KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖNÜŞÜMLERİN DERECESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematikçi Yücel TÜRKER

Ana Bilim Dalı : MATEMATİK

HAZİRAN 1997

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖNÜŞÜMLERİN DERECESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematikçi Yücel TÜRKER

Ana Bilim Dalı: MATEMATİK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 03-06-1997

Tezin Savunulduğu Tarih: 07-07-1997

Tez Danışmanı	Üye	Üye
Doç.Dr. Akif ABBASOV	Doç.Dr. Sadi BAYRAMOV	Yrd.Doç.Dr. Rıdvan EZENTAŞ

HAZİRAN 1997

DÖNÜŞÜMLERİN DERECESİ

Yücel TÜRKER

Anahtar Kelimeler: Dönüşüm, Dönüşüm Derecesi, FSQL-Dönüşümü

Özet: Bu çalışmada, topolojinin önemli konularından biri olan dönüşümün derecesi konusu ile ilgilenilmiştir.

Önce, derece konusunun ortaya çıkışının kısa tarihçesi verilmiş, daha sonra derece kavramının problemlerin (lineer olmayan) çözülmesindeki önemine değinilmiştir. Aynı sonlu boyutlu kompakt sınırsız manifoldlar arasında oluşan sürekli dönüşümün derecesi, B sonsuz boyutlu Banach uzayında oluşan $I+K:B \to B$ şeklindeki dönüşümler için Leray-Schauder teorisi, FQL ve FSQL-dönüşümleri için derece teorileri belirtilmiştir ve sonunda FSQL-dönüşümleri için derece kavramının bir özelliğinin ispatı yapılmıştır.

DEGREE OF MAPPINGS

Yücel TÜRKER

KeyWords: Mapping, Degree of Mapping, FSQL-Mapping

Abstract: In this study, an important subject of Topology, the degree of mapping has been discussed.
First of all, how the degree concept has arisen and then the importance of degree concept in solving the non-linear problems have been analysed. The continuous mapping degree between the same finite dimensional compact unlimited manifolds, Leray-Schauder theory for $I+K:B \to B$ mappings in the B infinite dimensional Banach Spaces and degree theories for FQL and FSQL-mappings have been illustrated, and at the end of the study, the property of degree concept for FSQL-mappings have been proven.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, topolojik konu olarak lineer olmayan denklemlerin çözümünün varlığı için çok önemli metotlardan biri olan derece teorisi ile ilgilenilmiş ve FSQL-dönüşümleri için derece kavramının bir özelliğinin ispatı yapılmıştır.

Çalışmalarım sırasında bana olan yardımlarından dolayı hocam sayın Doç. Dr. Akif ABBASOV'a , bu çalışmayı yazarken benden hiçbir yardımını esirgemeyen sevgili arkadaşım Jeofizik Mühendisi Ergin ULUTAŞ'a ve herzaman yanımda olan, bana destek veren aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu çalışmada, sonlu boyutlu ve sonsuz boyutlu bazı sınıflardan olan sürekli dönüşümler için belli olan derece konuları ele alındı ve sonunda belirli sınıftan olan dönüşümlerin derecesinin bir özelliği ispatlandı.

$f:\overline{D} \subset \Re^n \to \Re^n$ dönüşümü $\overline{D}$ sınırlı bölgesinde sürekli olsun. f dönüşümünün $y \in \Re^n$ noktasındaki derecesi, $\deg(f,D,y)$, $f(x)=y$ denkleminin D bölgesindeki çözümleri sayısıdır.

Derece teorisi topolojik konu olarak lineer olmayan (fonksiyonel) denklemlerin çözümünün varlığını ispat etmek için çok güçlü metotlardan biridir. Derece teorisinin sahip olduğu önemli özelliklerden biri olan homotopik invaryantlık, çözümlerinin varlığı aranılan denklemin, çözümlerinin varlığı önceden belli olan daha basit bir denklem ile yerdeğiştirmesine izin verir.

Derece kavramı ilk olarak, sonlu boyutlu dönüşümler için 1912 yılında L.E.Brouwer tarafından cebirsel topolojinin temel sonuçları kullanılarak belirlenmiştir. Bunun için L.E.Brouwer önce yönlendirilmiş iki n-boyutlu homojen poliyedrlar arasında oluşan simpleksial dönüşüm için derece tanımını vermiş, sonra bu tür poliyedrlar arasında oluşan sürekli dönüşüme simpleksial dönüşümlerle yaklaşmış, bu durumda simpleksial dönüşümlerin derecesinin sabitleştiğini göstermiş ve sürekli dönüşümün derecesi olarak bu sabiti belirlemiştir.

Daha sonra sonlu boyutlu dönüşümler için derece kavramı, farklı yollarla da belirlenmiş ve birçok problemlerin çözülmesinde önemli rol oynamıştır.

Belirli sınıftan olan sonsuz boyutlu dönüşümler için derece kavramı ilk olarak Leray - Schauder tarafından Banach uzayını kendisine geçiren "birim+kompakt" şeklindeki dönüşümler için incelenmiştir. Banach uzayının sınırlı bir bölgesinde tanımlanmış bu tür dönüşüme önce sonlu boyutlu dönüşümlerle yaklaşmışlar ve bu dönüşümlerin dereceler dizisinin sabitleştiğini ispatlamışlardır. Daha sonra bu sabiti sonsuz boyutlu dönüşümün derecesi olarak belirlemişler ve sonlu boyutlu dönüşümün derecesinin sahip olduğu önemli özelliklerin bu halde de sağlandıklarını ispatlayarak bu konu ile ilgili birçok problem çözmüşlerdir.

İleriki yıllarda keyfi sonsuz boyutlu dönüşüm için, derecenin sahip olduğu önemli özellikleri sağlamak şartıyla derece kavramı belirlemenin mümkün olmadığı anlaşılmıştır.

Örneğin; Leray-Schauder derecesinin konusu, ϕ_0 C^1-sınıfından olan ve iki Banach uzayı arasında oluşan öz fonksiyonlara genişletilmiştir. Burada, ϕ_0 C^1-sınıfından olan ve herbir noktada türevinin indeksi

$$indf_x' = \dim\ker f_x' - \dim co\ker f_x'$$

sıfıra eşit olan $f: E \to F$ dönüşümleri sınıfıdır.

Sıfır indeksli C^1-sınıfından olan Fredholm operatörler için derece teorisinin daha farklı genişletilmişleri de yapılmıştır.

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin (C^r-sınıfından dönüşümlerde) öğrenilmesi için yararlı olan sınıflardan biri de A.İ.Shnirelman tarafından tanımlanmış olan FQL-dönüşümleridir. Basitçe söylemek gerekirse; FQL-dönüşümü, herbir sınırlı bölgede FL-dönüşümlerle yaklaşılması mümkün olan, iki Banach uzayı arasında tanımlı dönüşümdür. FL-dönüşüm ise yalnız sonlu sayıda koordinatlara göre lineer olmayan dönüşümlerdir. FL-dönüşümler için derece tanımını kolayca belirlemek mümkündür, sonra limite geçilerek bu dereceler dizisinin sabitleştiği ispatlanmıştır. Bu sabit FQL-dönüşümünün derecesi olarak belirlenir ve derecenin önemli özelliklerinin sağlandığı gösterilir. Daha sonra bu derece konusu belirli sınıftan olan Banach manifoldları arasında oluşan FSQL-dönüşümlerine genişletilmiş, Banach uzayları arasında oluşan FSQL- dönüşümünün, FQL-dönüşümü ile aynılığı ve derecenin önemli özellikleri ispatlanmıştır.

Bu çalışmanın sonunda FSQL-dönüşümünün derecesinin aşağıdaki özelliği ispatlanmıştır.

"İki FSQL-dönüşümün bileşkesinin derecesi, bu dönüşümlerin dereceleri çarpımına eşittir."

BÖLÜM 2

HAMAR MANİFOLDLAR ve BUNLAR ÜZERİNDEKİ DÖNÜŞÜMLERİN DERECESİ

2.1. C^r-Manifoldlar ve C^r-Sınıfından Dönüşümler

Bu bölümde $\Re^k$ ile k-boyutlu öklit uzayı ve $x \in \Re^k$ ile $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $x_i \in \Re$, i=1,2,..., k , gösterilecektir.

Tanım:2.1.1. $U \subset \Re^k$, $V \subset \Re^l$ açık kümeler olsun. $f: U \to V$ dönüşümü verilsin. Eğer $\forall$n için $\partial^n f / \partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_k}$ türevleri var ve sürekli ise f dönüşümüne C^r -sınıfından dönüşüm denir.

$X \subset \Re^k$, $Y \subset \Re^l$ keyfi altkümeler olsunlar ve $f: X \to Y$ dönüşümü verilsin. Eğer $\forall x \in X$ elemanı için $x \in U$ olacak şekilde $U \subset \Re^k$ açığı varsa ve $F: U \to \Re^l$ dönüşümü, $F\big|_{X \cap U} = f$ koşulunu sağlayan C^r-sınıfından dönüşüm ise f dönüşümüne C^r-sınıfından dönüşüm denir.

Not: $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ C^r-sınıfından dönüşümler ise $g \circ f: X \to Z$ bileşke dönüşümü de C^r-sınıfından dönüşümdür. $i: X \to X$ birim dönüşümünün de C^r-sınıfından dönüşüm olduğu açıktır.

Tanım:2.1.2. $f: X \to Y$ dönüşümü verilsin. Eğer $f(X) = Y$, f bire-bir , f ve f^{-1} sürekli dönüşümler ise f dönüşümüne homeomorfizm adı verilir.

Tanım:2.1.3. $f: X \to Y$ dönüşümü verilsin. Eğer f dönüşümü X ile Y arasında homeomorfizm, f ve f^{-1} dönüşümleri C^r -sınıfından dönüşümler ise f dönüşümüne diffeomorfizm adı verilir.

Diferensiyel Topoloji Anabilimi, $X \subset \Re^k$ kümesinin diffeomorfizm altında invaryant kalan özelliklerini bulmaya çalışır.

Bu bölümde keyfi X kümesi yerine belirli bazı özelliklere sahip olan kümelerle ilgilenilecektir.

Tanım:2.1.4. M Hausdorff uzayı ve $\{U_i\}, M$ uzayının sayılabilir örtüsü olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa M uzayına C^r -sınıfından m-boyutlu manifold denir:

1) $\forall U_i$ açık kümesi için $\varphi_i : U_i \to V_i$, $V_i \subset \Re^m$, dönüşümü homeomorfizmdir.

2) Eğer $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ ise

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

homeomorf dönüşümü C^r -sınıfındandır.

Tanım:2.1.5. Keyfi $g: U \to W \cap M$ homeomorfizmine $W \cap M$ bölgesinin parametrelendirilmesi, $g^{-1}: W \cap M \to U$ homeomorfizmine ise $W \cap M$ bölgesinde koordinat sistemi denir.

Bazı durumlarda sıfır boyutlu manifoldlarla ilgilenilecektir. Tanıma göre, $\forall x \in M$ noktasının $W \cap M = \{x\}$ olacak şekilde bir $W \cap M$ komşuluğu varsa o zaman M' ye sıfır boyutlu manifold denilir.

Örnekler:2.1.1. S^2 küre yüzeyi ele alınsın. Tanıma göre S^2 küre yüzeyi $x^2+y^2+z^2=1$ eşitliğini sağlayan $(x,y,z)\in\Re^3$ noktalarından oluşmuştur. S^2 küre yüzeyi iki boyutlu C^r-sınıfından manifoldtur. Gerçekten de,

$$(x,y)\to(x,y,\sqrt{(1-x^2-y^2)}) \qquad x^2+y^2\prec 1$$

dönüşümü S^2 küre yüzeyinde $z\succ 0$ bölgesini parametrelendirir. (x,y,z) noktalarının rolü ve bu değişkenlerin işaretleri değiştirilirse $x\succ 0,\ y\succ 0,\ x\prec 0,\ y\prec 0,\ z\prec 0$ bölgeleri parametrelendirilmiş olur. Bu bölgelerin birleşimi S^2 küre yüzeyini örterler. O halde S^2 küre yüzeyi gerçekten de C^r-sınıfından manifold olur.

Genelde $S^{n-1}\subset\Re^n$ küre yüzeyi $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}=1$ koşulunu sağlayan $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\Re^n$ noktalarından oluşmuş (n-1)-boyutlu C^r-sınıfından manifoldtur. Örnek olarak $S^0\subset\Re$ iki noktadan oluşan manifoldtur.

$x\neq 0$ ve $y=\sin(1/x)$ koşullarını sağlayan $(x,y)\in\Re^2$ noktaları kümesi de 1-boyutlu C^r-sınıfından manifold olur.

2.2. Teğet Uzaylar ve Türevler

M,N C^r-sınıfından manifoldlar, $\dim M=m$, $M\subset\Re^k$, $\dim N=n$, $N\subset\Re^l$ ve $f:M\to N$ C^r-sınıfından dönüşüm olsun. f dönüşümünün türevi tanımlanmadan önce herbir $x\in M$ noktası için m-boyutlu $TM_x\subset\Re^k$ lineer altuzayını belirlenir ve bu TM_x altuzayına x noktasında M manifolduna teğet uzay denir. O zaman df_x dönüşümü, TM_x altuzayından TN_y altuzayına lineer dönüşüm olacaktır, burada $y=f(x)$ dir. TM_x uzayının elemanlarına x noktasında M manifolduna çekilen teğet vektörler denilir.

Tanım:2.2.1. $U \subset \Re^k$ ve $V \subset \Re^l$ açık kümeler , $f\colon U \to V$ keyfi C^r-sınıfından dönüşüm olsun. $x \in U$, $h \in \Re^k$ olmak üzere

$$df_x\colon \Re^k \to \Re^l$$

türev dönüşümü

$$df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

şeklinde tanımlanır.

$df_x(h)$ türev dönüşümünün h' ya göre lineer dönüşüm olduğu açıktır. Gerçekten de df_x dönüşümü ($l \times k$)-boyutlu $\left(\partial f_i / \partial x_i\right)_x$ matrisi ile belirlenen lineer dönüşümdür.

Diferensiyelleme operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) Zincir Kuralı: Eğer $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ C^r-sınıfından dönüşümler ve $y = f(x)$ ise

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$$

olur.

Diğer bir deyişle C^r-sınıfından dönüşümlerden oluşmuş herbir

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"] & & W \end{tikzcd}$$

komutatif diyagramına

$$
\begin{tikzcd}
 & \Re^l \arrow[dr, "dg_y"] & \\
\Re^k \arrow[ur, "df_x"] \arrow[rr, "d(g\circ f)_x"] & & \Re^m
\end{tikzcd}
$$

komutatif diyagramı karşılık gelir. Burada $U\subset\Re^k$, $V\subset\Re^l$ ve $W\subset\Re^m$ açık kümelerdir.

2) Eğer $I\colon U\to U$ birim dönüşüm ise $dI_x\colon\Re^k\to\Re^k$ birim dönüşümdür. Gerçekten,

$$dI_x(h)=\lim_{t\to 0}\frac{I(x+th)-I(x)}{t}$$

$$\Leftrightarrow\left\|\frac{I(x+th)-I(x)}{t}-dI_x(h)\right\|\to 0\quad,\qquad t\to 0$$

$$\Rightarrow\left\|\frac{x+th-x}{t}-dI_x(h)\right\|\to 0\quad,\qquad t\to 0$$

$$\Rightarrow\left\|h-dI_x(h)\right\|\to 0\quad,\qquad t\to 0$$

$$\Rightarrow dI_x(h)=h$$

olur, yani dI_x birim dönüşümdür.

Genellikle $U\subset U'$ açık kümeler ve $i\colon U\to U'$ gömme dönüşümü ise o zaman $di_x\colon\Re^k\to\Re^k$ birim dönüşüm olur.

3) Eğer $L\colon\Re^k\to\Re^l$ lineer dönüşüm ise $dL_x=L$ dir. Gerçekten,

$$dL_x(h)=\lim_{t\to 0}\frac{L(x+th)-L(x)}{t}$$

$$\Leftrightarrow\left\|\frac{L(x+th)-L(x)}{t}-dL_x(h)\right\|\to 0\quad,\qquad t\to 0$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{L(x)+tL(h)-L(x)}{t} - dL_x(h) \right\| \to 0 \quad , \quad t\to 0$$

$$\Rightarrow \left\| L(h) - dL_x(h) \right\| \to 0 \quad , \quad t\to 0$$

$$\Rightarrow dL_x(h) = L(h)$$

olarak bulunur.

Bu özelliklerin basit bir sonucu olarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme:2.2.1. $U \subset \Re^k$, $V \subset \Re^l$ açık kümeler ve $f: U \to V$ diffeomorfizm olsun. O zaman $k = l$ ve $df_x: \Re^k \to \Re^l$ türev dönüşümü izomorfizmdir.

İspat: $f^{-1} \circ f$ dönüşümü U açık kümesinden U açık kümesine birim dönüşümdür, o zaman $d(f^{-1})_y \circ df_x$ türev dönüşümü de $\Re^k$ uzayından $\Re^k$ uzayına birim dönüşüm olacaktır. Benzer olarak $df_x \circ d(f^{-1})_y$ türev dönüşümü de $\Re^l$ uzayından $\Re^l$ uzayına birim dönüşüm olur.

$$I_{R^l} = f \circ f^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$$

$$\Rightarrow I_{R^l} = d\ (\ I_{R^l}) = d(f) \circ d(f^{-1}) : \Re^l \to \Re^l$$

$$I_{R^k} = f^{-1} \circ f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$$

$$\Rightarrow I_{R^k} = d(I_{R^k}) = d(f^{-1}) \circ d(f) : \Re^k \to \Re^k$$

olarak yazılabilir.

$$l = rank I_{\Re^l} \le \min\{rank df, rank df^{-1}\}$$

$$\le \min\{\min\{l,k\}, \min\{l,k\}\} = \min\{l,k\} \qquad (2.2.1)$$

$$k = rank I_{\Re^k} \le \min\{rank df^{-1}, rank df\}$$

$$\leq \min\{\min\{l,k\},\min\{l,k\}\} = \min\{l,k\} \tag{2.2.2}$$

olur. (2.2.1) ve (2.2.2) ifadelerinden

$$\max\{l,k\} \leq \min\{l,k\}$$

bulunur. Bu ancak $l = k$ olduğu durumda doğrudur.

Teorem:2.2.1. (Ters dönüşüm teoremi) $U \subset \mathfrak{R}^k$, $V \subset \mathfrak{R}^l$ açık kümeler ve $f{:}U \to V$ C^r- sınıfından dönüşüm olsun. Eğer $df_x{:}\mathfrak{R}^k \to \mathfrak{R}^l$ türev dönüşümü regüler dönüşüm ise yani df_x dönüşümünün matrisinin rankı l ise o zaman f dönüşümü $x \in U$ elemenının yeteri kadar küçük $U' \subset U$ komşuluğunu $f(U') = V$ açık kümesine diffeomorf olarak resmeder.

Not: Burada f dönüşümü bire-bir olmayabilir.

Keyfi $M \subset \mathfrak{R}^k$ C^r-manifoldu için TM_x teğet uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$g{:}U \to M \subset \mathfrak{R}^k$ dönüşümünün, $x \in M$ noktasının $g(U)$ komşuluğunun (M'de) parametrizasyonu olduğu kabul edilsin. Burada $U \subset \mathfrak{R}^m$ açık altküme ve $g(u) = x$' dir. g dönüşümüne U kümesinden $\mathfrak{R}^k$ uzayına giden dönüşüm olarak bakılırsa

$$dg_u{:}\mathfrak{R}^m \to \mathfrak{R}^k$$

türev dönüşümü tanımlanmış olur. TM_x teğet uzayı $dg_u(\mathfrak{R}^m)$ şeklinde belirlenir. Bu teğet uzayın kurulması g parametrizasyonunun seçilmesinden bağımsızdır. Gerçekten de,

$$g_1{:}U_1 \to M \quad , \quad g_2{:}U_2 \to M$$

dönüşümlerinin $x \in M$ noktasının $g_1(U_1)$ ve $g_2(U_2)$ komşuluklarına uygun parametrizasyonlar oldukları kabul edilsin. Burada $y = g_1(u_1) = g_2(u_2)$ şeklindedir. O zaman aşağıdaki komutatif

$$\begin{tikzcd} & \Re^k & \\ U_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[rr, "g_2^{-1} \circ g_1"] & & U_2 \arrow[ul, "g_2"'] \end{tikzcd}$$

diyagramından

$$\begin{tikzcd} & \Re^k & \\ \Re^m \arrow[ur, "dg_{1,U_1}"] \arrow[rr, "d(g_2^{-1} \circ g_1)_{U_1}"] & & \Re^m \arrow[ul, "dg_{2,U_2}"'] \end{tikzcd}$$

komutatif diyagramı bulunur. O halde

$$g_1 = g_2(g_2^{-1} \circ g_1) \Rightarrow dg_{1,u_1} = dg_{2,u_2} \circ d(g_2^{-1} \circ g_1)_{u_1}$$

$$\Rightarrow dg_{1,u_1}(\Re^m) = dg_{2,u_2} \circ d(g_2^{-1} \circ g_1)_{u_1}(\Re^m)$$

$$\Rightarrow dg_{1,u_1}(\Re^m) = dg_{2,u_2}(\Re^m)$$

olarak bulunur. Buradan, TM_x teğet uzayının kurulmasının g parametrizasyonunun seçilmesinden bağımsız olduğu görülür.

