

**153618**

**SABİT HIZ ALANINDA ZAMANA BAĞLI ÜÇ BOYUTLU  
KONVEKSİYON – DİFÜZYON DENKLEMİNİN  
ÇÖZÜMÜ**

**Yüksek Lisans Tezi  
Makine Müh. Müslüm ARICI**

**Ana Bilim Dalı : Makina Mühendisliği**

**Danışmanı: Prof. Dr. H. Şinasi ONUR**

**Haziran 2004**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SABİT HIZ ALANINDA ZAMANA BAĞLI ÜÇ BOYUTLU  
KONVEKSİYON – DİFÜZYON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Mak. Müh. Müslüm ARICI**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04 Haziran 2004**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Haziran 2004**

**Tez Danışmanı**

**Prof. Dr. H. Şinasi ONUR**

(.....)

**Üye**

**Prof. Dr. H. İbrahim SARAC**

(.....)

**Üye**

**Prof. Dr. H. Rıza GÜVEN**

(.....)

**Haziran 2004**

# SABİT HIZ ALANINDA ZAMANA BAĞLI ÜÇ BOYUTLU KONVEKSİYON DİFÜZYON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Müslüm ARICI

**Anahtar Kelimeler :** Konveksiyon – difüzyon denklemi, Sonlu Hacimler Yöntemi

**Özet :** Bu çalışmada üç boyutlu, zamana bağlı konveksiyon - difüzyon denklemi çözülmüştür. Başlangıç anında, küp şeklindeki bir bölge içinde konsantrasyonu %100 olan dumanın konveksiyonla taşınırken difüzyon ile de yayılması birlikte incelenmiştir. Belli bir zaman sonra çözüm bölgesindeki dumanın konsantrasyonunu tespit etmek için Fortran 77 programlama dilinde bir program yazılmıştır. Konveksiyon-Difüzyon denklemi Sonlu Hacimler Yöntemi ile ayrıştırılmıştır. Ayrıştırılan enerji denklemi, birinci mertebeden upwind (FOU), ikinci mertebeden upwind (SOU), merkezi farklar (CDS) ve QUICK yaklaşımları ile çözülmüş ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Yukarıda bahsi geçen yaklaşımlar kullanılarak elde edilen sonuçların doğruluğu ise aynı problemi çözen uluslar arası bilimsel bir dergide yayınlanmış bir makaledeki sonuçlarla karşılaştırılarak test edilmiş ve sonuçların hemen hemen aynı olduğu görülmüştür.

# **A SOLUTION OF THE TIME DEPENDENT THREE DIMENSIONAL CONVECTION-DIFFUSION EQUATION IN THE CONSTANT VELOCITY FIELD**

**Müslüm ARICI**

**Keywords :** Convection – diffusion equation, The Finite Volume Method

**Abstract :** In this study, a three dimensional, time dependent convection-diffusion equation was solved. The distribution of concentration of a cube shaped pollutant, the concentration of which is 1 at the initial instant, was examined. When the pollutant was transported by convection, at the same time it diffused. In order to determine the concentration of pollutant in the solution domain, a computer program was written in Fortran 77 programming language. The convection-diffusion equation was discriminated by the Finite Volume Method. The reason why this method was chosen, was that it provides mass conservation together with energy and momentum conservations. The discriminated convection-diffusion equation was solved by the first upwind scheme (FOU), the second order upwind scheme (SOU), central difference scheme (CDS) and quadratic upwind interpolation for convective kinematics (QUICK) scheme and the present results were compared with analytical results.

The accuracy of the program, in which the schemes mentioned above were used, was tested by comparing with the results of an article, that solved the same problem and that was published in an international scientific journal. It was seen that the results of our program were almost the same as the results of that article.

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Gelişen teknoloji ile önemi artan sayısal yöntemlerle akışların ve ısı transferinin simülasyonu, kara, hava ve deniz araçları endüstrisinde, soğutma kulelerinde, yangın ihtimali ve güvenliğinin sağlanmasında, tıpta ve sanayinin daha bir çok alanında yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Çoğu problemin analitik çözümünün olmaması ve teorik çözümü olmayan problemlerin deneysel olarak incelenmesindeki zorluklar, zaman ve maliyet faktörleri de dikkate alındığında hesaplamalı akışkanlar mekaniği (CFD)'nin önemini tahmin etmek mümkündür.

Özellikle gelişmiş ülkelerde hemen hemen her üniversitede CFD konusunda çalışan bilim adamlarından oluşmuş bir ekip olduğunun farkına varmış birisi olarak, bana kariyerim açısından bu güncel konuda çalışma olanağı sağlayan, değerli bilgilerinden faydalandığım, desteklerini esirgemeyen tez danışman hocam sayın Prof. Dr. Hüseyin Şinasi ONUR'a ve her zaman yanımda olan değerli hocalarım sayın Yrd.Doç.Dr. Hasan KARABAY'a ve Dr. Müh. Mustafa SEÇİLMİŞ'e teşekkürlerimi sunarım.

Müslüm ARICI  
Kocaeli, Haziran 2004

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	ii
ABSTRACT .....	iii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR .....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR .....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	ix
TABLolar DİZİNİ .....	xi
BÖLÜM 1. GİRİŞ .....	1
1.1. Sayısal Yöntemler .....	2
1.2. Modern Mühendislikte Sayısal Yöntem Uygulamaları .....	3
1.2.1. Uzay ve havacılıkta CFD .....	4
1.2.2. Otomotiv sanayisinde CFD .....	5
1.2.3. Tıpta CFD .....	5
1.2.4. Gemi ve denizaltılarda CFD .....	6
1.2.5. Dökümde ve kaynakta CFD .....	7
1.2.6. Endüstride diğer alanlarda CFD .....	7
1.3. Amaç .....	8
BÖLÜM 2. TEMEL HAREKET DENKLEMLERİ .....	10
2.1. Akışkanlar Mekaniğinde Kullanılan Taşınım Denklemleri .....	10
2.2. Genel Hareket Denklemlerinin İncelenmesi .....	10
BÖLÜM 3. AĞ SİSTEMİ .....	14
3.1. Ağ Sisteminin Oluşturulması .....	14
3.2. Değişkenlerin Sıralanışında Karşılaşılan Temel Sorunlar .....	15
3.3. Kaydırılmış Değişkenli Ağ Sistemi (Staggered Grid) .....	18
3.4. Çakışık Değişkenli Ağ Sistemi .....	25

BÖLÜM 4. SONLU HACİMLER YÖNTEMİ .....	26
4.1. Kontrol Hacmi Formülasyonu .....	26
4.2. Sonlu Hacimler Yönteminin Tek Boyutlu Zamana Bağlı Isı İletimi Denklemine Uygulanması .....	28
4.3. İki ve Üç Boyutlu Difüzyon Problemlerinin Örtük Olarak Ayrıklaştırılması .....	31
BÖLÜM 5. KONVEKSİYON – DİFÜZYON .....	33
5.1. Sonlu Hacimler Yönteminin Bir Boyutlu Zamandan Bağımsız Konveksiyon Difüzyon Denklemine Uygulanması .....	33
5.2. Merkezi Farklar Yaklaşımı (Central Difference Scheme – CDS) .....	35
5.3. Birinci Mertebeden Upwind Yaklaşımı (First Order Upwind - FOU) .....	36
5.4. İkinci Mertebeden Upwind Yaklaşımı (Second Order Upwind – SOU) .....	38
5.5. Hibrid Yaklaşımı .....	39
5.6. QUICK Yaklaşımı .....	41
BÖLÜM 6. BASINÇ DÜZELTME ALGORİTMALARI .....	43
6.1. SIMPLE Algoritması .....	43
6.2. SIMPLER Algoritması .....	49
6.3. SIMPLEC Algoritması .....	50
6.4. PISO Algoritması .....	51
BÖLÜM 7. PROBLEMİN VE PROGRAMIN TANITILMASI .....	56
7.1. Problemin Tanıtılması .....	56
7.1.1. Problemin analitik çözümü .....	56
7.1.2. Problemin çözümünde kullanılan yöntemler .....	58
7.2. Cebirsel Denklem Sisteminin Çözümü .....	59
7.2.1. TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) çözüm algoritması .....	60
7.2.2. TDMA yönteminin üç boyutlu problemlere uygulanması .....	63
7.3. Bilgisayar Programının Tanıtılması .....	63
7.4. Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması .....	68
SONUÇLAR ve ÖNERİLER .....	74
KAYNAKLAR .....	75
ÖZGEÇMİŞ .....	76

## SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

$A_W$	: Kontrol hacminin batı yüzündeki alan
$A_E$	: Kontrol hacminin doğu yüzündeki alan
$A_S$	: Kontrol hacminin güney yüzündeki alan
$A_N$	: Kontrol hacminin kuzey yüzündeki alan
$A_B$	: Kontrol hacminin alt yüzündeki alan
$A_T$	: Kontrol hacminin üst yüzündeki alan
$a_w$	: Ayrıklaştırılmış enerji denkleminin batı yönündeki ana katsayı
$a_E$	: Ayrıklaştırılmış enerji denkleminin doğu yönündeki ana katsayı
$a_S$	: Ayrıklaştırılmış enerji denkleminin güney yönündeki ana katsayı
$a_N$	: Ayrıklaştırılmış enerji denkleminin kuzey yönündeki ana katsayı
$a_B$	: Ayrıklaştırılmış enerji denkleminin alt tarafındaki ana katsayı
$a_T$	: Ayrıklaştırılmış enerji denkleminin üst tarafındaki ana katsayı
$a_j, b_j, c_j, d_j$	: TDMA eşitlik katsayısı
$b$	: Ayrıklaştırılmış enerji denkleminde sabit terim
CDF	: Hesaplama akışkanlar mekaniği (Computational Fluid Dynamics)
CDS	: Merkezi farklar yaklaşımı
CV	: Kontrol hacmi
$D_w$	: Kontrol hacminin batı yönündeki difüzyon katsayısı
$D_e$	: Kontrol hacminin doğu yönündeki difüzyon katsayısı
$D_s$	: Kontrol hacminin güney yönündeki difüzyon katsayısı
$D_n$	: Kontrol hacminin kuzey yönündeki difüzyon katsayısı
$D_b$	: Kontrol hacminin alt tarafındaki difüzyon katsayısı
$D_t$	: Kontrol hacminin üst tarafındaki difüzyon katsayısı
FOU	: Birinci mertebeden upwind yaklaşımı
$F_w$	: Kontrol hacminin batı yüzündeki konveksiyon katsayısı
$F_e$	: Kontrol hacminin doğu yüzündeki konveksiyon katsayısı
$F_s$	: Kontrol hacminin güney yüzündeki konveksiyon katsayısı
$F_n$	: Kontrol hacminin kuzey yüzündeki konveksiyon katsayısı



$F_b$	: Kontrol hacminin alt yüzündeki konveksiyon katsayısı
$F_t$	: Kontrol hacminin üst yüzündeki konveksiyon katsayısı
$k$	: Isı iletim katsayısı
$p', u', v'$	: Sırasıyla gerçek basınç, yatay hız, düşey hız değeri ile tahmini değerleri arasındaki fark
$p^*, u^*, v^*$	: Sırasıyla tahmini basınç, yatay hız ve düşey hız değerleri
$P$	: Basınç
$Pe$	: Peclet sayısı
QUICK	: Kuadatik upwind yaklaşımı
$q_w$	: Kontrol hacminin batı yönündeki ısı akısı
$S$	: Genel kaynak terim
SOU	: İkinci mertebeden upwind yaklaşımı
$S_C$	: Lineerleştirilen kaynak teriminin sabit parçası
$S_P$	: Lineerleştirilen kaynak teriminin ana katsayı içerisine atılan parçası
$t$	: Zaman
$u, v, w$	: Sırasıyla X, Y, Z yönündeki hız
$\hat{u}, \hat{v}$	: Basınç düzeltme denkleminde sahte hızlar
$w, e, s, n, b, t$	: Kontrol hacmi sınırlarının nitelendirilmesi
$W, E, S, N, B, T$	: Kontrol hacmi ağ noktalarının nitelendirilmesi

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. 1946 ve 2000 yıllarında kullanılan bilgisayarlar .....	3
Şekil 1.2. Basınç dağılımının bir uçak üzerindeki dağılımının CFD ile analizi .....	4
Şekil 1.3 Bir araç üzerindeki hız dağılımının CFD ile analizi .....	5
Şekil 1.4 İklimlendirilen bir ortamda insan vücudu üzerinde sıcaklık dağılımı .....	6
Şekil 1.5. Bir denizaltının su içerisindeki hareketinin CFD ile analizi .....	7
Şekil 1.6. Dökümde sıvı metalin kalıp içerisindeki hareketinin CFD ile analizi .....	8
Şekil 3.1. Tek boyutlu kontrol hacmi .....	14
Şekil 3.2. Checker-board basınç alanı .....	16
Şekil 3.3. Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde kontrol hücrelerinin yerleşimi .....	18
Şekil 3.4. Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde u kontrol hacmi üzerinde hızların gösterimi .....	21
Şekil 3.5 Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde v – kontrol hacmi üzerinde hızların gösterimi .....	23
Şekil 4.1. Bir boyutlu kontrol hacmi .....	27
Şekil 5.1. Tek boyutlu bir kontrol hacmi .....	33
Şekil 5.2 Bir boyutlu kontrol hacmi üzerinde hızların yerleşimi .....	36
Şekil 6.1. Süreklilik denkleminin ayrıklaştırıldığı skaler kontrol hacmi .....	46
Şekil 6.2. SIMPLE algoritmasının akış şeması .....	48
Şekil 6.3. PISO algoritmasının akış şeması .....	55
Şekil 7.1. Üç boyutlu, zamandan bağımsız problemin gösterimi ve başlangıç şartları .....	57
Şekil 7.2. TDMA yönteminin iki boyutlu bir probleme n-s hattı boyunca uygulanması .....	61
Şekil 7.3. Üç boyutlu, zamana bağımlı benchmark probleminin farklı yaklaşımlarla çözümü. $Pe = 100$ , $T = 6$ ve akış z eksenine paralel iken .....	68
Şekil 7.4. Problemin farklı yaklaşımlarla (teorik, FOU, SOU, CDS, QUICK) çözümü $Pe = 100$ , $T = 6$ , akış z eksenine paralel .....	69

Şekil 7.5. Üç boyutlu, zamana bağımlı benchmark probleminin farklı yaklaşımlarla çözümü. $Pe = 150$ , $T = 6$ ve akış z eksenine paralel iken .....	70
Şekil 7.6. Problemin farklı yaklaşımlarla (teorik, FOU, SOU, CDS, QUICK) çözümü $Pe = 150$ , $T = 6$ , akış z eksenine paralel .....	71
Şekil 7.7. Üç boyutlu, zamana bağımlı benchmark probleminin farklı yaklaşımlarla çözümü. $Pe = 100$ , $T = 6$ , akış z ve y ekseninde $45^\circ$ açı ile hareket ederken .....	72
Şekil 7.8. Problemin farklı yaklaşımlarla (teorik, FOU, SOU, CDS, QUICK) çözümü $Pe = 100$ , $T = 6$ , akış z- ve y- ekseninde $45^\circ$ açı ile hareket ederken .....	73



## TABLolar DİZİNİ

Tablo 4.1. Belirli zaman ağırlık oranlarına göre integral sonuçları .....	29
Tablo 4.2. Denklem 4.20'daki katsayıların karşılıkları .....	32
Tablo 4.3. Denklem 4.20'deki $\Delta V$ teriminin açılımı .....	32
Tablo 5.1. Zamandan bağımsız konveksiyon – difüzyon denkleminin bir, iki ve üç boyutlu olduğu durumlarda hibrid yöntemi ile ayrıklaştırılmış haldeki katsayıları...	40
Tablo 7.1. Geometrik değişkenler .....	65
Tablo 7.2. Difüzyon, konveksiyon ve genel denklemdaki diğer katsayılar .....	66
Tablo 7.3. Programda kullanılan diğer terimler .....	67



## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Mühendislikte herhangi bir fiziksel olay (ısı geçişi, akışkanların hareketi vb.) teorik (analitik), deneysel ve sayısal yöntemler kullanılarak incelenebilir.

Fiziksel bir olayı incelemek için öncelikle fiziksel olayın matematiksel modeli oluşturulmalıdır. Modelin analitik çözümü varsa bu yöntem tercih edilir. Matematik model genel olarak diferansiyel denklemden veya diferansiyel denklem sisteminden oluşur. Geometrilerin basitleştirilip, gerektiğinde özel fonksiyonlar ve sonsuz serilerin kullanılmasına rağmen çoğu zaman bu diferansiyel sistemlerinin klasik yöntemlerle analitik çözümü bulunamaz. Fiziksel olayların ancak çok küçük bir bölümü analitik yöntemlerle çözülebilmektedir.

