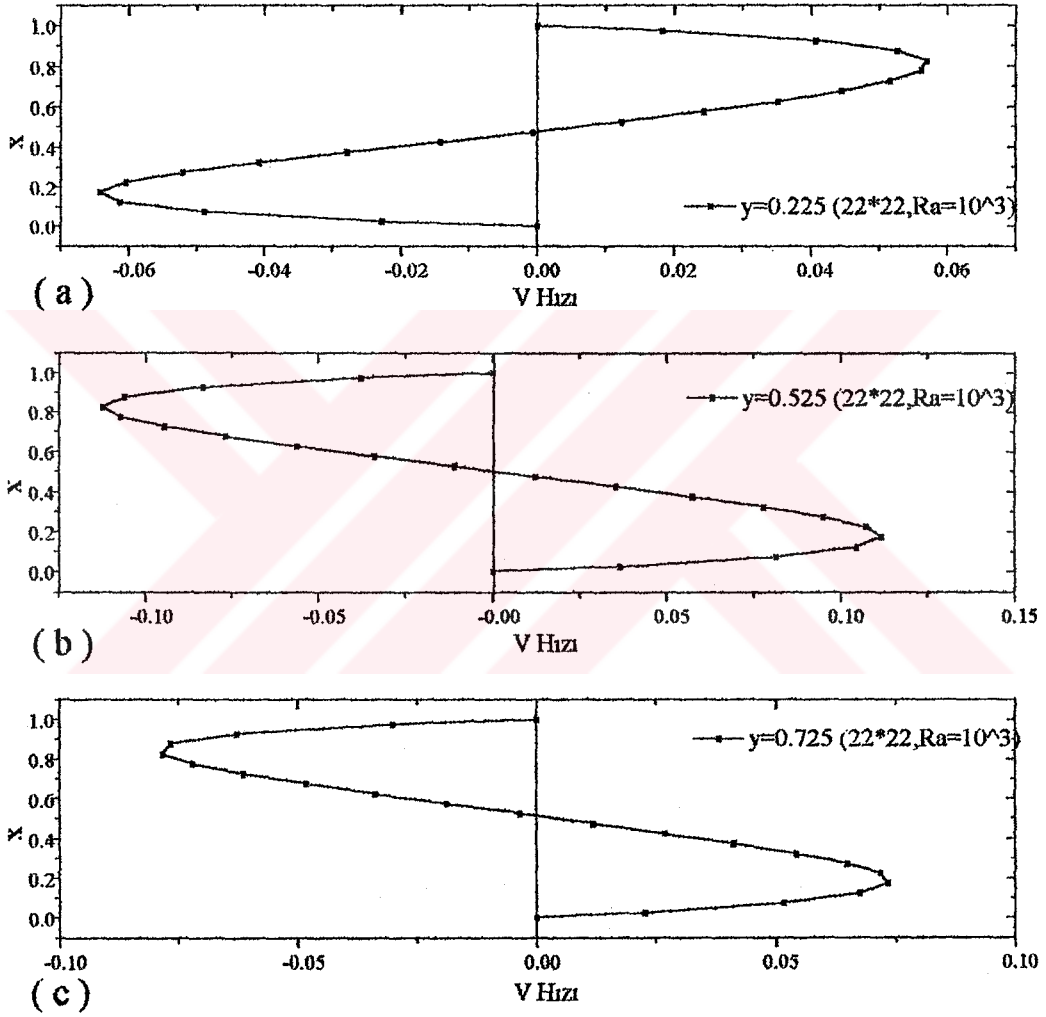
Ağ Mesafesi:	De Vahl Davis U_{max} (y_{max})	Hortmann et al. U_{max} (y_{max})	Bu Çalışma U_{max} (y_{max})	De Vahl Davis V_{max} (x_{max})	Hortmann et al. V_{max} (x_{max})	Bu çalışma V_{max} (x_{max})
0.1	230.22 (0.915)	63.3419 (0.95)	74.0814 (0.95)	213.91 (0.0670)	194.532 (0.05)	188.182 (0.05)
0.05	79.27 (0.862)	63.2168 (0.875)	64.2008 (0.875)	195.44 (0.0447)	242.719 (0.025)	239.425 (0.025)
0.033	-----	-----	64.8899 (0.85)	-----	-----	205.643 (0.0167)
0.025	67.49 (0.854)	65.3710 (0.8625)	-----	206.32 (0.0423)	223.412 (0.0375)	-----

Tablo 5.3 a -d' den görüleceği üzere bu çalışmada geliştirilen programla elde edilen sonuçlar, diğer yazarların DeVahl Davis (1983) ve Hortmann et al. (1990) sonuçları ile mukayese edildiğinde oldukça yakın sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Bu da memnuniyet verici bir sonuçtur. Fakat yüksek Rayleigh sayılarında gözükten sapmaların nedeni ise Hortmann et al. çalışmalarında difüzyon ve konveksiyon terimlerinin çözümünde ikinci mertebeden merkezi farklar yaklaşımı kullanmasından kaynaklanmaktadır. Halbuki bu çalışmada birinci dereceden bir yaklaşım kullanılmıştır. Ayrıca yüksek Rayleigh sayılarında, konveksiyon hızı artan Rayleigh sayısı ile arttığından, maksimum hızlar kenarlara doğru kaymaktadır. Akım olayı sınır tabaka karakterine sahip olmaktadır. Sınır tabakalar arasında girdablar oluşmaktadır. Bu nedenle yüksek Rayleigh sayılarında fiziksel olarak anlamlı sonuç bulabilmek için sayısal zorluklarla karşılaşmaktadır. Mesela yüksek hızlarda sayısal kararsızlıklar (instabilite) oluşmaktadır. Bunu önleyebilmek içinde daha küçük zaman aralıkları ve kafes nokta yoğunlukları ile kaldırma kuvveti sınır tabaka aralığı çözülmeli. Hortmann et al. yüksek Rayleigh sayıları için arzu edilen sonuca 160*160 ağ sayısı kullanmak suretiyle ulaşmışlardır (bak. Hortmann et al. (1990)).

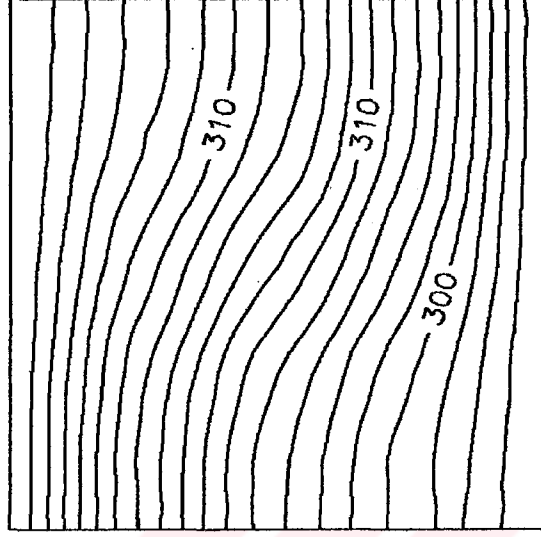
Şekil 5.2, 5.3 ve 5.4' de $Ra = 10^3$ için, Şekil 5.5, 5.6 ve 5.7' de $Ra = 10^5$ için, Şekil 5.8, 5.9 ve 5.10' da $Ra = 10^6$ için yatay hızların ve düşey hızların profilleri ($x / L = 0.225; x/L=0.525; x/L=0.72$) gösterilmiştir ve ayrıca hesaplanan sıcaklık alanına ait eş sıcaklık çizgileride (isotherms) başka yazarların eş sıcaklık çizgileri (isotherms) ile mukayese edilmiştir.