Şimdi TM_x teğet uzayının m-boyutlu vektör uzay olduğu gösterilecektir.

$g^{-1}: g(U) \to U$, C^r-sınıfından dönüşüm olduğundan, x elemanının açık W komşuluğu ve $W \cap g(U)$ bölgesinde g^{-1} dönüşüm ile aynı olacak şekilde bir

$$F: W \to \Re^m$$

C^r-sınıfından dönüşümü bulunabilir. $U_0 = g^{-1}(W \cap g(U)) \subset U$ olarak alınsın. Bu durumda

$$\begin{tikzcd} & W \cap g(U) \arrow[dr, "F"] & \\ U_0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "gömme"] & & \Re^m \end{tikzcd}$$

komutatif diyagramı bulunur. Buradan yukarıdaki diyagram ile ilgili olarak

$$\begin{tikzcd} & \Re^k \arrow[dr, "dF_x"] & \\ \Re^m \arrow[ur, "dg_U"] \arrow[rr, "birim"] & & \Re^m \end{tikzcd}$$

komutatif diyagramı elde edilir. Bu son diyagramdan

$$I_{R^m} = dF_x \circ dg_u$$

olarak yazılabilir. O halde dF_x ve dg_u lineer dönüşümleri birbirinin tersidirler. Ters dönüşümlerin rankları aynı olduğundan dF_x ve dg_u dönüşümlerinin rankı l ile gösterilebilir. $m \le k$ olduğundan genellikle $l \le m$ dir. Diğer taraftan bileşkenin rankının özelliğine göre,

$$m \leq \min\{rankdF_x, rankdg_u\} \Rightarrow m \leq \min\{l, l\} = l \Rightarrow m \leq l$$

olur. O halde $m = l$ olarak bulunur, yani dg_u dönüşümünün matrisinin rankı m dir. Böylece $TM_x = dg_u(\Re^m)$ teğet uzayının boyutu m olur.

$M \subset \Re^k$ ve $N \subset \Re^l$ C^r- manifoldlar, $f: M \to N$ C^r-sınıfından dönüşüm ve $f(x) = y$ olsun. Bu durumda,

$$df_x: TM_x \to TN_y$$

türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır. f, C^r-sınıfından dönüşüm olduğundan $x \in M$ elemanının $W \subset \Re^m$ açık komşuluğu ve

$$F|_{W \cap M} = f|_{W \cap U}$$

koşulunu sağlayan $F: W \to \Re^l$ C^r-sınıfından dönüşümü vardır. $\forall v \in TM_x$ elemanı için

$$df_x(v) = dF_x(v)$$

olduğu kolayca görülebilir. Bunu görmek için, $dF_x(v) \subset TN_y$, $y = f(x)$, olduğunu ispatlamak gereklidir. Önce $x \in M$ ve $y \in N$ noktalarının sırasıyla $g(U)$ ve $h(V)$ komşuluklarının

$$g: U \to M \subset \Re^k$$

ve

$$h: V \to N \subset \Re^l$$

parametrizasyonları ele alınsın. U kümesi küçültülerek (eğer gerekli ise) $g(U) \subset W$ ve f dönüşümünün $g(U)$ komşuluğunu $h(V)$ komşuluğuna geçirdiği kabul edilebilir. Böylece

$$h^{-1} \circ f \circ g : U \to V$$

C^r-sınıfından dönüşümü tanımlanmış olur. Aşağıdaki komutatif diyagram ele alınsın.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & \Re^l \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1} \circ f \circ g"] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Buradan türevlerine geçerek lineer dönüşümlerin aşağıdaki komutatif diyagramı bulunur.

$$\begin{tikzcd} \Re^k \arrow[r, "dF_x"] & \Re^l \\ \Re^m \arrow[u, "dg_U"] \arrow[r, "d(h^{-1} \circ f \circ g)_U"] & \Re^m \arrow[u, "dh_V"'] \end{tikzcd}$$

Burada $u = g^{-1}(x)$, $v = h^{-1}(y)$ dir. Bu diyagramdan dF_x dönüşümünün $TM_x = \mathrm{Im}(dg_u)$ altuzayını $TN_y = \mathrm{Im}(dh_v)$ altuzayına dönüştürdüğü bulunur. Ayrıca df_x dönüşümü F dönüşümünün seçilmesine bağlı değildir. Çünkü aynı df_x lineer dönüşümü yukarıdaki diyagramın alt kısmı kullanılarak da bulunabilir, yani

$$df_x = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}$$

olur, bu da ispatı tamamlar.

Daha önce de belirtildiği gibi diferansiyelleme operatörü aşağıdaki iki özelliğe sahiptir.

1) Zincir kuralı: $f: M \to N$, $g: N \to P$ C^r-sınıfından dönüşümler ve $f(x) = y$ ise

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$$

dir.

2) $I: M \to M$ birim dönüşüm ise

$$dI_x : TM_x \to TM_x$$

birim dönüşümdür.

Genellikle eğer $i: M \to N$ gömme dönüşümü ise

$$di_x : TM_x \to TN_y$$

gömme dönüşümü olur.

Bu özelliklerin ispatı açıktır.

Bu iki özellikten yararlanılarak aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme:2.2.2. M, N C^r-sınıfından manifoldlar ve $f: M \to N$ diffeomorfizm olsun. O zaman $df_x : TM_x \to TN_y$ dönüşümü izomorfizm olur. Özel halde $\dim M = \dim N$ dir.

2.3. Regüler Değer

Tanım:2.3.1. M ve N aynı boyutlu manifoldlar ve $f : M \to N$ C^r-sınıfından dönüşüm olsun. Eğer $df_x : TM_x \to TN_y$ dönüşümünün matrisinin rankı, M (veya N) manifoldunun boyutuna eşit ise $x \in M$ noktasına regüler nokta denir. Burada $y = f(x)$ dir.

Bu durumda Ters Dönüşüm teoremine göre, f dönüşümü $x \in M$ elemanının belirli bir küçük komşuluğunu N manifoldunda $y = f(x)$ elemanının belirli bir komşuluğuna diffeomorf olarak resmeder.

Tanım:2.3.2. Eğer $f^{-1}(y)$ kümesi regüler noktalardan oluşuyorsa (özel durumda $f^{-1}(y)$ kümesi boşküme de olabilir) $y \in N$ noktasına regüler değer denir.

Tanım:2.3.3. df_x türev dönüşümünün matrisinin rankı M (veya N) manifoldunun boyutundan küçük ise x noktasına f dönüşümünün kritik noktası, $y = f(x)$'e de kritik değer denir.

Böylece $\forall y \in N$ noktası ya regüler değer ya da kritik değer olacaktır.

Teorem:2.3.1. $\overline{\Omega} \subset \Re^n$ kompakt küme ve $f : \overline{\Omega} \to \Re^n$ C^r-sınıfından dönüşüm olsun. Eğer $y_0 \in \Re^n$ regüler değer ise $f^{-1}(y_0)$ kümesi sonlu sayıda elemandan oluşur.

İspat: $f^{-1}(y_0)$ kümesinin sonsuz sayıda elemandan ibaret olduğu kabul edilsin. O zaman $\overline{\Omega}$ kompakt küme olduğundan $f^{-1}(y_0)$ kümesinin enazından bir değme noktası vardır. Yani n→∞ için $x_n \to x_0$ olacak şekilde $\{x_n\} \subset f^{-1}(y_0)$ dizisi ve $x_0 \in \overline{\Omega}$ noktası vardır. f C^r-sınıfından dönüşüm olduğundan süreklidir, o halde

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

yazılabilir. Buradan

$$f(x_0) = y_0$$

yani

$$x_0 \in f^{-1}(y_0)$$

olur. y_0 regüler değer olduğundan $\det(f'(x_0)) \neq 0$ dır. Ters dönüşüm teoremine göre, x_0 elemanının bir $U(x_0)$ komşuluğu, y_0 elemanının bir $V(y_0)$ komşuluğuna diffeomorftur, yani

$$f: U(x_0) \to V(y_0)$$

dönüşümü diffeomorfizmdir. Öte yandan x_0 noktası $f^{-1}(y_0)$ kümesinin değme noktası olduğundan $U(x_0)$ komşuluğu için $x_n \in U(x_0)$ olacak şekilde $\forall n \geq N$ şartını sağlayan $\exists N \succ 0$ doğal sayısı vardır. x_n elemanları için $f(x_n) = y_0$ olduğundan $U(x_0)$ komşuluğunda f dönüşümü diffeomorfizm olamaz. O halde kabul yanlış olur, yani $f^{-1}(y_0)$ kümesi sonlu elemanlıdır.

M kompakt manifold, $f: M \to N$ C^r-sınıfından dönüşüm ve $y \in N$ regüler değer olsun. $\# f^{-1}(y)$ ile, $f^{-1}(y)$ kümesinin eleman sayısı gösterilecektir. Dikkat edilirse $\# f^{-1}(y)$, y regüler değerleri için y'nin lokal sabit fonksiyonudur, yani $\forall y \in N$ noktasının $\forall y' \in V$ elemanı için

$$\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(y')$$

olacak şekilde bir $\exists V \subset N$ komşuluğu vardır. Gerçekten de, $f^{-1}(y)=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ olsun. y regüler değer olduğundan, $f:U_i \to V_i$, $\forall i=1,\ldots,k$, dönüşümü diffeomorfizm olacak şekilde $\forall x_i$, $\forall i=1,\ldots,k$, noktalarının ikişer ikişer arakesitleri boş olan $U_i \subset M$ komşulukları ve y noktasının $V_i \subset N$ komşulukları vardır. Bu durumda $V=\bigcap_{i=1}^{k} V_i$ olarak alınabilir.

2.4. Cebirin Esas Teoremi

Yukarıda verilen tanımların bir uygulaması olarak Cebrin Esas Teoremi verilebilir.

Teorem:2.4.1. Sabitten farklı keyfi $P(z)$ polinomu, kompleks uzayda en az bir noktada sıfır değerine sahiptir.

Bu teoremi ispatlamak için kompleks sayılar uzayından kompakt manifolda geçmek gereklidir. $S^2 \subset \Re^3$ bir yarıçaplı küre yüzeyi ve

$$h_+ : S^2 - \{(0,0,1)\} \to \Re^2 \times 0 \subset \Re^3$$

stereografik izdüşümü ele alınsın. Bu izdüşüm dönüşümü S^2 küre yüzeyinin $(0,0,1)$ kuzey kutup noktasından yapılan stereografik izdüşümdür. Burada $\Re^2 \times 0$ ile kompleks sayılar düzlemi aynı alınır. $P:\Re^2 \times 0 \to \Re^2 \times 0$ polinomuna aşağıdaki şekilde belirlenen $f:S^2 \to S^2$ dönüşümü karşılık gelir.

$$f(x)=h_+^{-1}\circ P \circ h_+(x) \qquad x \neq (0,0,1)$$
$$f((0,0,1))=(0,0,1)$$

Bu şekilde belirlenen f dönüşümünün kuzey kutup noktasının civarında da C^r-sınıfından dönüşüm olduğu açıktır. Bunu ispatlamak için (0,0,-1) güney kutup noktasından h_- stereografik izdüşümü kurulacaktır.

$$Q(z) = h_- \circ f \circ h_-^{-1}(z)$$

dönüşümü alınsın. Elementer geometriden

$$h_+ \circ h_-^{-1}(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$$

olduğu açıktır. Eğer

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \qquad\qquad a_0 \neq 0$$

ise

$$Q(z) = \frac{z^n}{(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \ldots + \bar{a}_n z^n)}$$

olduğu kolayca görülür. O halde $Q(z)$ dönüşümü sıfır noktasının bir komşuluğunda C^r-sınıfından dönüşüm olur. Bundan dolayı $f = h_-^{-1} \circ Q \circ h$ dönüşümü (0,0,1) noktasının komşuluğunda C^r-sınıfından dönüşüm olacaktır.

Not: f dönüşümü sonlu sayıda kritik noktaya sahiptir, çünkü P polinomu zaten $P'(z) = \sum a_{n-j} . j . z^{j-1}$ türevinin köklerinde lokal diffeomorfizm değildir. $P(z)$ polinomu sabitten farklı olduğundan $P'(z)$=0 denklemi sonlu sayıda köke sahiptir (Bunun $(n-1)$'den fazla kökü olamaz). Buradan f dönüşümünün regüler değerler kümesinin bağlantılı olduğu bulunur, çünkü bu küme sonlu sayıda noktası kaybolmuş S^2 küre yüzeyidir. O halde lokal sabit $\# f^{-1}(y)$ fonksiyonu bu kümede sabittir. $\# f^{-1}(y)$ fonksiyonu, bu kümede her yerde sıfır olamayacağından hiçbir yerde sıfır değildir, yani f örten dönüşümdür. Bu durumda P polinomu enazından bir noktada sıfır değerine sahiptir.

2.5. Sard and Brown Teoremi

Genelde C^r-sınıfından olan dönüşümün kritik değerlerinin sonlu sayıda olduğu söylenemez. Ancak kritik değerler kümesi aşağıdaki anlamda sıfır ölçümlüdür.

Teorem:2.5.1. $U \subset \Re^m$ açık küme ve $f:U \to \Re^n$ C^r-sınıfından dönüşüm ve

$$C = \{x \in U : rankdf_x \prec n\}$$

olsun. O zaman $f(C) \subset \Re^n$ kümesinin Lebesque ölçüsü sıfırdır.

Sıfır ölçümlü küme kendisinde açık küme bulundurmadığından $\Re^n \setminus f(C)$, $\Re^n$ uzayında heryerde yoğun olmalıdır. Burada $m \geq n$ haline bakılacaktır. Eğer $m \prec n$ ise $C = U$ olduğu açıktır ve bu durumda Teorem.2.5.1 gereği $f(U)$ sıfır ölçümlüdür.

Genel halde M m-boyutlu manifold, N n-boyutlu manifold ve $f: M \to N$ C^r-sınıfından dönüşüm olsun.

$$C = \{x \in M : df_x : TM_x \to TN_{f(x)}\ ,\ rank(df_x) \prec n\}$$

olsun. O zaman C kümesine kritik noktalar kümesi, $f(C)$ kümesine kritik değerler kümesi ve $N \setminus f(C)$ kümesine de f dönüşümünün regüler değerler kümesi denir. ($m = n$ halinde olduğu gibi)

M manifoldu, $\Re^m$ uzayına diffeomorf olan sayılabilir sonsuz sayıda komşuluklarla örtülebildiğinden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç:2.5.1. (Brown) $f: M \to N$ C^r-sınıfından dönüşümünün regüler değerler kümesi, N manifoldunda heryerde yoğundur.

Bu sonucu kullanmak için aşağıdaki Lemma:2.5.1. gereklidir.

Lemma:2.5.1. M m-boyutlu manifold, N n-boyutlu manifold ve $f: M \to N$ C^r-sınıfından dönüşüm olsun. $y \in N$ elemanı f dönüşümünün regüler değeri olsun. O zaman $f^{-1}(y) \subset M$, $(m-n)$-boyutlu C^r-sınıfından manifold olur.

İspat: $x \in f^{-1}(y)$ olsun. $y \in N$ elemanı f dönüşümünün regüler değeri olduğundan df_x dönüşümü TM_x uzayını tüm TN_y uzayına resmeder. Bundan dolayı df_x dönüşümünün çekirdeği, $\ker df_x \subset M$, $(m-n)$-boyutlu vektör uzaydır. $M \subset \Re^k$ olarak alınsın. O zaman df_x dönüşümünün çekirdeği ile arakesidi sıfır olacak şekilde bir

$$L: \Re^k \to \Re^{m-n}$$

lineer dönüşümü seçilebilir, yani

$$\ker df_x \cap \ker L = 0$$

dir. Şimdi

$$F: M \to N \times \Re^{m-n} \qquad F(\xi) = (f(\xi), L(\xi))$$

dönüşümü tanımlansın. dF_x dönüşümünün

$$dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$$

formülü ile belirlendiği açıktır. Bu yüzden dF_x dönüşümü m-boyutlu vektör uzaylar arasında izomorfizm doğurur. Ters dönüşüm teoremine göre F dönüşümü, x noktasının belirli bir U komşuluğunu $(y, L(x))$ noktasının belirli bir V komşuluğuna diffeomorf olarak resmeder. Burada

$$F^{-1}(y \times \Re^{m-n}) = f^{-1}(y) \qquad y \times \Re^{m-n} \text{ hiperuzay}$$

dır. Bu durumda F dönüşümü $f^{-1}(y) \cap U$ komşuluğunu $y \times \Re^{m-n} \cap V$ komşuluğuna diffeomorf olarak resmeder. Bu $f^{-1}(y)$ kümesinin $(m-n)$-boyutlu manifold olduğunu ispatlar.

Örnek olarak S^{m-1} küre yüzeyinin C^r-manifold olduğu gösterilebilir. Bunun için

$$f: \Re^m \to \Re \quad , \qquad f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2$$

dönüşümü ele alınsın. $\forall y \in \Re^1$, $y \neq 0$, elemanı f dönüşümünün regüler değeridir. Lemma:2.5.1. gereği $f^{-1}(1)$ küre yüzeyi (bu S^{m-1} küre yüzeyidir) C^r-manifoldtur.

Eğer $M' \subset M$ altkümesi manifold ise, TM_x', TM_x teğet uzayının altuzayı olacaktır, burada $x \in M'$ dır. O zaman TM_x' altuzayının TM_x uzayına dik tamamlanması $(m-m')$-boyutlu vektör uzay olacaktır. Bu uzaya, x noktasında M' manifolduna çekilen normal vektörler uzayı denir.

Özel durumda $M' = f^{-1}(y)$ olsun. $y \in N$, $f: M \to N$ dönüşümünün regüler değeridir.

Lemma:2.5.2. $df_x : TM_x \to TN_y$ dönüşümünün çekirdeği, $M' = f^{-1}(y)$ altmanifoldunun $x \in M$ noktasındaki $TM_x' \subset TM_x$ teğet uzayı ile aynıdır. Yani,

$$\ker df_x = TM_x'$$

olur. Bu durumda df_x dönüşümü, TM_x' altuzayının dik tamamlanmasını tüm TN_y uzayına izomorf olarak resmeder.

İspat:

$$
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "f"] \\
y \arrow[r, "i_y"'] & N
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
TM_x' \arrow[r, "di_x"] \arrow[d, "df_x"'] & TM_x \arrow[d, "df_x"] \\
0 \arrow[r, "di_y"'] & TN_y
\end{tikzcd}
$$

yukarıdaki diyagramdan, df_x dönüşümünün $TM_x' \subset TM_x$ altuzayını sıfıra dönüştürdüğü görülür. Boyutların karşılaştırılmasından, df_x dönüşümünün M' ye normal vektörler uzayını, tüm TN_y uzayına dönüştürdüğü görülür.

2.6. Sınırlı Manifoldlar

Önceden ispatlanan lemmalar kuvvetlendirilerek sınırlı manifoldlar için de verilebilir. Önce aşağıdaki kapalı yarım uzay ele alınsın:

$$H^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Re^m : x_m \geq 0\}$$

Tanıma göre ∂H^m sınırı, $\Re^{m-1} \times 0 \subset \Re^m$ hiperuzaydır.

Tanım:2.6.1. $X \subset \Re^k$ altkümesi verilsin. Eğer $\forall x \in X$ elemanının $V \cap H^m \subset H^m$ açık altkümesine diffeomorf olacak şekilde $U_x \cap X$ komşuluğu varsa X altkümesine m-boyutlu C^r-sınıfından sınırlı manifold denir.

∂X sınırı, diffeomorfizm altında ∂H^m sınırına dönüşen $x \in X$ elemanlarından oluşur. ∂X sınırının $(m-1)$-boyutlu C^r-sınıfından manifold olduğu kolayca gösterilebilir. $\operatorname{Int} X$ ise, m-boyutlu C^r-sınıfından manifoldtur. Burada da TX_x teğet uzayı önceden belirtildiği gibidir, hatta $x \in \partial X$ noktalarında bile TX_x m-boyutlu manifoldtur.

Şimdi örnekler kurabilmek için, bir metod verilecektir.

M sınırsız manifold ve sıfır, $g: M \rightarrow \Re$ dönüşümünün regüler değeri olsun.

Lemma:2.6.1. $\{x \in M:\ g(x) \geq 0\}$ kümesi C^r-sınıfından sınırlı manifoldtur ve $g^{-1}(0)$ bu kümenin sınırıdır.

İspat: Lemma:2.5.1'in ispatına benzer olarak yapılabilir.

Örnek:2.6.1. $D^m = \left\{x \in \Re^m:\ 1 - \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \geq 0\right\}$ bir yarıçaplı küresi C^r-sınıfından manifoldtur ve S^{m-1} küre yüzeyi bu kümenin sınırıdır.

Şimdi $f: X \rightarrow N$, C^r-sınıfından dönüşümü ele alınsın. Burada X m-boyutlu sınırlı manifold, N n-boyutlu manifold ve $m \succ n$ dır.