Deneysel yöntem, fiziksel olayların incelenmesinde kullanılan bir diğer yöntemdir. Bu yöntemde, fiziksel olayın aynı geometrik ve fiziksel ölçeklerde modellenmesi gerekmez. Farklı ölçekler kullanılabilir. Elde edilen sonuçlar benzerlik teorisinden yararlanılarak boyutsuz sayılar cinsinden genelleştirilebilir. Deneysel yöntemler ilk bakışta çok doğru sonuçlar verebilen en kolay yöntemmiş gibi görülse bile pratikte birçok zorlukları barındırdığı görülür. Bu zorluklardan bazıları, modelin yapımındaki zorluklar, ölçmelerdeki zorluklar, fiziksel koşulların sağlanamaması (örneğin çok yüksek ve çok düşük sıcaklık ve basınçlar gibi), incelenmesi istenilen değişkenlerin gözlemlenmesi ve ölçülmesindeki zorluklar ve daha bir çok zorluklar sayılabilir.

Sayısal yöntemler, son yıllarda özellikle bilgisayar alanındaki gelişmelere paralel olarak mühendisliğin her alanında kullanımını artıran bir bilim dalı haline gelmiştir. Bu alandaki çalışmalar teorik ve deneysel çalışmalara da kolaylık getirmiş, bilimsel çalışmalara zaman ve maliyet açısından katkı sağlamıştır.

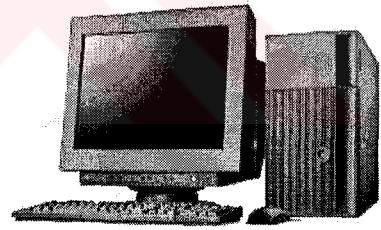
## 1.1. Sayısal Yöntemler

Sayısal çözüm yöntemlerinin temeli eskiden beri bilinmesine rağmen, temelde yüksek matematik işlemlerinin çok sayıda basit aritmetik işlemlere dönüştürülüp hesaplamının çok zaman almasından dolayı pek kullanılmıyordu. Akışkanlar mekaniğinde sayısal çözüm yöntemleriyle çözülen temel hareket denklemi olan Navier – Stokes denklemleri 20. yüzyıla kadar sadece teorik veya sadece deneysel çalışmalarla inceleniyordu. 1928’de Courant, Freidrich ve Levy tarafından CFD için geliştirilen sayısal yöntemler bu alan için büyük bir adım olmuştur. Daha sonra 1940’ larda Von Neumann ve Richtmeyer tarafından şok dalgalarını yakalayan yapay viskozite geliştirilmiştir. II. Dünya Savaşı’nda savaş teknolojisine olan ihtiyaçtan dolayı bilgisayarların gelişmesi ile sayısal yöntemler yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanılmış, 1960’larda iki boyutlu problemlerin çözümünde çok iyi sonuçlar verecek şekilde sayısal yöntemler geliştirilmiş, günümüzde ise bilgisayar alanındaki hızlı gelişmelerle sadece mühendisliğin her alanlarında değil, tıpta da çok yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanılmıştır.

Sayısal yöntemler ile yapılan hesaplamaların en büyük avantajı düşük maliyeti ve kısa bir zamanda sonuçları elde etmededir. Çoğu uygulamalarda, bilgisayarların maliyeti aynı matematik modelin çözümünde kullanılacak olan deneysel çalışmalara göre çok daha düşüktür. Deneysel çalışmalarda modeli oluşturma süreci, geometrinin karışıklığına ve ölçülmek istenen parametrelerin ölçümündeki zorluklara paralel olarak artarken, sayısal çözümleri uygulamak için kullanılan bilgisayarların her gün biraz daha geliştirilmesiyle, dört boyutlu (üç mekan, bir zaman), daha sık ağ ve daha küçük zaman adımları için bile kısa bir sürede çözüm verebilmektedir.

Matematik modeli oluşturan diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için yazılan bilgisayar programında bazı parametreleri sabit tutarak veya incelenecek parametre haricindeki diğer bütün değişkenler için sonuçları etkilemeyecek şekilde kabuller yaparak, deneysel çalışmalara kıyasla çok kısa bir sürede farklı kombinasyonlar denenebilir ve özellikleri incelenen parametre (hız, basınç, konsantrasyon vb.) hakkında detaylı bir fikir edinilebilir.

Sayısal yöntemlerin yukarıda anlatılan avantajlarına karşın dezavantajları da vardır. Yeterli matematik tanımlama yazılamayan matematik modellerde (karışık türbülanslı akışlar, bazı iki fazlı akışlar vb.) ise sayısal yöntemler sonuçlarında hata payı yüksek, dolayısıyla gerçek sonuçlardan uzak olabilir. Bu durumda yazılan programı test etmek amacıyla program, analitik çözümü olan bir probleme uygulanır, elde edilen sonuçlar analitik çözümle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılıp programın güvenilirliği hakkında daha net bir fikir edinilebilir. Matematik modeli oluşturan denklem takımlarının analitik çözümleri bulunamıyorsa, deneysel çalışmalar yapılır ve sayısal çözümle elde edilen sonuçlarla deneysel sonuçlar karşılaştırılır. Yukarıda anlatılan bilgiler ışığında, herhangi bir fiziksel olay için bir yöntem seçilirken, diğer yöntemlerin kesinlikle ihmal edilmemesi gerektiği görülür.



Şekil 1.1. 1946 ve 2000 yıllarında kullanılan bilgisayarlar

## 1.2. Modern Mühendislikte Sayısal Yöntem Uygulamaları

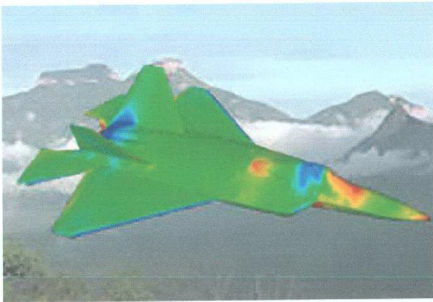
Yukarıda da bahsedildiği üzere sayısal yöntemler mühendisliğin her alanında kullanılmaktadır. Aşağıda sadece konuyla ilgili olan akışkanların hareketini, akış boyunca sıcaklık, basınç, hız, konsantrasyon gibi parametrelerin özelliklerini sayısal yöntemlerle çözen hesaplamalı akışkanlar mekaniği (Computational Fluid Dynamics CDS) olarak adlandırılan yöntemin mühendislik alanlarındaki kullanımını anlatılmıştır.

Maliyet ve zaman faktörleri göz önüne alınarak yapılan bir değerlendirmede CFD diğer yöntemlere kıyasla çok daha avantajlı olduğundan, özellikle son yıllarda bilgisayarların gelişmesiyle bütün mühendislik alanlarında yaygın bir şekilde kullanılan bir bilim dalı haline gelmiştir. Aşağıda CFD' nin bazı alanlardaki uygulamaları ve sağladığı avantajlardan bahsedilmiştir.

### 1.2.1. Uzay ve havacılıkta CFD

Bir uzay aracının milyonlarca dolara mal olduğu, her bir uçağın sadece havalanıp inmesi için binlerce dolar para harcandığı ve bunların optimum dizaynı için bir çok deneme yapılması gerektiği dikkate alındığında, sayısal yöntemlerle simülasyonu yapılmış bir uzay veya hava aracının maliyet açısından ne kadar avantaj sağladığı açıkça görülebilir. Ayrıca, CFD

- Yolcu ve mürettebat için havalandırma, soğutma ve ısıtma gibi konfor şartlarının belirlenmesinde,
- Mach sayısının geçilmesi durumunda değişecek fiziksel parametrelerin değişiminin incelenmesinde,
- Hava veya uzay aracı üzerinde etkili olan kuvvetlerin ilgili parametrelerle değişiminin incelenip, daha yüksek hız ve daha düşük yakıt tüketimi için optimum dizaynında kullanılır.



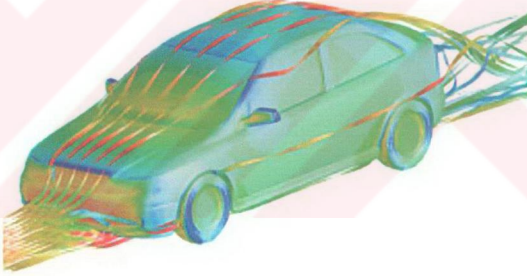
**Şekil 1.2.** Basınç dağılımının bir uçak üzerindeki dağılımının CFD ile analizi



### 1.2.2. Otomotiv sanayisinde CFD

Otomotiv sanayisinde CFD,

- Silindirlerde yanmanın homojen olacak gerçekleşmesini sağlayıp vuruntuların engellenmesinde, daha az yakıt tüketimi ve daha verimli yanma için yanma odası dizaynında,
- Araç üzerindeki basınç dağılımının incelenerek araç üzerinde rüzgarın etkisini minimize eden bir tasarımda,
- Fren sisteminin güvenilirliğinin test edilmesinde,
- Yanma odasındaki yakıt/hava oranı dikkate alınarak yanma sonucu atmosfere atılan egzoz emisyonlarının azaltılmasında,
- Minimum enerjyle havanın iklimlendirilip araç içindeki hareketi incelenerek yolcu ve mürettebat için maksimum konfor sağlanmasında kullanılır.



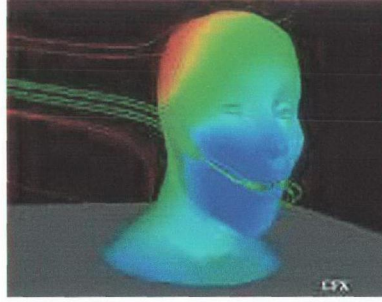
Şekil 1.3. Bir araç üzerindeki hız dağılımının CFD ile analizi

### 1.2.3. Tıpta CFD

Son yıllarda CFD sadece mühendislik alanlarında değil, tıpta da çok farklı şekillerde uygulanmaya başlanılmıştır. Tıp alanında CFD,

- Oksijenin damarlara ve akciğerlere taşınmasının incelenmesinde,
- Kan pompalandığında damarlardaki genişleme ve daralmanın incelenmesinde,

- İklimlendirilen bir ortamda insan vücudu üzerindeki sıcaklık dağılımı incelenerek, sağlığı tehdit edecek sorunların ortadan kaldırılmasında kullanılır.



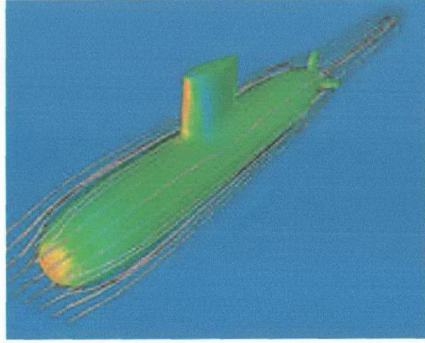
**Şekil 1.4.** İklimlendirilen bir ortamda insan vücudu üzerinde sıcaklık dağılımı

#### **1.2.4. Gemi ve denizaltılarda CFD**

Özellikle II. Dünya Savaşı'nda denizaltıların fanlarından çıkan gürültülerden koordinatları ve hangi ülkeye ait oldukları belirlenip kısa bir süre içerisinde imha edildikleri düşünülürse, bu alanda yapılan çalışmaların önemi daha net anlaşılabilir.

Bu alanda CFD,

- Gürültüyü azaltmada,
- Titreşimi azaltmada,
- Gemi gövdesinde veya denizaltı üzerinde suyun uyguladığı basınç dağılımının incelenmesinde,
- Kompresör, fan gibi ekipmanlarının dizaynında kullanılır.



**Şekil 1.5.** Bir denizaltının su içerisindeki hareketinin CFD ile analizi

### 1.2.5. Dökümde ve kaynakta CFD

Döküm ve kaynakta, CFD

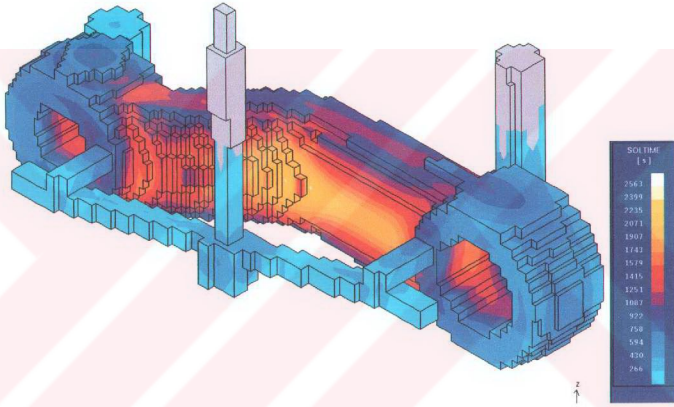
- Sıvı haldeki metalin kalıp içerisindeki hareketinin incelenerek döküm hatalarını azaltmada,
- Dökümde ve kaynakta katılaşmanın ne hızla ve nasıl olacağını belirlemede,
- Metallerin kaynağında alevin ne hızla ve nereden üfleneceği, gaz altında kaynak bölgesinde sıcaklık dağılımının incelenerek hatasız bir kaynak yapmada,
- Dökümden sonra kristalleşmenin aynı yönde ve tek bir tanecik halinde katılaşması sağlanarak mukavemeti çok yüksek olan parçaların dökümünde kullanılır.

### 1.2.6. Endüstride diğer alanlarda CFD

Yukarıda verilen örnekler haricinde endüstride CFD daha bir çok alanda farklı şekillerde kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

- Elektrik mühendisliğinde mikroişlemcilerin soğutulmasında,
- Kimya mühendisliğinde kimyasal proseslerde,
- Çevre mühendisliğinde baca gazlarının çevreye yayılmasının incelenmesinde,
- Meteorolojide hava tahminlerinde,

- Türbo şarj makinelerinde rotor içerisindeki akışın ve rotorla stator arasındaki basıncın incelenmesinde,
- Yangın ve güvenlikte,
- Klima dizaynında ve seçiminde,
- Hidrolikte,
- Soğutma kulelerinde,
- Kasırğa ve hortumların incelenmesinde kullanılmaktadır.



**Şekil 1.6.** Dökümde sıvı metalin kalıp içerisindeki hareketinin CFD ile analizi

### 1.3. Amaç

Günümüzde CFD problemlerini çözen kullanımı için lisans alınması gereken Star-CD, Fluent, PHONEICS, Flowcode, CFD++, CFX, CFDRX gibi bir çok paket program vardır. Paket programlarda probleme uygun gerekli veriler girilerek ve uygun yöntem seçilerek çözüm elde edilir. Programın çözüm algoritması görülemediği için, sonuçların doğruluğu ve hassasiyeti şüphelidir. Paket programlar problemi çözemediklerinde, kullanıcıyı uyarmadan algoritma değiştirip, istenilen yöntemden daha farklı bir yöntem kullanarak, gerçekten uzak sonuçlar verebilir.

problemi çözemediklerinde, kullanıcıyı uyarmadan algoritma değiştirip, istenilen yöntemden daha farklı bir yöntem kullanarak, gerçekten uzak sonuçlar verebilir. Örneğin daha ilerideki bölümlerde anlatılacak olan upwind yaklaşımı için “Upwind yaklaşımı hakkında iki şey söylenir. “Birincisi ve iyisi; bu yöntem her Reynolds sayısı için sonuç verir, ikincisi ve kötü alanı; Reynolds değeri ne olursa olsun sonuç aynıdır.” Paket programların algoritmaları sonuç vermek üzere yazıldığından, problemin çözümlü için kullanılması gereken program yetersiz olduğunda farklı bir algoritma kullanıp sonuçları verebilir.

Bu çalışmanın amacı, yukarıda önemi ve geniş bir alanda uygulamaları anlatılan CFD’ nin temel denklemlerinden konveksiyon-difüzyon denklemini, sonlu hacimler yöntemini kullanarak 3 boyutlu ve zamana bağlı olarak çözen bir program geliştirmektir. Bu çalışmada yazılan program, konsantrasyonu 1 olan dumanın ( pür duman) kontrol hacmi içerisinde belli bir hızla ilerlerken, herhangi bir zamanda konveksiyon ve aynı zamanda difüzyonla dağılımını incelemek amacıyla yazılmıştır. Dumanın kontrol hacmi içerisindeki yayılımı incelenirken, birkaç farklı yöntem uygulanmış ve sonuçlar grafiğe dönüştürülerek yöntemler karşılaştırılmıştır. Uygulanan yöntemler Bölüm 5.’ de açıklanmış, sonuçlar ise TecPlot 9.2 paket program yardımıyla grafiklere aktarılarak son bölümde verilmiştir.

Dört boyutlu (3 mekan, 1 zaman) difüzyon- konveksiyon denklemini çözmek üzere yazılmış olan bu programın doktorada geliştirilmesi amaçlanmaktadır.

## BÖLÜM 2. TEMEL HAREKET DENKLEMLERİ

### 2.1. Akışkanlar Mekaniğinde Kullanılan Taşınım Denklemleri

Herhangi bir akışın incelenmesinde maddenin, momentumun ve enerjinin korunumu yasaları temel oluşturmaktadır. Matematiksel olarak bakıldığında karşımıza bir kısmi diferansiyel denklem sistemi çıkmaktadır. Taşınım denklemleri olarak ta adlandırılan bu denklemler bir fiziksel büyüklüğün, sıcaklık gibi bir skaler büyüklüğün veya hız gibi bir vektörel büyüklüğün taşınmasını ifade etmektedir. Newtonumsu, üç boyutlu, zamandan bağımsız ve sıkıştırılmayan türden akışkanların akışının eksiksiz olarak bilinebilmesi için akışkanın fiziksel özelliklerinden başka, vektörel bir büyüklük olan hızın (yatay hız U, düşey hız V ve üçüncü hız W), basınçın (P) ve sıcaklığın (T) bilinmesi gereklidir.