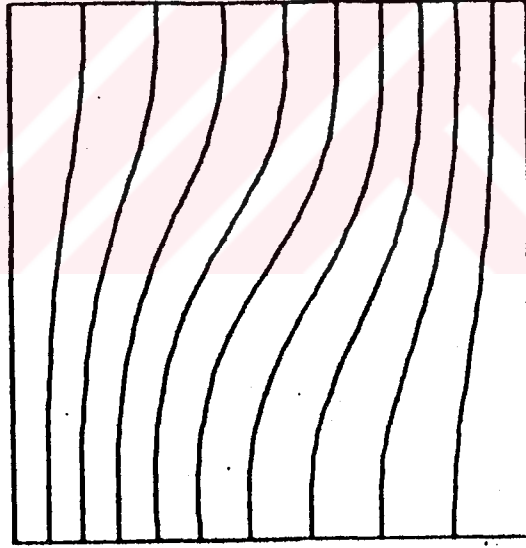
Şekil 5.2 $Ra = 10^3$ için yatay hız profilleri ($x/L = 0.225$, $x/L = 0.525$ ve $x/L = 0.725$)



Şekil 5.3 $Ra = 10^3$ için düşey hız profilleri ($y/L = 0.225$, $y/L = 0.525$ ve $y/L = 0.725$)

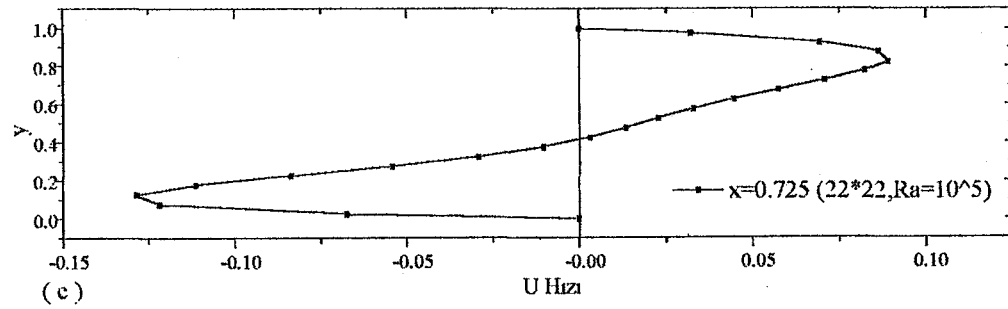
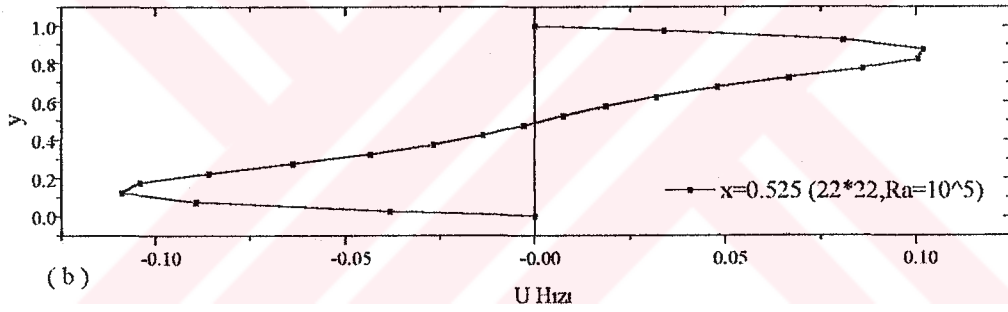
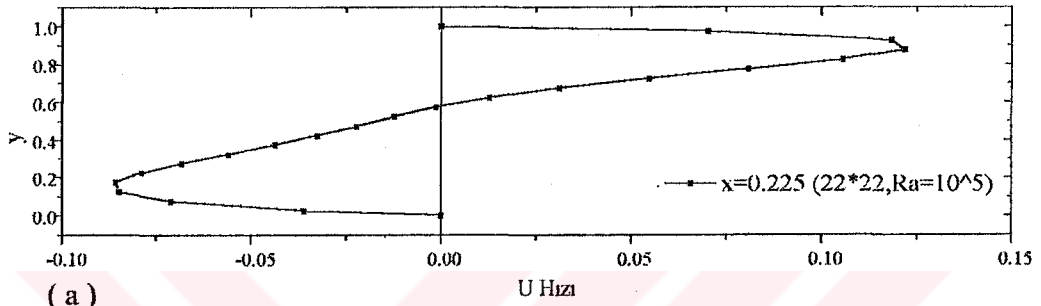


(a)

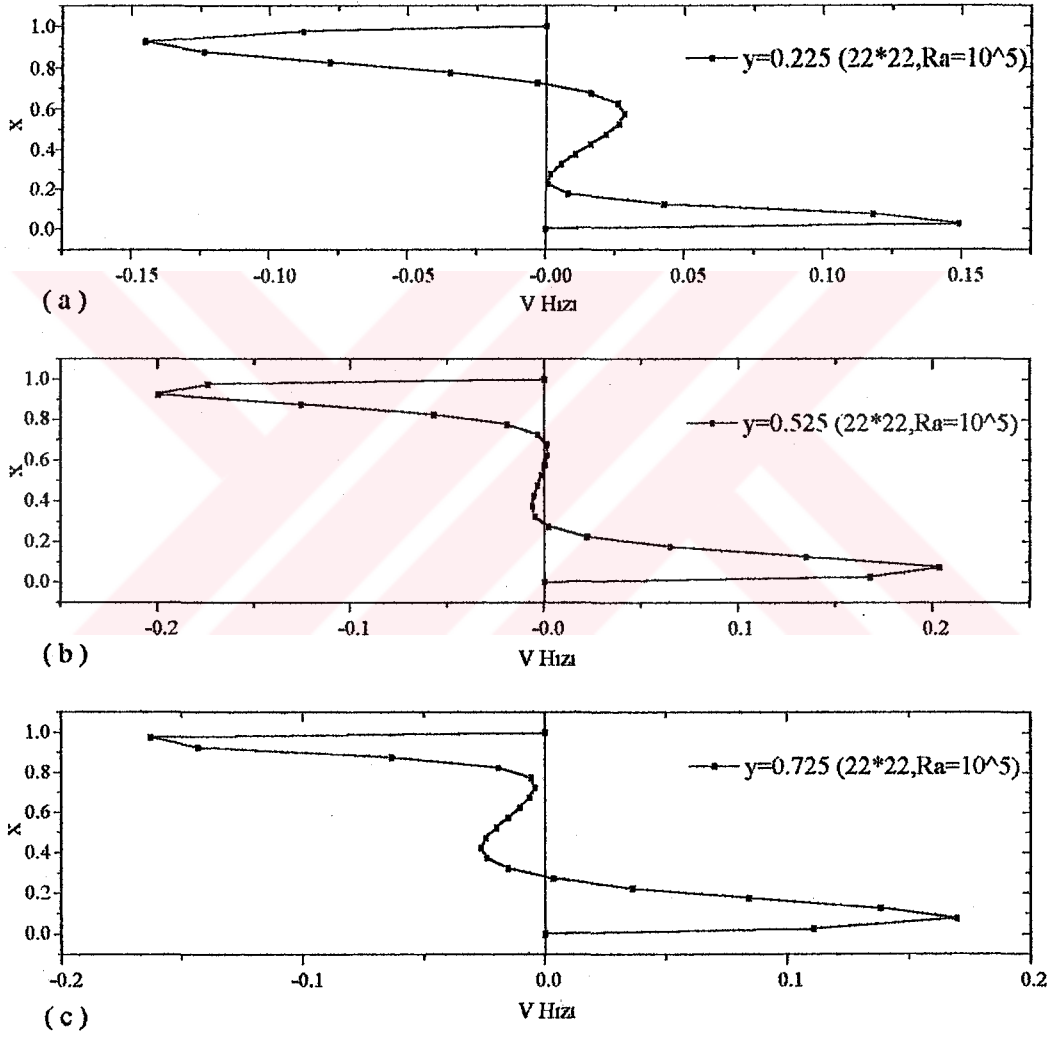


(b)

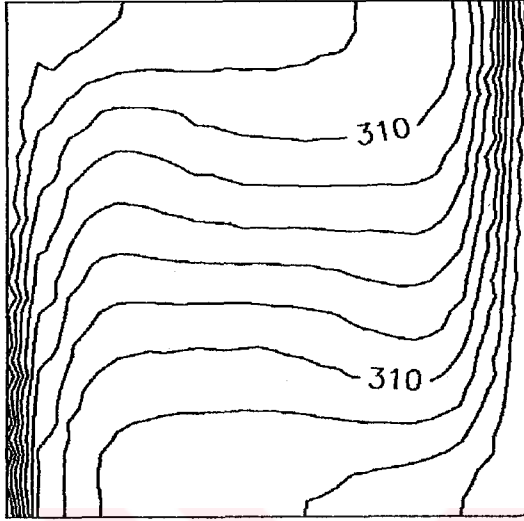
Şekil 5.4 $Ra = 10^3$ için eş sıcaklık çizgileri: a) Bu çalışmaya ait b) De Vahl Davis (1983)



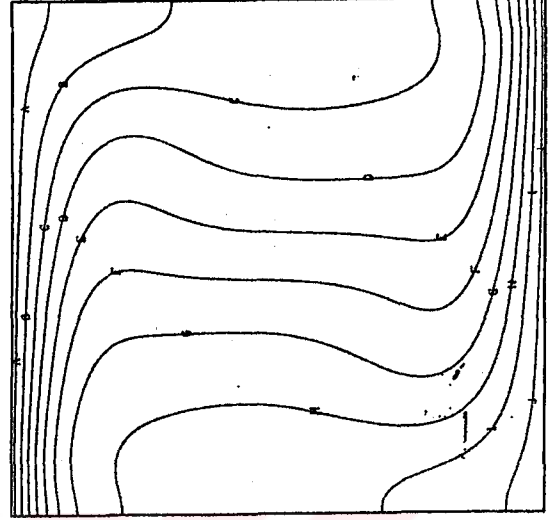
Şekil 5.5 $Ra = 10^5$ için yatay hız profilleri ($x/L = 0.225$, $x/L = 0.525$ ve $x/L = 0.725$)