Lemma:2.6.2. Eğer $y \in N$ elemanı f ve $f\big|_{\partial X}$ dönüşümleri için regüler değer ise o zaman $f^{-1}(y) \subset X$ kümesi $(m-n)$-boyutlu C^r-sınıfından sınırlı manifoldtur ve

$$\partial(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap \partial X$$

olur.

İspat: Burada lokal özellik ispatlandığından özel halde bakmak yeterlidir. Bundan dolayı $f: H^m \rightarrow \Re^n$ dönüşümüne bakılacaktır. $y \in \Re^n$ elemanı f dönüşümünün regüler değeri ve $\bar{x} \in f^{-1}(y)$ olsun.

1.Hal: Eğer $\bar{x} \in f^{-1}(y)$ elemanı iç nokta ise önceden de belirtildiği gibi $f^{-1}(y)$ kümesi $\bar{x}$ noktasının belirli bir komşuluğunda C^r-sınıfından manifold olur.

2.Hal: Eğer $\bar{x} \in \partial X$ ise, $U \subset \Re^m$ $\bar{x}$ elemanının açık komşuluğu olmak üzere

$$g\big|_{U \cap H^m} = f$$

olacak şekilde $g: U \to \Re^n$ C^r-sınıfından dönüşümü seçilebilir. Genellikle g dönüşümünün U kümesinde kritik noktaya sahip olmadığı varsayılabilir. Buradan $g^{-1}(y)$ kümesinin, $(m-n)$-boyutlu C^r-sınıfından manifold olduğu bulunur. $\pi: g^{-1}(y) \to \Re$ aşağıdaki koşulu sağlayan bir izdüşüm olsun.

$$\pi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_m$$

Şimdi sıfır noktasının π dönüşümünün regüler değeri olduğu gösterilecektir. $x \in \pi^{-1}(0)$ noktasında $g^{-1}(y)$ manifolduna çekilen teğet

$$dg_x = df_x : \Re^m \to \Re^n$$

türev dönüşümünün çekirdeği ile aynıdır. Ayrıca $f\big|_{\partial X}$ dönüşümü, x noktasında regüler olduğundan bu teğet uzayın tamamen $\Re^{m-1} \times 0$ uzayına yerleşemediği görülür. O halde

$$\begin{aligned} g^{-1}(y) \cap H^m &= f^{-1}(y) \cap U \\ &= \left\{x \in g^{-1}(y) : \ \pi(x) \geq 0\right\} \end{aligned}$$

kümesi Lemma:2.6.1. gereği C^r-sınıfından sınırlı manifoldtur ve sınırı $\pi^{-1}(0)$ dır.

2.7.Sabit Nokta Hakkında Brouwer Teoremi

Lemma:2.6.2. kullanılarak sabit nokta hakkında Brouwer Teoremi ispatlanabilir. Bunun için önce aşağıdaki lemma ispatlanacaktır.

Lemma:2.7.1. X sınırlı kompakt manifold olsun. ∂X sınır kümesinin herbir noktasını sabit bırakan bir

$$f: X \to \partial X$$

C^r-sınıfından dönüşümü yoktur.

İspat: ∂X sınır kümesinin herbir noktasını sabit bırakan bir $f: X \to \partial X$ dönüşümünün varolduğu kabul edilsin. $y \in \partial X$ noktası f dönüşümünün regüler değeri olsun. y noktası

$$f\big|_{\partial X}: \partial X \to \partial X$$

birim dönüşümünün de regüler değeri olduğundan, $f^{-1}(y)$ 1-boyutlu C^r-sınıfından sınırlı manifold olacaktır ve bunun sınırı bir noktadan oluşur.

$$f^{-1}(y) \cap \partial X = \{y\}.$$

O halde $f^{-1}(y)$ kümesi kompakt manifoldtur. 1-boyutlu kompakt manifoldlar kesişmeyen çemberlerden ve eğrilerden oluştuğundan, $\partial(f^{-1}(y))$ kümesi çift sayıda noktalardan ibaret olmalıdır. Bu çelişkiden lemma ispatlanmış olur.

Örnek olarak ,

$$D^n = \{x \in \Re^n : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$$

sınırı S^{n-1} küre yüzeyi olan kompakt manifoldtur. O halde S^{n-1} küre yüzeyinin birim dönüşümünün $D^n \to S^{n-1}$ C^r-sınıfından dönüşümüne genelleştirilemediği ispatlanmış olur.

Lemma:2.7.2. $g: D^n \to D^n$ C^r-sınıfından dönüşümü sabit noktaya sahiptir.

İspat: $g: D^n \to D^n$ C^r-sınıfından dönüşümünün sabit noktaya sahip olmadığı kabul edilsin. Herbir $x \in D^n$ noktasına karşılık x noktası ile $g(x)$ noktasını birleştiren doğru üzerine yerleşecek şekilde bir $f(x) \in S^{n-1}$ noktası karşılık koyulsun, bu yerleşme x noktasına daha yakın olsun. O zaman

$$f: D^n \to S^{n-1}$$

dönüşümü C^r -sınıfından dönüşüm ve $\forall x \in S^{n-1}$ elemanı için $f(x) = x$ olur. Bu ise Lemma:2.7.1 ile çelişir. O halde $g: D^n \to D^n$ dönüşümü sabit noktaya sahiptir.

Not: f dönüşümünün C^r -sınıfından dönüşüm olduğunun gösterilmesi için $f(x) = x + t.u$ biçiminde olduğuna dikkat edilmelidir. Burada,

$$u = \frac{x - g(x)}{\|x - g(x)\|} \quad , \quad t = -x.u + \sqrt{1 - x.x + (x.u)^2}$$

ve $\sqrt{1 - x.x + (x.u)^2} \succ 0$, $\forall x \in D^n$ dir. Ayrıca

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}$, $x.u = x_1.u_1 + x_2.u_2 + \ldots + x_n.u_n$ skalar çarpımdır.

Teorem:2.7.1. (Sabit nokta hakkında Brouwer teoremi) Keyfi $G: D^n \to D^n$ sürekli dönüşümü sabit noktaya sahiptir.

İspat: G sürekli dönüşümüne C^r-sınıfından dönüşümlerle yaklaşarak bu teorem Lemma:2.7.2'ye getirilir. Yaklaşım hakkındaki Weierstrass Teoremine göre $\forall \varepsilon \succ 0$ için

$$\|P_1(x) - G(x)\| \prec \varepsilon \qquad \forall x \in D^n$$

olacak şekilde $P_1 : \Re^n \to \Re^n$ polinomu vardır. Ancak P_1 dönüşümü, D^n küresinin noktalarını D^n küresinin dışındaki noktalara da götürebilir. Bunun için

$$P(x) = \frac{P_1(x)}{1+\varepsilon}$$

dönüşümünü ele alınsın. P dönüşümünün D^n küresini D^n küresine dönüştürdüğü açıktır ve

$$\|P(x) - G(x)\| \prec 2\varepsilon \qquad \forall x \in D^n$$

olur. $\forall x \in D^n$ elemanı için $G(x) \neq x$ olduğu kabul edilsin. O zaman $\|G(x) - x\|$ sürekli fonksiyonu D^n küresinde minimum değerini alır, bu μ, $\mu \succ 0$, ile gösterilsin. Weierstrass teoremine göre $P: D^n \to D^n$ polinomu

$$\|P(x) - G(x)\| \prec \mu \qquad \forall x \in D^n$$

olacak şekilde bulunabilir. O zaman $P: D^n \to D^n$ polinomu sabit noktası olmayan C^r-sınıfından dönüşüm olacaktır. Bu ise Lemma:2.7.2 ile çelişir. O halde, G dönüşümü sabit noktaya sahiptir.

Bu metod genel halde de kullanılır.

Sürekli dönüşüm için herhangi bir teorem ispatlanacağı zaman bu teorem önce C^r-sınıfından dönüşümler için ispatlanır, daha sonra yaklaşım hakkında Weierstrass teoremi kullanılarak sürekli dönüşüme geçilir.

2.8. Dönüşümün Mod2'ye Göre Derecesi

$f: S^n \to S^n$ C^r-sınıfından dönüşüm ve y, f dönüşümünün regüler değeri olsun. Bu durumda $\# f^{-1}(y)$ ile $f(x) = y$ denkleminin çözümleri sayısının gösterildiği hatırlanmalıdır. $\# f^{-1}(y)$ sayısının mod2'ye göre y regüler değerinin seçilmesinden bağımsız olduğu ispatlanacaktır. $\# f^{-1}(y)$ sayısının mod2'ye göre kalanına f dönüşümünün derecesi denir. Bu durumda dönüşümün derecesi ya sıfır yada bir olur.

Bu tanım genellikle aşağıdaki durumda da kullanılır.

$f: M \to N$ C^r-sınıfından dönüşüm, M sınırsız kompakt manifold, N bağlantılı manifold ve $\dim M = \dim N$ olsun. (Ek olarak N manifoldunun da sınırsız kompakt manifold olduğu kabul edilebilir, aksi halde dönüşümün mod2'ye göre derecesi sıfır olur.)

Şimdi yeni bazı tanımlar verilecektir.

$X \subset \Re^k$ olsun. O zaman, $X \times [0,1]$ ile $\Re^{k+1}$ uzayının (x,t), $x \in X$ ve $t \in [0,1]$, elemanlarından oluşan altkümesi gösterilsin.

Tanım:2.8.1. $f, g: X \to Y$ dönüşümleri verilsin. Eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir

$$F: X \times [0,1] \to Y$$

C^r-sınıfından dönüşümü varsa, f ve g dönüşümleri hamar homotop dönüşümler olarak adlandırılır.

$$F(x,0) = f(x) \qquad F(x,1) = g(x) \qquad , \; \forall x \in X$$

Buradaki F dönüşümüne , f ve g dönüşümlerini birleştiren hamar homotopi denir. f ve g hamar homotop dönüşümler ise $f \sim g$ biçiminde gösterilir.

Hamar homotopi bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Eğer f, $g: X \to Y$ dönüşümleri diffeomorfizm iseler, f ve g dönüşümleri arasında hamar izotopluk tanımlanabilir. Bu bağıntı da bir denklik bağıntısı olacaktır.

Tanım:2.8.2. f, $g: X \to Y$ dönüşümleri diffeomorfizm olsunlar. Eğer $\forall\, t \in [0,1]$ için

$x \mapsto F(x,t)$

X ile Y kümeleri arasında diffeomorfizm olacak şekilde f ve g dönüşümleri arasında

$F: X \times [0,1] \to Y$

hamar homotopisi varsa, f diffeomorfizmi g diffeomorfizmine izotoptur denir.

İleride mod2'ye göre dönüşümün derecesinin f dönüşümünün ait olduğu hamar homotop dönüşümler sınıfına bağlı olduğu görülecektir. Yani f ve g dönüşümleri hamar homotop iseler, mod2'ye göre bu dönüşümlerin dereceleri de aynı olacaktır.

Lemma:2.8.1. (Homotopi hakkında) M sınırsız kompakt manifold, $\dim M = \dim N$ ve f, $g: M \to N$ hamar homotop dönüşümler olsunlar. Eğer $y \in N$ elemanı f ve g dönüşümlerinin regüler değeri ise,

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \qquad (\text{mod}2)$$

dir.

İspat: $F: M \times [0,1] \to N$, f ve g dönüşümlerini birleştiren hamar homotopi olsun.

1) Önce $y \in N$ elemanının, F dönüşümünün de regüler değeri olduğu kabul edilsin. O zaman Lemma:2.6.2. gereği, $F^{-1}(y)$ 1-boyutlu sınırlı kompakt manifoldtur ve bunun sınırı

$$F^{-1}(y) \cap ((M \times 0) \cup (M \times 1)) = (f^{-1}(y) \times 0) \cup (g^{-1}(y) \times 1)$$

dir. Böylece $F^{-1}(y)$ manifoldunun sınırındaki noktaların toplam sayısı

$$\# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y)$$

sayısına eşittir. 1-boyutlu kompakt manifoldun sınırı herzaman çift sayıda noktadan oluştuğundan $\# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y)$ sayısı çifttir. Buradan

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \qquad (\text{mod}2)$$

bulunur.

2) Şimdi $y \in N$ elemanının F dönüşümünün regüler değeri olmadığı kabul edilsin. $\# f^{-1}(y')$ ve $\# g^{-1}(y')$ fonksiyonlarının y''ye göre lokal sabit fonksiyonlar oldukları hatırlanacaktır. (Burada y' regüler değerdir.) Bundan dolayı y elemanının regüler değerlerden oluşan bir $V_1 \subset N$ komşuluğu vardır ve

$$\forall y' \in V_1 \text{ için } \# f^{-1}(y') = \# f^{-1}(y)$$

dir. Benzer olarak $\forall y' \in V_2$ elemanı için

$$\# g^{-1}(y') = \# g^{-1}(y)$$

olacak şekilde bir $V_2 \subset N$ komşuluğu vardır ve V_2 komşuluğu zaten regüler değerlerden oluşmuştur. Şimdi F dönüşümü için $V_1 \cap V_2$ komşuluğundan bir z regüler değeri alınsın. (Sard and Brown teoremine göre böyle bir z elemanı vardır.) O zaman ispatın birinci kısmına göre,

$$\# f^{-1}(y') = \# f^{-1}(z) \equiv \# g^{-1}(z) = \# g^{-1}(y)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma:2.8.2. (Homojenlik hakkında) N, C^r-sınıfından bağlantılı manifold, y ve z N'nin iç noktaları olsun. O zaman y noktasını z noktasına dönüştüren $h: N \to N$ diffeomorfizmi vardır ve bu dönüşüm birim dönüşüme hamar homotoptur.

Şimdi bu bölümün esas sonucu verilecektir.

Teorem:2.8.1. M sınırsız kompakt manifold, N bağlantılı manifold ve $f: M \to N$ C^r- sınıfından dönüşüm olsun. Eğer y ve z noktaları f dönüşümünün regüler değerleri ise,

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z) \qquad (\text{mod}2)$$

dir.

f dönüşümünün mod2'ye göre derecesi olarak adlandırılan bu sayı, sadece f dönüşümünü bulunduran hamar homotopluk sınıfına bağımlıdır. f dönüşümünün kendisine bağımlı değildir.

İspat: y ve z noktalarının f dönüşümünün regüler değerleri olduğu kabul edilsin. $h\colon N \to N$ ile birim dönüşüme izotop olan ve y noktasını z noktasına dönüştüren diffeomorfizm gösterilsin. O zaman z noktası, $h \circ f$ dönüşümünün regüler değeri olacaktır. $h \circ f$ bileşke dönüşümü, f dönüşümüne homotop olduğundan Lemma:2.8.1. gereği,

$$\#(h \circ f)^{-1}(z) \equiv \# f^{-1}(z) \qquad (\text{mod}2) \qquad (2.8.1)$$

olur.

$$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ h^{-1}(z) = f^{-1}(y)$$

olduğundan

$$\#(h \circ f)^{-1}(z) \equiv \# f^{-1}(y) \qquad (2.8.2)$$

bulunur. Bundan dolayı (2.8.1) ve (2.8.2)'den

$$\# f^{-1}(z) \equiv \# f^{-1}(y) \qquad (\text{mod}2)$$

olarak bulunur.

f dönüşümünün mod2'ye göre derecesi, $\deg_2(f)$ ile gösterilir. f dönüşümünün g dönüşümüne hamar homotop olduğu kabul edilsin. Sard teoremine göre f ve g dönüşümleri için regüler değer olacak şekilde bir $y \in N$ elemanı vardır.

$$\deg_2(f) \equiv \# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \equiv \deg_2(g) \qquad (\text{mod}2)$$

denkliğinden $\deg_2(f)$'nin Hamar homotopiye göre invaryant olduğu bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek:2.8.1. **i)** $c: M \to M$ sabit dönüşümünün mod2'ye göre derecesinin sıfır olduğu açıktır.

ii) $I: M \to M$ birim dönüşümünün mod2'ye göre derecesi birdir.

O halde sınırsız kompakt manifold üzerinde belirlenen birim dönüşüm sabit dönüşüme homotop değildir.

$M = S^n$ olduğunda küre yüzeyinin herbir noktasını sabit bırakan bir $f: D^{n+1} \to S^n$ C^r-sınıfından dönüşümün olmadığı söylenebilir. Gerçekten böyle bir dönüşüm varolsaydı, o zaman

$$F: S^n \times [0,1] \to S^n \qquad (x,t) \mapsto f(tx), \qquad x \in S^n,\ t \in [0,1]$$

şeklinde belirlenen hamar homotopi, S^n küre yüzeyinde birim dönüşüm ile sabit dönüşümü birleştirmiş olurdu.

2.9. Yönlendirilmiş Manifoldlar

Tanım:2.9.1. Sonlu boyutlu reel vektör uzayının yönü denildiğinde, aşağıdaki denklik bağıntısına göre sıralanmış bazlar sınıfı anlaşılır:

$(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ ve $(b_1', b_2', \ldots, b_m')$ bazları verilsin. Eğer

$$b_i' = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_j$$

toplamındaki a_{ij} katsayıları için $\det(a_{ij}) \succ 0$ ise, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ bazı $(b_1', b_2', \ldots, b_m')$ bazı ile aynı yönlüdür denir. $\det(a_{ij}) \prec 0$ olduğunda ise, bu bazlar farklı yönler tanımlarlar.

Not: Keyfi bir manifoldta yön belirlemek mümkün değildir. Örneğin; Möbius Şeridi yönlendirilemez. Yönlendirilebilen manifoldlara yönlendirilebilir manifoldlar, diğerlerine ise yönlendirilemez manifoldlar denilir.

Böylece herbir vektör uzay kesinlikle iki yöne sahiptir. $\Re^n$ vektör uzayı $(1,0,...,0)$, $(0,1,0,...,0),...,(0,0,...,1)$ bazına uygun standart yöne sahiptir.

Sıfır boyutlu vektör uzay için "yön" +1 veya -1 olarak tanımlanır.

C^r-sınıfından olan yönlendirilmiş M manifoldu, M manifoldundan ve herbir TM_x teğeti için seçilmiş yönlerden oluşur. $m=\dim M \geq 1$ olduğunda bu yönler arasında aşağıdaki koşulun sağlanması istenir:

M manifoldunun herbir noktası için, dh_x türev dönüşümü TM_x teğet uzayının seçilmiş yönünü $\Re^m$ uzayının standart yönüne geçirecek şekilde $(\forall x \in U)$ $U \subset M$ komşuluğu ve $h{:}U \to V$ $(V \subset \Re^m$ veya $V \subset H^m)$ diffeomorfizmi vardır.

Eğer M manifoldu bağlantılı ve yönlendirilebilir ise o zaman M manifoldu kesinlikle iki yöne sahiptir.

Eğer M manifoldu sınırlı ise $x \in \partial M$ noktasında üç tür teğet vektör bulunur:

1) Yalnız sınıra teğet olan vektörler: Bunlar $(m-1)$-boyutlu $T(\partial M)_x \subset TM_x$ altuzayını oluştururlar.

2) "Dışa" yönelmiş vektörler: Bunlar $T(\partial M)_x$ altuzayı ile sınırlanmış açık yarım altuzayı oluştururlar.

3) "İçe" yönelmiş vektörler: Bunlar tamamlayıcı açık yarım altuzayı oluştururlar.

M manifoldunun herbir yönü ∂M sınırında şu şekilde yön belirler:

$x \in \partial M$ noktası için TM_x teğet uzayında pozitif yönlenmiş $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ bazı öyle seçilsin ki, v_1 dışa yönelmiş ve $v_2, \ldots, v_m$ vektörleri ise sınıra teğet olsunlar. O zaman $(v_2, \ldots, v_m)$, x noktasında ∂M sınırı üzerinde aranılan yön olur.

2.10. Brouwer Derecesi

M, N n-boyutlu yönlendirilmiş sınırsız manifoldlar ve $f: M \to N$, C^r-sınıfından dönüşüm olsun. Eğer M kompakt ve N bağlantılı ise bu dönüşümün derecesi aşağıdaki şekilde belirlenir:

$x \in M$, f dönüşümünün regüler noktası olsun. O zaman

$$df_x : TM_x \to TN_{f(x)}$$

türev dönüşümü yönlendirilmiş vektör uzaylar arasında lineer izomorfizmdir. $signf(x)$ fonksiyonu, df_x dönüşümü yapıldığında $TN_{f(x)}$ uzayındaki yönün değişip değişmemesine bağlı olarak +1 veya -1 şeklinde tanımlansın. Keyfi y regüler değeri için f dönüşümünün derecesi,

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign df_x$$

şeklinde belirlenir. Burada da $\deg(f, y)$, y'ye göre lokal sabit fonksiyondur. Bu fonksiyon, N manifoldunda heryerde yoğun olan açık kümede belirlenmiştir.

Teorem:2.10.1. $\deg(f, y)$ tamsayısı y regüler değerinin seçilmesinden bağımsızdır.

Bu tamsayıya f dönüşümünün derecesi denir ve $\deg(f)$ biçiminde gösterilir.

Teorem:2.10.2. f dönüşümü g dönüşümüne hamar homotop ise,

$\deg(f) = \deg(g)$

dir.