Aşağıda süreklilik, momentum ve enerji denklemleri verilmiştir.

### 2.2. Genel Hareket Denklemlerinin İncelenmesi

Üç boyutlu, zamana bağlı bir konveksiyon denkleminde kullanılan denklemler aşağıda verilmiştir [3]. Süreklilik Denklemi ;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

Momentum (Navier – Stokes) denklemleri ;

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (2.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{4}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad (2.3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{4}{3} \mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (2.4)$$

Enerji Denklemi;

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ = \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \rho T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \mu \Phi_v + \dot{q} \quad (2.5)$$

Yukarıdaki denklemde  $\dot{q}$  terimi bütün enerji üretimlerini (elektromanyetik, nükleer, kimyasal) göstermektedir,  $\Phi_v$  ise disipasyon fonksiyonu olup aşağıda tanımlanmıştır.

$$\Phi_V = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (2.6)$$

Konveksiyon problemlerinin çoğu sıkıştırılmaz, sabit özellikli akışlardır. Yukarıda verilen denklemler yoğunluğun sabit olduğu kabul edilerek, ayrıca kinematik viskozitenin  $\nu = \mu/\rho$  ve ısıl yayılım katsayısının  $a = k/\rho c_p$  olduğu hatırlatılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

Süreklilik denklemi;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

Momentum denklemleri;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.10)$$

Enerji denklemi;

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{c_p} \Phi_V + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \quad (2.11)$$



Yayınım (dissipasyon) enerjisi fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir.

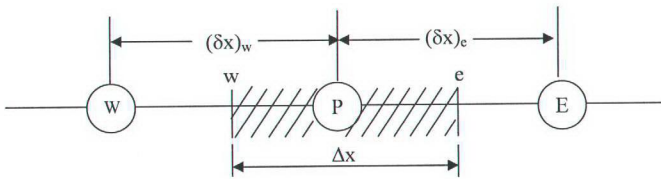
$$\Phi_v = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (2.12)$$

### BÖLÜM 3. AĞ SİSTEMİ

Sonlu hacimler yöntemi ile çözülecek olan enerji veya Navier – Stokes denklemlerinin üzerinde ayrıklaştırılacağı ağ sistemi kurulurken, ağ sisteminin hem fiziksel hem de sayısal yöntem açısından incelenmelidir. Örneğin her bir kontrol hacminde süreklilik denklemi sağlanırken , öte yandan oluşturulan ağın, çok karışık olmayan sayısal yöntemlerle hesaplanabilir bir ağ olması gerekir. Bilgisayar kapasitelerinin günümüzde bile türbülans modelleri gibi sık bir ağın kullanılması gereken problemler için sınırlı olduğu hatırlanırsa, basınç, hızın üç bileşeni, yoğunluk, sıcaklık gibi 3 ila 20 arasında parametrenin ağın her bir noktası için hesaplanması için ne kadar uzun bir süre gerektiği ve dolayısıyla ağ sisteminin ve sıklığının ne kadar önemli olduğu anlaşılabilir. Ayrıca problemin cinsine bağlı olarak uygun koordinat sistemi seçilmelidir. Bizim problemimize uygun olarak kartezyen koordinatlar seçilmiştir.

#### 3.1. Ağ Sisteminin Oluşturulması

Sayısal yöntemlerle çözülmek istenilen bir problem çözüm bölgesi içerisinde, istenilen hassasiyete ve çözüm süresine bağlı olarak belirli sayıda ağa bölünerek kontrol hacimleri elde edilir. Şekil 3.1.'de bir boyutlu kontrol hacmi görülmektedir.



Şekil 3.1. Bir boyutlu kontrol hacmi

Sadece bir boyutlu olarak verilen kontrol hacmi, ihtiyaç duyulduğunda benzer şekilde diğer ağ noktalarındaki parametreler için de yazılabilir. Ağ noktaları arasında bağlantı sorunları olabilir. Aşağıda karşılaşılan sorunlardan ve bu sorunları ortadan kaldırmak için alınan tedbirlerden bahsedilmiştir.

### 3.2. Değişkenlerin Sıralanışında Karşılaşılan Temel Sorunlar

İki boyutlu zamana bağlı olmayan bir akış için momentum denklemleri ve süreklilik denklemleri aşağıdaki gibidir. x – momentum denklemleri ;

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_U \quad (3.1)$$

y – momentum denklemleri ;

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} + S_V \quad (3.2)$$

Süreklilik denklemleri ;

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3.3)$$

Yukarıdaki denklemlerin çözümünde iki temel problemle karşılaşılır ;

- Momentum denklemlerindeki konvektif terimler lineer değildir.
- Yukarıdaki denklemlerde hız bileşenleri her iki momentum denkleminde ve süreklilik denkleminde gözükürken, basınç sadece momentum denkleminde vardır ve basınç için ayrıca bir hareket denklemleri veya başka bir denklemler yoktur.

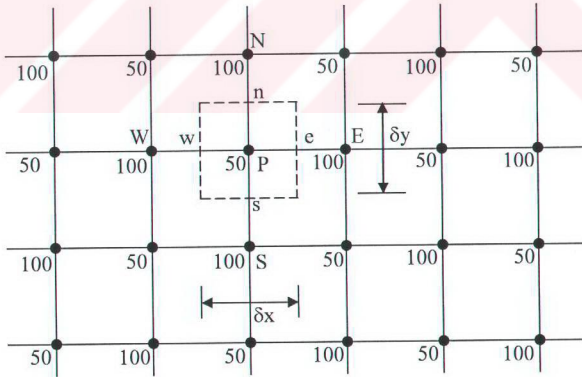
Bu sebeplerden dolayı momentum denklemlerinin çözümündeki en büyük sorun basınç terimlerindedir.

Genellikle akış hesaplarında çözümün bir parçası olarak basınçların da hesaplanması istenir. Basınç gradyeni ise önceden bilinir. Eğer akış sıkıştırılabilir ise süreklilik

denklemleri yoğunluk için ve yukarıdaki denklemlere ek olarak enerji denklemi de sıcaklık için hareket denklemi olarak yazılabilir. Bu durumda basınç, sıcaklık ve yoğunluk ilişkisinden bulunabilir. Ama eğer akış sıkıştırılmaz ise yoğunluk sabit olacak ve basınçla herhangi bir ilişkisi olmayacaktır. Bu durum ise denklemlerin çözümünü zorlaştırır.

Denklemlerdeki non-lineerlik ve hız – basınç arasındaki ilişki, ilk olarak Patankar ve Spalding (1972) tarafından geliştirilen SIMPLE algoritması ile çözülmüştür. Bu yöntem Bölüm 6.1’de ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

Momentum denklemlerinin çözümünde, oluşturulan ağda öncelikle hızların nerede bulunacağına karar verilmesi gerekir. Hızların basınç, sıcaklık gibi diğer değişkenlerle aynı noktada bulunması mantıklı gözükmesine rağmen, bu durumda üniform olmayan basınç, ayrıklaştırılmış momentum denkleminde üniformmuş gibi gözükebilir. Bu sorun Şekil 3.2.’de görülen iki boyutlu basit bir örnek ile daha açık bir şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Checker-board basınç alanı

Yukarıda çizilen ağdaki basınç değerlerini herhangi bir şekilde elde edildiği kabul edilsin. Buna göre u - momentum denkleminde basınç terimi lineer enterpolasyon ile ayrıklaştırılırsa,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_e}{P_w} = \frac{\left(\frac{P_E + P_P}{2}\right) - \left(\frac{P_P + P_W}{2}\right)}{\delta x} = \frac{P_E - P_W}{2\delta x} \quad (3.4)$$

ve benzer şekilde v - momentum denklemini için

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_N - P_S}{2\delta y} \quad (3.5)$$

ifadeleri elde edilir.

P noktasındaki basınç yukarıdaki her iki denkleminde de gözükmez. Bu durumda, basınç gradyenlerinin sıfır olduğu görülür. Sonuç olarak fiziksel bir anlamı olmamasına rağmen ayrıklaştırılmış momentum denkleminde basınç terimleri üniform olarak gözükabilir.

Basınçlar arasındaki bağlantı sorunu süreklilik denkleminin ayrıklaştırılmasında da görülür. Zamandan bağımsız bir boyutlu, sabit yoğunluklu bir akış için süreklilik denklemini aşağıdaki gibidir.

$$du/dx = 0 \quad (3.6)$$

Bu ifadenin Şekil 3.1. üzerinde integrasyonu sonucu

$$\frac{u_P - u_E}{2} - \frac{u_W + u_P}{2} = 0 \quad (3.7)$$

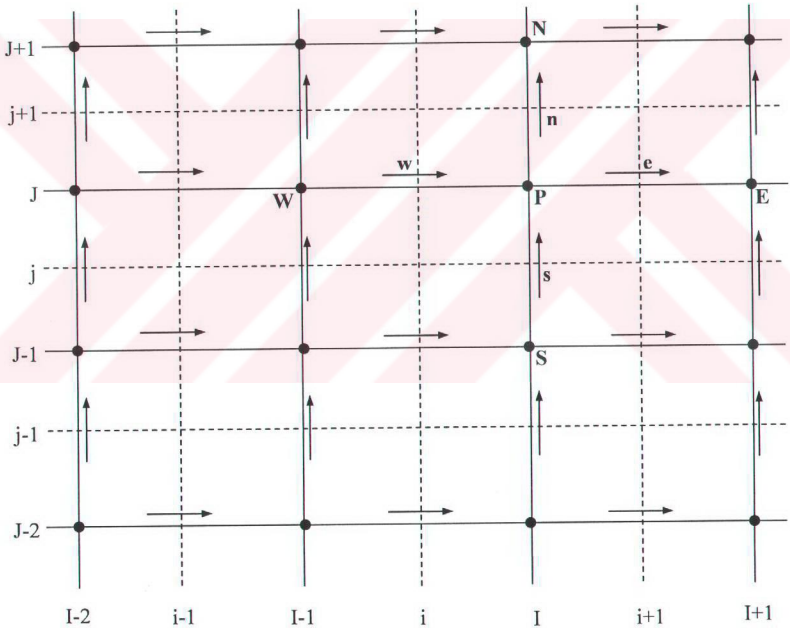
ve

$$u_E - u_W = 0 \quad (3.8)$$

ifadeleri elde edilir. Görüldüğü gibi süreklilik denkleminde yer alan hızlar ara noktalarındaki değil, düğüm noktalarındaki hızlardır. Bu durumda süreklilik denklemini sağlanmasına rağmen, fiziksel olarak mümkün olmayan sonuçlar elde edilebilir [11]. Aşağıdaki bölümde bu sorunu çözmek için geliştirilen ağ sistemleri anlatılmıştır.

### 3.3. Kaydırılmış Değişkenli Ağ Sistemi (Staggered Grid)

İlk defa Harlow ve Welch (1965) tarafından kullanılan bu yöntem, basit ve çok yaygın olarak kullanılır. Şekil 3.3.' de iki boyutlu kaydırılmış değişkenli bir ağ sisteminde değişkenlerin yerleştirildiği hücreler ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde kontrol hücrelerinin yerleşimi

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi basınçlar ( $\bullet$ ) şeklinde gösterilen kontrol hacminin merkezine, hızlar ise kontrol hacminin kenarlarında, düğüm noktaları arasına

yerleştirilmiş ve oklarla gösterilmiştir. Yatay oklar ( $\rightarrow$ ) u hızlarını, düşey oklar ( $\uparrow$ ) ise v hızlarını göstermektedir.

Skaler hücrelerde u hızları, hücre yüzeylerinin doğusuna (e) ve batısına (w), v hızı ise kuzeyine (n) ve güneyine (s) yerleştirilmiştir. Daha sonra görüleceği gibi basınç düzeltme denkleminin elde edilmesinde süreklilik denkleminde faydalanılır. Tüm hesaplar skaler hücrede yapıldığı için bu hücrelere “Basınç Kontrol Hücreleri” de denir. u ve v hücreleri ise skaler hücreden ve birbirlerinden farklıdır.

Kayıpılmış değişkenli ağ sisteminde, basınçlar u kontrol hücrelerinin ara yüzeylerinde (düğüm noktaları arasında) bulunmaktadır. Basınç gradyeni aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_p - P_w}{\delta x_u} \quad (3.9)$$

Burada  $\delta x_u$  u - kontrol hücresinin genişliğini göstermektedir. Benzer şekilde basınç gradyeni v-kontrol hücresi için,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_p - P_s}{\delta y_v} \quad (3.10)$$

yazılabilir. Burada  $\delta y_v$  ise v - kontrol hücresinin genişliğini göstermektedir.

Bu ağ sistemi kullanılarak bir önceki bölümde anlatılan değişkenler arasındaki bağ sorunu çözülmektedir. Önceki bölümde anlatılan checker – board örneği dikkate alınarak Denklem 3.9 ve Denklem 3.10 kullanıldığında, fiziksel anlamı olmayan sonuçların engellendiği ve sıfır olmayan basınç terimlerinin elde edildiği görülebilir. Bu yöntemin bir diğer avantajı, skaler kontrol hacim sınırlarında ihtiyaç duyulan kütlelesel akıların, doğrudan o noktalarda bulunan hızlardan hesaplanmasını mümkün kılması ve bu işlem için enterpolasyona gerek duymamasıdır. Ayrıca bu ağ sistemi kullanıldığında, hesaplama bölgesinin sınır kenarları boyunca, kenar sınır şartı olarak herhangi bir basınç değerine ihtiyaç duyulmaz.

Aşağıda kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde momentum denkleminin ayrıklaştırılması anlatılmıştır.

Şekil 3.3.'e göre ayrıklaştırılmış momentum denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$a_{i,j} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} - \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\delta x_u} \Delta V_u + \bar{S} \Delta V_u \quad (3.11)$$

veya

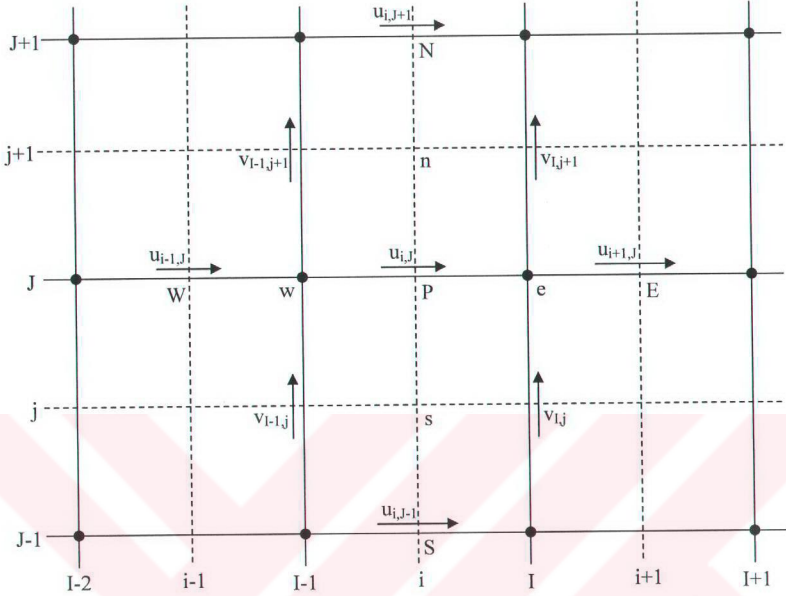
$$a_{i,j} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_{i-1,j} - p_{i,j}) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (3.12)$$

Yukarıdaki denklemde  $\Delta V_u$  u- hücrenin hacmini,  $b_{i,j} = S \Delta V_u$  momentum kaynak terimini ve  $A_{i,j}$  ise u- kontrol hacminin doğu (e) veya batı (w) hücrenin alanını göstermektedir. Denklem 3.12'de kaynak terim içerisindeki basınç terimi, u- kontrol hacmi sınırlarını arasında lineer enterpolasyon yapılarak ayrıklaştırılmıştır.  $\sum a_{nb} u_{nb}$  ifadesi ise komşu terimleri [(i-1,J), (i+1,J), (i,J+1),(i,J-1)] içermektedir. Bunların konumları Şekil 3.4.'te daha ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir.  $a_{i,j}$  ve  $a_{nb}$  terimlerinin katsayıları konveksiyon-difüzyon problemlerine uygun herhangi bir yöntemle hesaplanabilir (upwind, hybrid, QUICK vb.). Katsayılar u- kontrol hacmi yüzeylerinde kütleli debi (F) ve difüzyon iletkenlik (D) ifadelerini içerir. Aşağıda u- kontrol hacminin e, w, n ve s yüzeyleri için F ve D değerleri verilmiştir.

$$\begin{aligned} F_w = (\rho u)_w &= \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left( \frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-2,j}}{2} \right) u_{i-1,j} \right] \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$\begin{aligned} F_e = (\rho u)_e &= \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} \right] \end{aligned} \quad (3.13b)$$