Şekil 5.6 $Ra = 10^5$ için düşey hız profilleri ($y/L = 0.225$, $y/L = 0.525$ ve $y/L = 0.725$)



(a)

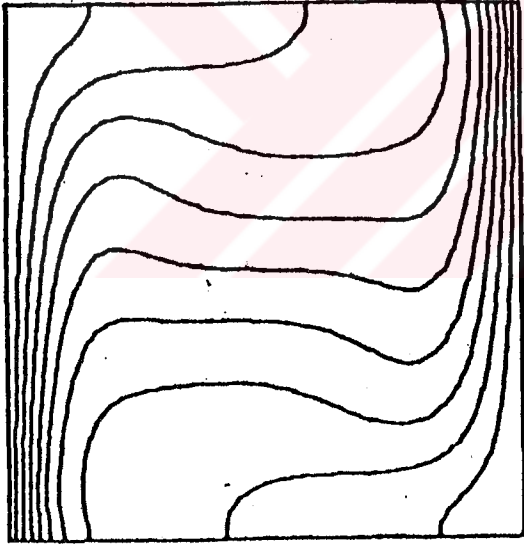


(b)

TEMPERATURE
KEY TO CONTOUR VALUES

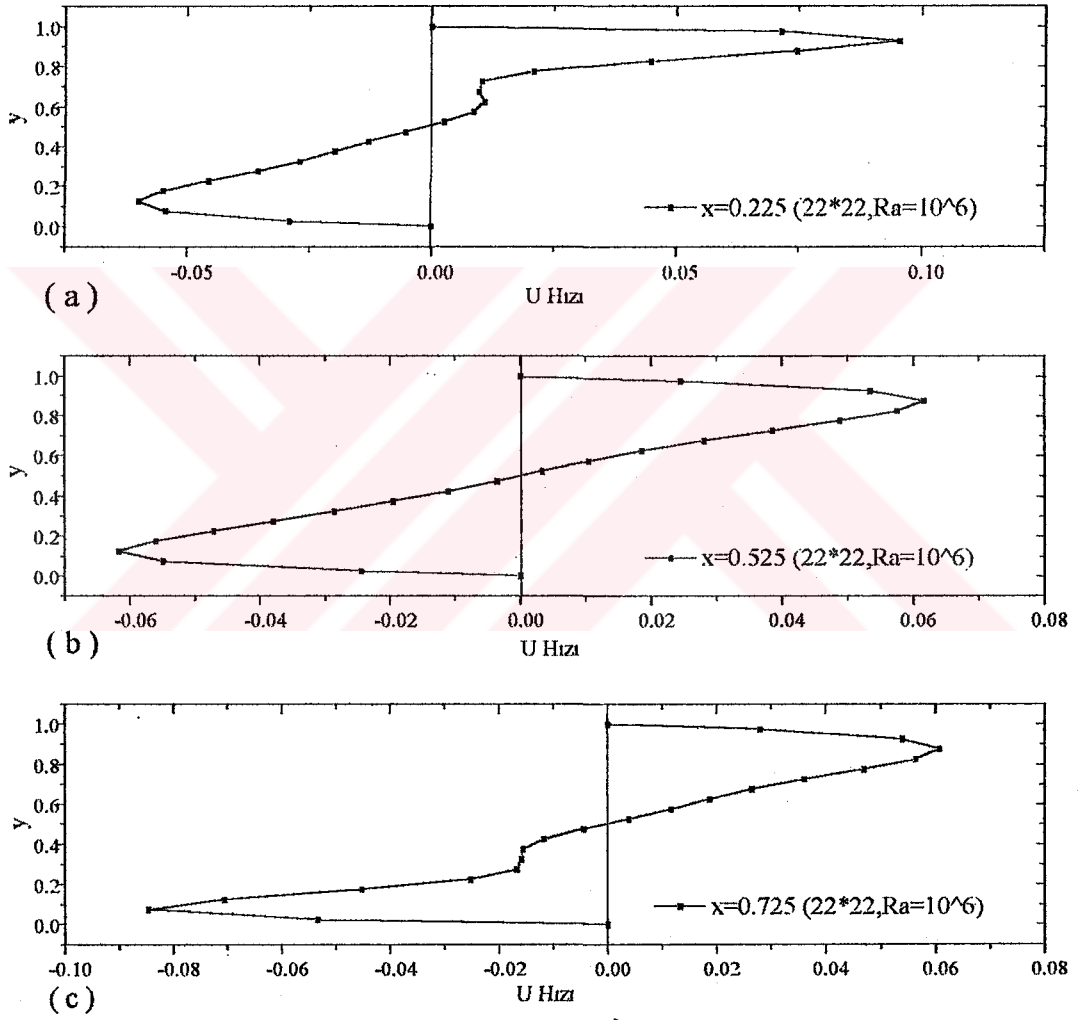
1	300
2	305
3	310
4	315
5	320
6	325
7	330
8	335
9	340
10	345
11	350
12	355
13	360
14	365
15	370
16	375
17	380
18	385
19	390
20	395
21	400
22	405
23	410
24	415
25	420
26	425
27	430
28	435
29	440
30	445
31	450
32	455
33	460
34	465
35	470
36	475
37	480
38	485
39	490
40	495
41	500
42	505
43	510
44	515
45	520
46	525
47	530
48	535
49	540
50	545
51	550
52	555
53	560
54	565
55	570
56	575
57	580
58	585
59	590
60	595
61	600
62	605
63	610
64	615
65	620
66	625
67	630
68	635
69	640
70	645
71	650
72	655
73	660
74	665
75	670
76	675
77	680
78	685
79	690
80	695
81	700
82	705
83	710
84	715
85	720
86	725
87	730
88	735
89	740
90	745
91	750
92	755
93	760
94	765
95	770
96	775
97	780
98	785
99	790
100	795

$Ra = 10^5$, 320×320 CV grid;

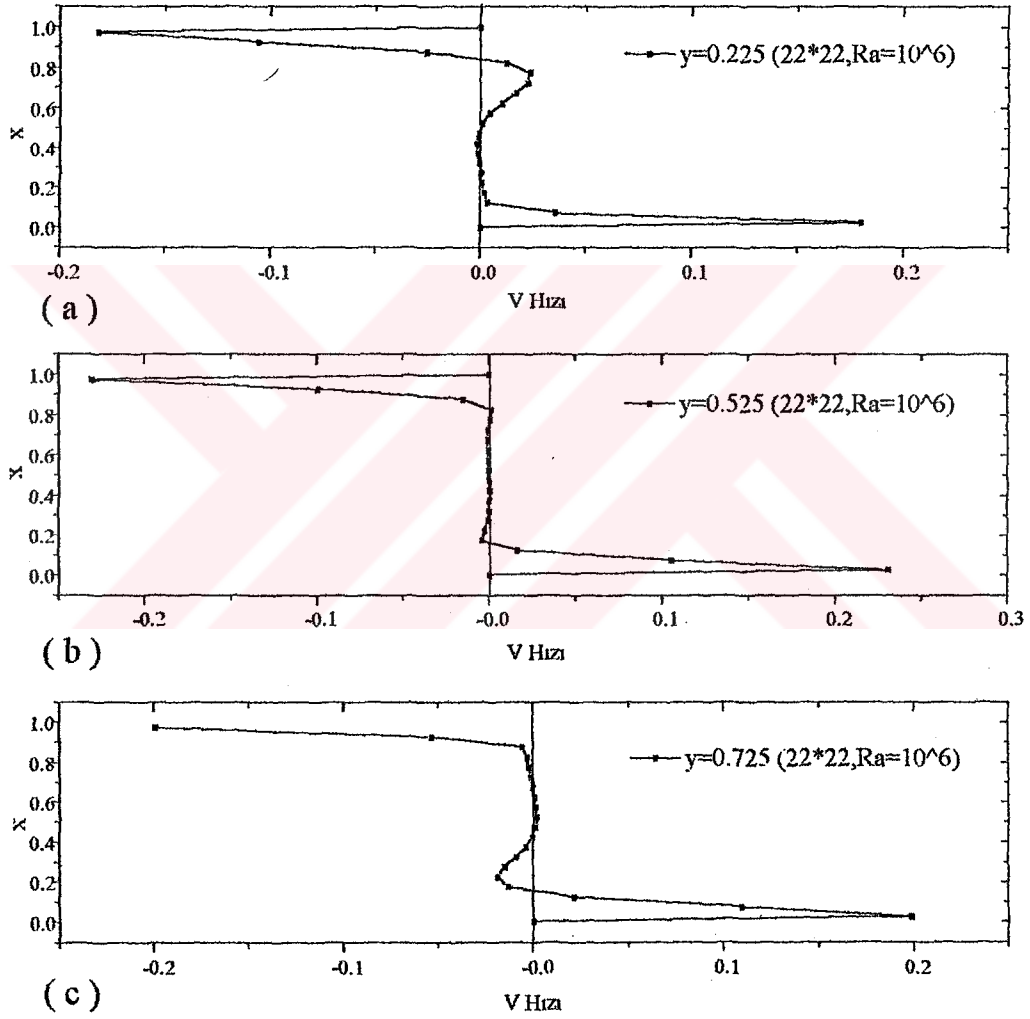


(c)