Önce M'nin yönlendirilmiş kompakt X manifoldunun sınırı olduğu kabul edilsin ve M, X manifoldunun sınırı gibi yönlendirilsin.

Lemma:2.10.1. $f: M \to N$ dönüşümü C^r-sınıfından $F: X \to N$ dönüşümüne genişletilebilirse, $\forall\, y$ regüler değeri için $\deg(f, y)$ =0 olur.

İspat: 1) Önce y elemanının, hem F dönüşümünün hem de $f = F|_M$ dönüşümünün regüler değeri olduğu kabul edilsin. 1-boyutlu kompakt $F^{-1}(y)$ manifoldu, sınır noktaları $M = \partial X$'e ait olan sonlu sayıda çemberlerden ve eğrilerden oluşur. $A \subset F^{-1}(y)$ bu eğrilerden biri ve $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$ olsun.

$signdf_a + signdf_b$ =0

olduğu gösterilecektir. O halde tüm bu şekildeki eğriler için toplama yapıldığında $\deg(f, y) = 0$ bulunacaktır.

X ve N manifoldlarının yönleri A eğrisi üzerinde aşağıdaki gibi yön belirleyebilir:

$x \in A$ alınsın. $(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$ bazı TX_x uzayında pozitif yönlenmiş öyle bir bazdır ki; v_1, A eğrisine teğettir. O zaman v_1'in TA_x teğet uzayı üzerinde istenilen yönü tanımlaması için gerek ve yeter koşul, dF_x dönüşümünün $(v_2, v_3, \ldots, v_{n+1})$ bazını TN_y teğet uzayının pozitif yönüne geçirmesidir.

$v_1(x)$, x noktasında A eğrisine teğet pozitif yönlendirilmiş baz vektörü olsun. $v_1(x)$, C^r-sınıfından fonksiyondur ve sınırın bir noktasında (bu nokta b ile gösterilsin) dışa yönlendirilmiş, diğer noktada (bu nokta a ile gösterilsin) ise içe yönlendirilmiştir. Buradan,

$$signdf_a=-1 \quad , \quad signdf_b=+1$$

olduğu açıktır. O zaman

$$signdf_a + signdf_b=0$$

olur. Bu tür eğriler üzerinden toplam alınırsa $\deg(f,y)=0$ olarak bulunur.

2) y_0 noktasının f dönüşümünün regüler değeri olduğu ancak F dönüşümünün regüler değeri olmadığı kabul edilsin. $\deg(f,y)$ fonksiyonu y_0 noktasının belli bir U komşuluğunda sabittir. Bu yüzden U kümesinde F dönüşümünün regüler değeri olacak şekilde bir y noktası bulunabilir. Bu durumda

$$\deg(f,y)=\deg(f,y_0)=0$$

olur.

Şimdi

$$f(x)=F(0,x) \qquad\qquad g(x)=F(1,x)$$

dönüşümlerini birleştiren $F:[0,1]\times M \to N$, hamar homotopisine bakılacaktır.

Lemma:2.10.2. y, f ve g dönüşümlerinin regüler değeri olsun. O zaman $\deg(f,y)=\deg(g,y)$ dir.

İspat: $[0,1]\times M$ manifoldu, iki yönlendirilmiş manifoldun kartezyen çarpımı şeklinde yönlendirilebilirdir. O zaman bunun sınırı pozitif yönlendirilmiş $1\times M$ ve negatif yönlendirilmiş $0\times M$ manifoldlarından oluşacaktır. Böylece y regüler değeri için $F\big|_{\partial([0,1]\times M)}$ dönüşümünün derecesi

$$\deg(g,y)-\deg(f,y)$$

farkı olacaktır. Lemma:2.10.1. gereği bu fark sıfır olur, yani

$$\deg(f,y)=\deg(g,y)$$

olur.

Teorem:2.10.1. ve Teorem:2.10.2.'nin ispatlarının kalan kısımları önceden ispatlanan teoremler ile aynıdır.

$f:M\to N$ dönüşümünün y ve z regüler değerleri için y noktasını z noktasına dönüştüren ve birim dönüşüme izotop olan $h:N\to N$ diffeomorfizmi bulunabilir. O zaman h dönüşümü yönü sabit bırakır ve kolayca

$$\deg(f,y)=\deg(h\circ f,h(y))$$

olduğu görülür. f dönüşümü $h\circ f$ dönüşümüne homotoptur ve Lemma:2.10.2. gereği

$$\deg(h\circ f,z)=\deg(f,z)$$

bulunur. Buradan

$$\deg(f,y)=\deg(f,z)$$

olarak bulunur.

Şimdi $f: M \to N$ yalnız sürekli dönüşüm olsun. M ve N kompakt olduklarından, f sürekli dönüşümüne $f_k: M \to N$, $k = 1,2,\ldots,$ C^r-sınıfından dönüşümleri ile düzgün yaklaşmak mümkündür. Ayrıca M ile N arasında oluşan iki C^r-sınıfından dönüşüm birbirine yeteri kadar yakın ise, bu dönüşümlerin C^r-sınıfından homotop oldukları söylenebilir. Bundan dolayı derecenin özelliğine göre, bu dönüşümlerin dereceleri aynı olacaktır. O halde, bu durumda f dönüşümüne düzgün yaklaşan $\{f_k\}$ dönüşümlerinin dereceleri dizisi de (k→∞) sabitleşecektir. Bu yüzden bu sabit $f: M \to N$ sürekli dönüşümünün derecesi olarak belirlenir. Böylece sürekli dönüşümler için derece konusu verilmiş olur ve bu derece C^r-sınıfından dönüşümlerin derecelerinin tüm özelliklerine sahiptir.

Örnek:2.10.1. i) $z \to z^k$, $z \neq 0$, kompleks fonksiyonu 1-yarıçaplı çemberi kendisine dönüştürür, bu dönüşümün derecesi k'dır. (Burada k keyfi tamsayıdır.)

ii) $f: M \to y_0 \in N$ sabit dönüşümünün derecesi sıfırdır.

iii) $f: M \to N$ diffeomorfizminin derecesi ya +1 ya da -1'dir. Bu durum, yönün değişip değişmemesine bağlıdır. Bundan dolayı yönlendirilmiş sınırsız manifold üzerinde belirlenmiş ve yönü değişen diffeomorfizm, birim dönüşüme hamar homotop olamaz.

$$r: S^n \to S^n$$
$$r_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$$

dönüşümü yönü değiştiren diffeomorfizme örnektir.

iv) $S^n \to S^n \qquad x \mapsto -x$

merkezi simetri dönüşümünün derecesi $(-1)^{n+1}$'dir. Bu $(n+1)$ sayıda yansıma dönüşümünün bileşkesi şeklinde gösterilebilir:

$$-x = r_1 \circ r_2 \circ \ldots \circ r_{n+1}(x)$$

Böylece n çift olduğunda S^n küre yüzeyinin merkezi simetri dönüşümü birim dönüşüme hamar homotop olamaz. Bu durum mod2'ye göre derece ile bulunamaz.

Özel durumda n tek olduğunda S^n küre yüzeyinin merkezi simetri dönüşümü gerçekten birim dönüşüme hamar homotoptur. Hopf'un vermiş olduğu teoreme göre; n-boyutlu manifoldu, n-boyutlu S^n küre yüzeyine dönüştüren iki hamar dönüşüm ancak ve ancak bunların dereceleri aynı olduğunda hamar homotopturlar.

BÖLÜM 3

LERAY - SCHAUDER TEORİSİ

E_{n+p} öklit uzayında Ω_{n+p} sınırlı bölgesi ve $b \in E_{n+p}$ noktası alınsın. E_{n+p} öklit uzayının $b \in E_n$ ve Ω_{n+p} bölgesinin bazı noktaları E_n altuzayında olacak şekilde bir E_n altuzayı ele alınsın.

$$\Omega_n = \Omega_{n+p} \cap E_n$$

arakesidi E_n altuzayında sınırlı bir bölge olacaktır ve

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+p} \qquad \partial\Omega_n \subset \partial\Omega_{n+p}$$

olur.

Lemma:3.1. $\Phi_{n+p} : \overline{\Omega}_{n+p} \to E_{n+p}$ sürekli dönüşüm ve $b \notin \Phi_{n+p}(\partial\Omega_{n+p})$ olsun. Φ_{n+p} dönüşümü aşağıdaki koşulu sağlasın.

(*) Φ_{n+p} dönüşümü $\overline{\Omega}_{n+p}$ bölgesinin herbir elemanını E_n altuzayına paralel olarak kaydırır.

O zaman

$$\deg(\Phi_{n+p}\big|_{\Omega_n}, \Omega_n, b) = \deg(\Phi_{n+p}, \Omega_{n+p}, b) \tag{3.1}$$

dir.

İspat: Yukarıdaki koşullar sağlandığında Φ_{n+p} dönüşümü Ω_n bölgesini E_n altuzayına geçirir. Φ_{n+p} dönüşümünün Ω_n bölgesine daralmışı Φ_n ile gösterilsin. $b \notin \Phi_n(\partial\Omega_n)$ olduğundan $\deg(\Phi_n,\Omega_n,b)$ derecesi vardır. Basitlik için p=1, $\Phi_{n+1} \in C^1$ ve E_n altuzayının E_{n+1} öklit uzayının $x_1,x_2,...,x_n$ eksenlerinin oluşturduğu altuzay olduğu kabul edilsin (Bu dönme dönüşümü ile her zaman yapılabilir). b, Φ_{n+1} dönüşümünün regüler değeri olsun. Yapıya göre;

$$\Phi_n : \Omega_n \to E_n \qquad \Phi_n = (\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, ..., \overline{\Phi}_n)$$

$$\overline{\Phi}_i : \Omega_n \to \Re \qquad \forall i = 1,2,...,n$$

$$\Phi_{n+1} : \Omega_{n+1} \to E_{n+1} \qquad \Phi_{n+1} = (\overline{\overline{\Phi}}_1, \overline{\overline{\Phi}}_2, ..., \overline{\overline{\Phi}}_{n+1})$$

$$\overline{\overline{\Phi}}_i : \Omega_{n+1} \to \Re \qquad \forall i = 1,2,...,n+1$$

şeklindedir.

Ayrıca yapıya göre;

$$\Phi_{n+1}\big|_{\Omega_n} = \Phi_n$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{\Phi}}_i\big|_{\Omega_n} = \overline{\Phi}_i \qquad \forall i=1,2,...,n \quad \text{ve} \quad \overline{\overline{\Phi}}_{n+1} = x_{n+1} \tag{3.2}$$

olur. (*) özelliğine ve yapıya göre, b noktasının ters görüntülerinin hepsi E_n altuzayındadır. Bunlar

$$a_m = (a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, ..., a_n^{(m)}, 0) \qquad m = 1,2,...,k$$

ile gösterilsin. (3.2) özelliğine göre; $\forall i = 1,2,...,n$, $\forall j = 1,2,...,n$, $\forall m = 1,2,...,k$, için

$$\frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_i(a_m)}{\partial x_j}=\frac{\partial\Phi_i(a_1^{(m)},a_2^{(m)},\dots,a_n^{(m)})}{\partial x_j}$$

dır. $\forall\, j=1,2,\dots,n$ için

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_j}=0, \qquad \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_{n+1}}=1$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\deg(\Phi_{n+1},\Omega_{n+1},b)=\sum_{m=1}^{k} sign\left|\frac{\partial\Phi_{n+1}}{\partial x}\Big|_{x=a_m}\right|$$

$$=\sum_{m=1}^{k} sign\begin{vmatrix} \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_1}{\partial x_1}\Big|_{x=a_m} & \cdots\cdots & \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_1}{\partial x_n}\Big|_{x=a_m} & \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_1}{\partial x_{n+1}}\Big|_{x=a_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_n}{\partial x_1}\Big|_{x=a_m} & \cdots\cdots & \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_n}{\partial x_n}\Big|_{x=a_m} & \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_n}{\partial x_{n+1}}\Big|_{x=a_m} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1}\Big|_{x=a_m} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\Big|_{x=a_m} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_{n+1}}\Big|_{x=a_m} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{m=1}^{k} sign\begin{vmatrix} \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_1}{\partial x_1}\Big|_{x=a_m} & \cdots\cdots & \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_1}{\partial x_n}\Big|_{x=a_m} & \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_1}{\partial x_{n+1}}\Big|_{x=a_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_n}{\partial x_1}\Big|_{x=a_m} & \cdots\cdots & \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_n}{\partial x_n}\Big|_{x=a_m} & \frac{\partial\overline{\overline{\Phi}}_n}{\partial x_{n+1}}\Big|_{x=a_m} \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{m=1}^{k} sign\begin{vmatrix} \frac{\partial\overline{\Phi}_1}{\partial x_1}\Big|_{x=a_m} & \cdots\cdots & \frac{\partial\overline{\Phi}_1}{\partial x_n}\Big|_{x=a_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\overline{\Phi}_n}{\partial x_1}\Big|_{x=a_m} & \cdots\cdots & \frac{\partial\overline{\Phi}_n}{\partial x_n}\Big|_{x=a_m} \end{vmatrix}$$

$$= \deg(\Phi_n, \Omega_n, b)$$

olarak bulunur.

Not: Böylece Lemma:3.1 farklı boyutlu uzaylarda oluşan dönüşümlerin derecelerini karşılaştırmaya imkan verir.

E bir Banach uzayı ve $C \subset E$ altküme olsun. Eğer C altkümesinden alınan keyfi dizinin E uzayında yakınsak olan bir altdizisi varsa C altkümesine kompakt küme denilir.

Kompakt kümeler aşağıdaki özelliğe sahiptirler.

Teorem:3.1. E bir Banach uzayı ve $C \subset E$ kompakt küme olsun. $\forall x \in C$ elemanı için

$$\|x - \eta_i\| \prec \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde E Banach uzayında sonlu sayıda $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ elemanları vardır.

Bu teoreme göre,

$$\|T_\varepsilon(x) - x\| \le \varepsilon$$

koşulunu sağlayan sonlu boyutlu $T_\varepsilon(x): C \to E$ sürekli dönüşümü vardır, yani bu dönüşüm C altkümesine sonlu boyutlu uzaydan olan bir küme ile yaklaşır. E Banach uzayının sonlu boyutlu altuzayı E_n, aşağıdaki elemanlar kümesinin kapanması olarak alınabilir:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \eta_i \qquad \lambda_i \text{ keyfi reel sayıdır}$$

$T_\varepsilon(x)$ dönüşümü ise,

$$T_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\eta_i}{\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)}$$

sürekli dönüşümü olarak alınabilir. Burada

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & \|x-\eta_i\| \geq \varepsilon \\ \varepsilon - \|x-\eta_i\| & \|x-\eta_i\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım:3.1. $\omega \subset E$ açık sınırlı küme, $\omega' = \partial\omega$ ve $F:\overline{\omega} \to E$ sürekli dönüşüm olsun. Eğer $F(\overline{\omega}) = C$ kümesi E uzayında kompakt ise F dönüşümüne kompakt dönüşüm denilir.

O halde $F_\varepsilon(x) = T_\varepsilon(F(x))$ dönüşümünü ele alınsın.

Lemma:3.2. F kompakt dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur:

1) $\forall \varepsilon \succ 0$ ve $\forall x \in \overline{\omega}$ için

$$\|F(x) - F_\varepsilon(x)\| \prec \varepsilon$$

dır.

2) F_ε dönüşümünün tüm değerleri sonlu boyutlu bir E_n altuzayına aittir.

Topolojik Derece Kavramı

$F:\overline{\omega} \to E$ kompakt dönüşüm olsun ve

$$y = x - F(x) \equiv \Phi(x) \tag{3.3}$$

dönüşümü ele alınsın. Buradaki amaç, $\Phi(x)$ dönüşümünün sonlu boyutlu dönüşümlerin derecelerinin sahip oldukları özelliklere sahip olacak şekilde sıfirda derece kavramını vermektir.

Not: i) $x' = x - b$ yerdeğiştirmesi yaparak dönüşümün derecesi keyfi $b \in E$ noktasında da belirlenebilir.

ii) Bu durumun yalnızca $0 \notin \Phi(\omega')$ olduğu durumda gerçeklendiği açıktır.

Lemma:3.3. $0 \notin \Phi(\omega')$ olsun. $\forall x \in \overline{\omega}$ için

$$\|\Phi(x)\| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon \succ 0$ sayısı vardır, yani

$$\inf_{x \in \omega'} \rho(0, \Phi(x)) \geq \varepsilon$$

olur.

İspat: $\|\Phi(x)\| \leq \varepsilon$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$\|\Phi(x_n)\| \to 0 \qquad n \to \infty$$

olacak şekilde $\{x_n\} \subset \omega'$ dizisi vardır, yani

$\|x_n - F(x_n)\| \to 0 \qquad n \to \infty$

olur. $F(x_n) = y_n$ ise

$\|x_n - y_n\| \to 0 \qquad n \to \infty$

olur. F kompakt dönüşüm olduğundan

$y_{n_k} \to x_0 \qquad k \to \infty$

olacak şekilde $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ dizisi ve $x_0 \in E$ noktası vardır. $y_n = F(x_n)$ ise, $y_{n_k} = F(x_{n_k})$ olduğundan

$\|x_{n_k} - x_0\| \to 0 \qquad k \to \infty$

$\Rightarrow x_{n_k} \to x_0 \qquad x_0 \in \omega'$

olur. F sürekli dönüşüm olduğundan $x_0 \in \omega'$ elemanı için $F(x_{n_k}) \to F(x_0)$ olur. $x_{n_k} \in \omega'$ ise $x_0 \in \omega'$ dır. O halde

$\Rightarrow \|x_{n_k} - F(x_{n_k})\| \to 0 \qquad k \to \infty$

$\Rightarrow \|x_0 - F(x_0)\| = 0$

$\Rightarrow x_0 - F(x_0) = 0$

$\Rightarrow 0 \in \Phi(\omega')$

olur, bu ise çelişkidir. O halde $\forall x \in \overline{\omega}$ için $\|\Phi(x)\| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon \succ 0$ sayısı vardır.

$$dist(0, \Phi(\omega')) = \varepsilon \qquad \varepsilon \succ 0 \tag{3.4}$$

olarak alınabilir. $F_\varepsilon(x): \overline{\omega} \to E_{n_\varepsilon}$ dönüşümünün

$$\|F(x) - F_\varepsilon(x)\| \prec \varepsilon \qquad (3.5)$$

koşulunu sağladığı kabul edilsin. Lemma:3.2. gereği, böyle bir $F_\varepsilon(x)$ dönüşümü vardır. $E_{n_\varepsilon} \cap \omega \neq \emptyset$ olduğu kabul edilsin. O zaman $E_{n_\varepsilon} \cap \omega = \omega_{n_\varepsilon}$, E_{n_ε} uzayında açık sınırlı küme olacaktır ve $\omega_{n_\varepsilon}' \subset \omega'$ koşulu sağlanacaktır. Bundan dolayı

$$dist(\Phi(\omega_{n_\varepsilon}'),0) \geq \varepsilon$$

olacaktır.

$$\Phi_\varepsilon : \overline{\omega}_{n_\varepsilon} \to E_{n_\varepsilon}$$

$$\Phi_\varepsilon(x) \equiv x - F_\varepsilon(x) \qquad x \in \overline{\omega}$$

dönüşümü $\overline{\omega}_{n_\varepsilon}$ kümesini aynı E_{n_ε} uzayına dönüştürür. Yapıya göre Φ_ε dönüşümü Φ dönüşümüne ε kadar yakındır, bundan dolayı

$$dist(\Phi_\varepsilon(\omega_{n_\varepsilon}'),0) \succ \varepsilon \qquad (3.6)$$

olacaktır. Böylece Φ_ε: $\overline{\omega}_{n_\varepsilon} \to E_{n_\varepsilon}$ dönüşümü sıfır noktasında belirli bir dereceye sahiptir. Bu derece Φ dönüşümünün sıfır noktasındaki derecesi olarak tanımlanacaktır, yani

$$\deg(\Phi,\omega,0) = \deg(\Phi_\varepsilon,\omega_{n_\varepsilon},0)$$

dır. Şimdi bu tanımın doğruluğu gösterilecektir. Bunun için $\deg(\Phi,\omega,0)$ derecesinin $F_\varepsilon(x)$ dönüşümüne ve E_{n_ε} uzayına bağımlı olmadığı gösterilmelidir.