Şekil 3.4. Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde u - kontrol hacmi üzerinde hızların gösterimi

$$\begin{aligned}
 F_s = (\rho v)_s &= \frac{F_{I,j} + F_{I-1,j}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I,j} + \rho_{I-1,j}}{2} \right) v_{I,j} + \left( \frac{\rho_{I-1,j} + \rho_{I-1,j-1}}{2} \right) v_{I-1,j} \right] \quad (3.13c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_n = (\rho v)_n &= \frac{F_{I,j+1} + F_{I-1,j+1}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I,j+1} + \rho_{I,j}}{2} \right) v_{I,j+1} + \left( \frac{\rho_{I-1,j+1} + \rho_{I-1,j}}{2} \right) v_{I-1,j+1} \right] \quad (3.13d)
 \end{aligned}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{l-1,j}}{x_i - x_{i-1}} \quad (3.13e)$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{l,j}}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.13f)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{l-1,j} + \Gamma_{l,j} + \Gamma_{l-1,j-1} + \Gamma_{l,j-1}}{4(y_j - y_{j-1})} \quad (3.13g)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{l-1,j+1} + \Gamma_{l,j+1} + \Gamma_{l-1,j} + \Gamma_{l,j}}{4(y_{j+1} - y_j)} \quad (3.13h)$$

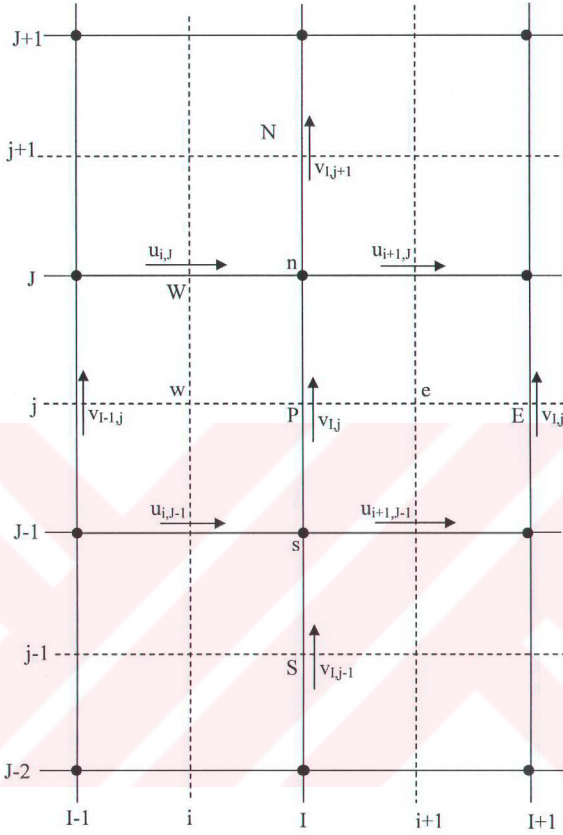
Denklem 3.13'de görüldüğü gibi skaler değişkenler veya hızlar hesaplanırken u-kontrol hücresi üzerindeki değerler kullanılır. Hesaplanmak istenen noktanın değeri, en yakınındaki değerleri bilinen iki veya dört noktanın ortalaması kullanılarak hesaplanır. Yukarıdaki ifadeler hesaplanılırken bir önceki iterasyonda elde edilen u ve v hızları, birinci iterasyonda ise ilk verilen başlangıç değerleri kullanılır.

Benzer ifadeler v- momentum denklemi için de yazılabilir.

$$a_{l,j} v_{l,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_{l,j-1} - p_{l,j}) A_{l,j} + b_{l,j} \quad (3.14)$$

Denklemdeki  $\sum a_{nb} v_{nb}$  ifadesi komşu terimleri içermekte olup aşağıdaki şekilde ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir.

Denklem 3.14' de  $a_{l,j}$  ve  $a_{nb}$  katsayıları, kütlelesel akış debisini gösteren F ve difüzyon iletkenlik D değerlerini içerir. Bu değerler u- momentum denklemine benzer bir şekilde elde edilir.



Şekil 3.5. Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde  $v$  – kontrol hacmi üzerinde hızların gösterimi

$$\begin{aligned}
 F_w = (\rho u)_w &= \frac{F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) u_{i,j} + \left( \frac{\rho_{i-1,j-1} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) u_{i,j-1} \right]
 \end{aligned} \tag{3.15a}$$

$$\begin{aligned}
F_e = (\rho u)_e &= \frac{F_{I+1,J} + F_{I+1,J-1}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I+1,J} + \rho_{I,J}}{2} \right) u_{I+1,J} + \left( \frac{\rho_{I,J-1} + \rho_{I+1,J-1}}{2} \right) u_{I+1,J-1} \right] \quad (3.15b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_s = (\rho v)_s &= \frac{F_{I,J-1} + F_{I,J}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I,J-1} + \rho_{I,J-2}}{2} \right) v_{I,J-1} + \left( \frac{\rho_{I,J} + \rho_{I,J-1}}{2} \right) v_{I,J} \right] \quad (3.15c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_n = (\rho v)_n &= \frac{F_{I,J-1} + F_{I,J}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\rho_{I,J} + \rho_{I,J-1}}{2} \right) v_{I,J} + \left( \frac{\rho_{I,J+1} + \rho_{I,J}}{2} \right) v_{I,J+1} \right] \quad (3.15d)
\end{aligned}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{I-1,J-1} + \Gamma_{I,J-1} + \Gamma_{I-1,J} + \Gamma_{I,J}}{4(x_I - x_{I-1})} \quad (3.15e)$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{I,J-1} + \Gamma_{I+1,J-1} + \Gamma_{I,J} + \Gamma_{I+1,J}}{4(x_{I+1} - x_I)} \quad (3.15f)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{I,J-1}}{y_J - y_{J-1}} \quad (3.15g)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{I,J}}{y_{J+1} - y_J} \quad (3.15h)$$

Her iterasyonda F değerleri bir önceki iterasyonda hesaplanan u ve v hızları kullanılarak hesaplanır. Verilen bir basınç alanı için, Denklem 3.12 ve Denklem 3.14' deki ayrıklaştırılan momentum denklemleri, her bir u- ve v- kontrol hacimleri için yazılabilir. Bu şekilde her bir kontrol hacmi için hızlar çözümlür. Elde edilen

hızlar süreklilik denklemini sağlıyorsa, basınç değerleri doğrudur. Eğer basınçlar bilinmiyorsa, basınç değerlerini hesaplamak için ayrıca bir yöntem ihtiyacı duyulur.

Bu ağ sisteminin dezavantajı ise fiziksel yapıdan daha çok algoritmik yapıya sahip olmasıdır. Farklı kontrol hacimlerinin kullanılması değişkenlerin zahmetli bir şekilde indislendirilmesini gerektirmektedir. Özellikle sınırlara yakın bölgelerde eksik düğüm noktaları nedeniyle ve ayrıca farklı kontrol hacim sınırlarından dolayı zahmetli algoritmalar kullanmak gerekir. Bu durum bilgisayar programının geliştirilmesi bakımından hataya müsait bir durum oluşturmaktadır.

### 3.4. Çakışık Değişkenli Ağ Sistemi

Kaydırılmış değişkenli ağ sistemine göre oldukça yeni olan çakışık değişkenli ağ sisteminde bütün değişkenler kontrol hacminin merkezinde bulunan P noktasında toplanmıştır. Kaydırılmış değişkenli ağ sisteminde olduğu gibi her bir değişken için ayrı bir kontrol hacmi kullanılmamakta, bütün değişkenler için sadece bir kontrol hacmi yeterli olmaktadır. Çakışık değişkenli ağ sisteminin kaydırılmış değişkenli ağ sistemine göre avantajları şöyle sıralanabilir.

- i - Bütün değişkenler bir noktada toplandığı için, sadece bir kontrol hacmi kullanmak yeterli olmaktadır.
- ii - Bütün değişkenler için konveksiyon teriminin ayrıklaştırılmış denklemdeki katsayısı aynıdır.
- iii - Karmaşık geometriler için kartezyen hız bileşenleri ortogonal olmayan koordinatlar yardımıyla basit denklemlerle ifade edilebilir.
- iv - Sayısal ağ olarak elde edilmesi zor olan terimlerin, mesela “eğrisel terimlerin” elde edilmesi basitleşmektedir ve üç boyutluya geçiş kolaylaşmaktadır [6].

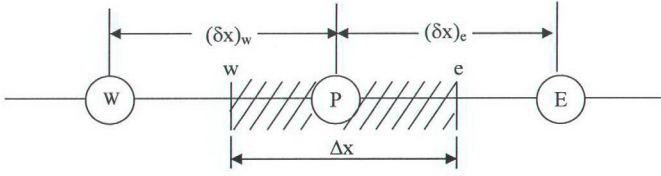
## BÖLÜM 4. SONLU HACİMLER YÖNTEMİ

Önceki bölümde anlatılan diferansiyel denklem sistemlerini çözebilmek için Sonlu Elemanlar Yöntemi, Sonlu Farklar yöntemi, Sonlu Hacimler Yöntemi gibi yöntemler kullanılır. Sonlu Elemanlar Yöntemi genellikle gerilme analizinde kullanılır. Sonlu Farklar ve Sonlu Hacimler Yöntemleri birbirine benzemektedir. Her iki yöntemde de akım bölgesi ağlara bölünmekte ve ağ noktalarındaki bağımlı değişkenler hesaplanmaktadır. Sonlu Farklar Yönteminde diferansiyel denklemlerden yola çıkılarak bu denklemlerin içerdiği diferansiyel paylar fark payları ile doldurularak hesaplama yapılırken, Sonlu Hacimler Yöntemi'nde ise her bir kontrol hacmi için korunum ifadesi oluşturulur ve değişkenlerin kafes noktaları arasındaki hareketi ile ilgili olarak uygun kabullerin yapılmasıyla, cebirsel fark ifadeleri elde edilir. Bu çalışmada kütle, momentum ve enerji korunumunu sağlayan Sonlu Hacimler Yöntemi tercih edilmiştir. Sonlu Hacimler Yöntemi ile denklemlerin ayrıştırılması bu bölümde ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır.

### 4.1. Kontrol Hacmi Formülasyonu

Bu açılım metodunda çözüm yapılacak bölge belirlenerek bir ağ sistemi oluşturulur. Ağ noktaları etrafında, birer kontrol hacmi oluşturularak diferansiyel denklem bu kontrol hacimleri üzerinde entegre edilir. Kontrol hacimleri birbirlerini takip ederek dizilir ve komşu kontrol hacimlerinin birer yüzeyleri ortaktır. Böylelikle, arada hiç boşluk bırakılmamış olur. Problemin çözüm bölgesine göre gerekirse önce kontrol hacimleri oluşturularak sonra ağ sistemi bunun içerisine yerleştirilebilir. Ayrıca gerektiğinde bazı bölgelerde kontrol hacimlerinin ölçüleri birbirlerinden farklı alınabilir.

Şekil 4.1.' deki kontrol hacmi için Denklem 4.1' de verilen tek boyutlu bir ısı transfer denklemi çözümlenerek denklemin ayrıştırılması incelenmiştir.



**Şekil 4.1.** Bir boyutlu kontrol hacmi

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{k_e}{(\delta x)_e} (T_E - T_P) - \frac{k_w}{(\delta x)_w} (T_P - T_W) + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (4.2)$$

Burada  $\bar{S}$ ,  $S'$  in kontrol hücresi üzerindeki ortalama değeridir. Eğer  $S$ ,  $T'$  ye bağlı bir değişken ise bu terimin lineer olması gereklidir. Bu terim lineer değil ise lineer hale getirmek için iki parçaya bölerek aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\bar{S} = S_c + S_p T_p \quad (4.3)$$

Burada  $S_c$  denklemin sabit parçası,  $S_p T_p$  ise denklemin katsayısıdır. Denklem 4.2 düzenlenip aşağıdaki genel formda yazılabilir.

$$A_p T_p = A_E T_E + A_W T_W + b \quad (4.4)$$

Yukarıdaki denklemde:

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e}, \quad (4.5)$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w}, \quad (4.6)$$

$$a_p = a_E + a_W - S_p \Delta x, \quad (4.7)$$

$$b = S_c \Delta x \quad (4.8)$$

Denklem 4.4 kontrol hacmi formülasyonunda kullanılan en genel formdur.

#### 4.2. Sonlu Hacimler Yönteminin Tek Boyutlu Zamana Bağlı Isı İletimi Denklemine Uygulanması

Bir boyutlu zamana bağlı olmayan ısı transfer denkleminin ayrıklaştırılması önceki bölümde incelenmişti. Bu bölümde ise Denklem 4.1'e zamana da ilave ederek sonlu hacimler metoduyla ayrıklaştırılması anlatılmıştır.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S \quad (4.9)$$

Şekil 4.1.'de gösterilen kontrol hacmini dikkate alarak kontrol hacmini boyunca ve t anından t + Δt anına kadar integrali alınıp düzenlenirse

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} S dV dt \quad (4.10)$$

$$\int_w^e \left[ \int_t^{t+\Delta t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dV = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt \quad (4.11)$$

bulunur.

Yukarıdaki denklemde A kontrol hacminin yüzey alanını, ΔV hacmini (ΔV=Adx) göstermektedir. dx ise kontrol hacminin kalınlığıdır ve  $\bar{S}$  kontrol hacmi içerisinde üretilen enerjiyi göstermektedir. Denklem 4.11 'in sol tarafı çözülmüşe aşağıdaki ifade elde edilir.



$$\int_{CV} \left[ \int_t^{t+\Delta t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dV = \rho c (T_p - T_p^o) \Delta V \quad (4.12)$$

Denklem 4.12’de üst indis “o” t zamanındaki sıcaklığı gösterir, t + Δt zamanındaki sıcaklık için ise herhangi bir indis kullanılmamıştır. Denklem 4.11’ in sağ tarafındaki difüzyon terimlerinin kontrol hacmi boyunca integrali alınmıştır.

$$\rho c (T_p - T_p^o) \Delta V = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( k_e A \frac{T_E - T_p}{(\delta x)_e} \right) - \left( k_w A \frac{T_p - T_w}{(\delta x)_w} \right) \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt \quad (4.13)$$

Bu denklemin sağ tarafındaki terimlerin integrali alınırken  $T_p$ ,  $T_E$  ve  $T_w$  ’in zamanla değişimi için bir kabul yapmak gerekir. t anındaki veya t + Δt anındaki sıcaklıkları veya her iki zaman adımıdaki (t ve t + Δt) sıcaklıklarının kombinasyonunu kullanmak gerekir. Bunun için zaman adımları arasında θ gibi bir ağırlık oranı kullanarak aşağıdaki genel formül yazılabilir.

$$I_T = \int_t^{t+\Delta t} T_p dt = [\theta T_p + (1 - \theta) T_p^o] \Delta t \quad (4.14)$$

**Tablo 4.1.** Belirli zaman ağırlık oranlarına göre integral sonuçları

θ	0	1/2	1
$I_T$	$T_p^o \Delta t$	$1/2 (T_p + T_p^o) \Delta t$	$T_p \Delta t$

$I_T$  integralinde ; eğer  $\theta = 0$  ise t anındaki sıcaklık,  $\theta = 1$  ise t +Δt anındaki sıcaklık, θ ‘nin diğer değerleri (  $0 < \theta < 1$  ) için ise her iki zamandaki sıcaklıklar kullanılmış olacaktır. Denklem 4.14’ teki formülü Denklem 4.13’deki  $T_w$  ve  $T_E$  için uygulayıp, tüm terimler  $A\Delta t$  ile bölünürse

$$\rho c \left( \frac{T_P - T_P^o}{\Delta t} \right) \Delta x = \theta \left[ \frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_w} \right] + (1 - \theta) \left[ \frac{k_e (T_E^o - T_P^o)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w (T_P^o - T_W^o)}{(\delta x)_w} \right] + \bar{S} \Delta x \quad (4.15)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemi düzenlenip aşağıdaki genel formülle tekrar yazılabilir.

$$a_P T_P = a_w [\theta T_W + (1 - \theta) T_W^o] + a_E [\theta T_E + (1 - \theta) T_E^o] + [a_P^o - (1 - \theta) a_w - (1 - \theta) a_E] T_P^o + b \quad (4.16)$$

Denklem 4.16'daki terimlerin açılımları aşağıda verilmiştir.

$$a_P = \theta (a_w + a_E) + a_P^o \quad (4.17a)$$

$$a_P^o = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.17b)$$

$$a_w = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \quad (4.17c)$$

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_E} \quad (4.17d)$$

$$b = \bar{S} \Delta x \quad (4.17e)$$

Denklem 4.16'te görüldüğü gibi ayrıntılandırılmış denklem  $\theta$ 'nın alacağı değerlere bağlıdır. Eğer  $\theta = 0$  ise yeni zaman adımındaki  $T_P$  değerleri bulunurken bir önceki zaman adımında bulunan  $T_P^o$ ,  $T_W^o$  ve  $T_E^o$  sıcaklıkları kullanılır. Buna açık (explicit) yöntem denir. Eğer  $0 < \theta \leq 1$  alınırsa yeni zaman adımındaki sıcaklıklar denklemin her iki tarafında da görülür. Bu yöntem ise örtük (implicit) yöntem denir. Bu yöntem,  $\theta = 1$  alındığında tam örtük yöntemi ve  $\theta = 1/2$  alındığında Crank – Nicolson yöntemi adı alır.