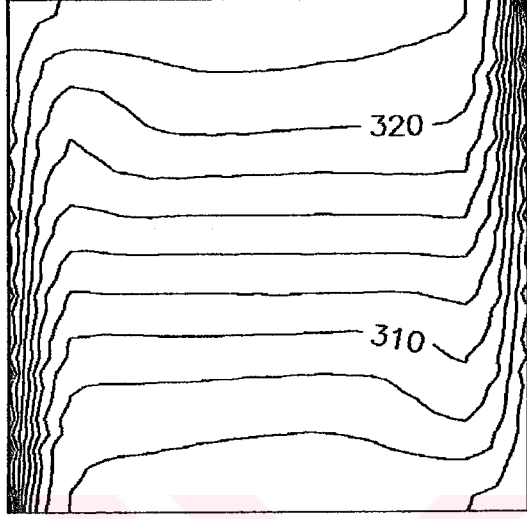
Şekil 5.7 $Ra = 10^5$ için eş sıcaklık çizgileri: a) Bu çalışmaya ait b) Hortmann et al. (1990) c) De Vahl Davis (1983)



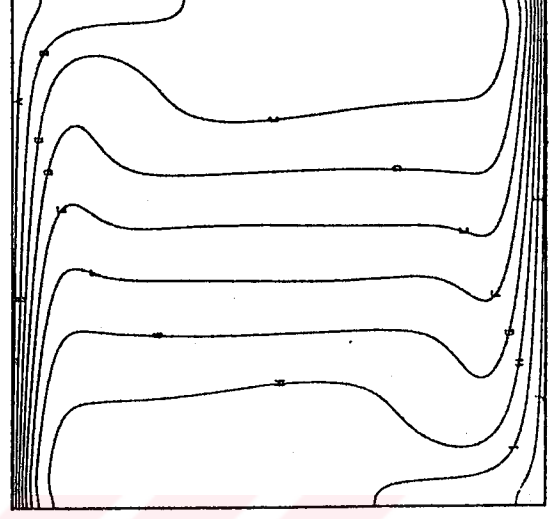
Şekil 5.8 $Ra = 10^6$ için yatay hız profilleri ($x/L = 0.225$, $x/L = 0.525$ ve $x/L = 0.725$)



Şekil 5.9 $Ra = 10^6$ için düşey hız profilleri ($y/L = 0.225$, $y/L = 0.525$ ve $y/L = 0.725$)



(a)

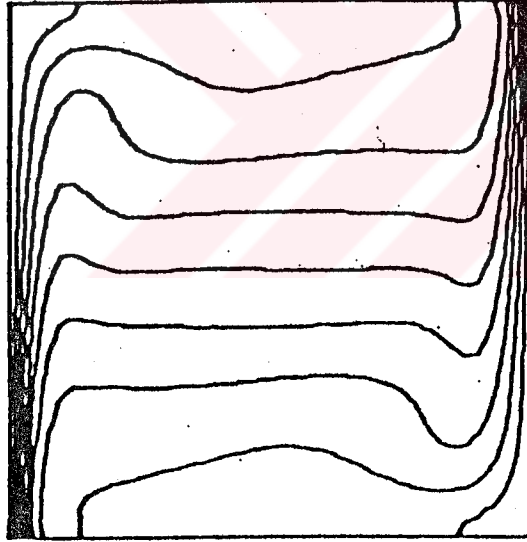


(b)

TEMPERATURE
KEY TO CONTOUR VALUES

10	300
9	280
8	260
7	240
6	220
5	200
4	180
3	160
2	140
1	120

$Ra = 10^6$, 640 x 640 CV grid



(c)

Şekil 5.10 $Ra = 10^6$ için eş sıcaklık çizgileri: a) Bu çalışmaya ait b) Hortmann et al. (1990) c) De Vahl Davis (1983)

sayılarına göre seçimi Şekil 5.12 esas alınarak yapılmıştır. Bu uygulamayla ilgili olarak Armaly et al (1983) yaptıkları ölçümler ile ilgili olarak, 400 Reynolds sayısından itibaren üç boyutlu ve zamana bağlı etkilerin oluştuğunu tesbit etmişlerdir. Bu nedenle bu Reynolds sayısından itibaren matematiksel modelin fiziksel akım halini doğru olarak tanımlıyamıcağını göz önünde bulundurmak gerekir. Buna rağmen bu çalışmada yüksek Reynolds sayılarında sayısal bir çözüm elde etme yoluna gidilmiş ve elde edilen sonuçlar Armaly et al. (1983) çalışmasının hem deneysel ve hemde sayısal çözümleri ile mukayese edilmiştir.

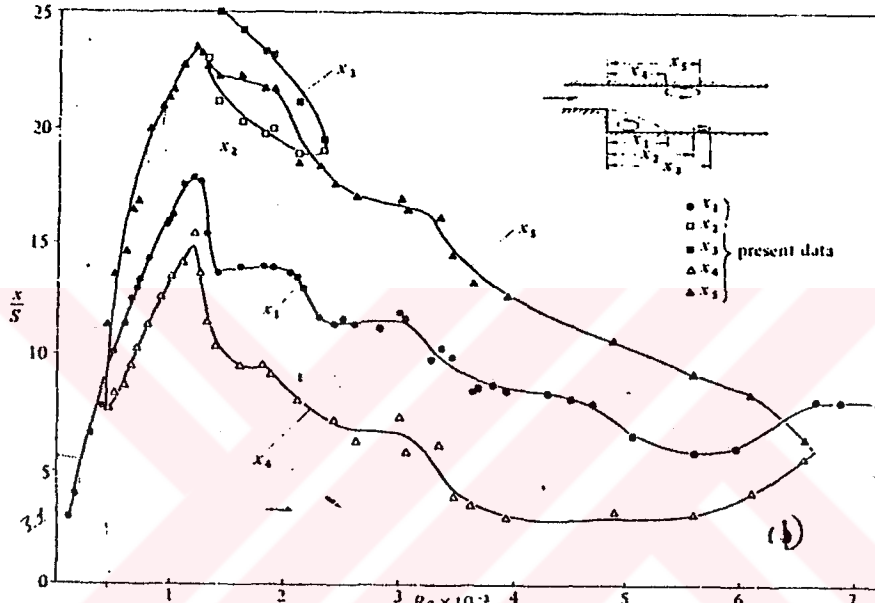


FIGURE 4. Location of detachment and reattachment of the flow at the centre of the test section; variation of locations with Reynolds number.

Şekil 5.12 Armaly et al. (1983)' e göre tutunma uzunlukları ve ölçü verileri

Bu çalışmada denklem (5.3) esas alınarak farklı Reynolds sayıları için incelemeler yapılmıştır. Bu incelemenin sonuçları, Tablo 5.4' de yer alan Armaly et al. (1983) çalışmasının deneysel ve sayısal çözümü ile mukayese edilmiştir. Armaly et al. sayısal çözüm için 45*45 ağ kullanmıştır. Bu çalışmada ise 42*32 ağ kullanılmıştır. Bu tabloya göre, görüleceği üzere $Re = 500$ değerinde kanalın üst duvarında ilave bir çözülme bölgesi oluşmaktadır ($x_4 - x_5$), ve $Re = 1000$ değerinde ise ayrıca ilaveten kanalın alt duvarında üçüncü bir çözülme bölgesi oluşmaktadır ($x_2 - x_3$). $Re = 100$ değerinde ise sadece kanalın giriş kısmında basamağı takiben bir çözülme bölgesi mevcuttur ve ayrıca bu Reynolds sayısı için elde edilen sonuç Armaly et al. sonuçları ile mukayese edildiğinde, iyi bir uyum göstermektedir. $Re \geq 400$ sayıları için deneysel ve sayısal sonuçlar arasında yakın sonuçlar elde edilmiştir. Fakat $Re = 500 - 1000$ değerleri için sonuçlar arasında belirgin farklar mevcuttur. Bunun nedeni ise bu çalışmada kullanılan yaklaşımın birinci mertebeden oluşu, kullanılan ağın yüksek