1.Hal: Φ_ε ve Φ_ε^* dönüşümlerinin, Φ dönüşümüne yeteri kadar yakın olan farklı iki dönüşüm oldukları kabul edilsin. Ancak bu dönüşümlere uygun olan E_{n_ε} ve $E_{n_\varepsilon}^*$ uzayları aynı olsun: $E_l = E_{n_\varepsilon} = E_{n_\varepsilon}^*$. O zaman aşağıdaki yardımcı dönüşüm dikkate alınacaktır.

$$\Phi_{\varepsilon,\theta} \equiv \theta\Phi_\varepsilon(x) + (1-\theta)\Phi_\varepsilon^*(x) \quad , \qquad 0 \le \theta \le 1 \tag{3.7}$$

(3.5) koşuluna göre

$$\left\| \theta\Phi_\varepsilon(x) + (1-\theta)\Phi_\varepsilon^*(x) - \Phi(x) \right\| \prec \varepsilon \tag{3.8}$$

yazılabilir. Bundan dolayı (3.7) dönüşümü Φ_ε dönüşümünden Φ_ε^* dönüşümüne sürekli geçmeye imkan verir, o zaman $\forall\theta$ için ω_l' 'nin görüntüsü sıfırı bulundurmaz, yani $0 \notin \Phi_{\varepsilon,\theta}(\omega_l')$ dır. Gerçekten

$$\left\| \Phi_{\varepsilon,\theta}(x) \right\| \succ 0$$

olduğu gösterilebilir.

$$\begin{aligned}
\left\| \Phi_{\varepsilon,\theta}(x) \right\| &= \left\| \Phi(x) - \Phi(x) + \Phi_{\varepsilon,\theta}(x) \right\| \\
&\ge \left\| \Phi(x) \right\| - \left\| \Phi(x) - \Phi_{\varepsilon,\theta}(x) \right\| \\
&\succ \varepsilon - \left\| \theta\Phi(x) + (1-\theta)\Phi(x) - (\theta\Phi_\varepsilon(x) + (1-\theta)\Phi_\varepsilon^*(x)) \right\| \\
&\succ \varepsilon - \left\| \theta(\Phi(x) - \Phi_\varepsilon(x)) + (1-\theta)(\Phi(x) - \Phi_\varepsilon^*(x)) \right\| \\
&\succ \varepsilon - \theta\left\| \Phi(x) - \Phi_\varepsilon(x) \right\| - (1-\theta)\left\| \Phi(x) - \Phi_\varepsilon^*(x) \right\| \\
&\succ \varepsilon - \varepsilon\theta - \varepsilon(1-\theta) = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \Phi_{\varepsilon,\theta}(x) \right\| \succ 0$$

olur. Böylece

$$\deg(\Phi_\varepsilon, \omega_l, 0) = \deg(\Phi_\varepsilon^*, \omega_l, 0)$$

olarak bulunur.

2.Hal: Farklı $F_\varepsilon(x)$ ve $F_\varepsilon^*(x)$ dönüşümleri ve bunlara uygun olan farklı E_{n_ε} ve $E_{n_\varepsilon}^*$ uzayları ele alınsın. Bu durumda E_{n_ε} ve $E_{n_\varepsilon}^*$ uzaylarında tanımlanan Φ_ε ve Φ_ε^* dönüşümlerinin sıfır noktasında aynı $d = d^*$ derecelerine sahip oldukları gösterilecektir. E_l, E_{n_ε} ve $E_{n_\varepsilon}^*$ uzaylarını kendisinde bulunduran sonlu boyutlu uzay olsun ve $\omega_l = \omega \cap E_l$ olarak alınsın. Φ_ε ve Φ_ε^* dönüşümlerinin ω_l bölgesinde tanımlı oldukları açıktır. Gerçekten de Φ_ε ve Φ_ε^* dönüşümleri $\overline{\omega_l}$ bölgesinde Lemma:3.1.'deki (*) özelliğine sahiptirler. Bu Φ_ε dönüşümü üzerinde gösterilebilir. Tanıma göre;

$$\Phi_\varepsilon(x) = x - F_\varepsilon(x) \qquad\qquad x \in \overline{\omega_l}$$

olarak alınabilir. $F_\varepsilon : \overline{\omega} \to E_{n_\varepsilon}$ dönüşümü $F_\varepsilon : \overline{\omega_l} \to E_{n_\varepsilon}$ olarak alınabilir. Şimdi

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^{n_\varepsilon}, x_0^{n_{\varepsilon+1}}, \ldots, x_0^{\,l}) \in \overline{\omega_l}$$

şeklinde keyfi bir nokta alınsın. O zaman

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(x^1, x^2, \ldots, x^{n_\varepsilon}, x_0^{n_{\varepsilon+1}}, \ldots, x_0^{\,l}) &= (x^1, x^2, \ldots, x^{n_\varepsilon}, x_0^{n_{\varepsilon+1}}, \ldots, x_0^{\,l}) \\ &\quad - F_\varepsilon(x) \in (0, 0, \ldots, 0, x_0^{n_{\varepsilon+1}}, \ldots, x_0^{\,l}) \oplus E_{n_\varepsilon}\end{aligned}$$

olur. E_l uzayında tanımlanan bu dönüşümlerden herbiri sıfır noktasında kendi derecelerine sahiptirler. 1.halinde olduğu gibi Φ_ε ve Φ_ε^* dönüşümlerinin dereceleri aynı bir δ sayısına eşit olur. Lemma:3.1. gereği $d=\delta$ ve $d^{*}=\delta$ olur. Buradan $d=d^{*}$ olduğu bulunmuş olur.

Yukarıda belirlenen derece tanımı kullanılarak sonlu boyutlu dönüşümler için derecenin sahip olduğu aşağıdaki özellikler bu dönüşümlerin derecesi için de kolayca ispatlanabilir:

1) E bir Banach uzayı ve $\Phi\colon \omega \to E$ dönüşümü verilsin. $\omega_1,\omega_2 \subset E$ sınırlı bölgeler, $\omega=\omega_1\cup\omega_2$, $\omega_1\cap\omega_2=\varnothing$, $b\in E$ ve $b\notin\Phi(\omega_1')\cup\Phi(\omega_2')$ ise

$$\deg(\Phi,\omega,b)=\deg(\Phi,\omega_1,b)+\deg(\Phi,\omega_2,b)$$

dır.

2) $\deg(\Phi,\omega,b)\neq 0$ ise $b\in\Phi(\omega)$ dır.

3) $\Phi_t\colon \omega \to E$, $t\in[0,1]$, dönüşümleri t'ye göre sürekli iseler ve $\forall t$ için $b\notin\Phi_t(\omega')$ ise

$$\deg(\Phi_0,\omega,b)=\deg(\Phi_1,\omega,b)$$

dir.

BÖLÜM 4

QUAZİ-LİNEER DÖNÜŞÜMLER ve BUNLARIN DERECESİ

Bu konuya geçmeden önce ileride kullanılacak bazı tanımlar verilecektir.

Tanım:4.1. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\xi = (E,B,F,p)$ dörtlüsüne lokal sabit tabakalaşma denilir:

1) E,B,F topolojik uzaylar ve $p: E \to B$ sürekli dönüşümü örten olsun.

2)
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\psi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif olacak şekilde $\forall x \in B$ noktasının $U \subset B$ komşuluğu ve $\psi_U : p^{-1}(U) \to U \times F$ homeomorfizmi varolsun. Burada $\pi: U \times F \to U$ doğal izdüşüm dönüşümüdür.

Bu tanımdan, $\forall x \in B$ noktası için $p^{-1}(x)$ tabakasının F uzayına homeomorf olduğu açıktır.

O zaman E,B,F topolojik uzaylarına sırasıyla total uzay, baz, tabakalaşmanın katı ve p dönüşümüne ise tabakalaşmanın izdüşümü denilir. U komşuluklarına koordinat komşulukları, (ψ,U) çiftine ise $\xi = (E,B,F,p)$ tabakalaşmanın haritası denilir.

Eğer

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\psi_B"] \arrow[dr, "p"'] & & B \times F \arrow[dl, "\pi"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif olacak şekilde $\psi_B : E \to B \times F$ homeomorfizmi varsa lokal basit tabakalaşmaya basit tabakalaşma denilir.

Lokal basit tabakalaşmaya örnek olarak M manifoldunun TM teğetler tabakalaşması, basit tabakalaşmaya örnek olarak da X, Y topolojik uzaylar, $\pi: X \times Y \to X$ doğal izdüşüm dönüşümü olmak üzere, $(X \times Y, X, Y, \pi)$ dörtlüsü verilebilir.

Tanım:4.2. $p \circ s = I_B$ koşulunu sağlayan $s: B \to E$ dönüşümüne $\xi = (E, B, F, p)$ tabakalaşmasının kesiti denilir.

$\xi = (E, B, F, p)$ lokal basit tabakalaşması ve (ψ_1, U_1), (ψ_2, U_2) haritaları verilsin. Burada $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ dır. O zaman

$$\psi_{12} = \psi_1 \circ \psi_2^{-1} : (U_1 \cap U_2) \times F \to (U_1 \cap U_2) \times F$$

geçit dönüşümlerinin $\forall x \in U_1 \cap U_2$ elemanı için, F uzayından F uzayına homeomorfizm oldukları açıktır. O halde ψ_{12} dönüşümü, $U_1 \cap U_2$ arakesidini F uzayının tüm homeomorfizmleri sınıfı olan $H(F)$ 'ye geçiren

$$g_{12} : U_1 \cap U_2 \to H(F)$$

dönüşümünü oluşturur. Buradaki g_{12} dönüşümlerine koordinat dönüşümleri denilir.

Tanım:4.3. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\xi = (E,B,F,p)$ lokal basit tabakalaşmasına vektör tabakalaşma denir.

1) F vektör uzaydır.

2) g_{ij} koordinat dönüşümleri, $U_i \cap U_j$ arakesidinden $GL(F)$ grubuna giden sürekli dönüşümlerdir. Burada $GL(F)$, F uzayının izomorfizmleri grubudur.

O zaman $\forall x \in B$ elemanı için $p^{-1}(x) = E_x$ katı,

$$\psi_x = \psi\Big|_{p^{-1}(x)} : E_x \to x \times F \to F$$

homeomorfizminin yardımıyla vektörel yapı ile zenginleştirilebilir. Bu durumda ψ_x dönüşümü izomorfizm olacaktır. Böylece E, vektör uzaylardan oluşmuş takım olur.

Tanım:4.4. Eğer $s: B \to E$ dönüşümü $\forall x \in B$ elemanını E_x vektör uzayının sıfırına geçiriyorsa $s: B \to E$ dönüşümüne ξ tabakalaşmasının sıfır kesiti denilir.

$\xi_i = (E_i, B_i, F_i, p_i)$, $i = 0,1$, vektör tabakalaşmaları verilsin.

Tanım:4.5.

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "p_0"'] & E_1 \arrow[d, "p_1"] \\ B_0 \arrow[r, "\psi"] & B_1 \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif olacak şekilde $\exists \psi: B_0 \to B_1$ dönüşümü varsa ve bu dönüşüm $\Psi: E_0 \to E_1$ dönüşümü tarafından örtülüyorsa $\Psi: \xi_0 \to \xi_1$ dönüşümü kat kat dönüşüm olarak adlandırılır.

Böylece eğer $x \in B_0$ ve $f(x_0) = y_0$ ise, Ψ dönüşümü x noktasının üzerindeki katı, $(E_{0,x})$, y noktasının üzerindeki kata , $(E_{1,y})$, geçirir, yani $\Psi_x: E_{0,x} \to E_{1,x}$ dönüşümü oluşur. Eğer $\forall x \in B_0$ elemanı için $\Psi_x: E_{0,x} \to E_{1,x}$ dönüşümü lineer ise, Ψ dönüşümüne bir vektör tabakalaşmadan diğerine morfizm denilir. $\forall x \in B_0$ elemanı için Ψ_x dönüşümü monomorfizm (epimorfizm, izomorfizm) ise, Ψ dönüşümüne uygun olarak monomorfizm (epimorfizm, bimorfizm) denilir. Eğer Ψ dönüşümü bimorfizm olarak herhangi bir $\Psi: B_0 \to B_1$ homeomorfizmini örterse (yukarıdaki anlamda) Ψ dönüşümüne denklik denilir.

4.1. FQL-dönüşümler

X, Y reel Banach uzayları ve $\Omega \subset X$ sınırlı bölge olsun. X_n, n-boyutlu öklit uzay ve $\pi_n: X \to X_n$ örten lineer dönüşüm olsun. $X_\alpha^n = \pi_n^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in X_n$, olarak gösterilsin. $\forall \alpha \in X_n$ için X_α^n, X uzayında n-koboyutlu kapalı düzlemdir ve $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in X_n$ için $X_{\alpha_2}^n \parallel X_{\alpha_2}^n$ olur.

Not: X_α^n'nin koboyutu, X/X_α^n faktör uzayının boyutu olarak ifade edilir.

Tanım:4.1.1. X, Y reel Banach uzayları ve $\Omega \subset X$ sınırlı bölge olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f: \Omega \to Y$ sürekli dönüşümüne Fredholm lineer (FL) dönüşüm denir.

1. Herhangi bir örten lineer $\pi_n: X \to X_n$ dönüşümü belirtilmiştir.

2. Ω bölgesinden geçen herbir X_α^n, $\alpha \in X_n$, düzleminde f afin dönüşümdür, yani

$$f\big|_{X_\alpha^n} \equiv f_\alpha^n \in Aff(X_\alpha^n, Y)$$

dir ve buradaki f_α^n dönüşümü α 'ya göre süreklidir.

3) Herbir $Y_\alpha^n = f_\alpha^n(X_\alpha^n)$ düzlemi Y uzayında kapalıdır ve Y_α^n düzlemi n-koboyutludur.

Bu şekilde tanımlanan FL-dönüşüm f^n ile gösterilecektir.

Tanım:4.1.2. X, Y reel Banach uzayları ve $\Omega \subset X$ sınırlı bölge olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f: X \to Y$ sürekli dönüşümüne Fredholm quasi-lineer (FQL) dönüşüm denir.

Herbir $\Omega \subset X$ sınırlı bölgesi için öyle $\{f^{n_k} \mid f^{n_k}: \Omega \to Y\}$, $k = 1,2,\ldots$, FL-dönüşümleri dizisi vardır ki;

1. Ω bölgesinde $f^{n_k} \to f$ $(k \to \infty)$ düzgün yakınsaktır.

2. $\exists C(\Omega) \succ 0$, $\exists k_0(\Omega)$, $\forall k \succ k_0$, $\forall \alpha \in X_{n_k}$ için

$$\left\| f^{n_k} \right\|_\Omega \prec C(\Omega) \qquad (4.1.1)$$

dır. Burada

$$\left\| f^{n_k} \right\|_\Omega = \sup_{X_\alpha^{n_k} \cap \Omega \neq \varnothing} \inf \left\{ C : \left\| f_\alpha^{n_k}(x) \right\|_Y \le C(1 + \|x\|_X),\ \|x\|_X \le C(1 + \left\| f_\alpha^{n_k}(x) \right\|_Y,\ x \in X_\alpha^{n_k} \right\}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teorem kullanılarak FQL -dönüşümüne örnekler bulunabilir.

Teorem:4.1.1. $X = Y = H_k(S^1)$, k≥2, çember üzerinde belirlenmiş reel $x(\tau)$, $0 \le \tau \prec 2\pi$, fonksiyonlarından oluşmuş Sobolev uzayı olsun. $f(\tau,x)$ fonksiyonu $\forall \tau, x$, $x \in \Re$, $0 \le \tau \prec 2\pi$, $f'(\tau,x) \neq 0$ olacak şekilde C^r-sınıfından bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\tilde{f} : x(\tau) \to f(\tau, x(\tau))$$

dönüşümü X uzayından Y uzayına FQL-dönüşümdür.

İspat: $H_k(S^1)$ Sobolev uzayının sonlu

$$\|x\|_k^{\,2} = \int_0^{2\Pi} \sum_{l=0}^{k} \left| x^{(l)}(\tau) \right|^2 d\tau$$

normuna sahip olan $x(\tau)$ fonksiyonlarından oluştuğu hatırlanacaktır. Burada $x^{(l)}(\tau)$ genel türevdir. $f(\tau, x(\tau))$ fonksiyonu bir kez diferansiyellenir ve sonra integrallenirse,

$$\tilde{f}(x)(\tau) = f(\tau, x(\tau))$$

$$= f(\tau_0, x(\tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} \left[f_\tau{}'(\sigma, x(\sigma)) + f_x{}'(\sigma, x(\sigma)).x'(\sigma) \right] d\sigma$$

olarak bulunur. (Burada

$$f(\tau, x(\tau)) = f(\tau_0, x(\tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} d\left[f(\sigma, x(\sigma)) \right]$$

$$d\left[f(\sigma, x(\sigma)) \right] = \left[f_\tau{}'(\sigma, x(\sigma)) + f_x{}'(\sigma, x(\sigma)).x'(\sigma) \right] d\sigma$$

olduğu açıktır.) $H_k(S^1)$ Sobolev uzayında $\left\{ e^{i\upsilon\tau} \middle| \tau \in [0, 2\pi), \upsilon \in Z \right\}$ ortogonal bazı ele alınsın.

$$x(\tau) \in H_k(S^1) \Rightarrow x(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_\upsilon . e^{i\upsilon\tau}$$

şeklinde yazılabildiği $H_k(S^1)$ uzayının tanımından açıktır. Burada x_υ, $\upsilon \in Z$, Fourier katsayılarıdır. X_{2n+1} ile $\sum_{|\upsilon|\le n} x_\upsilon . e^{i\upsilon\tau}$,$\forall x_\upsilon \in C$, şeklindeki fonksiyonlardan oluşmuş $(2n+1)$-boyutlu öklit uzayı gösterilsin. O zaman $X_{2n+1} \subset H_k(S^1) \subset H_{k-1}(S^1)$ olduğu açıktır.

$$\pi: H_k(S^1) \to H_{k-1}(S^1)$$

gömme dönüşümü ve $\forall n$ için

$$\pi_{2n+1}: H_k(S^1) \to X_{2n+1}$$

$$\pi_{2n+1}(x(\tau)) = \sum_{|\upsilon|\le n} x_\upsilon . e^{i\upsilon\tau} \quad , \qquad x(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_\upsilon . e^{i\upsilon\tau}$$

izdüşümleri ele alınsın. π kompakt dönüşüm olduğundan, bu dönüşüme herbir sınırlı bölgede π_{2n+1} dönüşümleri ile düzgün yaklaşmak mümkündür. Şimdi

$$f_{2n+1}(\tau,(x(\tau)) = f(\tau_0, \pi_{2n+1}(x)(\tau_0)) +$$

$$+ \int_{\tau_0}^{\tau} \left[f_\tau{}'(\sigma, \pi_{2n+1}(x(\sigma))) + f_x{}'(\sigma, \pi_{2n+1}(x(\sigma))). x'(\sigma) \right] d\sigma$$

fonksiyonu ele alınsın.

$$\tilde{f}^{2n+1}: x(\tau) \to f_{2n+1}(\tau, x(\tau))$$

dönüşümünün FL-dönüşüm olduğu gösterilecektir.

1) $x_1(\tau),\ x_2(\tau) \in \pi_{2n+1}^{-1}(\alpha_0), \alpha_0 \in x_{2n+1}$, yani

$$\pi_{2n+1}(x_1(\tau)) = \pi_{2n+1}(x_2(\tau)) = \alpha_0 = \pi_{2n+1}((x_1 + x_2)(\tau))$$

olsun. O zaman,

$$\breve{f}_{\alpha_0}^{2n+1}(x(\tau)) = f(\tau_0, \pi_{2n+1}(x_1 + x_2)(\tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} \left[f_\tau{}'(\sigma,\alpha_0) + f_x{}'(\sigma,\alpha_0)(x_1(\sigma) + (x_2(\sigma))' \right] d\sigma$$

$$= \left[f(\tau_0, \pi_{2n+1}(x_1 + x_2)(\tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} f_\tau{}'(\sigma,\alpha_0) d\sigma \right] + \int_{\tau_0}^{\tau} f_\tau{}'(\sigma,\alpha_0) x_1{}'(\sigma) d\sigma + \int_{\tau_0}^{\tau} f_x{}'(\sigma,\alpha_0) x_2{}'(\sigma) d\sigma$$

olarak bulunur. O halde $\alpha_0 \in X_{2n+1}$ için $\breve{f}_{\alpha_0}^{2n+1}$ dönüşümü afin dönüşüm olur. $\alpha_0 \in X_{2n+1}$ keyfi olduğundan $\forall \alpha \in X_{2n+1}$ için $\breve{f}_{\alpha}^{2n+1}$ dönüşümü afin dönüşüm olur.

2) $f_x{}'(\tau,x) \neq 0$ olduğundan $\breve{f}_{\alpha}^{2n+1}$ dönüşümü X_{α}^{2n+1} ile $\breve{f}_{\alpha}^{2n+1}(X_{\alpha}^{2n+1})$ arasında afin izomorfizm olacaktır.

3) X_{α}^{2n+1}'den olan elemanların (x_υ , $|\upsilon| \leq n$) fourier katsayıları aynı olduğundan $\forall x_1(\tau), x_2(\tau) \in X_{\alpha}^{2n+1}$ elemanlarının $\breve{f}_{\alpha}{}^{2n+1}$ dönüşümü altındaki görüntülerinin de $|\upsilon| \leq n$ numaralı fourier katsayıları aynı olacaktır. O halde,

$$2n+1 = \text{codim}\, X_{\alpha}^{2n+1} = \text{codim}\, \breve{f}_{\alpha}^{2n+1}(X_{\alpha}^{2n+1})$$

olur. Bununla

$$\breve{f}^{2k+1}: H_k(S^1) \rightarrow H_k(S^1)$$

dönüşümünün FL-dönüşüm olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi $\breve{f}^{2n+1}, n=1,2,...,$ dönüşümlerinin $\Omega^R, R \succ 0$, keyfi küresinde $\breve{f}$ dönüşümüne düzgün yaklaştıkları ispatlanacaktır.