Yukarıda da belirtildiği gibi tam örtük yönteminde  $\theta = 1$  alınır. Aşağıda kaynak terimi lineer hale getirilerek ( $b = S_u + S_p T_p^o$ ) Denklem 4.16 tam örtük yöntemine göre tekrar yazılmıştır. (Denklem 4.18a - 4.18e)

$$a_p T_p = a_w T_w + a_E T_E + a_p^o T_p^o + S_U \quad (4.18a)$$

$$a_p = a_p^o + a_w + a_E - S_p \quad (4.18b)$$

$$a_p^o = \rho c (\Delta x / \Delta t) \quad (4.18c)$$

$$a_w = k_w / (\delta x)_w \quad (4.18d)$$

$$a_E = k_e / (\delta x)_E \quad (4.18e)$$

Denklemin her iki tarafında da yeni zaman adımındaki sıcaklıklar görülür. İlk adımda başlangıç şartı olarak verilen  $T^o$  sıcaklık değerleri ile iterasyona başlanılarak cebirsel denklem takımlarının her bir zaman adımı için çözülmesi gerekir. Tam örtük yönteminde bütün katsayılar pozitifdir. Bu da tüm  $\Delta t$  zaman adımları farkı için herhangi bir koşul vermeksizin yöntemi kararlı bir halde olmasını sağlar. Ama hassas sonuçlar için zaman adımının küçük seçilmesi gerekmektedir.

### 4.3. İki ve Üç Boyutlu Difüzyon Problemlerinin Örtük Olarak Ayrıklaştırılması

Üç boyutlu zamana bağlı difüzyon denkleminin en genel ifadesi

$$\rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S \quad (4.19)$$

dir. Denklem 4.19' un ayrıklaştırılmış şekli aşağıda verilmiştir.

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T + a_p^o \phi_p^o + S_u \quad (4.20a)$$

$$a_p = a_w + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + a_p^o - S_p \quad (4.20b)$$

$$a_p^o = \rho c \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (4.20c)$$

Denklem 4.20 tek boyutlu ise  $a_w$  ve  $a_E$ , iki boyutlu ise  $a_w$ ,  $a_E$ ,  $a_S$ ,  $a_N$  üç boyutlu ise  $a_w$ ,  $a_E$ ,  $a_S$ ,  $a_N$ ,  $a_B$ ,  $a_T$  katsayıları kullanılır. Kaynak terim ise  $b = S_u + S_p\phi_p$  şeklinde lineerleştirilir. Aşağıdaki tabloda her üç durum içinde kullanılacak katsayılar verilmiştir [11].

**Tablo 4.2.** Denklem 4.20'deki katsayıların karşılıkları [11].

	$a_w$	$a_E$	$a_S$	$a_N$	$a_B$	$a_T$
1D	$\frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}}$	—	—	—	—
2D	$\frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{k_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{k_n A_n}{\delta y_{PN}}$	—	—
3D	$\frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{k_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{k_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$\frac{k_b A_b}{\delta z_{BP}}$	$\frac{k_t A_t}{\delta z_{PT}}$

**Tablo 4.3.** Denklem 4.20'deki  $\Delta V$  teriminin açılımı [11].

	1D	2D	3D
$\Delta V$	$\Delta x$	$\Delta x \Delta y$	$\Delta x \Delta y \Delta z$
$A_w = A_e$	1	$\Delta y$	$\Delta y \Delta z$
$A_n = A_s$	—	$\Delta x$	$\Delta x \Delta z$
$A_b = A_t$	—	—	$\Delta x \Delta y$

## BÖLÜM 5. KONVEKSİYON – DİFÜZYON

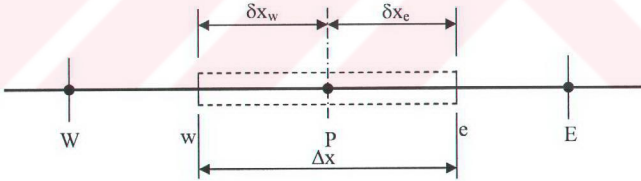
### 5.1. Sonlu Hacimler Yönteminin Bir Boyutlu Zamandan Bağımsız Konveksiyon Difüzyon Denklemine Uygulanması

Tek boyutlu zamandan bağımsız bir konveksiyon - difüzyon denklemi

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (5.1)$$

dir. Aynı zamanda akış, süreklilik denklemini de sağlamalıdır.

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad (5.2)$$



Şekil 5.1. Tek boyutlu bir kontrol hacmi

Şekil 5.1.' de gösterilen kontrol hacmi için yukarıdaki denklemlerin integrali alınırsa,

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \quad (5.3)$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (5.4)$$

denklemleri elde edilir.

Yukarıdaki denklemler ayrıklaştırılmadan önce birim alan için kütesel debi  $F$  ve difüzyon iletkenliği  $D$  gibi iki değişken tanımlanmıştır.

$$F = \rho u \quad \text{ve} \quad D = \Gamma / \delta x \quad (5.5)$$

Her bir hücre yüzeyi için bu değişkenler ayrı ayrı yazılır.

$$F_w = (\rho u)_w, \quad F_e = (\rho u)_e \quad (5.6a)$$

$$D_w = \Gamma_w / \delta x_w, \quad D_e = \Gamma_e / \delta x_e \quad (5.6b)$$

$A_w = A_e = A$  olduğunu kabul ederek ve denklemin sağ tarafındaki difüzyon terimlerini merkezi farklar yaklaşımı ile ayrıklaştırarak, Denklem 5.3'de integrali alınmış konveksiyon – difüzyon denklemi ve Denklem 5.4'deki süreklilik denklemi aşağıdaki düzenlenmiş genel formda yazılabilir.

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (5.7)$$

$$F_e - F_w = 0 \quad (5.8)$$

Ayrıca  $F_e$  ve  $F_w$  katsayıları bulunurken hızların bir şekilde bilindiği kabul edildi. Denklem 5.7'i çözebilmek için  $\phi$  'nin e ve w yüzeyindeki değerlerini bulmak gerekecektir [11]. Aşağıda  $\phi$  'nin değeri hesaplanmasında kullanılan yöntemler anlatılmıştır.

## 5.2. Merkezi Farklar Yaklaşımı (Central Difference Scheme – CDS)

Ağ noktaları arasındaki mesafenin eşit olduğu bir ağ için Denklem 5.7'nin sol tarafındaki konvektif terimler lineer enterpolasyon yapılarak hesaplanabilir.

$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E)/2 \quad (5.9a)$$

$$\phi_w = (\phi_W + \phi_P)/2 \quad (5.9b)$$

Bu ifadeler Denklem 5.7' de yerine yazılır.

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (5.10)$$

$$\left[ \left( D_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left( D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (5.11)$$

$$\left[ \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \phi_P = \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (5.12)$$

Denklem 5.12' deki katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanarak, merkezi farklar yöntemi ile ayrıştırılan konveksiyon – difüzyon denklemi aşağıdaki genel formda yazılabilir.

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (5.13a)$$

$$a_W = D_w + F_w/2 \quad (5.13b)$$

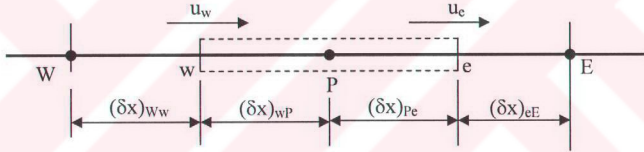
$$a_E = D_e - F_e/2 \quad (5.13c)$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \quad (5.13d)$$

Bir boyutlu konveksiyon – difüzyon problemini çözebilmek için Denklemler 5.13 tüm ağ noktaları için yazılır. Bunun sonucunda elde edilen lineer denklem takımları çözülerek  $\phi$  değerleri bulunur [11].

### 5.3. Birinci Mertebeden Upwind Yaklaşımı (First Order Upwind - FOU)

Merkezi farklar yönteminin en büyük yetersizliği akış yönünün tanımlanmasındaki eksikliklerdir.  $\phi$  'in batı (w) tarafındaki değeri hesaplanırken merkezi farklar yönteminde hem  $\phi_P$  hem de  $\phi_W$  kullanılır. Ama batıdan doğuya güçlü bir konvektif akışta bu yaklaşım doğru olmayacaktır. Çünkü konveksiyon, difüzyondan daha baskın olacak ve W noktasından daha fazla etkilenecektir. P noktasının etkisi ise daha az olacaktır. Upwind yaklaşımında herhangi bir hücredeki  $\phi$  değeri, akışın geldiği yöndeki değere eşit alınır. Şekil 5.2.'de gösterilen kontrol hacmine göre akış yönüne bağlı olarak ayrılaştırılmış momentum denklemi tekrar yazılacaktır.



**Şekil 5.2.** Bir boyutlu kontrol hacmi üzerinde hızların yerleşimi

Akış batıdan doğuya doğru ise,  $u_w > 0$ ,  $u_e > 0$  ( $F_w > 0$ ,  $F_e > 0$ ),

$$\phi_w = \phi_W \text{ ve } \phi_e = \phi_P \quad (5.14)$$

eşitlikleri yazılır. Buna göre Denklem 5.7'da ayrılaştırılmış ifade

$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (5.15)$$

düzenlenir ve aşağıdaki şekilde genel formda yazılabilir.



$$(D_w + D_c + F_c)\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_c\phi_E \quad (5.16)$$

$$[(D_w + F_w) + D_c + (F_c - F_w)] \phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_c\phi_E \quad (5.17)$$

Eğer akış ters yönde, yani doğudan batıya doğru ise,  $u_w < 0$ ,  $u_c < 0$  ( $F_w < 0$ ,  $F_c < 0$ ),

$$\phi_w = \phi_P \text{ ve } \phi_c = \phi_E \quad (5.18)$$

eşitlikleri yazılarak ayrıklaştırılmış denklem düzenlenir.

$$F_c\phi_E - F_w\phi_P = D_c(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (5.19)$$

$$[D_w + (D_c - F_c) + (F_c - F_w)] \phi_P = D_w\phi_W + (D_c - F_c) \phi_E \quad (5.20)$$

Denklem 5.17 ve Denklem 5.20 genel bir formda yazılabilir.

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (5.21)$$

Denklemdaki katsayılar:

$$a_P = a_W + a_E + (F_c - F_w) \quad (5.22a)$$

$$a_W = D_w + F_w, \quad a_E = D_c \quad (F_w > 0, F_c > 0) \quad (5.22b)$$

$$a_W = D_w, \quad a_E = D_c - F_c \quad (F_w < 0, F_c < 0) \quad (5.22c)$$

Akışın yönüne bağlı olarak değişen katsayılar ise tek bir ifade ile yazılabilir [11].

$$a_W = D_w + \max(F_w, 0) \quad (5.23a)$$

$$a_E = D_c + \max(0, -F_c) \quad (5.23b)$$

#### 5.4. İkinci Mertebeden Upwind Yaklaşımı (Second Order Upwind – SOU)

Bu yöntemde, kontrol hacminde herhangi bir ara noktadaki parametrenin değeri belirlenirken, akışın yönüne bağlı olarak o noktadan bir önceki veya bir sonraki iki düğüm noktasından yararlanır. Birinci mertebeden upwind yaklaşımı ile arasındaki tek fark budur. Denklem 5.7 'de ara nokta aşağıdaki şekilde belirlenir.

$$\phi_c = 1.5 \phi_P - 0.5 \phi_W \quad , \text{ eğer akış yönü doğudan batıya doğru ise } (F_c > 0)$$

$$\phi_c = 1.5 \phi_E - 0.5 \phi_{EE} \quad , \text{ eğer akış yönü doğudan batıya doğru ise } (F_c < 0)$$

Bu durumda, Denklem 5.7' de  $F_c \phi_c$  terimi,

$$F_c \phi_c = (1.5 \phi_P - 0.5 \phi_W) \cdot \max(F_c, 0) - (1.5 \phi_E - 0.5 \phi_{EE}) \cdot \max(-F_c, 0) \quad (5.24)$$

ile hesaplanır. Benzer ifadeler diğer ara noktalar içinde yazılabilir.

SOU ile konveksiyon terimleri ayrıştırılıp birkaç farklı şekilde programa uygulanabilir. En basit halde, FOU'e uyarlanacak şekilde yazılıp, farklı olan terimler kaynak terim içine atılarak yazılabilir. Bu durumda hem daha basit hem de diğer yöntemlere daha rahat geçiş yapabilecek şekilde düzenlenmiş olur.

Ek terimleri kaynak terim içine atarak FOU, SOU'e aşağıdaki formda uyarlanabilir.

$$F_c \phi_c = [\phi_P - 0.5 (\phi_P - \phi_W)] \max(F_c, 0) - [\phi_E + 0.5 (\phi_E - \phi_{EE})] \max(-F_c, 0) \quad (5.25)$$

Diğer terimlerde benzer şekilde yazılıp düzenlendiğinde katsayıların FOU ile aynı olduğu ve sadece kaynak terimin aşağıda gösterildiği gibi değiştiği görülür.

$$\begin{aligned} S_C = & -0.5 (\phi_P - \phi_W) \max(F_c, 0) + 0.5 (\phi_E - \phi_{EE}) \max(-F_c, 0) \\ & + 0.5 (\phi_W - \phi_{WW}) \max(F_w, 0) - 0.5 (\phi_P - \phi_E) \max(-F_w, 0) \\ & - 0.5 (\phi_P - \phi_S) \max(F_n, 0) + 0.5 (\phi_N - \phi_{NN}) \max(-F_n, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0.5 (\phi_S - \phi_{SS}) \max(F_s, 0) - 0.5 (\phi_P - \phi_N) \max(-F_s, 0) \\
& - 0.5 (\phi_P - \phi_B) \max(F_t, 0) + 0.5 (\phi_T - \phi_{TT}) \max(-F_t, 0) \\
& + 0.5 (\phi_B - \phi_{BB}) \max(F_b, 0) - 0.5 (\phi_P - \phi_T) \max(-F_b, 0)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

FOU ile karşılaştırıldığında , bu yöntemin daha yüksek mertebeden olduğu, komşu noktalar arasında çözüm profilinde bazı değişikliklere izin verdiği görülür.

### 5.5. Hibrid Yaklaşımı

Bu yöntem merkezi farklar ile birinci mertebeden upwind yaklaşımlarının kombinasyonundan oluşur. Küçük Peclet sayılarında ( $Pe < 2$ ) merkezi farklar yaklaşımı, büyük Peclet sayılarında ( $Pe \geq 2$ ) ise upwind yaklaşımı hassas sonuçlar verir. Bu yöntemde her bir kontrol hacmi için Peclet sayısı gözönüne alınarak CDS veya FOU yöntemi kullanılarak ayrılaştırılmış denklem yazılır. Örnek olarak, batı tarafındaki Peclet sayısı yazılsın.

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \delta x_{WP}} \tag{5.27}$$

Birim alan için batı yüzeyinden geçen net ısı miktarı hibrid yaklaşımı ile aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$-2 < Pe_w < 2 \quad \text{ise} \quad q_w = F_w \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_w + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_P \right] \tag{5.28}$$

$$Pe_w \geq 2 \quad \text{ise} \quad q_w = F_w A_w \phi_w \tag{5.29}$$

$$Pe_w \leq 2 \quad \text{ise} \quad q_w = F_w A_w \phi_P \tag{5.30}$$

Bu denklemlerden de görüldüğü gibi küçük Peclet sayılarında difüzyon ve konveksiyon terimleri için merkezi farklar yöntemi,  $|Pe| > 2$  olduğunda ise difüzyon terimi sıfır alınarak FOU yöntemi kullanılmıştır. Zamandan bağımsız bir

boyutlu konveksiyon – difüzyon denklemi ayrıklaştırarak aşağıdaki genel formda yazılabilir.

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (5.31)$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \quad (5.32)$$

$$a_W = \max [F_w, (D_w + F_w/2), 0] \quad (5.33)$$

$$a_E = \max [-F_e, (D_e - F_e/2), 0] \quad (5.34)$$

Yukarıda yazılan genel form sadece bir boyut içindi. Herhangi bir problem için aşağıdaki tabloda hibrid yönteminin en genel haliyle verilmiş olan ifadeler alınarak bu yöntemle göre ayrıklaştırılmış denklem yazılabilir [11].