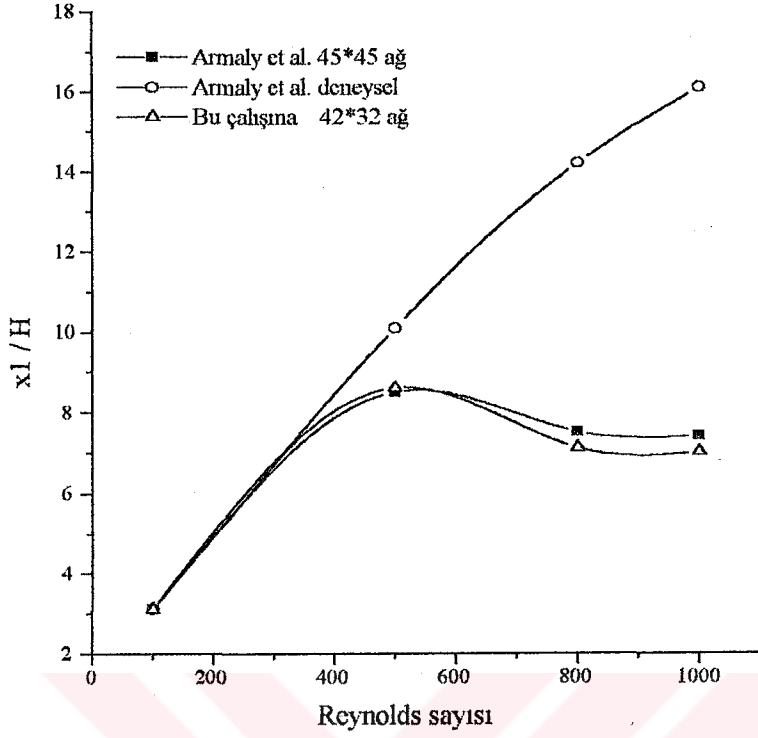
Reynolds sayıları için fazla hassas olmayışı ve ayrıca daha önce söz edildiği gibi, Armaly et al. (1983) bu bölgelerde üç boyutluluk ve zamana bağımlılık etkisinin olduğunu tesbit etmişlerdir. Armaly et al. yapmış oldukları çalışmada da Tablo 5.4 değerlerinden görüldüğü gibi yüksek Reynolds sayılarında, daha yüksek hassasiyette ağ kullanmalarına rağmen akım olayı için matematiksel olarak memnuniyet verici seviyede sonuçları alamamışlardır. Şekil 5.13' de Tablo 5.4' de yer alan verilere ait farklı Reynolds sayılarında x_1 tutunma uzunluğunun değişimi gösterilmiştir. Şekilden görüleceği üzere, bu çalışmada elde edilen sonuçlar daha küçük ağ kullanılmasına rağmen Armaly et al. (1983) elde etmiş oldukları sonuçlara yakındır.

Tablo 5.4 Çözülme Bölgelerin Tutunma Uzunlukların Mukayesesi

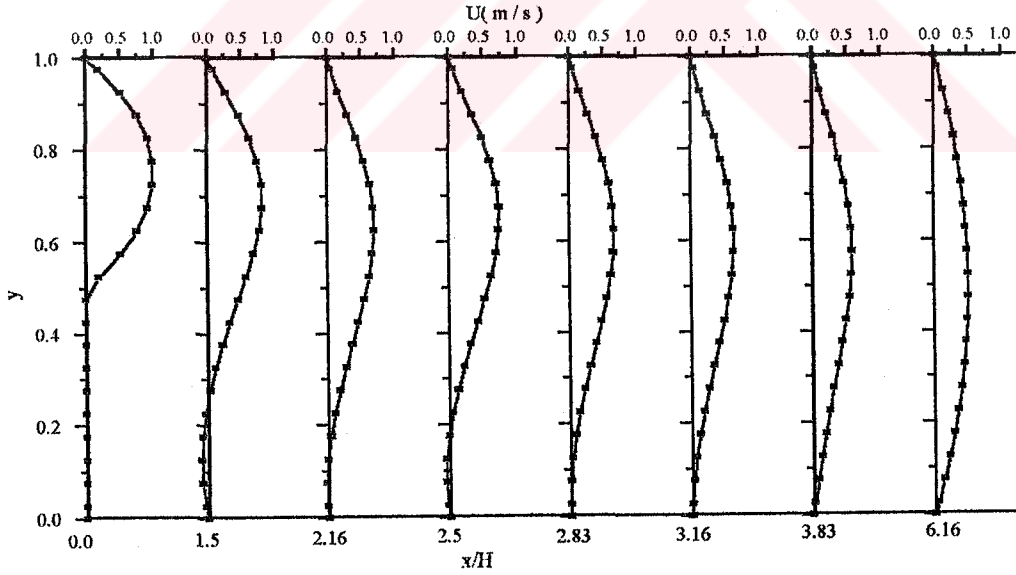
Re	x_1			x_2			x_3			x_4			x_5		
	Armaly et al. (1983) 45*45 Den.	Bu çalı şma	Bu çalı şma	Armaly et al. (1983) 45*45 Den.	Bu çalı şma	Bu çalı şma	Armaly et al. (1983) 45*45 Den.	Bu çalı şma	Bu çalı şma	Armaly et al. (1983) 45*45 Den.	Bu çalı şma	Bu çalı şma	Armaly et al. (1983) 45*45 Den.	Bu çalı şma	Bu çalı şma
100	3.2	3.2	3.1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
500	8.5	10.1	8.6	-	-	-	-	-	-	7.0	9	6.8	12.8	13.5	11.1
800	7.5	14.2	7.1	-	-	-	-	-	-	5.5	11.3	4.8	11.3	18.8	10.0
1000	7.4	16.1	7.0	11.1	-	9.5	13.1	-	12.7	5.1	14	4.6	10.9	22.2	9.7

Şekil 5.14' de ise bu çalışmada hesaplama sonucu bulunan teorik hız profilleri ve farklı Reynolds sayıları için gösterilmiştir.

Burada tanıtılan hesaplamalar $x / H = 0$ konumunda bulunan bir parabolik giriş profiline göre yapılmıştır. Ağ olarak, üç farklı büyüklükte olan uniform ağ yapıları kullanılmıştır, fakat kare biçiminde değildir. Ağ yapıların büyüklükleri $22 * 12$, $32 * 22$ ve $42 * 32$ olarak seçilmiştir. Konvergenz kriteri olarak $\epsilon = 10^{-3}$ alınmıştır. Alt relaksasyon katsayıları olan α_u ve α_p için 0.5 değeri alınmıştır.