$\pi: H_k(S^1) \to H_{k-1}(S^1)$

kompakt dönüşüm olduğundan $\forall R \succ 0$ için Ω^R küresinde $\pi_{2n+1} \to \pi$ (düzgün) yaklaşır, yani $\forall x(t) \in \Omega^R$ elemanı için $\exists N \succ 0$ sayısı vardır öyle ki $\forall n \geq N$ için

$$\|x(t) - \pi_{2n+1}(x(t))\|_{H_{k-1}} \prec \delta \qquad \forall \delta \succ 0$$

olur. Gömme teoremine göre yeterince büyük k sayıları için $H_{k-1} \subset C$ olur. Buradan

$$\|x(t) - \pi_{2n+1}(x(t))\|_C \prec \delta$$

olduğu bulunur. O halde $\forall x(t) \in \Omega^R \subset H_k$, $\forall t \in [0,2\pi]$ için

$$|x(t) - \pi_{2n+1}(x(t))| \prec \delta \tag{4.1.2}$$

olur. Öte yandan yine gömme teoremine göre; $\forall x \in \Omega^R$

$$\|x(t)\|_C \leq M\|x(t)\|_{H_k} \prec M.R$$

yani $\forall t \in [0,2\pi]$, $\forall x \in \Omega^R$ için

$$|x(t)| \prec M.R$$

dir. $f \in C^1([0,2\pi]xR^1)$ ise $\forall R \succ 0$ için f dönüşümü $[0,2\pi]x[-MR,MR]$ bölgesinde düzgün süreklidir. O halde $\forall \varepsilon \succ 0$, $\exists \delta \succ 0$, $\forall t \in [0,2\pi]$ ve $\forall x_1, x_2 \in [-MR, MR]$ için $|x_1 - x_2| \prec \delta$ olduğunda

$$|f(\tau, x_1(\tau) - f(\tau, x_2(\tau))| \prec \varepsilon \qquad (4.1.3)$$

olur. $f \in C^1$ olduğundan (4.1.3) koşulu f_τ' ve f_x' dönüşümleri için de geçerlidir. O zaman (4.1.2)'den $x(\tau) \in \Omega^R$, $\forall \sigma \in [0,2\pi]$ için

$$\left|f_\tau'(\sigma, x(\sigma)) - f_\tau'(\sigma, \pi_{2n+1}(x(\sigma))\right| \prec \varepsilon$$

ve

$$\left|f_x'(\sigma, x(\sigma)) - f_x'(\sigma, \pi_{2n+1}(x(\sigma))\right| \prec \varepsilon$$

bulunur. Buradan $\forall x(t) \in \Omega^R$ için

$$\left|\breve{f}(x)(\tau) - \breve{f}^{2n+1}(x)(\tau)\right|_{\Omega_R} = \sup_{\Omega^R}\left|f(\tau_0, x(\tau_0)) - f(\tau_0, \pi_{2n+1}(x)(\tau_0)\right| +$$
$$+ \int_{\tau_0}^{\tau}\left[\left(f_\tau'(\sigma, x(\sigma)) - f_\tau'(\sigma, \pi_{2n+1}(x(\sigma))\right) + \left(f_x'(\sigma, x(\sigma)) - f_x'(\sigma, \pi_{2n+1}(x(\sigma)))\right)x'(\sigma)\right]d\sigma$$
$$\prec \varepsilon + \varepsilon.2\pi + \varepsilon.2\pi = (4\pi + 1)\varepsilon$$

bulunur. O halde Ω^R küresinde $\breve{f}^{2n+1} \to \breve{f}$ (düzgün) yakınsak olarak bulunur. Buradan

$$\breve{f}: H_k(S^1) \to H_k(S^1)$$

dönüşümünün FQL-dönüşüm olduğu bulunur.

FL ve FQL-dönüşümlerine ait basit örnekler de verilebilir:

$\pi: H_m(S^1) \to H_{m-1}(S_1)$

gömme dönüşümü,

$\pi_{n_k}: H_m(S^1) \to X_{2n_k+1}$, $k = 1,2,\ldots$

yukarıdaki şekilde belirlenmiş ve herbir sınırlı kürede π dönüşümüne düzgün yaklaşan lineer izdüşümler olsunlar. O zaman,

1) $f^{n_k}: H_m(S^1) \to H_m(S^1)$, $f^{n_k}(x) = \left(\left\|\pi_{n_k}(x)\right\|_{m-1} + 1\right).x$

FL-dönüşümdür.

2) $f: H_m(S^1) \to H_m(S^1)$, $f(x) = \left(\left\|\pi(x)\right\|_{m-1} + 1\right).x$

FQL-dönüşümdür.

Bu durumda $H_m(S^1)$'deki herbir sınırlı kürede f^{n_k} dönüşümlerinin f dönüşümüne düzgün yaklaşacakları açıktır.

4.2. FQL-dönüşümlerin derecesi

Burada derece tanımı basit halde belirlenecektir. $f: X \to Y$ FQL-dönüşümü tüm X uzayında belirlenmiş olsun ve f dönüşümü

$$\|x\|_X \le \Phi(\|f(x)\|_Y) \tag{4.2.1}$$

koşulunu sağlasın. Burada Φ herhangi pozitif monoton fonksiyondur. O halde

$$f(x)=y \qquad y\in Y \tag{4.2.2}$$

denkleminin tüm çözümlerinin $\|x\|_X \leq \Phi(\|f(x)\|_Y)$ küresine ait olduğu açıktır. f dönüşümünün derecesi, $\deg(f)$, (4.2.2)'deki denklemin "çözümleri sayısı" olacaktır. $\deg(f)$'nin kesin tanımını belirlemek için bazı tanımları ve işaretlemeleri açıklamak gereklidir.

f^{n_k}, k=1,2,..., FL-dönüşümleri dizisi herbir $\Omega^R=\{x\in X:\|x\|_X \prec R\}$ küresinde, f FQL-dönüşümüne düzgün yakınsak olsun. Bu durumda (4.1.1) koşulu sağlanır. Şimdi,

$$f^{n_k}(x)=y \qquad y\in Y \tag{4.2.2'}$$

denklemine bakılacak ve bunun Ω^{R_0}, $R_0=\Phi(\|y\|_Y+2\delta)$, $\delta\succ 0$, küresindeki çözümleri aranılacaktır. Bu problem sonlu boyutlu probleme getirilebilir.

$$\pi_{n_k}:X\to X_{n_k} \qquad k=1,2,\ldots$$

dönüşümleri f^{n_k} dönüşümlerine uygun olan izdüşümler olsunlar.

$$\Omega^R_{n_k}=\pi_{n_k}(\Omega^R)\subset X_{n_k}$$

olarak gösterilsin. $\forall\alpha\in\Omega^{R_0}_{n_k}$ için n_k-koboyutlu $Y^{n_k}_\alpha=f^{n_k}_\alpha(X^{n_k}_\alpha)\subset Y$ düzlemi belirlenir. n_k-boyutlu $Y/`Y^{n_k}_\alpha=Y^\alpha_{n_k}$ öklit uzayı ele alınsın. Burada $`Y^{n_k}_\alpha$, $Y^{n_k}_\alpha$ düzlemine paralel n_k-koboyutlu altuzaydır. $Y^\alpha_{n_k}$ öklit uzayının elemanları $Y^{n_k}_\alpha$ düzlemine paralel n_k-koboyutlu düzlemlerdir.

$$P_{n_k}^{\alpha}: Y \to Y_{n_k}^{\alpha}$$

ile bu faktörleşmenin doğurduğu izdüşüm gösterilsin.

$$E_{n_k} = \left\{(\alpha, \beta):\ \alpha \in \Omega_{n_k}^{R_0}, \beta \in Y_{n_k}^{\alpha}\right\}$$

olsun. E_{n_k} 'da

$$W(U,V) = \left\{(\alpha, \beta): \alpha \in U, \beta \in P_{n_k}^{\alpha}(V)\right\}$$

komşulukları yardımıyla topoloji belirlenebilir. Burada $U \subset \Omega_{n_k}^{R_0}$, $V \subset Y$ komşuluklardır. O zaman $E_{n_k}, \Omega_{n_k}^{R_0}$ tabanlı ve $Y_{\alpha}^{n_k}$ katlı lokal basit vektör tabakalaşma olacaktır. $\Omega_{n_k}^{R_0}$ konveks olduğundan bu tabakalaşma basit olacaktır. $\alpha \in \Omega_{n_k}^{R_0}$ için $Y_{\alpha}^{n_k}$ düzlemine $Y / Y_{\alpha}^{n_k} = Y_{n_k}^{\alpha}$ faktör uzayının elemanı olarak bakabilir. Bu yüzden

$$S^1(\alpha) = Y_{\alpha}^{n_k} \qquad \alpha \in \Omega_{n_k}^{R_0}$$

E_{n_k} 'nın sürekli kesiğini belirlemiş olur. E_{n_k} 'nın diğer kesiğini

$$S^0(\alpha) = P_{n_k}{}^{\alpha}(y)$$

olarak belirleyelim. Buradaki y elemanı (4.2.2′) ifadesinin sağ tarafıdır. k yeteri kadar büyük olduğunda (4.2.2′) denklemini Ω^{R_0} küresinde çözmenin

$$S^0(\alpha) = S^1(\alpha) \tag{4.2.3}$$

denklemini $\Omega_{n_k}^{R_0}$ küresinde çözmeye denk olduğu gösterilecektir.

Gerçekten de $x \in \Omega^{R_0}$ elemanı için $f^{n_k}(x) = y$ olduğu farzedilsin. O halde $f_\alpha^{n_k}(x) = y$ olacaktır. Burada $x \in X_\alpha^{n_k}$ ve $\alpha = \pi_{n_k}(x) \in \Omega_{n_k}^{R_0}$ şeklindedir. Bu ise $Y_\alpha^{n_k}$ düzleminin y noktasından geçmesi demektir. Bundan dolayı

$$S^0(\alpha) = S^1(\alpha)$$

olur.

Şimdi $S^0(\alpha) = S^1(\alpha)$ olduğu, yani $Y_\alpha^{n_k}$ düzleminin y noktasından geçtiği kabul edilsin. O halde $f_\alpha^{n_k}(x) = y$ olacak şekilde $x \in X_\alpha^{n_k}$ elemanı vardır. Fakat burada bir zorluk vardır; x noktası genellikle Ω^{R_0} küresinin dışında da olabilir, yani (4.2.3) denkleminin α çözümü "kenar" çözüm de olabilir. Şimdi bunun mümkün olmadığı gösterilecektir.

Önerme:4.2.1. $x \in X$, $\pi_{n_k}(x) \in \Omega_{n_k}^{R_0}$ ve $f^{n_k}(x) = y$ olsun. O zaman $x \in \Omega^{R_0}$ olacak şekilde $\exists k_0$, $k \geq k_0$, sayısı vardır.

İSPAT: (4.1.1) denklemine göre yeteri kadar büyük k sayıları ve $\forall \alpha \in \Omega_{n_k}^{R_0}$ için

$$\|f_\alpha^{n_k}\| \prec C, \quad \|(f_\alpha^{n_k})^{-1}\| \prec C$$

olacak şekilde $\exists C \succ 0$ sayısı vardır. O halde y noktasının $\pi_{n_k}{}^{-1}(\Omega_{n_k}^{R_0})$ bölgesinde ters görüntüsü varsa Ω^{C_1} küresine aittir. Burada $C_1 = C(1 + \|y\|_Y)$'dir. Herbir sınırlı bölgede f^{n_k} dönüşümü f dönüşümüne düzgün yakınsak olduğundan

$$|f - f^{n_k}|_{\Omega^{C_1}} = \sup_{x \in \Omega^{C_1}} \|f(x) - f^{n_k}(x)\|_Y \prec \delta$$

olacak şekilde yeterince büyük $\exists k_0$,$\forall k \geq k_0$, sayısı vardır. Burada δ, R_0'ın tanımındaki gibidir. O halde eğer $x \notin \Omega^{R_0}$ ise, $R_0 \leq \|x\|_X \leq C_1$ olur, bu halde ise

$$\|f^{n_k}(x)\| \geq \|f(x)\| - |f - f^{n_k}|_{\Omega^{C_1}} \succ (\|y\| + 2\delta) - \delta = \|y\| + \delta$$

olur. O halde x noktası, y noktasının ters görüntüsü olamaz, yani $\|x\| \leq R_0$ dır. Böylece (4.2.2′) denklemi yerine sonlu boyutlu (4.2.3) denklemi alınabilir. O halde f^{n_k} dönüşümünün derecesi

$$S(\alpha) = S^0(\alpha) - S^1(\alpha)$$

sonlu boyutlu dönüşümünün derecesi olarak belirlenebilir.

Tanım:4.2.1. $\deg(f^{n_k}) = \deg(s(\alpha))$

$\deg(f^{n_k})$; işareti kesin olarak belirlenemez, modülce değişmezdir. Denklemin çözümünün varlığı için işaret önemli değildir. $f^{n_k} \to f$ olduğunda $\deg(f^{n_k})$, k=1,2,..., dizisinin sabitleştiği ispatlanabilir, yani

$$\lim_{k\to\infty} \deg(f^{n_k}) = sabit$$

olur. Bundan dolayı f FQL-dönüşümünün derecesi aşağıdaki şekilde belirlenir.

Tanım:4.2.2. $\deg(f) = \lim_{k\to\infty} \deg(f^{n_k})$

4.3. FQL-dönüşümünün derecesinin özellikleri

Teorem:4.3.1. f FQL-dönüşümü için (4.2.1) koşulu sağlansın ve $\deg(f) \neq 0$ olsun. O zaman (4.2.2) denkleminin $\forall y \in Y$ elemanı için çözümü vardır.

Teorem:4.3.2. f_t, $t \in [0,1]$, herbir kürede t 'ye düzgün sürekli bağımlı olan FQL-dönüşümler olsunlar ve $\forall t \in [0,1]$ için (4.2.1) koşulu sağlansın. Burada Φ dönüşümü de t 'den bağımsızdır. O zaman;

1) $\deg(f_t) = sabit$

2) Belirtilmiş herbir $\forall y \in Y$ elemanı için $f_t(x) = y$ denkleminin çözümleri kümesi $X \times [0,1]$ bölgesinde kompakttır.

Bu teoremler f dönüşümüne f^{n_k} dönüşümleri ile yaklaşarak ispatlanabilir.

BÖLÜM 5

ÖZEL QUAZİ-LİNEER DÖNÜŞÜM ve BU DÖNÜŞÜMÜN DERECESİ

5.1. FSQL-Dönüşümler

H_1, H_2 gerçel Hilbert uzayları, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sırasıyla bu uzaylar üzerindeki normlar, $\{X_\alpha^n\}$, $\alpha \in M_n$, H_1 Hilbert uzayında n-koboyutlu ikişer ikişer ayrık α'ya göre sürekli olan kapalı düzlemler ailesi ve M_n n-boyutlu C^r-manifold olsun. $\{Y_\alpha^n\}$ ailesi de H_2 Hilbert uzayında benzer özelliklere sahip bir aile olsun. $\widetilde{M}_n = \bigcup_\alpha X_\alpha^n$, $\widetilde{N}_n = \bigcup_\beta Y_\beta^n$ olarak gösterilsin. $\pi: \widetilde{M}_n \to M_n$, $\mathrm{P}.\widetilde{N}_n \to N_n$ izdüşümleri aşağıdaki şekilde belirlensin:

$\pi: x \mapsto \alpha$, eğer $x \in X_\alpha^n$

$\mathrm{P}: y \mapsto \beta$, eğer $y \in Y_\beta^n$

O zaman $\xi = (\pi, \widetilde{M}_n, M_n)$ ve $\eta = (\mathrm{P}, \widetilde{N}_n, N_n)$ üçlülerinin afin tabakalar oldukları açıktır.

Tanım:5.1.1. $f: \widetilde{M}_n \to \widetilde{N}_n$ sürekli dönüşüm olsun. Eğer $\forall \alpha \in M_n$ için

$f_\alpha^n \equiv f|X_\alpha^n$

X_α^n düzleminden belli bir Y_β^n düzlemine tersi olan afin dönüşüm , $f_\alpha^n \in Aff(X_\alpha^n, Y_\beta^n)$, ise ve f_α^n dönüşümleri α 'ya göre sürekli iseler, f dönüşümüne Fredholm Özel Lineer (FSL) dönüşüm denir.

$f:\widetilde{M}_n \to \widetilde{N}_n$ FSL-dönüşümünün ξ ve η tabakaları arasında bimorfizm doğurduğu açıktır.

FSL-dönüşümünün keyfi Ω, $\overline{\Omega} \subset \widetilde{M}_n$, bölgesine daralmışına da FSL-dönüşüm denilecektir.

Ω, $\overline{\Omega} \subset \widetilde{M}_n$, H_1 Hilbert uzayında sınırlı bölge ve $f:\Omega \to H_2$ FSL-dönüşüm olsun. O zaman

$$\|\|f\|\|_\Omega = \sup_{X_\alpha^n \cap \Omega \neq \varnothing} \inf\left\{C: \|f_\alpha^n(x)\|_2 \leq C(1+\|x\|_1), \|x\|_1 \leq C(1+\|f_\alpha^n(x)\|_2), x \in X_\alpha^n\right\}$$

olarak gösterilir.

Tanım:5.1.2. $f:\Omega \to H_2$ sürekli dönüşüm olsun. Eğer

$$\|\|f^{n_i}\|\|_\Omega \prec C(\Omega) \quad , \qquad \forall i \succ i(\Omega) \tag{5.1.1}$$

şartını sağlayan $f^{n_i}:\Omega \to H_2$,i=1,2,..., FSL-dönüşümleri dizisi Ω bölgesinde f dönüşümüne düzgün yaklaşırlarsa ve C(Ω), i(Ω)<i'ye bağımlı değilse, f dönüşümüne Fredholm Özel Quasi Lineer (FSQL) dönüşüm denilir.

Tanım:5.1.2' $f:H_1 \to H_2$ sürekli dönüşüm olsun. Eğer keyfi $\Omega \subset H_1$ sınırlı bölgesinde f dönüşümüne FSL-dönüşümleri ile düzgün yaklaşmak mümkün ise f dönüşümüne FSQL-dönüşüm denir.

X^m ve X^n, H_1 Hilbert uzayında sırasıyla m ve n-koboyutlu iki kapalı düzlem olsunlar $(m \geq n)$. Bu düzlemlerin herbiri H_1 uzayının başlangıç noktasından kendisine paralel olarak geçirilsin ve bu durumda elde edilen altuzaylar $`X^m$ ve $`X^n$ ile gösterilsin.

Tanım:5.1.3. $Sin(X^m, X^n) = \sup\limits_{x \in `X^m} \{\rho(x, `X^n) : x \in `X^m \cap B_1(1)\}$ sayısına X^m düzlemi ile X^n düzlemi arasındaki açının sinüsü denir.

Burada $B_1(1)$, H_1 Hilbert uzayında merkezi başlangıç noktasında yarıçapı bir olan küredir.

Teorem:5.1.1. $f : H_1 \to H_2$ FQL dönüşümü keyfi $\Omega \subset H_1$ sınırlı, açık bölgesinde düzgün sürekli ve sınırlıdır.