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T \quad (5.35)$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \Delta F \quad (5.36)$$

**Tablo 5.1.** Zamandan bağımsız konveksiyon – difüzyon denkleminin bir, iki ve üç boyutlu olduğu durumlarda hibrid yöntemi ile ayrıklaştırılmış haldeki katsayıları

	Bir boyutlu akış	İki boyutlu akış	Üç boyutlu akış
$a_W$	$\max [F_w, (D_w + F_w/2), 0]$	$\max[F_w, (D_w + F_w/2), 0]$	$\max [F_w, (D_w + F_w/2), 0]$
$a_E$	$\max [-F_e, (D_e - F_e/2), 0]$	$\max[-F_e, (D_e - F_e/2), 0]$	$\max [-F_e, (D_e - F_e/2), 0]$
$a_S$		$\max[ F_s, (D_s + F_s/2), 0]$	$\max [ F_s, (D_s + F_s/2), 0]$
$a_N$		$\max[-F_n, (D_n - F_n/2), 0]$	$\max [-F_n, (D_n - F_n/2), 0]$
$a_B$			$\max [ F_b, (D_b + F_b/2), 0]$
$a_T$			$\max [-F_t, (D_t - F_t/2), 0]$
$\Delta F$	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

## 5.6. QUICK Yaklaşımı

Leonard (1979) tarafından önerilen QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) yönteminde, kontrol hacmindeki herhangi bir ara yüzeyin değeri bulunurken kaynak yönünde iki, kuyu yönünde ise bir komşu nokta kullanılarak hesaplanılır. Akışın yönüne bağlı olarak, batı yüzündeki  $\phi_e$  değeri;

$$\phi_e = \frac{3}{8}\phi_E + \frac{3}{4}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W, \text{ akış batıdan doğuya } (F_e > 0) \text{ ise} \quad (5.37)$$

$$\phi_e = \frac{3}{4}\phi_E + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{EE}, \text{ akış doğudan batıya } (F_e < 0) \text{ ise} \quad (5.38)$$

ve genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F_e \phi_e = \left[ \frac{3}{8}\phi_E + \frac{3}{4}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W \right] \max(F_e, 0) - \left[ \frac{3}{4}\phi_E + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{EE} \right] \max(-F_e, 0) \quad (5.39)$$

Benzer ifadeler  $\phi_w$  için de yazılarak Denklem 5.7 'de yerine konulduğunda en genel halde şu şekilde yazılabilir.

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW} + a_{EE} \phi_{EE} \quad (5.40)$$

$$a_P = a_W + a_E + a_{WW} + a_{EE} + (F_e - F_w) \quad (5.41)$$

$$a_W = D_w + \frac{6}{8}\alpha_w F_w + \frac{1}{8}\alpha_e F_e + \frac{3}{8}(1 - \alpha_w) F_w \quad (5.42)$$

$$a_{WW} = -\frac{1}{8}\alpha_w F_w \quad (5.43)$$

$$a_E = D_e - \frac{3}{8}\alpha_e F_e + \frac{6}{8}(1 - \alpha_e) F_e - \frac{1}{8}(1 - \alpha_w) F_w \quad (5.44)$$

$$a_{EE} = \frac{1}{8}(1 - \alpha_e) F_e \quad (5.45)$$

Yukarıdaki denklemlerde geçen  $\alpha$  değeri akışın yönüne göre belirlenir.

Akış batıdan doğuya doğru ise ( $F_w > 0, F_e > 0$ ),  $\alpha_w = 1$  ve  $\alpha_e = 1$

Akış doğudan batıya doğru ise ( $F_w < 0, F_e < 0$ ),  $\alpha_w = 0$  ve  $\alpha_e = 0$  seçilir [11].

## BÖLÜM 6. BASINÇ DÜZELTME ALGORİTMALARI

Genellikle bir akışkanın hareketi incelenirken çözümün bir parçası olarak basınçların da hesaplanması istenir. Eğer akış sıkıştırabilir ise süreklilik denklemi yoğunluk için, momentum ve enerji denklemi de sıcaklık için hareket denklemi olarak yazılabilir. Bu durumda basınç, sıcaklık ve yoğunluk ilişkisinden bulunabilir. Ama eğer akış sıkıştırılmaz ise yoğunluk sabit olacak ve basınçla herhangi bir ilişkisi olmayacaktır. Bu durum ise denklemlerin çözümünü zorlaştıracaktır. Bilinen bir basınç alanı için, Denklem 3.12 ve Denklem 3.14' de verilen ayrılaştırılmış momentum denklemleri u ve v kontrol hacimleri için yazılabilir ve hız alanları hesaplanabilir. Eğer basınç alanı bilinmiyorsa, basıncı hesaplayan bir yöntemle ihtiyaç vardır. Aşağıda bu yöntemler anlatılmıştır.

### 6.1. SIMPLE Algoritması

SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) algoritması Patankar ve Spalding (1972) tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntem aşağıda zamandan bağımsız (kararlı) iki boyutlu bir akış için kartezyen koordinatlar kullanılarak anlatılmıştır.

SIMPLE algoritmasında çözüme tahmini bir basınç değeri  $p^*$  ile başlanır. Aynklaştırılmış momentum denklemi öncelikle tahmini değerler ile çözümlür.

$$a_{i,j} \dot{u}_{i,j} = \sum a_{nb} \dot{u}_{nb} + (p_{i-1,j}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (6.1)$$

$$a_{i,j} \dot{v}_{i,j} = \sum a_{nb} \dot{v}_{nb} + (p_{i,j-1}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (6.2)$$

Yukarıdaki denklemlerde üst indis \* işareti ( $p^*$ ,  $u^*$ ,  $v^*$ ) ilk tahmini değerleri göstermektedir.

Gerçek basınç değeri  $p$  ile tahmini basınç değeri  $p^*$  arasındaki fark,  $p'$  ile gösterilmiştir.

$$p = p^* + p' \quad (6.3)$$

Benzer şekilde gerçek hız değerleri  $u$  ve  $v$  ile tahmini hız değerleri  $u^*$  ve  $v^*$  arasındaki fark sırasıyla  $u'$  ve  $v'$  ile gösterilebilir.

$$u = u^* + u' \quad (6.4)$$

$$v = v^* + v' \quad (6.5)$$

Denklemler 3.12 ve Denklemler 3.14' den Denklem 6.1 ve Denklem 6.2 çıkartılırsa sırasıyla aşağıdaki momentum denklemleri elde edilir.

$$a_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{nb}(u_{nb} - u_{nb}^*) + [(p_{l-1,j} - p_{l-1,j}^*) - (p_{l,j} - p_{l,j}^*)]A_{i,j} \quad (6.6)$$

$$a_{i,j}(v_{i,j} - v_{i,j}^*) = \sum a_{nb}(v_{nb} - v_{nb}^*) + [(p_{l,j-1} - p_{l,j-1}^*) - (p_{l,j} - p_{l,j}^*)]A_{i,j} \quad (6.7)$$

Yukarıda elde edilen (6.3 - 6.5) denklemleri düzeltme formülleri (6.6 - 6.7) kullanılarak düzenlenebilir.

$$a_{i,j}u_{i,j}' = \sum a_{nb}u_{nb}' + (p_{l-1,j}' - p_{l,j}')A_{i,j} \quad (6.8)$$

$$a_{i,j}v_{i,j}' = \sum a_{nb}v_{nb}' + (p_{l,j-1}' - p_{l,j}')A_{i,j} \quad (6.9)$$

Bu denklemlerdeki bazı terimlerin ihmal edilmesi veya küçük değişiklikler yapılması sonucu farklı algoritmalar ortaya çıkar. SIMPLE yönteminde Denklem 6.8' de  $\sum a_{nb}u_{nb}'$ , Denklem 6.9' da ise  $\sum a_{nb}v_{nb}'$  terimleri ihmal edilir. Bu kabul yapılarak denklemler tekrar düzenlenebilir.



$$u'_{i,j} = d'_{i,j} (p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) \quad (6.10)$$

$$v'_{i,j} = d'_{i,j} (p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) \quad (6.11)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}}$  ve  $d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}}$ , dir.

Denklem 6.10 ve Denklem 6.11 , Denklem 6.4 ve Denklem 6.5' de yerine yazılır.

$$u_{i,j} = u^*_{i,j} + d_{i,j} (p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) \quad (6.12)$$

$$v_{i,j} = v^*_{i,j} + d_{i,j} (p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) \quad (6.13)$$

Benzer ifadeler  $u_{i+1,j}$  ve  $v_{i,j+1}$  içinde yazılabilir.

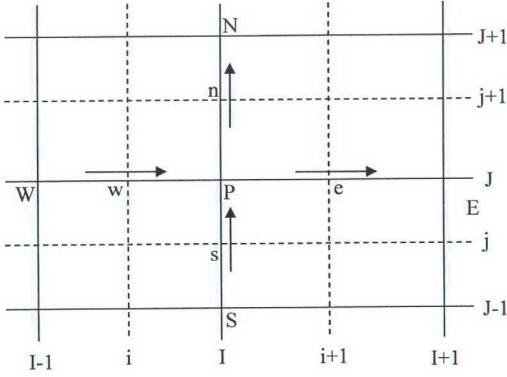
$$u_{i+1,j} = u^*_{i+1,j} + d_{i+1,j} (p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) \quad (6.14)$$

$$v_{i,j+1} = v^*_{i,j+1} + d_{i,j+1} (p'_{i,j} - p'_{i,j+1}) \quad (6.15)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j}}{a_{i+1,j}}$  ve  $d_{i,j+1} = \frac{A_{i,j+1}}{a_{i,j+1}}$ , dir.

Şimdiye kadar hep momentum denklemi incelendi. Ama aynı zamanda hızların süreklilik denklemini de sağlaması gerekir. Şekil 6.1.' de görülen skaler hücre için süreklilik denklemi ayrıntılandırılırsa Denklem 6.16 elde edilir.

$$\left[ (\rho u A)_{i+1,j} - (\rho u A)_{i,j} \right] + \left[ (\rho v A)_{i,j+1} - (\rho v A)_{i,j} \right] = 0 \quad (6.16)$$



**Şekil 6.1.** Süreklilik denkleminin ayrıştırıldığı skaler kontrol hacmi

$$\begin{aligned}
 & \left[ \rho_{i+1,j} A_{i+1,j} \left( u_{i+1,j}^* + d_{i+1,j} (p_{i,j}^i - p_{i+1,j}^i) \right) - \rho_{i,j} A_{i,j} \left( u_{i,j}^* + d_{i,j} (p_{i-1,j}^i - p_{i,j}^i) \right) \right] \\
 & + \left[ \rho_{i,j+1} A_{i,j+1} \left( v_{i,j+1}^* + d_{i,j+1} (p_{i,j}^i - p_{i,j+1}^i) \right) - \rho_{i,j} A_{i,j} \left( v_{i,j}^* + d_{i,j} (p_{i,j-1}^i - p_{i,j}^i) \right) \right] \\
 & = 0 \tag{6.17}
 \end{aligned}$$

Bu denklem düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$a_{i,j} p_{i,j}^i = a_{i+1,j} p_{i+1,j}^i + a_{i-1,j} p_{i-1,j}^i + a_{i,j+1} p_{i,j+1}^i + a_{i,j-1} p_{i,j-1}^i + b_{i,j}^i \tag{6.18a}$$

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} \tag{6.18b}$$

$$a_{i+1,j} = (\rho d A)_{i+1,j} \tag{6.18c}$$

$$a_{i-1,j} = (\rho d A)_{i,j} \tag{6.18d}$$

$$a_{i,j+1} = (\rho d A)_{i,j+1} \tag{6.18e}$$

$$a_{i,j-1} = (\rho d A)_{i,j} \tag{6.18f}$$

$$b'_{i,j} = (\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho v^* A)_{i,j} - (\rho v^* A)_{i,j+1} \quad (6.18g)$$

Denklem 6.18'te verilen ayrılaştırılmış süreklilik denklemi, basınç düzeltme denklemi olarak kullanılır. Denklemdeki kaynak terim  $b'$ , tahmini hız değerlerinden  $(u^*, v^*)$  kaynaklanan süreklilik denklemindeki hata payıdır. İhmal edilen terimler  $(\Sigma a_{nb} u_{nb}'$  ve  $\Sigma a_{nb} v_{nb}'$ ) sonuçları etkilemez. Çünkü basınç ve hız düzeltmeleri çözüm yakınsadığında sıfır ( $p^* = p$ ,  $u^* = u$  ve  $v^* = v$ ) olacaktır.

SIMPLE yönteminde yakınsamayı sağlayabilmek için, iterasyon boyunca hız ve basınç düzeltmelerinde alt relaksasyon faktörü kullanılır.

$$p^{yeni} = p^* + \alpha_p p' \quad (6.19)$$

$$u^{yeni} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{n-1} \quad (6.20)$$

$$v^{yeni} = \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{n-1} \quad (6.21)$$

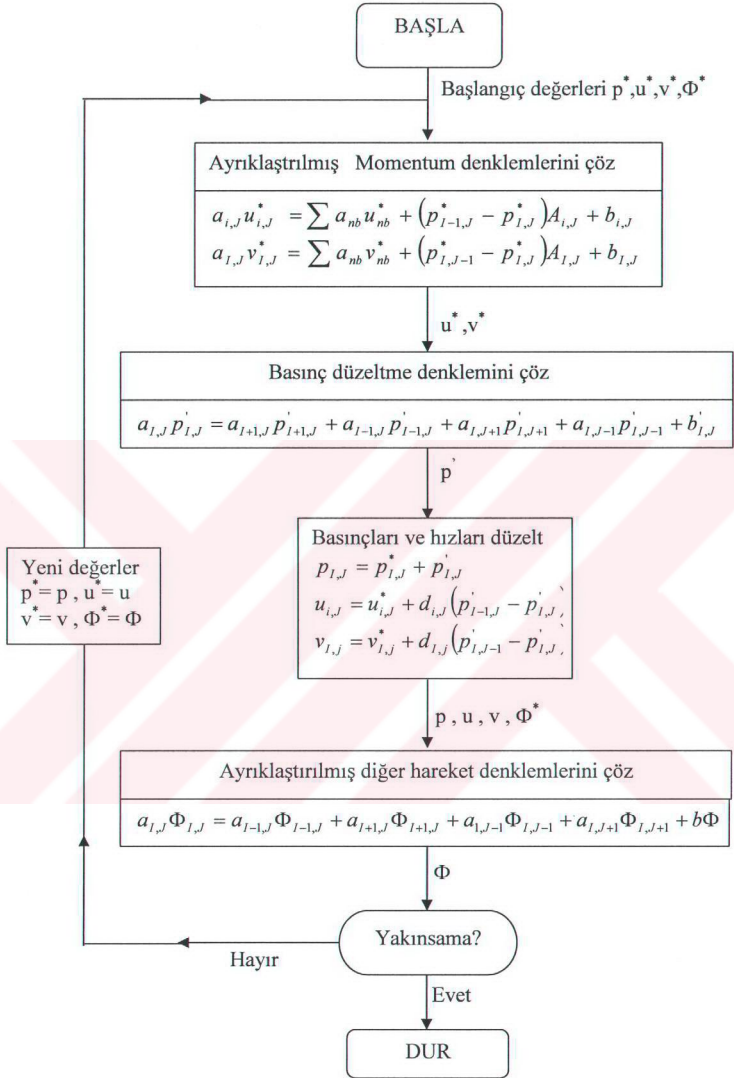
Yukarıdaki denklemlerde  $\alpha_u$ ,  $\alpha_v$  ve  $\alpha_p$  alt relaksasyon katsayılarıdır ve değerleri 0 ile 1 arasındadır.  $U^{n-1}$  ve  $V^{n-1}$  ise bir önceki iterasyondan bulunan hız değerleridir.

Ayrılaştırılmış momentum denklemleri alt relaksasyon katsayısı kullanılarak aşağıdaki şekillerde yazılabilir.

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_u} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_{l-1,j} - p_{l,j}) A_{l,j} + b_{l,j} + \left[ (1 - \alpha_u) \frac{a_{i,j}}{\alpha_u} \right] u_{i,j}^{(n-1)} \quad (6.22)$$

$$\frac{a_{l,j}}{\alpha_v} v_{l,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_{l,j-1} - p_{l,j}) A_{l,j} + b_{l,j} + \left[ (1 - \alpha_v) \frac{a_{l,j}}{\alpha_v} \right] v_{l,j}^{(n-1)} \quad (6.23)$$

Alt relaksasyon katsayısının " $\alpha$ " seçimi akışa bağlı olarak seçilmelidir. Büyük seçilen  $\alpha$  değeri osilasyonlara veya çözümün ıraksamasına, çok küçük seçilen  $\alpha$  değeri ise yakınsamanın çok yavaş olmasına sebep olabilir [11].



Şekil 6.2. SIMPLE algoritmasının akış şeması [11].

## 6.2. SIMPLER Algoritması

SIMPLER ( SIMPLE Revised ) algoritması Patankar (1980) tarafından geliştirilmiştir. Genellikle basınç düzeltme denklemi hızların düzeltilmesinde kullanıldığında yeterince iyi bir sonuç elde edilirken, basınçların düzeltilmesinde çok etkili olmaz. Bu yüzden basınçlar bulunurken herhangi bir düzeltme kullanmaya gerek yokken, hızlar SIMPLE yönteminde olduğu gibi hız düzeltme denklemleri (Denklem 6.12 – 6.15) kullanılarak bulunur. SIMPLER algoritmasında süreklilik denklemi (Denklem 6.16) SIMPLE algoritmasındaki gibi basınç düzeltme denklemi olarak değil, basınç için ayrılaştırılmış bir denklem elde etmek için kullanılır.