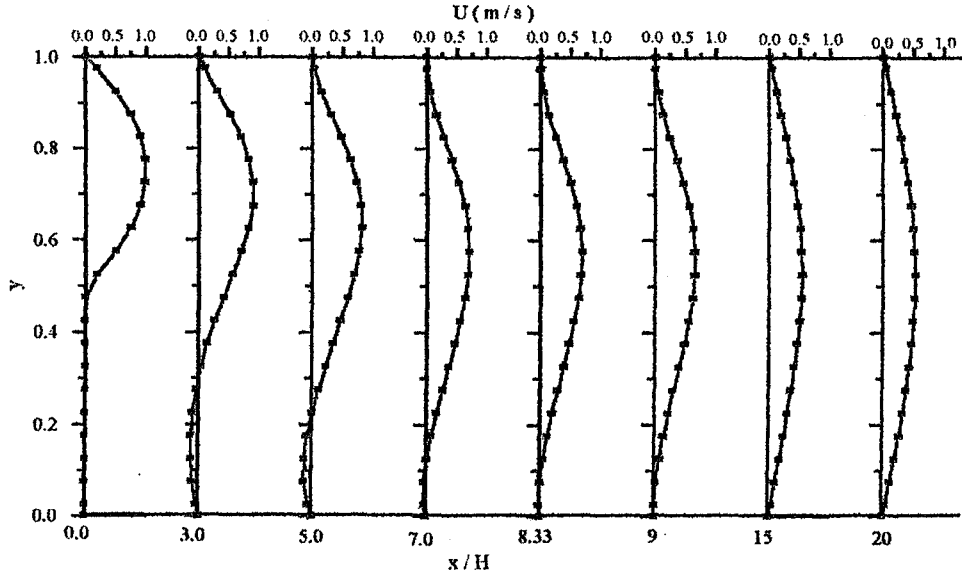


Şekil 5.13 Farklı Reynolds sayıları için x_1 tutunma uzunluklarının mukayesesi

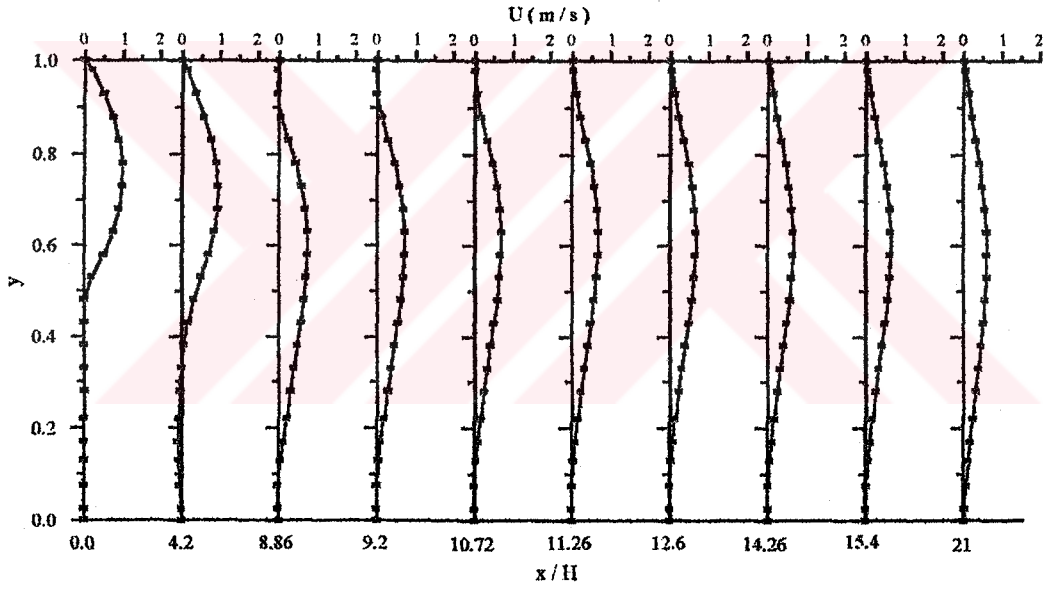


(a)

Şekil 5.14 Farklı Reynolds sayıları için hesaplanan hız profilleri (a) $Re = 100$; (b) $Re = 389$; (c) $Re = 1000$



(b)



(c)

Şekil 5.14 (Devamı) Farklı Reynolds sayıları için hesaplanan hız profilleri (a) $Re = 100$; (b) $Re = 389$; (c) $Re = 1000$

6. SONUÇ

Bu çalışmanın esas amacını sonlu hacimler yönteminde kullanılan kaydırılmış ağ sisteminden çakışık ağ sistemine geçiş oluşturmaktadır. Bunun için iki boyutlu, zamandan bağımsız ve sıkıştırılmaz türden laminar akış problemlerini çözebilen çakışık ağ sisteminde bir program geliştirilmiştir. Bu programın güvenilirliğini, yani hassasiyetini kontrol edebilmek için, iki farklı akış problemi olan düşey yüzeyleri farklı sıcaklıklarda tutulan bir dörtgen boşlukta doğal konveksiyon problemi ve basamak üzerinden akış problemi için uygulamalar yapılmıştır. Bu iki akış problemlerinin çözüm sonuçları başka yazarların deneysel ve Bench - Mark sonuçları ile mukayese edilmiştir.

Birinci akış problemi olan doğal konveksiyon problemi için sonuçlar Bench - Mark sonuçları ile mukayese edildiğinde, iyi sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Özellikle düşük Rayleigh sayılarında sonuçlar birbirine oldukça yakındır. Fakat yüksek Rayleigh sayılarında elde edilen sonuçlarda ise bazı sapmalar mevcut olmasına rağmen, sonuçlar yine memnuniyet vericidir. Çünkü yüksek Rayleigh sayılarında konveksiyon hızı artan Rayleigh sayısı ile arttığından, maksimum hızlar kenara doğru kaymaktadır ve sınır tabakalar arasında girdablar oluşmaktadır. Bunun için bu tür problemler daha fazla ağ sayıları ile çözülmelidir. Halbuki bu çalışmada sınırlı sayıda ağ kullanılmıştır.

İkinci akış problemi olan bir basamak üzerinden laminar akış problemi için sonuçlar başka yazarların sonuçları ile mukayese edildiğinde yakın sonuçlar bulunduğu görülmüştür. Özellikle düşük Reynold sayılarında elde edilen sonuçlar deneysel sonuçlarla iyi uyum içerisindedir. Fakat Reynold sayısı arttıkça akım üç boyutluluk ve zamana bağımlılık kazandığından hem deneysel sonuçlar güvenilir olmaktan çıkmakta ve hem de sayısal çözümler yetersiz kalmaktadır.

Elde edilen bu sonuçlara göre sonlu hacimler yöntemiyle çakışık ağ sisteminde geliştirilen programın amacına ulaştığından ve çakışık ağ sisteminin başarılı bir şekilde uygulandığından söz edebiliriz. Bundan sonraki çalışmalarda çakışık ağ sisteminin kaydırılmış ağ sistemine göre sahip olduğu avantajlardan yararlanarak, yöntemin üç boyutlu, zamana bağlı problemlere uygulanması ve ayrıca çok katlı ağ sisteminde çözülmesi yararlı olacaktır.

7. KAYNAKLAR

- 1- PATANKAR, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, McGraw - Hill Book Company, 1980
- 2- BAUMANN, W.W., Finite - Volumen - Methode in der Numerischen Thermofluidodynamik, Manuskript zur Vorlesung im Fachgebiet " Numerische Methoden der Thermofluidodynamik ", Hermann - Föttinger - Institut TU Berlin, 1993
- 3- ORTH, A. 1991. Mehrgittermethode zur Berechnung inkompressibler, stationärer Strömungen mit krummlinigen Berandungen. Dissertation, Universität Karlsruhe
- 4- ANDERSON, D.A., TANNERHILL, J.C. and PLETCHER, R. H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, Hemisphere Publishing Corporation, McGraw - Hill Book Company, 1984
- 5- PERIĆ, M., KESSLER, R. and SCHEURER, G. 1988. Comparison of Finite - Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids. Computers and Fluids, Vol. 16, No. 4, pp. 389 - 403.
- 6- MAJUMDAR, S., RODI, W., ZHU, J. 1992. Three - Dimensional Finite - Volume Method for Incompressible Flows with Complex Boundaries. Journal of Fluids Engineering, Vol. 114, pp. 496 - 503.
- 7- RHIE, C.M. and CHOW, W.L. 1983. Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation. AIAA Journal, Vol. 21, No.11, pp.1525 - 1532.
- 8- MAJUMDAR, S. 1988. Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Nonstaggered Grids. Numerical Heat Transfer, Vol. 13, pp 125 - 135.
- 9- VAN DOORMAAL, J.P. and RAITHBY, G.D. 1984. Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows. Numerical Heat Transfer, Vol. 7, pp. 147 - 163.

- 10- HEISS, A. 1987. Numerische und experimentelle Untersuchungen der laminaren und turbulenten Konvektion in einem geschlossenen Behälter. Dissertation, TU - München.
- 11- THIART, G.D. 1990. Finite Difference Scheme for the Numerical Solution of Fluid Flow and Heat Transfer Problems on Nonstaggered Grids. Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 17, PP. 43 - 62.
- 12- HORTMANN, M., PERIC, M. and SCHEURER, G. 1990. Finite - Volume Multigrid Prediction of Laminar Natural Convection: Bench - Mark Solutions. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 11, pp. 189 - 207.
- 13- ARMALY, B.F., DURST, F., PEREIRA, J.C.F. and SCHÖNUNG, B. 1983. Experimental and Theoretical Investigation of Backward - Facing Step Flow. J. Fluid Mech., Vol. 127, pp. 473 - 496.
- 14- RODI, W., MAJUMDAR, S. and SCHÖNUNG, B. 1989. Finite Volume Methods for Two-Dimensional Incompressible Flows with Complex Boundaries. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 75, pp. 369-392.
- 15- ARPACI, V. S., LARSEN, P. S., Convection Heat Transfer. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ 07632, 1984.