İspat: 1) $f^n : \Omega \to H_2$ FL-dönüşümü Ω bölgesinde f dönüşümüne belirlenmiş $\varepsilon \succ 0$ sayısı kadar yaklaşsın, yani

$$\|f(x) - f^n(x)\|_2 \prec \varepsilon \qquad \forall x \in \Omega \tag{5.1.2}$$

olsun. Ayrıca $\{X_\alpha^n\}$, H_1 uzayında f^n FL-dönüşümüne uygun n-koboyutlu paralel ve kapalı düzlemlerden oluşan bir aile olsun. Tanım gereği

$$f_\alpha^n \equiv f^n \big| X_\alpha^n$$

α'ya göre süreklidir. Genelliği bozmadan $B = \overline{\{\alpha : X_\alpha^n \cap \Omega \neq \varnothing\}}$'nin $\Re^n$ öklit uzayının altuzayı olduğu kabul edilebilir. B kompakt olduğundan f_α^n, $\alpha \in B$, α'ya göre düzgün süreklidir, yani belirli bir Ω bölgesi $\forall \varepsilon \succ 0$, $\exists \delta_1, \delta_2 \succ 0$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in B$, $\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\Re^n} \prec \delta_1$, $\forall x_1 \in X_{\alpha_1}^n \cap \Omega$, $\forall x_2 \in X_{\alpha_2}^n \cap \Omega$ elemanları için

$$\|x_1 - x_2\|_1 \prec \delta_2 \;\Rightarrow\; \|f^n_{\alpha_1}(x_1) - f^n_{\alpha_2}(x_2)\|_2 \prec \varepsilon \tag{5.1.3}$$

olur. X^n_α düzlemleri paralel olduklarından $\forall \delta_1 \succ 0$, $\exists \delta_2 \succ 0$, $\forall x_1 \in X^n_{\alpha_1}$, $\forall x_2 \in X^n_{\alpha_2}$ elemanları için

$$\|x_1 - x_2\|_1 \prec \delta_2 \;\Rightarrow\; \|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\Re^n} \prec \delta_1$$

olur, yani x_1 ve x_2 elemanlarının yakınlığından bunlara uygun olan α_1 ve α_2 parametrelerinin yakınlığı bulunur. Bundan dolayı $\forall \varepsilon \succ 0$, $\exists \delta_2 \succ 0$, $\forall x_1 \in X^n_{\alpha_1} \cap \Omega$, $\forall x_2 \in X^n_{\alpha_2} \cap \Omega$ elemanları için

$$\|x_1 - x_2\|_1 \prec \delta_2 \;\Rightarrow\; \|f^n_{\alpha_1}(x_1) - f^n_{\alpha_2}(x_2)\|_2 \prec \varepsilon \tag{5.1.3'}$$

olur. Şimdi B kompakt kümesinin, $\forall \alpha \in B$, $\exists i \in \{1,\ldots,k\}$, $\exists \delta_2 \succ 0$, $\forall x_1 \in X^n_{\alpha_1} \cap \Omega$, $\forall x_2 \in X^n_{\alpha_2} \cap \Omega$ elemanları için

$$\|x_1 - x_2\|_1 \prec \delta_2 \;\Rightarrow\; \|f^n_{\alpha}(x_1) - f^n_{\alpha_i}(x_2)\|_2 \prec \varepsilon \tag{5.1.3''}$$

olacak şekilde, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, δ_1-ağı alınsın. f^n FL-dönüşümü sürekli olduğundan f^n_α, $\forall \alpha$, afin dönüşümü düzgün süreklidir. Böylece $\forall \varepsilon \succ 0$, $\exists \delta_3 \succ 0$, $\forall i \in \{1,\ldots,k\}$, $\forall x_1, x_2 \in X^n_{\alpha_i}$ elemanları için

$$\|x_1 - x_2\|_1 \prec \delta_3 \Rightarrow \|f^n_{\alpha_i}(x_1) - f^n_{\alpha_i}(x_2)\|_2 \prec \varepsilon \tag{5.1.4}$$

olur. (5.1.3'') ve (5.1.4) ifadelerinden $\exists \delta \leq \min\{\delta_2, \delta_3\}$, $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ elemanları için

$$\|x_1 - x_2\|_1 \prec \delta \Rightarrow \|f^n(x_1) - f^n(x_2)\|_2 \prec 3\varepsilon \tag{5.1.5}$$

bulunur. Buradan (5.1.2) ve (5.1.5) ifadeleri kullanılarak $\forall \varepsilon \succ 0$, $\exists \delta \succ 0$, $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ elemanları için

$$\|x_1 - x_2\|_1 \prec \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\|_2 \prec 5\varepsilon$$

bulunur, yani f FQL-dönüşümü Ω bölgesinde düzgün süreklidir.

2) Şimdi f FQL-dönüşümünün Ω bölgesinde sınırlı olduğu gösterilecektir. f_α^n, $\forall \alpha$, dönüşümlerinin afin ve sınırlı oldukları biliniyor. O halde $\exists M \succ 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $\forall x \in X_{\alpha_i}^n \cap \Omega$ elemanları için

$$\|f_{\alpha_i}^n(x)\|_2 \le M$$

olur. (5.1.3″) ifadesi kullanılarak $\forall x \in B$, $\exists \alpha_i$, $\forall x \in X_\alpha^n \cap \Omega$, $\forall x' \in X_{\alpha_i}^n \cap \Omega$ elemanları için

$$\|f_\alpha^n(x)\|_2 \le \|f_{\alpha_i}^n(x')\|_2 + \|f_\alpha^n(x) - f_{\alpha_i}^n(x')\|_2 \le M + \varepsilon \tag{5.1.6}$$

olarak yazılabilir, o halde f^n FL-dönüşümü Ω bölgesinde sınırlıdır. (5.1.2) ve (5.1.6) ifadelerinden $\forall x \in \Omega$ elemanı için

$$\|f(x)\|_2 \le \|f^n(x)\|_2 + \|f^n(x) - f(x)\|_2 \le M + 2\varepsilon$$

bulunur, yani f FQL-dönüşümü Ω bölgesinde sınırlıdır.

Teorem:5.1.2. $f^{n_0}:\Omega \to H_2$ FL-dönüşüm olsun. O zaman Ω bölgesinde f^{n_0} dönüşümüne düzgün yakınsak olan $f^{n_i}:\Omega \to H_2$ FSL-dönüşümleri vardır.

İspat: $\{X_\alpha^{n_0}\}$, f^{n_0} FL-dönüşümüne uygun n_0-koboyutlu paralel düzlemler ailesi olsun. Ω sınırlı bölge olduğundan $B=\overline{\{\alpha: X_\alpha^{n_0} \cap \Omega \neq \varnothing\}}$ kümesinin kompakt olduğu açıktır. Bundan dolayı $\{f_\alpha^{n_0}: \alpha \in B\}$ afin dönüşümler ailesi B kümesinde α'ya göre düzgün süreklidir. O halde $\{Y_\alpha^{n_0}: Y_\alpha^{n_0} = f_\alpha^{n_0}(X_\alpha^{n_0}),\ \alpha \in B\}$ düzlemler ailesi düzgün süreklidir. Buradan $\forall \varepsilon \succ 0$, $\forall \alpha \in B$, $\exists \alpha_i \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$elemanları için

$$\sin(Y_\alpha^{n_0}, Y_{\alpha_i}^{n_0}) \prec \varepsilon \qquad (5.1.7)$$

olacak şekilde sonlu sayıda $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in B$ elemanlarının varolduğu açıktır. $Y_{\alpha_i}^{n_0}$, i=1,...,k , düzlemleri H_2 uzayında herbiri kendisine paralel olacak şekilde başlangıç noktasından geçirilsin ve bulunan k-sayıdaki altuzaylar H_2 uzayında kesiştirilsin. Bu şekilde bulunan altuzay Y^m ile gösterilecektir ($m \geq n_0$). $Y_{\alpha_i}^{n_0}$, i=1,...,k , düzlemleri Y^m altuzayına paralel ve m-koboyutlu düzlemlere parçalansın. (5.1.7) koşulu sağlandığından Y^m altuzayını herbir $Y_\alpha^{n_0}$ düzlemlerine dik olarak izdüşürmek mümkündür. Böylece herbir $Y_\alpha^{n_0}$ düzlemi m -koboyutlu kendi kendisine paralel düzlemlere parçalanacaktır. Sonunda aşağıdaki koşulları sağlayan m-koboyutlu $\{Y_{\alpha,\beta}^m: (\alpha,\beta) \in B \times \Re^{m-n_0}\}$ düzlemler ailesi elde edilir.

1. $Y_{\alpha,\beta_1}^m \| Y_{\alpha,\beta_2}^m \qquad \forall \alpha,\ \forall \beta_1, \beta_2$
2. $Y_\alpha^{n_0} = \bigcup\limits_\alpha Y_{\alpha,\beta}^m \qquad \forall \alpha$
3. $\sin(Y_{\alpha_1,\beta_1}^m, Y_{\alpha_2,\beta_2}^m) \prec \varepsilon \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in B,\ \forall \beta_1, \beta_2 \in \Re^{m-n_0}$

$f_\alpha^{n_0}$, $\forall\alpha$, afin izomorfizm olduğundan herbir $X_\alpha^{n_0}$ düzlemini $(f_\alpha^{n_0})^{-1}$ dönüşümünü kullanarak m-koboyutlu paralel $X_{\alpha,\beta}^m = (f_\alpha^{n_0})^{-1}(Y_{\alpha,\beta}^m)$ alt düzlemlerine parçalamak mümkündür. Elde edilen $\{X_{\alpha,\beta}^m\}$ ailesi (α,β) çiftine göre sürekli olacaktır, çünkü $(f_\alpha^{n_0})^{-1}$ dönüşümleri α'ya göre süreklidir. Herhangi bir Y_{α_0,β_0}^m düzlemine dik olan m-boyutlu $Y_m \subset H_2$ altuzayına bakılsın. $\varepsilon \succ 0$ sayısı yeteri kadar küçük olduğundan Y_m altuzayı herbir $Y_{\alpha,\beta}^m$ düzlemi ile yalnız bir noktada kesişir. Bu noktaların herbirinden Y_{α_0,β_0}^m düzlemine paralel m-koboyutlu $`Y_{\alpha,\beta}^m$ düzlemi yapılsın. O zaman $\{`Y_{\alpha,\beta}^m\}$ sürekli paralel düzlemler ailesi elde edilir. Teorem:5.1.1. gereği $f(\Omega)$ kümesi sınırlıdır, yani bu küme yeteri kadar büyük R ,R>0, yarıçaplı kürenin, $B_2(R)$, içindedir. Yapıya göre;

$$\sin(Y_{\alpha,\beta}^m, `Y_{\alpha,\beta}^m) \prec \varepsilon \qquad \forall\alpha,\beta$$

olur. $\varepsilon \succ 0$ sayısı yeteri kadar küçük alınırsa $Y_{\alpha,\beta}^m$ ve $`Y_{\alpha,\beta}^m$ düzlemleri $B_2(R)$ küresinde de birbirine yeteri kadar yakın olacaklardır.

$$\mathrm{P}_{\alpha,\beta}^m : Y_{\alpha,\beta}^m \to `Y_{\alpha,\beta}^m \qquad \forall\alpha,\beta$$

dik izdüşümler olsun. $\mathrm{P}_{\alpha,\beta}^m$ izdüşümü (α,β) çiftine göre süreklidir ve yapıya göre $\forall\alpha,\beta$, $\forall y \in B_2(R) \cap Y_{\alpha,\beta}^m$ için

$$\left\| \mathrm{P}_{\alpha,\beta}^m(y) - y \right\|_2 \prec \varepsilon$$

olur. Şimdi aşağıdaki dönüşüm ele alınsın.

$$f^m : \Omega \to H_2 \qquad f^m(x) = \mathrm{P}_{\alpha,\beta}^m \circ f^{n_0}(x),\ x \in \Omega \cap X_{\alpha,\beta}^m \qquad (5.1.8)$$

Yapıya göre $f^{m}:\Omega \to H_2$ dönüşümünün FSL-dönüşüm olduğu ve

$$\|f^{m}(x)-f^{n_0}(x)\|_2 \prec \varepsilon \qquad \forall x \in \Omega$$

olduğu açıktır.

Benzer olarak bu teoremin tersi olan aşağıdaki teoremi de ispatlamak mümkündür.

Teorem:5.1.3. $f^{n_0}:\Omega \to H_2$ FSL-dönüşüm olsun. O zaman Ω bölgesinde f^{n_0} dönüşümüne düzgün yakınsak olan $f^{n_i}:\Omega \to H_2$ FL-dönüşümleri vardır.

Teorem:5.1.2. ve Teorem:5.1.3 gereği FSQL ve FQL dönüşümleri sınıflarının aynı olduğu açıktır.

Not: i) Teorem:5.1.1. FSQL-dönüşümü için de doğrudur.

ii) Teorem:5.1.2.'deki metotlar kullanılarak aşağıdaki teoremi de ispatlamak mümkündür.

Teorem:5.1.4. $f:H_1 \to H_2$, $g:H_2 \to H_3$ dönüşümleri FSQL-dönüşümler olsunlar. O zaman $g \circ f:H_1 \to H_3$ dönüşümü de FSQL-dönüşümdür. Burada H_3 gerçel Hilbert uzayıdır.

FQL ve FSQL-dönüşümlerinin aynılığı kullanılarak FSQL-dönüşümüne örnek olarak aşağıdaki dönüşüm verilebilir.

$f:[0,2\pi)\times \Re \to \Re$ C^r-sınıfından dönüşüm olsun ve $f_x \neq 0$, $(\forall \tau, x)$. O zaman

$$\breve{f}:H_k(S^1) \to H_k(S^1) \qquad k \geq 2$$
$$\breve{f}:x(\tau) \mapsto f(\tau, x(\tau)) \qquad x(\tau) \in H_k(S^1)$$

dönüşümü FSQL-dönüşüm olacaktır. Burada

$$H_k(S^1) = \left\{ x(\tau) \colon \|x\|_k^2 = \int_0^{2\Pi} \sum_{l=0}^{k} \left| x^{(l)}(\tau) \right|^2 d\tau \prec \infty \right\}$$

Sobolev uzayıdır.

5.2. FSQL-Dönüşümün Derecesi

$f \colon H_1 \to H_2$ FSQL-dönüşüm olsun ve

$$\|x\|_1 \leq \Phi(\|f(x)\|_2) \tag{5.2.1}$$

koşulu sağlansın. Burada Φ herhangi bir pozitif monoton fonksiyondur. O zaman

$$f(x) = y_0 \qquad y_0 \in H_2 \tag{5.2.2}$$

denkleminin tüm çözümleri

$$\Omega = \left\{ x \colon \|x\|_1 \leq \Phi(\|y_0\|_2) \right\}$$

küresinde bulunacaktır.

f dönüşümünün derecesi, $\deg(f)$, (5.2.2) denkleminin "çözümleri sayısıdır". $\deg(f)$'nin tam tanımını verebilmek için bazı kavramları belirtmek gereklidir. $\{f^{n_k}\}$, k=1,2,..., FSL dönüşümleri, Ω^{R_0}, $R_0 = \Phi(\|y_0\|_2 + 2\delta)$, $\delta \succ 0$, küresinde

$$\|f^{n_k}\|_\Omega \prec C \qquad \forall k \geq k_0$$

olacak şekilde f dönüşümüne yaklaşsınlar.

$$f^{n_k}(x) = y_0 \tag{5.2.3}$$

denklemine bakılsın ve Ω^{R_0} küresinde bu denklemin çözümleri aranılsın. Bu problemi sonlu boyutlu probleme getirmek mümkündür. Gerçekten de herbir f^{n_k} dönüşümü iki tabaka arasında bimorfizm doğurduğundan bu dönüşüm bu tabakaların bazları olan M_{n_k} ve N_{n_k} n_k-boyutlu manifoldları arasında sonlu boyutlu $g_{n_k}: M_{n_k} \to N_{n_k}$ dönüşümünü doğurur, burada

$$g_{n_k}(\alpha) = \beta \qquad\qquad f^{n_k}(X_\alpha^{n_k}) = Y_\beta^{n_k}$$

dır. $y_0 \in Y_{\beta_0}^{n_k}$ olsun. O zaman (5.2.3) denklemi sonlu boyutlu

$$g_{n_k}(\alpha) = \beta_0 \tag{5.2.4}$$

denklemini doğurur.

Lemma:5.2.1. (5.2.3) denklemini çözmek (5.2.4) denklemini çözmeye denktir.

Lemma:5.2.1'e dayanarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım:5.2.1. $\deg(f^{n_k}) = \deg(g_{n_k})$

Teorem:5.2.1. $f^{n'}, f^{n''}: \Omega \to H_2$ FSL-dönüşümleri Ω bölgesinde birbirine yeteri kadar yakın ise o zaman

$$\deg(f^{n'}) = \deg(f^{n''})$$

olur.

Teorem:5.2.1 kullanılarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım:5.2.2. $\deg(f) = \lim_{k\to\infty} \deg(f^{n_k})$

Burada f^{n_k} , k=1,2,..., dönüşümleri FSL-dönüşümlerdir ve bu dönüşümler Ω bölgesinde f FSQL-dönüşümüne düzgün yakınsaktır.

5.3. Derecenin Temel Özellikleri

Teorem:5.3.1. f FSQL-dönüşümü için (5.2.1) eşitsizliğinin sağlandığı ve $\deg(f) \neq 0$ olduğu kabul edilsin. O zaman (5.2.2) denkleminin keyfi $y \in H_2$ elemanı için çözümü vardır.

Teorem:5.3.2. f FSQL-dönüşümü (5.2.1) koşulunu sağlıyorsa

$$\deg(f, y_1) = \deg(f, y_2) \qquad y_1, y_2 \in H_2$$

olur.

Teorem:5.3.3. f_t , $t \in [0,1]$, FSQL-dönüşümler ailesinin t'ye göre (herbir sınırlı kürede düzgün) sürekli olduğu ve (5.2.1) eşitsizliğini sağladığı kabul edilsin, bu durumda Φ dönüşümü t'den bağımsızdır. O halde,

1) $\deg(f_t) = sabit$

2) $f_t(x) = y$ denkleminin çözümleri kümesi herbir belirtilmiş y elemanı için $H_1 \times [0,1]$'de kompakttır.

Teorem:5.3.4. $f: H_1 \to H_2$ ve $g: H_2 \to H_3$ FSQL-dönüşümler olsunlar ve bu dönüşümler aşağıdaki koşulları sağlasınlar.

$$\|x\|_1 \leq \phi(\|f(x)\|_2) \qquad x \in H_1 \tag{5.3.1}$$

$$\|y\|_2 \leq \varphi(\|g(y)\|_3) \qquad y \in H_2 \tag{5.3.2}$$

Burada H_1, H_2, H_3 Hilbert uzayları, ϕ, φ pozitif monoton artan fonksiyonlardır. O zaman

$$\deg(g \circ f) = \deg(g).\deg(f) \tag{5.3.3}$$

olur.

İspat: $g \circ f$ bileşke dönüşümü Ψ ile gösterilsin.

$$\Psi \equiv g \circ f : H_1 \to H_3 \qquad \Psi(x) = g(f(x)).$$

$z_0 \in H_3$ elemanı alınsın. O zaman

$$\Psi(x) = z_0 \tag{5.3.4}$$

denkleminin tüm çözümleri

$$\|x\|_1 \leq \phi(\varphi(\|z_0\|_3))$$

küresine ait olacaktır. Gerçekten de $\Psi(x_0) = z_0$ olsun.

$$\Rightarrow g(f(x_0)) = z_0$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \|f(x_0)\|_2 \leq \varphi(\|z_0\|_3)$$

olur. ϕ monoton artan fonksiyon olduğundan

$$\phi(\|f(x_0)\|_2 \leq \phi(\varphi(\|z_0\|_3))$$

yazılabilir. (5.3.1)'e göre

$$\|x_0\|_1 \leq \phi(\|f(x_0)\|_2)$$

dir. O halde

$$\|x_0\|_1 \leq \phi(\varphi(\|z_0\|_3))$$

olur. Şimdi Ψ^{n_k}, k=1,2,..., FSL-dönüşümleri dizisinin $C_1 = C(1+\|z_0\|_3)$ yarıçaplı kürede Ψ dönüşümüne düzgün yaklaştığı kabul edilsin. Burada C, FSQL-dönüşümün tanımındaki gibidir.

$$\Psi^{n_k}(x) = z_0 \qquad (5.3.5)$$

denklemine bakılsın ve $R_0 = \phi(\varphi(\|z_0\|_3 + 2\delta))$, $\delta \succ 0$, yarıçaplı kürede (5.3.5) denkleminin çözümleri aranılsın. Bu problem sonlu boyutlu probleme getirilebilir. $\{X_\alpha^{n_k}\}$, $\{Z_\gamma^{n_k}\}$ aileleri Ψ^{n_k} dönüşümlerine uygun n_k-koboyutlu düzlem aileleri olsunlar. Bu ailelerin afin tabakalar şeklindeki ifadeleri (X, π^{n_k}, M_{n_k}), (Z, q^{n_k}, L_{n_k}) olsun. Burada

$$X = \bigcup_\alpha X_\alpha^{n_k} \subset H_1$$

$\pi^{n_k} : X \to M_{n_k} \qquad \pi^{n_k}(x) = \alpha \ , \qquad x \in X_\alpha^{n_k}$ ise

$$Z = \bigcup_\gamma Z_\gamma^{n_k} \subset H_3$$

$q^{n_k} : Z \to L_{n_k} \qquad q^{n_k}(z) = \gamma \ , \qquad z \in Z_\gamma^{n_k}$ ise

M_{n_k} ve L_{n_k} n_k-boyutlu manifoldlardır. FSL-dönüşümün tanımına göre Ψ^{n_k} dönüşümü bu tabakalar arasında bimorfizm doğurur, bu Ψ_{n_k} ile gösterilsin. O halde

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Psi^{n_k}"] \arrow[d, "\Pi^{n_k}"'] & Z \arrow[d, "q^{n_k}"] \\ M_{n_k} \arrow[r, "\Psi_{n_k}"] & L_{n_k} \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatiftir, yani

$$\Psi_{n_k} \circ \pi^{n_k} = q^{n_k} \circ \Psi^{n_k}$$

olur. x_0, (5.3.5) denkleminin çözümü olsun, yani

$$\Psi^{n_k}(x_0) = z_0$$

olsun. $\pi^{n_k}(x_0) = \alpha_0$, $q^{n_k}(z_0) = \gamma_0$ olarak alınsın. Yukarıdaki diyagramdan

$$\Psi_{n_k}(\alpha_0) = \gamma_0 \qquad (5.3.6)$$

olduğu açıktır, yani α_0, $\Psi_{n_k}(\alpha) = \gamma_0$ sonlu boyutlu denkleminin çözümü olur.