Ayrılaştırılmış momentum denklemleri (Denklem 6.1 – 6.2) aşağıdaki şekilde düzenlenebilir.

$$u_{i,j} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_{i,j}}{a_{i,j}} + \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} (P_{I-1,j} - P_{I,j}) \quad (6.24)$$

$$v_{i,j} = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_{i,j}}{a_{i,j}} + \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} (P_{I,j-1} - P_{I,j}) \quad (6.25)$$

SIMPLER algoritmasında sahte hızlar aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\hat{u}_{i,j} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (6.26)$$

$$\hat{v}_{i,j} = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (6.27)$$

Bu tanımlamalara göre Denklem 6.24 ve Denklem 6.25 aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$u_{i,j} = \hat{u}_{i,j} + d_{i,j} (P_{I-1,j} - P_{I,j}) \quad (6.28)$$

$$v_{i,j} = \hat{v}_{i,j} + d_{i,j} (P_{I,j-1} - P_{I,j}) \quad (6.29)$$

Bu denklemler ayrıklaştırılmış süreklilik denkleminde (Denklem 6.16) yerine yazılıp düzenlenirse aşağıdaki genel formda yazılabilir.

$$a_{I,J} p_{I,J} = a_{I+1,J} p_{I+1,J} + a_{I-1,J} p_{I-1,J} + a_{I,J+1} p_{I,J+1} + a_{I,J-1} p_{I,J-1} + b_{I,J} \quad (6.30a)$$

Yukarıdaki denklemde kullanılan katsayılar aşağıda verilmiştir.

$$a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1} \quad (6.30b)$$

$$a_{I+1,J} = (\rho dA)_{i+1,j} \quad (6.30c)$$

$$a_{I-1,J} = (\rho dA)_{i,j} \quad (6.30d)$$

$$a_{I,J+1} = (\rho dA)_{i,j+1} \quad (6.30e)$$

$$a_{I,J-1} = (\rho dA)_{i,j} \quad (6.30f)$$

$$b_{I,J} = (\rho \hat{u} A)_{i,j} - (\rho \hat{u} A)_{i+1,j} + (\rho \hat{v} A)_{I,j} - (\rho \hat{v} A)_{I,j+1} \quad (6.30g)$$

Denklem 6.30 incelendiğinde, tüm katsayıların Denklem 6.18' deki ile aynı olduğu sadece kaynak terim hesaplanırken sahte hızların kullanıldığı görülür [11].

### 6.3. SIMPLEC Algoritması

SIMPLEC (SIMPLE – Consistent) algoritması Van Doormal ve Raithby (1984) tarafından geliştirilmiştir. SIMPLE algoritmasından farkı basınç düzeltme denklemlerinde başka terimlerin ihmal edilmesidir.

$\sum a_{nb} u'_{nb}$  terimi Denklem 6.8' de eklenip çıkarılır ve düzenlenirse hız düzeltme formülü şu şekilde yazılabilir.

$$(a_{i,j} - \sum a'_{nb}) u'_{i,j} = \sum a_{nb} (u'_{nb} - u'_{i,j}) + A_{i,j} (p'_{I-1,J} - p'_{I,J}) \quad (6.31)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki terim ihmal edilirse;

$$u'_{i,j} = d_{i,j} (p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) \quad (6.32)$$

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j} - \sum a_{nb}} \quad (6.33)$$

Benzer işlemler v düşey hız için yapılarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$v'_{i,j} = d_{i,j} (p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) \quad (6.34)$$

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j} - \sum a_{nb}} \quad (6.35)$$

Görüldüğü gibi SIMPLEC algoritmasının SIMPLE algoritmasından tek farkı, Denklem 6.33 ve Denklem 6.35'deki d terimlerinin farklı şekilde hesaplanmasıdır [11].

#### 6.4. PISO Algoritması

PISO ( Pressure Implicit with Splitting of Operators) algoritması aslında zamana bağlı olmayan sıkıştırılabilir akışların iteratif olmayan hesaplamalar için geliştirilen, daha sonra zamana bağlı olan akışların iteratif çözümlerine başarıyla uygulanmış basınç hız alanını hesaplayan bir algoritmadır. PISO algoritmasında, SIMPLE algoritmasındaki bir tahmini değer ve bir doğrultma adımına ek olarak bir tane daha doğrultma adımı vardır.

PISO algoritmasında momentum denklemleri tahmini  $u^*$  ve  $v^*$  hızları yardımıyla çözümlenirken SIMPLE algoritmasında olduğu gibi  $p^*$  değerlerinden yararlanılır.

Basınç alanı  $p^*$  doğru olmadıkça,  $u^*$  ve  $v^*$  hızları süreklilik denklemlerini sağlamayacaktır. SIMPLE algoritmasında doğrultma adımında elden edilen hız alanıyla ayrıklaştırılmış süreklilik denklemini sağladığı yukarıda anlatılmıştı. PISO algoritmasında hız düzeltme denklemleri de, SIMPLE algoritmasındaki Denklem

6.10 ve Denklem 6.11 ile aynıdır. Sadece bir düzeltme adımı daha vardır. PISO algoritmasında biraz farklı notasyonlar kullanılır.

$$p^{**} = p^* + p' \quad (6.36)$$

$$u^{**} = u^* + u' \quad (6.37)$$

$$v^{**} = v^* + v' \quad (6.38)$$

Bu formüller düzeltilmiş  $u^{**}$  ve  $v^{**}$  hızlarını tanımlamakta kullanılır.

$$u_{i,j}^{**} = u_{i,j}^* + d_{i,j} (p'_{I-1,j} - p'_{I,j}) \quad (6.39)$$

$$v_{I,j}^{**} = v_{I,j}^* + d_{I,j} (p'_{I,j-1} - p'_{I,j}) \quad (6.40)$$

Denklem 6.39 ve Denklem 6.40, SIMPLE algoritmasındaki gibi Denklem 6.16' da yerine konularak basınç doğrultman denklemi (Denklem 6.18) elde edilir. PISO algoritmasında bu denkleme ilk basınç doğrultman denklemi denir ve ilk basınç doğrultman alanının ( $p'$ ) çözümünde kullanılır. Basınçlar elde edildikten sonra Denklem 6.39 ve Denklem 6.40 denklemlerinden  $u^{**}$  ve  $v^{**}$  hızları elde edilir.

PISO algoritmasını SIMPLE algoritmasından ayıran nokta ikinci bir doğrultman adımının olmasıdır.  $u^{**}$  ve  $v^{**}$  hızları için ayrıklaştırılmış momentum denklemleri yeni notasyonlar ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$a_{i,j} u_{i,j}^{**} = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p'_{I-1,j} - p'_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (6.41)$$

$$a_{I,j} v_{I,j}^{**} = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p'_{I,j-1} - p'_{I,j}) A_{I,j} + b_{I,j} \quad (6.42)$$

İki defa düzeltilmiş hız alanıyla ( $u^{***}$  ve  $v^{***}$ ) momentum denklemleri bir daha çözülür.



$$a_{i,j}u_{i,j}^{***} = \sum a_{nb}u_{nb}^{**} + (p_{i-1,j}^{***} - p_{i,j}^{***})A_{i,j} + b_{i,j} \quad (6.43)$$

$$a_{i,j}v_{i,j}^{***} = \sum a_{nb}v_{nb}^{**} + (p_{i,j-1}^{***} - p_{i,j}^{***})A_{i,j} + b_{i,j} \quad (6.44)$$

Denklem 6.41'in Denklem 6.43'tan, Denklem 6.42'un ise Denklem 6.44'den çıkarılmasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$u_{i,j}^{**} = u_{i,j}^{**} + \frac{\sum a_{nb}(u_{nb}^{**} - u_{nb}^*)}{a_{i,j}} + d_{i,j}(p_{i-1,j}^* - p_{i,j}^*) \quad (6.45)$$

$$v_{i,j}^{**} = v_{i,j}^{**} + \frac{\sum a_{nb}(v_{nb}^{**} - v_{nb}^*)}{a_{i,j}} + d_{i,j}(p_{i,j-1}^* - p_{i,j}^*) \quad (6.46)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $p''$  ikinci basınç doğrultmanıdır. Bu durumda

$$p^{***} = p^{**} + p'' \quad (6.47)$$

yazılabilir.  $u^{***}$  ve  $v^{***}$  hızlarının ayrıklaştırılmış süreklilik denkleminde (Denklem 6.16) yerine yazılarak ikinci basınç doğrultman denklemini elde edilir. Bu denklem düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$a_{i,j}p_{i,j}^* = a_{i+1,j}p_{i+1,j}^* + a_{i-1,j}p_{i-1,j}^* + a_{i,j+1}p_{i,j+1}^* + a_{i,j-1}p_{i,j-1}^* + b_{i,j} \quad (6.48a)$$

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} \quad (6.48b)$$

$$a_{i+1,j} = (\rho dA)_{i+1,j} \quad (6.48c)$$

$$a_{i-1,j} = (\rho dA)_{i,j} \quad (6.48d)$$

$$a_{i,j+1} = (\rho dA)_{i,j+1} \quad (6.48e)$$

$$a_{i,j-1} = (\rho dA)_{i,j} \quad (6.48f)$$

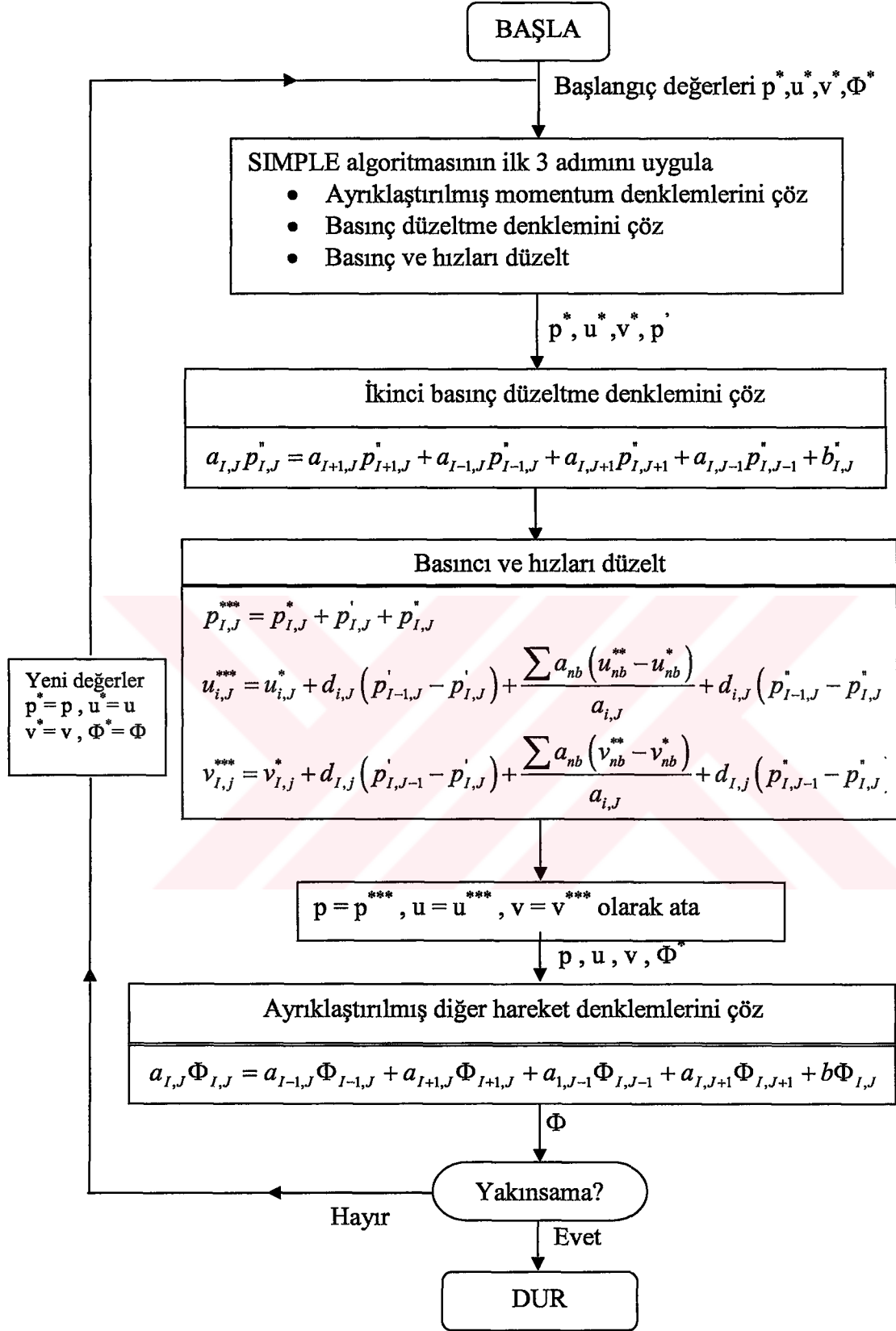
$$\begin{aligned}
b_{I,J}^* &= \left( \frac{\rho A}{a} \right)_{i,j} \sum a_{nb} (a_{nb}^{**} - u_{nb}^*) - \left( \frac{\rho A}{a} \right)_{i+1,j} \sum a_{nb} (a_{nb}^{**} - u_{nb}^*) \\
&+ \left( \frac{\rho A}{a} \right)_{I,j} \sum a_{nb} (a_{nb}^{**} - u_{nb}^*) - \left( \frac{\rho A}{a} \right)_{I,j+1} \sum a_{nb} (a_{nb}^{**} - u_{nb}^*)
\end{aligned} \tag{6.48g}$$

Denklem 6.48' de  $u^{**}$  ve  $v^{**}$  hızlarının süreklilik denklemini sağlamasından dolayı kaynak terim  $[(\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}]$  sıfırdır. İkinci basınç doğrultmanı

$$p^{***} = p^{**} + p'' = p^* + p' + p'' \tag{6.49}$$

denklemlerle ifade edilir ve sonunda iki defa düzeltilmiş hızlar Denklem 6.45 ve Denklem 6.46 denklemlerinden elde edilir.

PISO algoritması basınç doğrultman denklemini iki defa çözer. Bu yüzden ikinci basınç doğrultman denklemindeki kaynak terimi depolamak için bilgisayarda daha fazla geçici hafızaya ihtiyaç vardır. Bu algortmada da hesaplamaların stabilitesini sağlaması amacıyla alt relaksasyon katsayısı kullanılır [11].



Şekil 6.3. PISO algoritmasının akış şeması [11].

## **BÖLÜM 7. PROBLEMİN VE PROGRAMIN TANITILMASI**

Bu çalışmada, G. Arampatzis, D. Assimacopoulos ve E. Mitsoulis tarafından 1994'de "International Journal For Numerical Methods in Fluids" adlı derginin 18. bölümünde yayımlanan "Treatment of Numerical Diffusion in Strong Convective Flows (Güçlü konvektif akışlarda nümerik difüzyonun hareketi)" başlıklı makalede bahsedilen problemin sayısal yöntemlerle çözümü amaçlanmıştır. Bu çalışmada belirli bir konumda bulunan dumanın kontrol hacmi içerisinde belirli sabit bir hızla taşınırken difüzyonla etrafa olan yayılımı, 4 boyutlu (3 mekan, 1 zaman) bir konveksiyon-difüzyon denklemi kullanılarak çözülmüştür.

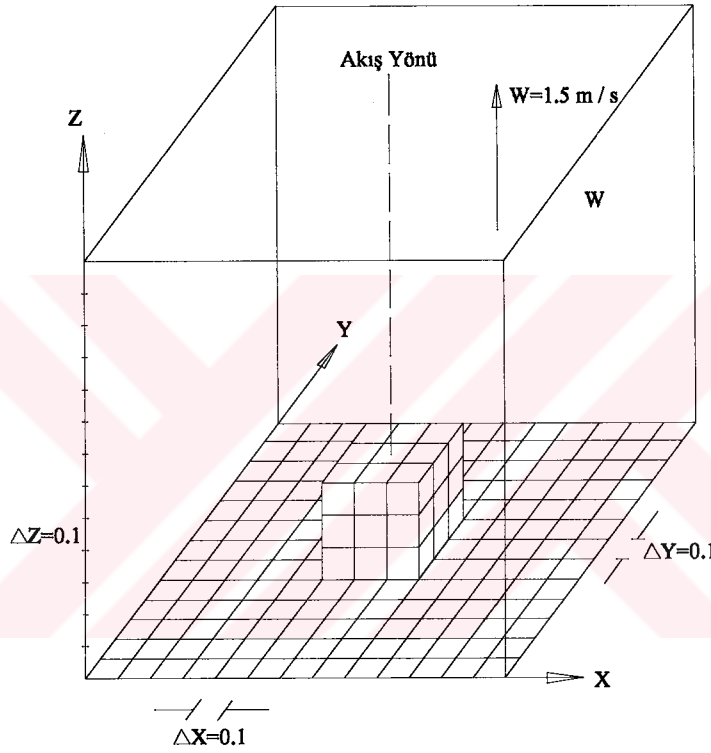
### **7.1. Problemin Tanıtılması**

Şekil 7.1.'de gösterilen üç boyutlu bir hacim içerisinde, tüm kütle z yönünde ve  $w=1.5$  m/s sabit bir hızla hareket etmektedir. Başlangıçta ( $t = 0$  anında) boyutları  $L_x$ ,  $L_y$  ve  $L_z$ , merkez koordinatları  $x_0$ ,  $y_0$  ve  $z_0$ , konsantrasyonu  $\phi = \phi_0$  olan homojen bir duman kütlesi bırakılmaktadır. Diğer tüm noktalarda ise duman konsantrasyonu sıfırdır. Bu çalışmada, dumanın belirtilen hızda kontrol hacmi içerisinde ilerlerken etrafa dağılımı konveksiyon-difüzyon denklemi kullanılarak sonlu hacimler metodu yardımıyla çözülmek istenmektedir.