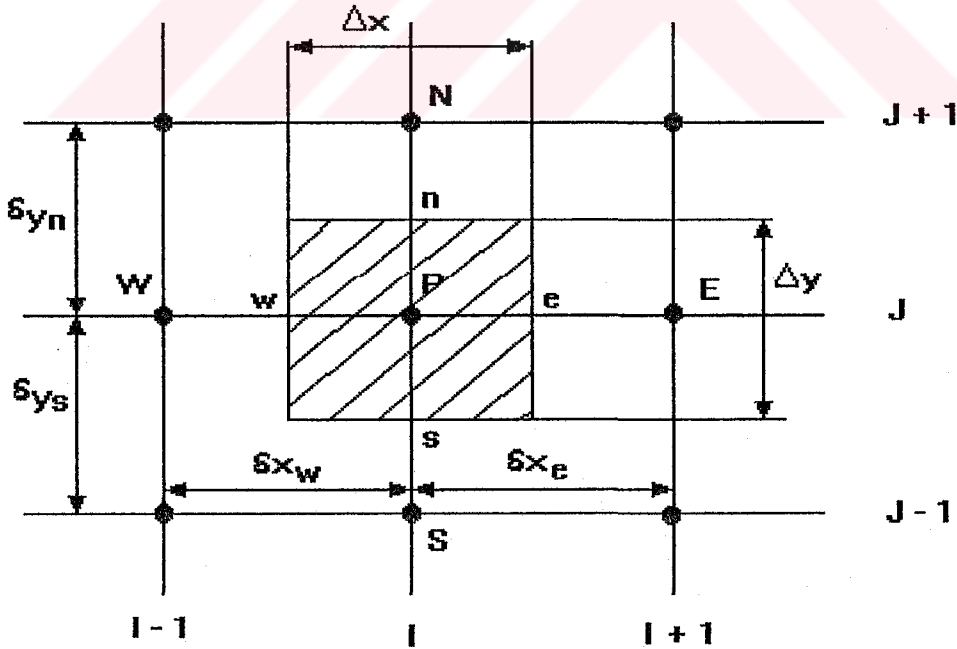
8. EKLER

8.1 Konveksiyon ve Difüzyon Terimlerin Ayırıklaştırılması:

Kısım 3.2' de yer alan sonlu hacimler yöntemine göre ayırıklaştırma işleminde genel momentum ve enerji denklemlerini ifade eden denklem esas alınacak olursa

$$\frac{\partial(\rho U \Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V \Phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S_{\mu} + S_{\Phi} \quad (8.1)$$

bu denklemde yer alan ikinci ve üçüncü terimler sırasıyla konveksiyon ve difüzyon terimlerini ifade etmektedir. Bu terimlerdeki Φ bağımlı değişkeni e, w, n ve s kontrol hacim yüzeyleri için integrasyon sonucu ayrı ayrı bulunur. Bu kısımda bu iki terim, yani konveksiyon ve difüzyon terimi ayrı ayrı ele alınarak, kontrol hacim sınırları için integrasyon sonucu hybrid yöntemi yardımıyla ayırıklaştırma işlemi yapılmıştır. Bu işlem için kullanılan kontrol hacim Şekil 8.1' de gösterilmiştir.



Şekil 8.1 Konveksiyon ve difüzyon terimlerin ayırıklaştırma işlemi için kullanılan kontrol hacim

8.1.1 Konveksiyon teriminin ayrıklaştırılması:

Şekil 8.1' e göre konveksiyon terimlerinin integrasyonunu denklem (8.2) ve (8.3)' e göre ifade edebiliriz.

$$\int_s^e \int_w^e \left\{ \frac{\partial(\rho U \Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U \Phi)}{\partial y} \right\} dx dy = \int_s^e \int_w^e \left\{ \frac{\partial(\rho U \Phi)}{\partial x} \right\} dx dy + \int_s^e \int_w^e \left\{ \frac{\partial(\rho U \Phi)}{\partial y} \right\} dx dy \quad (8.2)$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial(\rho U \Phi)}{\partial x} dx dy = \int_s^e (\rho U)_e \Phi_e dy - \int_s^e (\rho U)_w \Phi_w dy \quad (8.3)$$

Kontrol hacmin kenar yüzeylerinde bulunan değişkenler için uygulanan integral işlemini sonlu farklar denkleminde dönüştürebilmek için aşağıdaki işlem (kabul)

yapılır. Yani $\int_x^{x+\Delta x} f(x) dx \approx f(\bar{x}) \Delta x$ burada $x \in (x, x + \Delta x)$.

$$\bar{\Phi}_e = \frac{\int_s^e (\rho U)_e \Phi_e dy}{\int_s^e (\rho U)_e dy} = \frac{\int_s^e (\rho U)_e \Phi_e dy}{(\rho U)_e \Delta y} \rightarrow \int_s^e (\rho U)_e \Phi_e dy = (\rho U)_e \bar{\Phi}_e \Delta y \quad (8.4)$$

Kontrol hacmin batı kenar yüzeyi için uygulanan bu işlem doğu kenarı içinde uygulanırsa denklem (8.5) eşitliği elde edilir.

$$-\int_s^e (\rho U)_w \Phi_w dy = -(\rho U)_w \bar{\Phi}_w \Delta y \quad (8.5)$$

Aynı düşünceyle kuzey ve güney kenar yüzeyler için,

$$\begin{aligned}
 \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} (\rho U \Phi) dy dx &= \int_w^e \left((\rho V)_n \Phi_n - (\rho V)_s \Phi_s \right) dx \\
 \Rightarrow \int_w^e \left((\rho V)_n \Phi_n \right) dx &= (\rho V)_n \bar{\Phi}_n \Delta x \\
 \Rightarrow - \int_w^e \left((\rho V)_s \Phi_s \right) dx &= -(\rho V)_s \bar{\Phi}_s \Delta x
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

denklem (8.6) eşitliği elde edilir.

8.1.2 Difüzyon teriminin ayrıştırılması:

$$\begin{aligned}
 - \int_w^e \int_s^n \Gamma \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dy dx &= - \int_w^e \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_n dx + \int_w^e \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_s dx \\
 &\quad - \int_s^n \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e dy + \int_s^n \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_w dy
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Tekrar integral işlemi sonlu fark denklemine dönüştürmek suretiyle aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$- \int \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_n dx = - \Gamma_n \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_n \Delta x \tag{8.8}$$

n noktasının P ve N noktasının merkezinde bulunduğunu kabul edecek olursak,

$$\int_P^N \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy = \Phi_N - \Phi_P \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_n = \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\delta y_n} \tag{8.9}$$

şeklinde bir ifade kontrol hacmin kuzey yüzey kenarı için yazılabilir. Sonuç olarak kontrol hacmin kuzey yüzeyinde bulunan ifade olarak

$$-\Gamma_n \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\delta y_n} \Delta x = -\frac{\Gamma_n}{\delta y_n} \Delta x (\Phi_N - \Phi_P) \quad (8.10)$$

Diğer yüzeyler için benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \int_w^e \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_s dx &= \frac{\Gamma_s}{\delta y_s} \Delta x (\Phi_P - \Phi_s) \\ -\int_s^n \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e dy &= -\frac{\Gamma_e}{\delta x_e} \Delta y (\Phi_E - \Phi_P) \\ \int_s^n \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_w dy &= \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} \Delta y (\Phi_P - \Phi_W) \end{aligned} \quad (8.11)$$

yazılabilir. Difüzyon ve konveksiyon terimlerini genel olarak ayrıklaştırılmış olarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} C_w \bar{\Phi}_w - C_e \bar{\Phi}_e + C_s \bar{\Phi}_s - C_n \bar{\Phi}_n + D_w (\Phi_P - \Phi_W) - D_e (\Phi_E - \Phi_P) + \\ D_s (\Phi_P - \Phi_S) - D_n (\Phi_N - \Phi_P) \end{aligned}$$

burada,

$$C_e = (\rho U)_e \Delta y, C_w = (\rho U)_w \Delta y, C_n = (\rho V)_n \Delta x, C_s = (\rho V)_s \Delta x$$

ve

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \Delta y, D_w = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} \Delta y, D_n = \frac{\Gamma_n}{(\delta y)_n} \Delta x, D_s = \frac{\Gamma_s}{(\delta y)_s} \Delta x$$

$$(8.12)$$

Konveksiyon ve difüzyon terimlerini genel olarak kontrol hacim yüzeyleri üzerinde integrasyon gerçekleştirdikten sonra, hala belirsiz olan kontrol hacim yüzeyleri üzerindeki Φ_e , Φ_w , Φ_n ve Φ_s değerlerini hybrid yaklaşımı ile çözelim.

8.1.3 Hybrid yaklaşımı:

Bu yaklaşımı Patankar (1980) çalışmasında ayrıntılı olarak incelemiştir. Bu nedenle burada fazla ayrıntıya girilmeden, bilinmeyen terimlerin hesaplanması üzerinde durulmuştur.