Şimdi tersi farzedilsin, yani α_0 sayısı, (5.3.6) denkleminin çözümü olsun. Bu durumda $\exists x_0 \in X^{n_k}_{\alpha_0}$, $\Psi^{n_k}(x_0) = z_0$ olduğu açıktır. (5.3.5) denkleminin çözümü olan x_0 için $\|x_0\|_1 \le R_0$ koşulunun sağlandığı gösterilecektir.

Lemma:5.3.1. $x_0 \in X$ elemanı alınsın. $\alpha_0 = \pi^{n_k}(x_0) \in M_{n_k}$ olsun. O zaman $\Psi^{n_k}(x_0) = z_0$ ise $\|x_0\|_1 \leq R_0$ olacak şekilde k_0 sayısı vardır($k \geq k_0$).

İspat: FSL-dönüşümünün tanımı gereği $\forall\alpha \in M_{n_k}$ ve yeteri kadar büyük k sayıları için

$$\|\Psi_\alpha^{n_k}\| \prec C \qquad \|(\Psi_\alpha^{n_k})^{-1}\| \prec C$$

koşulları sağlanır. O halde $x_0 \in X$ elemanı (5.3.5) denkleminin çözümü ise $x_0 \in (\pi^{n_k})^{-1}(M_{n_k})$ olduğundan

$$\|x_0\|_1 \prec C \qquad C(1+\|z_0\|_3) = C_1$$

olarak bulunur. k_0 sayısının

$$|\Psi - \Psi^{n_k}|_{B_1(C_1)} = \sup_{x \in B_1(C_1)} \|\Psi(x) - \Psi^{n_k}(x)\|_3 \prec \delta$$

koşulu sağlanacak şekilde yeteri kadar büyük olduğu kabul edilsin. $\|x_0\|_1 \succ R_0$ olsun. O zaman $R_0 \leq \|x_0\|_1 \prec C_1$ olur, bu durumda

$$\|\Psi^{n_k}(x_0)\|_3 \geq \|\Psi(x_0)\|_3 - |\Psi - \Psi^{n_k}|_{B_1(C_1)} \succ (\|z_0\|_3 + 2\delta) - \delta = \|z_0\|_3 + \delta \succ \|z_0\|_3$$

olarak bulunur. O halde x_0 noktası z_0 noktasının ters görüntüsü olamaz. Buradan (5.3.5) denklemini, $B_1(R_0)$ küresinde çözmek ile sonlu boyutlu (5.3.6) denklemini, $\pi^{n_k}(B_1(R_0)) \subset M_{n_k}$ kümesinde çözmenin denk olduğu görülür. Ψ dönüşümü (5.3.1) ve (5.3.2) koşullarını sağladığında bunun için de derece tanımı vermek mümkündür. O halde f, g ve Ψ dönüşümlerinin herbirinin derecesi vardır.

f^n, $n = 1,2,\ldots$, ve g^m, $m = 1,2,\ldots$, dönüşümleri FSL-dönüşümler ve $\{f^n\}$ dizisi $B_1(R_0)$, $R_0 = \phi(\varphi(\|z_0\| + 2\delta)$, $\delta \succ 0$, küresinde f dönüşümüne, $\{g^m\}$ dizisi de $B_2(R_1)$, $R_1 = \varphi(\|z_0\|_3 + 2\delta)$, $\delta \succ 0$, küresinde g dönüşümüne düzgün yakınsak olsunlar. $\{X_\alpha^n\}$, $\{Y_\beta^n\}$ aileleri f^n dönüşümüne ve $\{Y_\gamma^m\}$, $\{Z_\delta^m\}$ aileleri de g^m dönüşümüne uygun olan aileler olsunlar. Teorem:5.1.1'e göre f^n dönüşümü herbir sınırlı $\Omega \subset H_1$ bölgesini sınırlı $f^n(\Omega) \subset H_2$ kümesine dönüştürür. O zaman

$$B = \overline{\{\beta \in N_n : f(\Omega) \cap Y_\beta^n \neq \varnothing\}}$$

kümesinin kompakt olduğu açıktır. $\{Y_\beta^n\}$ ailesi B kümesinde düzgün sürekli olduğundan $\forall \beta \in B$ için

$$dist(Y_\beta^n \cap B_2(R),\ Y_{\beta_i}^n \cap B_2(R)) \prec \varepsilon \qquad \exists i \in \{1,2,\ldots,k\} \tag{5.3.7}$$

koşulu sağlanacak şekilde $\exists \beta, \beta_2, \ldots, \beta_k \in B$ elemanları vardır. (Burada $B_2(R)$, $f(\Omega) \subset B_2(R) \subset H_2$, koşulunu sağlayan R yarıçaplı küredir.) Bu ise aynı zamanda

$$\sin(Y_\beta^n,\ Y_{\beta_i}^n) \prec \varepsilon \tag{5.3.8}$$

olması demektir. $Y_{\beta_i}^n$, k=1,2,...,k , düzlemleri H_2 Hilbert uzayında koordinat başlangıçından geçirilsin ve elde edilen bu uzayların arakesidi $Y^{n'}(n \geq n')$ ile gösterilsin. Şimdi $Y_{\beta_i}^n$, k=1,2,...,k , düzlemleri $Y^{n'}$ altuzayına paralel n'-koboyutlu düzlemlere parçalansın. (5.3.8) ifadesini kullanarak $\forall \beta$ için Y_β^n düzlemi uygun $Y_{\beta_i}^n$ düzleminden ortogonal izdüşümle n'-koboyutlu paralel düzlemlere parçalansın. Bulunan bu sürekli aile $\{Y_{\beta,\beta_1}^{n'}\}$ ile gösterilsin. Yapıya göre $\forall \beta$, $\forall \beta_1', \beta_2'$ için

$$Y^{n'}_{\beta,\beta_1'} \| Y^{n'}_{\beta,\beta_2'}$$

ve $\forall(\beta_1,\beta_1'),\ (\beta_2,\beta_2')$ için

$$\sin(Y^{n'}_{\beta_1,\beta_1'},\ Y^{n'}_{\beta_2,\beta_2'}) \prec \varepsilon \qquad (5.3.9)$$

olur. Herhangi bir $Y^{n'}_{\beta_0,\beta_0'}$ düzlemi ele alınsın ve bunun H_2 uzayındaki ortogonal tamamlanması $Y_{n'}$ ile gösterilsin. O zaman (5.3.9) ifadesine göre $Y_{n'}$, $\forall Y^{n'}_{\beta,\beta'}$ düzlemine transversal olacaktır. Bundan dolayı $\forall(\beta,\beta')$ için $Y^{n'}_{\beta,\beta'} \cap Y_{n'}$ bir noktadan ibaret olur. Bu noktaların herbirinden $Y^{n'}_{\beta_0,\beta_0'}$ düzlemine n'-koboyutlu paralel düzlemler geçirilsin ve bunlar uygun olarak ${}'Y^{n'}_{\beta,\beta'}$ ile gösterilsin. Yapıya göre

$${}'Y^{n}_{\beta} = \bigcup {}'Y^{n'}_{\beta,\beta'}$$

n-koboyutlu düzlem olacaktır ve bu $B_2(R)$ küresinde Y^n_β düzlemine yeteri kadar yakın olur. Şimdi aşağıdaki dönüşüme bakılsın.

$$f_1^n : \Omega \to H_2 \quad , \quad f^n_{1,\alpha} \equiv f_1^n\big|_{X^n_\alpha}$$

$$f^n_{1,\alpha}(x) = \mathrm{P}^n_\beta \circ f^n_\alpha(x) \qquad x \in X^n_\alpha\,, \qquad f^n_\alpha \equiv f^n\big|_{X^n_\alpha}$$

Burada $\mathrm{P}^n_\beta : Y^n_\beta \to {}'Y^n_\beta$ ortogonal izdüşümdür. Yapıya göre f_1^n FSL-dönüşümdür ve $\forall x \in \Omega$ için

$$\|f_1^n(x) - f^n(x)\| \prec \varepsilon$$

olur.

Lemma:5.3.2. $\deg(f_1^{\,n}) = \deg(f^{\,n})$.

Heriki FSL-dönüşüm M_n ve N_n bazları üzerinde aynı bir $f_n : M_n \to N_n$ dönüşümü doğurduklarından

$$\deg(f_1^{\,n}) = \deg(f_n) = \deg(f^{\,n})$$

olur.

Şimdi $\left\{ {}^{`}Y_\beta^{\,n} \right\}$ ailesi, $\left\{ {}^{`}Y_{\beta.\beta'}^{\,n'} \right\}$ paralel düzlemler ailesine parçalansın. O zaman $f_1^{\,n}$ dönüşümünün sürekli $\left\{ X_{\alpha.\beta'}^{\,n'} : X_{\alpha.\beta'}^{\,n'} = (f_1^{\,n})^{-1}({}^{`}Y_{\beta.\beta'}^{\,n'}) \right\}$ ve $\left\{ {}^{`}Y_{\beta.\beta'}^{\,n'} \right\}$ aileleri arasında FSL-dönüşümü doğurduğu açıktır. Bu aileler üzerinde $f_1^{\,n}$ dönüşümünü $f_1^{\,n'}$ olarak gösterilsin.

Lemma:5.3.3. $\deg(f_1^{\,n}) = \deg(f_1^{\,n'})$.

$\left\{ X_{\alpha.\beta'}^{\,n'} \right\}$ ve $\left\{ {}^{`}Y_{\beta.\beta'}^{\,n'} \right\}$ ailelerinin bazları sırasıyla $M_{n'}$ ve $N_{n'}$ ile gösterilsin. Tanıma göre;

$$\deg(f_1^{\,n'}) = \deg(f_{n'})$$

olduğu biliniyor. Burada $f_{n'} : M_{n'} \to N_{n'}$ dönüşümü, $f_1^{\,n'}$ dönüşümünün bir bimorfizm gibi bazlar arasında doğurduğu sürekli dönüşümdür. Yapıya göre; $(M_{n'}, \pi_{n'}, M_n)$ ve $(N_{n'}, \mathrm{P}_{n'}, N_n)$ sonlu $(n' - n)$-boyutlu afin tabakalar olacaklardır. Burada

$$\pi_{n'} : M_{n'} \to M_n \qquad \pi_{n'} : (\alpha, \beta') \mapsto \alpha$$

$$\mathrm{P}_{n'} : N_{n'} \to N_n \qquad \mathrm{P}_{n'} : (\beta, \beta') \mapsto \beta$$

şeklindeki dönüşümlerdir. Bundan dolayı $f_{n'}: M_{n'} \to N_{n'}$ dönüşümü bu tabakalar arasında bimorfizm olacaktır ve bunun bu tabakaların bazları arasında doğurduğu dönüşüm ise $f_n: M_n \to N_n$ dönüşümü olur.

$$\begin{tikzcd}
M_{n'} \arrow[r, "f_{n'}"] \arrow[d, "\pi_{n'}"'] & N_{n'} \arrow[d, "\mathrm{P}_{n'}"] \\
M_n \arrow[r, "f_n"] & N_n
\end{tikzcd}$$

O halde

$$\deg(f_{n'}) = \deg(f_n)$$

olur. Yukarıdaki eşitlikler de dikkate alınırsa

$$\deg(f_1^{n'}) = \deg(f_1^{n})$$

olduğu elde edilir.

Aynı yapı g^m dönüşümü üzerinde de yapılırsa $\{Y^{m'}_{\gamma,\delta'}\}$ ve $\{Z^{m'}_{\delta,\delta'}\}$ düzlemler ailesi ve bunlar arasında $g^{m'}$ FSL-dönüşümü bulunur, $g^{m'}$ dönüşümü $B_2(R)$'de g^m dönüşümüne yeteri kadar yakın olur ve böylece

$$\deg(g^{m'}) = \deg(g^m)$$

olduğu bulunur.

Not: Yapıya göre $\forall(\delta_1,\delta_1'),\ (\delta_2,\delta_2')$ için

$$Z^{m'}_{\delta_1,\delta_1'} \parallel Z^{m'}_{\delta_2,\delta_2'}$$

olduğu açıktır.

$\left\{Y^{m'}_{\gamma,\delta'}\right\}$ ailesine yukarıdaki gibi, $B_2(R)$ küresinde paralel düzlemlerden oluşan $\left\{`Y^{m''}_{\gamma,\delta',\delta''}\right\}$, $(m'' \geq m')$, ailesi ile yaklaşılsın. Burada da $\forall\gamma,\delta'$ için $`Y^{m'}_{\gamma,\delta'} = \bigcup_{\delta''} `Y^{m''}_{\gamma,\delta',\delta''}$ $m'$-koboyutlu düzlemler olacaktır ve sürekli $\left\{`Y^{m'}_{\gamma,\delta'}\right\}$ ailesi $B_2(R)$ küresinde $\left\{Y^{m'}_{\gamma,\delta'}\right\}$ ailesine yeteri kadar yakın olur. Şimdi aşağıdaki dönüşüm ele alınsın.

$$g_1^{m'}: B_2(R) \to H_3 \quad , \quad g^{m'}_{1,\gamma,\delta'} \equiv g_1^{m'}\Big|_{`Y^{m'}_{\gamma,\delta'}}$$

$$g^{m'}_{1,\gamma,\delta'}(y) = g^{m'}_{\gamma,\delta'} \circ \mathrm{P}^{m'}_{\gamma,\delta'}(y) \quad , \quad y \in `Y^{m'}_{\gamma,\delta'} \quad , \quad g^{m'}_{\gamma,\delta'} \equiv g^{m'}\Big|_{Y^{m'}_{\gamma,\delta'}}$$

Burada $\mathrm{P}^{m'}_{\gamma,\delta'}: `Y^{m'}_{\gamma,\delta'} \to Y^{m'}_{\gamma,\delta'}$ ortogonal izdüşümdür. Yapıya göre, $g_1^{m'}$ FSL-dönüşüm olacaktır ve

$$\deg(g_1^{m'}) = \deg(g^{m'})$$

olduğu açıktır. Şimdi $\left\{`Y^{m'}_{\gamma,\delta'}\right\}$ ailesi $\left\{`Y^{m''}_{\gamma,\delta',\delta''}\right\}$ paralel düzlemler ailesine parçalansın. $\left\{`Y^{n'}_{\beta,\beta'}\right\}$ ailesi de paralel düzlemlerden oluştuğundan bu aileler kesiştirilebilir. Bu kesişim ailesi $\left\{Y^l_\eta\right\}$ ile gösterilsin. $g_1^{m'}$ FSL-dönüşümüne $\left\{Y^l_\eta\right\}$ ailesinde bakılsın. O zaman $g_1^{m'}$, FL-dönüşüm olacaktır. $g_1^{m'}$ dönüşümü, g_1^l olarak gösterilsin.

$$\left\{Z^l_\eta : Z^l_\eta = g_1^l(Y^l_\eta)\right\}$$

sürekli ailesi ele alınsın. Herhangi bir $Z^{m'}_{\delta_0,\delta_0'}$ düzlemi belirtilsin ve diğer $Z^{m'}_{\delta,\delta'}$ düzlemleri bu düzlem üzerine ortogonal olarak izdüşürülsün. Bu durumda $\{Z^{l}_{\eta}\}$ ailesi de $Z^{m'}_{\delta_0,\delta_0'}$ düzlemi üzerine izdüşürülecektir ve sonuç olarak $Z^{m'}_{\delta_0,\delta_0'}$ düzleminde $\{{}^{`}Z^{l}_{\eta}\}$ sürekli ailesi bulunur. $\{{}^{`}Z^{l}_{\eta}\}$ ailesine $Z^{m'}_{\delta_0,\delta_0'}$ düzleminde yukarıdaki yapılara benzer olarak ($B_3(R^1)\cap Z^{m'}_{\delta_0,\delta_0'}$ bölgesinde) $\{{}^{``}Z^{l'}_{\eta,\eta'}\}$ paralel düzlemler ailesi ile yaklaşılsın. Tüm $Z^{m'}_{\delta_0,\delta_0'}$ düzlemi ${}^{``}Z^{l'}_{\eta,\eta'}$ l' – koboyutlu paralel düzlemlere parçalansın. Sonra bu parçalanma ortogonal izdüşüm kullanılarak tüm $Z^{m}_{\delta,\delta'}$ düzlemlerine geçirilebilir ve bu şekilde bulunan paralel düzlemler ailesi de $\{Z^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'}\}$ ile gösterilsin. Bu durumda $g^{m'}_1$ dönüşümü, kendisine yeteri kadar yakın olan $g^{m'}_2$ dönüşümü ile yerdeğiştirebilir. O zaman $g^{m'}_2$ dönüşümü de FSL-dönüşüm olacaktır ve $g^{m'}_1$ gibi aynı düzlemler arasında afin izomorfizm olacaktır. Yapıya göre,

$$\deg(g^{m'}_1) = \deg(g^{m'}_2)$$

olur.

Şimdi

$$\{Y^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'} : Y^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'} = (g^{m'}_2)^{-1}(Z^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'})\}$$

ailesi ele alınsın. $g^{m'}_2$, bu aile ile $\{Z^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'}\}$ ailesi arasında FSL-dönüşüm olacaktır. Bu durumda $g^{m'}_2$ dönüşümü, $g^{l'}$ ile gösterilsin. O zaman

$$\deg(g^{m'}_2) = \deg(g^{l'})$$

olduğu açıktır.

Şimdi

$$\left\{X^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'} : X^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'} = (f_1^{n'})^{-1}(Y^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'})\right\}$$

ailesi ele alınsın. $f_1^{n'}$ dönüşümü $\left\{X^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'}\right\}$ ve $\left\{Y^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'}\right\}$ aileleri arasında FSL-dönüşüm olacaktır. Bu durumda $f_1^{n'}$ dönüşümü $f^{l'}$ ile gösterilsin. Yukarıdakilere göre

$$\deg(f_1^{n'}) = \deg(f^{l'})$$

olur.

$\left\{X^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'}\right\}$, $\left\{Y^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'}\right\}$ ve $\left\{Z^{l'}_{\delta,\delta',\eta,\eta'}\right\}$ ailelerinin bazları sırasıyla $M_{l'}$, $N_{l'}$ ve $L_{l'}$ olarak alınsın. O zaman tanıma göre;

$$\deg(f^{l'}) = \deg(f_{l'})$$
$$\deg(g^{l'}) = \deg(g_{l'})$$

olur. Yapıya göre $h^{l'} = g^{l'} \circ f^{l'}$ FSL-dönüşüm olacaktır. Bunun doğurduğu sonlu boyutlu dönüşüm

$$h_{l'} : M_{l'} \to L_{l'}$$

ile gösterilsin. Yapıya göre

$$h_{l'} = g_{l'} \circ f_{l'}$$

olduğu açıktır. Buradan ise

$$\deg(h_{l'}) = \deg(g_{l'}).\deg(f_{l'})$$

bulunur. O halde

$$\deg(h^{l'}) = \deg(g^{l'}).\deg(f^{l'})$$

olur.

f^{n} FSL-dönüşümü f dönüşümüne, g^{m} FSL-dönüşümü g dönüşümüne yeteri kadar yakın ise yapıya göre $h^{l'}$ FSL-dönüşümü de Ψ dönüşümüne yeteri kadar yakın olur. Bundan dolayı

$$\deg(f) = \deg(f^{n})$$
$$\deg(g^{m}) = \deg(g)$$
$$\deg(h^{l'}) = \deg(\Psi)$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikler gözönüne alınırsa

$$\deg(\Psi) = \deg(g).\deg(f)$$

olduğu bulunur.

KAYNAKLAR

1. ABBASOV, A.G., 1985. FSQL-Otobrajekiye i yego stepen. Ser. Fiz-Teh. i Mat. Nauk., No:2. İzv.AN Azerb. SSR.

2. BESSAGE, C., 1966. Every İnfinite Dimensional Hilbert Space is Diffeomorphic with its Unit Sphere. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., Vol 14, p. 27-31.

3. BROWDER, F., 1968. Topology and Non-Linear Functional Equations. Studia Math. Vol 31, Part 2, p. 189-204.

4. FRUM, R.L., KETKOV., 1970. On Mappings in Hilbert Space. Dokl. Akad. Vol 192, Part 6, p. 1231-1234. Nauk, SSSR.

5. HİRSCH, M.W., Differential Topology. 1976. Springer-Verlag.

6. LERAY, J., et SCHAUDER, I., 1934. Topologic et Equations Fonctionnelles. Annales de I'Ecole Norm., sup., T.13, p. 45-78.

7. LLYOD, N.G., Degree Theory. 1978. Cambridge University Press.

8. MİLNOR, I.W., Topology from the Differentable Viewpoint. 1965. Princeton Univercity.

9. RUDİN, W., Functional Analysis. 1973. New York.

10. THRELFALL, W., Topologiya. 1938. Moskov.

11. SHNİRELMAN, A.I., 1972. The Degree of Quasi-Linear Mapping and Non-Linear Problem of Hilbert. Math. Sb., Vol 89(131). Part 3. p. 366-389.

12. WALLESE, A.H., Differential Topology. 1968. Univercity of Pennsylvania.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Bursa'da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Bursa'da tamamladı. 1990 yılında girdiği Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1994 yılında Matematikçi olarak mezun oldu.

1994 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebıyat Fakültesi Matematik Bölümü Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.