Hybrid yaklaşımı üç esas şartdan oluşmaktadır. $-2 \leq C_w / D_w \leq 2$ aralığı için merkezi farklar (CDS) yaklaşımı geçerlidir ve bu aralığın dışında **difüzyon = 0** olan upwind yaklaşımı (US) geçerlidir. Bu şartlar kontrol hacmin batı ve güney yüzeyleri için şu şekildedir:

1. $Pe = C_w / D_w > 2$: $A_w = C_w$
2. $-2 \leq C_w / D_w \leq 2$: $A_w = D_w + 0.5C_w$ (Merkezi Farklar)
3. $C_w / D_w < -2$: $A_w = 0$

veya FORTRAN dilinde daha basit olarak ifade şekli şu şekildedir:

$$\begin{aligned} AW &= AMAX1(ABS(0.5*CW), DW) + 0.5 CW \\ AS &= AMAX1(ABS(0.5*CS), DS) + 0.5 CS \end{aligned} \quad (8.13)$$

Kontrol hacmin doğu ve kuzey yüzeyleri için hybrid ifadesinin üç şartı:

1. $C_e / D_e < -2$: $A_e = -C_e$
2. $-2 \leq C_e / D_e \leq 2$: $A_e = D_e - 0.5C_e$ (Merkezi Farklar)
3. $C_e / D_e > 2$: $A_e = 0$

Bu ifade şeklinide FORTRAN dilinde şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} AE &= AMAX1 (ABS (0.5*CE), DE) - 0.5CE \\ AN &= AMAX1 (ABS (0.5*CN), DN) - 0.5CN \end{aligned} \quad (8.14)$$

Bu formülasyon şekli kontrol hacim kenarlarının her türlü konumu için geçerlidir.

Sonuç olarak konveksiyon ve difüzyon terimlerini içine alan ayrıklaştırılmış denklemin hybrid yaklaşımı için süreklilik denkleminin eklenmesiyle aşağıdaki şekilde gibi dir.

$$a_p \Phi_p = a_e \Phi_e + a_w \Phi_w + a_n \Phi_n + a_s \Phi_s$$

burada (8.15)

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + (C_w - C_e + C_s - C_n)$$

8.2 Basınç Düzeltme Denklemi ve Momentum Entropolasyonu:

Süreklilik ve momentum denklemini daha iyi sağlayabilmek için, gerekli olan hız ve basınç alanların hesaplanması için Kısım 3' de tanıtilan iteratif bir çözüm yöntemi olan SIMPLE - Metodu kullanılmıştır. Kaydırılmış değişkenli ağ sistemi için SIMPLE metodunun uygulanması hakkında Patankar (1980) ayrıntılı bilgi vermektedir. Burada SIMPLE metodunun çakışık değişkenli ağ sistemine uygulanışı hakkında bilgi verilmiştir.

Başlangıçta U- ve V- momentum denklemleri basınç ve kütle akılar için tahmini değerler kullanılmak suretiyle ilk yaklaşımla çözülmektedir. Bu tahmini değerlerle momentum denkleminin çözülmesi sonucu elde edilen yatay ve düşey hız bileşenleri olan U* ve V* süreklilik denklemini genelde sağlamazlar, yani kütle akıların toplamı sıfıra eşit olmamaktadır. Bu durumu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\rho U_w^* \Delta y - \rho U_e^* \Delta y + \rho V_s^* \Delta x - \rho V_n^* \Delta x = S_m \quad (8.16)$$

bu ifadede S_m sağlanamayan kütle kaynak terimidir. Bu denklemde kontrol hacim yüzeylerindeki hızlar düğüm noktalarından entropolasyon işlemi ile hesaplanır. Çakışık ağ yönteminin başarılı bir şekilde uygulanabilmesi için bu entropolasyon işlemi çok önemlidir. Bu entropolasyon işlemi aynı zamanda **momentum entropolasyonu** olarak da adlandırılmaktadır. Bu entropolasyon işlemi kontrol hacmin batı yüzey sınırında yer alan hız bileşeni U_e^* için aşağıda tarif edildiği şekilde uygulanır.

x - doğrultusunda bulunan ayrıklaştırılmış momentum denkleminini P ve E düğüm noktaları için (bak. Şekil 8.1 göre) yazılırsa:

$$U_P^* = \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} U_{nb}^* + (1 - \alpha_u) a_p U_P^0 + \Delta y_p (P_w^* - P_e^*)}{a_p} \right]_P \quad (8.17)$$

$$U_E^* = \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} U_{nb}^* + (1 - \alpha_u) a_p U_P^0 + \Delta y_E (P_w^* - P_e^*)}{a_p} \right]_E$$

Kontrol hacim yüzeyinde bulunan U_e^* değeri yukarıda bulunan iki denklemin lineer enterpolasyonundan bulunur, yani $U_e^* = 0.5 U_E + 0.5 U_P$ eşitliğinden. Fakat burada Kısım 3' de anlatıldığı gibi basınç terimin hesaplanmasında lineer enterpolasyon uygulanmamaktadır. Kaydırılmış değişkenli ağ sistemindeki basınç farkı düşüncesi esas alınmaktadır (bak. Patankar (1980)). Buradan U_e^* değeri için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$U_e^* = \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} U_{nb}^* + (1 - \alpha_u) a_p U_P^0}{a_p} \right]_e - \left(\frac{1}{a_p} \right)_e \Delta y_e (P_E^* - P_P^*) \quad (8.18)$$

bu ifadede üstü çizgili olan terimler lineer enterpolasyon ile hesaplanmaktadır.

Süreklilik denklemini sağlayabilmek için, hız ve basınç düzeltmeler aşağıdaki ifadeyle elde edilir:

$$U_e' = \left(\frac{1}{a_p} \right) \Delta y_e (P_P' - P_E') \quad (8.19)$$

süreklilik denkleminde yer alan diğer hızlar içinde benzer yaklaşımla düzeltmeler ifade edilir ve bu düzeltme terimlerin süreklilik denkleminde kullanılmasıyla süreklilik denklemini sağlayan ayrıklaştırılmış bir basınç düzeltme denklemi elde edilir:

$$a_p P'_p = a_E P'_E + a_W P'_W + a_S P'_S + a_N P'_N + S_m \quad (8.20)$$

burada,

$$a_E = \rho_e \left(\frac{1}{a_p} \right)_e \Delta y_e, \quad a_W = \rho_w \left(\frac{1}{a_p} \right)_w \Delta y_w, \quad a_N = \rho_n \left(\frac{1}{a_p} \right)_n \Delta x_n, \quad a_S = \rho_s \left(\frac{1}{a_p} \right)_s \Delta x_s,$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S, \quad S_m = \rho_w U_w^* \Delta y_w - \rho_e U_e^* \Delta y_e + \rho_s V_s^* \Delta x_s - \rho_n V_n^* \Delta x_n$$

$$\left(\frac{1}{a_p} \right)_e = \frac{0.5}{a_E} + \frac{0.5}{a_p}, \quad \left(\frac{1}{a_p} \right)_w = \frac{0.5}{a_W} + \frac{0.5}{a_p},$$

$$\left(\frac{1}{a_p} \right)_n = \frac{0.5}{a_N} + \frac{0.5}{a_p}, \quad \left(\frac{1}{a_p} \right)_s = \frac{0.5}{a_S} + \frac{0.5}{a_p}$$

(8.21)

Yukarıdaki şekliyle ayrıklaştırılmış olan basınç düzeltme denklemi çözüldükten sonra hızlar, basınçlar ve kütle akılar aşağıdaki şekilde düzeltilir.

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V'$$

$$C = C^* + C' \rightarrow C_y = \rho \Delta y (U^* + U') \text{ veya} \quad (8.22)$$

$$C_x = \rho \Delta x (V^* + V')$$

$$P = P^* + \alpha_p P'$$

Yukarıdaki ifadelerle hız, kütle akı ve basınçın U , V , C ve P düzeltilmiş değerlerini ifade etmektedir. Bu düzeltilmiş değerler SIMPLE algoritmasına göre yeni iterasyonda başlangıç değeri olarak alınır.

ÖZGEÇMİŞ:

1968 yılında Ankara' da doğdu. İlk ve orta öğreniminin tamamını ve lise öğreniminin 2' inci sınıfına kadar Almanya' da ve sonra lise öğrenimini Konya - Ereğli Cumhuriyet Lisesinde tamamladı. 1987 yılında girdiği Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü' nden 1991 yılında Makina Mühendisi olarak mezun oldu. Lisans öğrenimi döneminde Milli Prodüktivite Merkezi (MPM)' nin düzenlemiş olduğu inceleme yarışmasında Jüri Özel Ödülü' ne ve YTONG firmasının düzenlemiş olduğu Türkiye genelindeki bir inceleme yarışmasında üçüncülük ödülüne laik görülmüştür. Ayrıca lisans öğrenimi esnasında Türkiye Kömür İşletmesi (TKİ)' den karşılıklı olmak üzere burs almaya hak kazanmıştır. Eylül 1991 - Mayıs 1992 tarihleri arasında Türkiye Kömür İşletmesinde Makina Bakım Mühendisi olarak görev yapmıştır. Ekim 1991 yılında Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans öğrenimine başlamıştır. Mayıs 1993 yılında kaydını Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalı' na aldırdı.

Mayıs 1992 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü Isı Tekniği ve Termodinamik kürsüsünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır. Almanca ve İngilizce bilmektedir.