#### **7.1.1. Problemin analitik çözümü**

Bu problemin analitik çözümü, tek boyutlu olarak Crank (1975) tarafından verilmiştir. Üç boyutlu çözüm ise Arampatzis tarafından geliştirilmiştir [2].

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{8} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L_x/2 - X}{2\sqrt{(\Gamma t/\rho)}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{L_x/2 + X}{2\sqrt{(\Gamma t/\rho)}} \right) \right] \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L_y/2 - Y}{2\sqrt{(\Gamma t/\rho)}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{L_y/2 + Y}{2\sqrt{(\Gamma t/\rho)}} \right) \right] \times \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L_z/2 - Z}{2\sqrt{(\Gamma t/\rho)}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{L_z/2 + Z}{2\sqrt{(\Gamma t/\rho)}} \right) \right] \quad (7.1)$$



**Şekil 7.1.** Üç boyutlu, zamandan bağımsız problemin gösterimi ve başlangıç şartları

$$X = x - x_0 - ut \quad (7.2a)$$

$$Y = y - y_0 - vt \quad (7.2b)$$

$$Z = z - z_0 - wt \quad (7.2c)$$

olup dumanın merkezinden olan mesafedir.

Konsantrasyon “ $\phi$ ” , mesafe “ $L_x$ ” ve zaman “ $T$ ” nin boyutsuzlaştırılması ve boyutsuzlaştırma işleminde kullanılan büyüklükler sırasıyla aşağıda gösterilmiştir.

$$\phi = \phi/\phi_0 \quad (7.3)$$

$$L_x = (l - l_0 - Vt)/ \Delta x \quad (7.4)$$

$$T = Vt/ \Delta x \quad (7.5)$$

$$l_0 = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)} \quad (7.6)$$

$$l = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \quad (7.7)$$

$$V = \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)} \quad (7.8)$$

Dumanın ilk konumundaki merkez koordinatları,  $x_0 = 7\Delta x$ ,  $y_0 = 7\Delta y$  ve  $z_0 = 2\Delta z$

Boyutları ise  $L_x = 3\Delta x$ ,  $L_y = 3\Delta y$  ve  $L_z = 3\Delta z$  ‘dir.

Diğer parametreler  $\Delta t = 0.01$  ,  $\phi_0 = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $V = 1.5$  m/s’ dir. Difüzyon katsayısı “ $\Gamma$ ” , pecllet sayısına bağlı olup Denklem 7.9 ile hesaplanılır.

$$Pe = \rho V \Delta x / \Gamma \quad (7.9)$$

$Pe = 100$  ve  $Pe = 150$  için Denklem 7.9 kullanılarak sırasıyla  $\Gamma = 0.0015$  ve  $\Gamma = 0.001$  difüzyon katsayıları elde edilir [2].

### 7.1.2. Problemin çözümünde kullanılan yöntemler

Arampatzis ve arkadaşları tarafından bu problemin analitik çözümü kendileri tarafından 3 boyutlu olarak geliştirilen Denklem 7.1 kullanılarak elde edilmiş ve sonuçlar birinci mertebeden upwind (UDS), QUICK ve basitleştirilmiş QUICK yaklaşımlarının testinde karşılaştırmak üzere kullanılmıştır. Bu çalışmada yukarıda bahsedilen yöntemlere ek olarak, Bölüm 4.’te ayrıntılı olarak anlatılan merkezi

farklar (CDS) ve ikinci mertebeden upwind (SOU) yaklaşımları kullanılarak bahsi geçen problem çözülmüştür.

Konveksiyon-Difüzyon denklemini ayrıklaştırıp çözmek için Sonlu Hacimler Metodu, ayrıklaştırılan ve lineer hale getirilen cebirsel denklem sisteminin çözümünde ise TDMA (Tri Diagonal Matris Algoritması) yöntemi kullanılmıştır.

## 7.2. Cebirsel Denklem Sisteminin Çözümü

Lineer olmayan Navier-Stokes ve enerji denklemleri, ayrıklaştırılarak lineer denklem takımları oluşturulur. Problemin boyutuna ve kullanılan ağırlık sıklığıyla orantılı olarak denklemlerin çözüm süresi artar. Lineer hale getirilmiş denklemleri çözebilmek için analitik (direkt) ve iteratif (dolaylı) olmak üzere iki yöntem vardır.

Analitik (direkt) yöntemler denklem sisteminin çözümünü matematik anlamda tam olarak veren yöntemlerdir. Yani yöntemin uygulanmasıyla doğrudan doğruya aranan çözüm elde edilir. Bunlar arasında en fazla kullanılanlar Cramer Yöntemi, Gauss Eleminasyon Yöntemi, Gauss-Jordan Yöntemi ve LU Ayırma Yöntemi'dir.

İteratif (dolaylı) yöntemlerde ise çözüm direkt olarak değil, tahmini değerlerden başlayarak adım adım ardışık hesaplamalarla belli tolerans sınırları içinde elde edilir. Bunlar arasında, Jacobi, Gauss-Seidel ve Rölaksasyon (SOR) yöntemi sayılabilir.

Sonlu hacimler yönteminde ayrıklaştırılarak cebirsel hale getirilmiş denklem sistemlerinde genellikle 100000 ila 1 milyon arasında denklem vardır ve bu denklemlerindeki katsayılar genellikle sıfırdır. Bu yüzden bu denklemlerin çözümünde, sadece sıfırdan farklı olan katsayıları hafızada tutan iteratif yöntemler tercih edilir.

Verilen denklem sistemlerinde bazen katsayılar matrisinde birçok eleman sıfırdır. Sıfırlar için harcanan zaman ve bilgisayar hafızasından tasarruf etmek için çareler aranmıştır. Bol sıfırlı matrislerden özel bir forma sahip üçlü band matrisler uygulamada, özellikle kısmi diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümlerinde sık

karşılaşılan sistemlerdir. Jacobi ve Gauss-Seidel iteratif yöntemlerinin bilgisayar programlarına uygulanması kolay olmasına rağmen, bu tür büyük denklem sistemlerinde yakınsama hızları düşük olabilir. Tri-Diagonal Matris Algoritması (TDMA) veya Thomas Algoritması olarak bilinen bir yöntemin uygulanmasıyla hafızada tutulması gereken değerler minimuma indirilerek denklem takımları hızlı bir şekilde çözülebilir. Bu yöntem aşağıda öncelikle iki boyutlu bir probleme uygulanarak ayrıntılı anlatılmış daha sonra üç boyutlu bir probleme nasıl uygulanacağına kısaca değinilmiştir.

### 7.2.1. TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) çözüm algoritması

İki boyutlu ayrıklaştırılmış hareket denklemi

$$a_p \Phi_p = a_w \Phi_w + a_e \Phi_e + a_s \Phi_s + a_n \Phi_n + S_p \quad (7.10)$$

dir. Bu denklem TDMA yöntemiyle Şekil 7.2' deki gibi kuzey-güney (n-s) hattı boyunca çözecek şekilde genelleştirilebilir.

$$-a_s \Phi_s + a_p \Phi_p - a_n \Phi_n = a_w \Phi_w + a_e \Phi_e + S_p \quad (7.11)$$

Bu denklemin sağ tarafındaki terimlerin bilindiği kabul edilmiştir. Denklem 7.11 daha genel olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$a_j \Phi_{j-1} + b_j \Phi_j + c_j \Phi_{j+1} = S_j \quad , j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (7.12)$$

Yukarıdaki denklem  $j = 1$ 'den  $N$ 'e kadar her ağ noktası için yazıldığı takdirde,  $N$  bilinmeyenli  $\Phi_{j+1}$  değeri için aşağıdaki denklemler edilir.

$$b_1 \Phi_1 + c_1 \Phi_2 = S_1 \quad (7.13a)$$

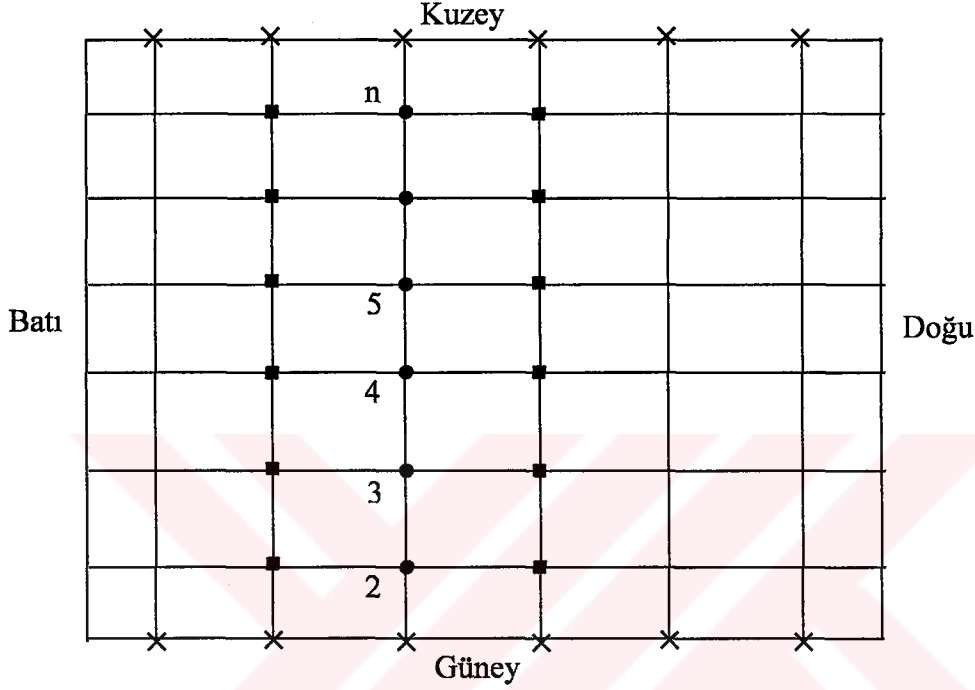
$$a_2 \Phi_1 + b_2 \Phi_2 + c_2 \Phi_3 = S_2 \quad (7.13b)$$



$$a_3\Phi_2 + b_3\Phi_3 + c_3\Phi_4 = S_3 \quad (7.13c)$$

.....

$$a_N\Phi_N + b_N\Phi_N = S_N \quad (7.13n)$$



**Şekil 7.2.** TDMA yönteminin iki boyutlu bir probleme n-s hattı boyunca uygulanması

Bu denklem sistemi matris yazılış şekli ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & a_N & b_N & \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_N \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Her satırdan  $a_N$  katsayılı terim elimine edilirse, en son satırda sadece bir tane bilinmeyenli terim ( $\Phi_N$ ) kalmaktadır. Sonra bütün terimler aşağıdan yukarıya doğru hesaplanır. Eliminasyon için sistematik olarak ilk önce ilk diagonal elamanı 1

yapabilmek için, birinci denklemi  $b_1$ 'e bölmek gerekir. Sonuç olarak aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1 & & & & \\ & 1 & r_2 & & & \\ & & 1 & r_3 & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_N \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

burada,

$$r_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad Q_1 = \frac{S_1}{b_1} \quad (7.16)$$

Sonraki adımda birinci denklem ( $-a_2$ ) ile çarpılır, sonuç ikinciye ilave edilir ve  $b_2$ 'nin yeni değerine bölünür. Bu işlem sonucunda  $a_2$  yerine 0,  $b_2$  yerine 1 ve  $c_2$  yerine  $r_2 = c_2 / (b_2 - a_2 r_1)$  değeri elde edilir. Aynı işlemler  $N = 2, 3, \dots, N-1$ ' e kadar tekrarlanılırsa katsayılar matrisinde

$$r_j = c_j / (b_j - a_j r_{j-1}) \quad (7.17)$$

ifadesi elde edilir. Denklemin sağ tarafında bilinen değerlerde bu işlemler sonucunda aşağıdaki genel formda yazılabilir.

$$Q_j = \frac{S_j - a_j Q_{j-1}}{b_j - a_j r_{j-1}} \quad (7.18)$$

Bu işlemlerden sonra  $\Phi_N$  değerinden başlanarak geriye doğru bilinmeyenler aşağıdaki şekilde hesaplanır :

$$\Phi_N = Q_N$$

$$\Phi_j = Q_j - r_j \Phi_{j+1} \quad (j = N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1) \quad (7.19)$$

Bu şekilde sırasıyla  $\Phi_{N-1}$ ,  $\Phi_{N-2}$ ,  $\Phi_{N-3}, \dots, \Phi_2$ ,  $\Phi_1$  terimleri elde edilir ve N bilinmeyenli tridiagonal denklem sistemi çözülmüş olur.

### 7.2.2. TDMA yönteminin üç boyutlu problemlere uygulanması

3 boyutlu hareket denklemi, TDMA yöntemiyle kuzey-güney ( n-s ) hattı boyunca çözümünü için en genel aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$-a_S \Phi_S + a_P \Phi_P - a_N \Phi_N = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_B \Phi_B + a_T \Phi_T + S_P \quad (7.20)$$

Yukarıdaki denklemde eşitliğin sağındaki terimlerin bilindiği kabul edilmiştir. Sol taraftaki bilinmeyen terimler bulunduktan sonra bir sonraki adıma geçilir ve bu şekilde tüm yüzey taranır.

İstenilirse bu işlem doğu- batı ( e-w ) hattı boyunca uygulanarak ta yapılabilir. Bu durumda ayrıklaştırılmış denklem aşağıdaki formu alır.

$$-a_W \Phi_W + a_P \Phi_P - a_E \Phi_E = a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + a_B \Phi_B + a_T \Phi_T + S_P \quad (7.21)$$

### 7.3. Bilgisayar Programının Tanıtılması

Bu çalışmada kullanılan program üç boyutlu zamana bağlı konveksiyon-difüzyon denklemini çözmek amacıyla hazırlandı. Programın doğruluğunu test etmek amacıyla öncelikle birinci mertebeden upwind (UDS) yöntemi ile problem çözülmüş, sonuçların benchmark probleminde sonuçlarla aynı olduğu görüldükten sonra merkezi farklar (CDS) yöntemi de uygulanmıştır. QUICK ve SOU yöntemleri ise ek terimlerin kaynak terimlere dahil edilmesi sonucu UDS üzerine inşa edilerek programa uyarlanmıştır. Yazılan bütün programları derlemek amacıyla Fortran 77 programlama dili kullanılmış ve Linux işletim sisteminde çalıştırılmıştır.

Problemin çözümü için yazılan program bir ana ve dört alt programdan oluşmaktadır.

MAIN : Ana program tüm programı kontrol eder. Bu bölümde akışın özellikleri gibi gerekli tüm parametreler girilir. Sınır ve başlangıç şartlarının düzenlenmesi, alt programların kontrolü, program çıktılarının dosyalara yazdırılması bu bölümde yapılır.

INIT : Bu alt programda kontrol hacminin boyutları ve ağın sıklığına göre tüm geometrik parametreler hesaplanır.

CALCT : Bu alt programda her bir ağ noktası için ayrıklaştırılmış konveksiyon-difüzyon denklemi yardımıyla konsantrasyon "T" hesaplanır.

LISOLV : Lineer hale getirilen konveksiyon-difüzyon diferansiyel denkleminin çözümünün TDMA ( Tri – Diagonal Matris Algorithm ) ile yapıldığı alt programdır.

PRINT : Problem sonuçlarının yorumlanabilecek tablolar halinde dosyalara yazdıran alt programdır.

**Tablo 7.1.** Geometrik değişkenler

NI	x – ekseni üzerindeki aę sayısı
NJ	y – ekseni üzerindeki aę sayısı
NK	z – ekseni üzerindeki aę sayısı
X(I)	Kontrol hacminin x - koordinatı
Y(J)	Kontrol hacminin y - koordinatı
Z(K)	Kontrol hacminin z – koordinatı
XU(I)	Kontrol hacmi kenar yüzeylerinin x - koordinatı
YV(J)	Kontrol hacmi kenar yüzeylerinin y - koordinatı
ZW(K)	Kontrol hacmi kenar yüzeylerinin z - koordinatı
DXPW(I)	Kontrol hacminin merkezi (P) ile sol aę noktası (W) arasındaki mesafe
DXEP(I)	Kontrol hacminin merkezi (P) ile sol aę noktası (E) arasındaki mesafe
DYPS(I)	Kontrol hacmi merkezi (P) ile arka aę noktası (S) arasındaki mesafe
DYNP(I)	Kontrol hacminin merkezi (P) ile ön aę noktası (N) arasındaki mesafe
DZPB(I)	Kontrol hacminin merkezi (P) ile alt aę noktası (B) arasındaki mesafe
DZTP(I)	Kontrol hacminin merkezi (P) ile üst aę noktası (T) arasındaki mesafe
SEW(I)	Kontrol hacminin x – doğrultusundaki uzunluęu
SNS(J)	Kontrol hacminin y – doğrultusundaki uzunluęu
SBT(K)	Kontrol hacminin z – doğrultusundaki uzunluęu

**Tablo 7.2.** Difüzyon, konveksiyon ve genel denklemdaki diğer katsayılar

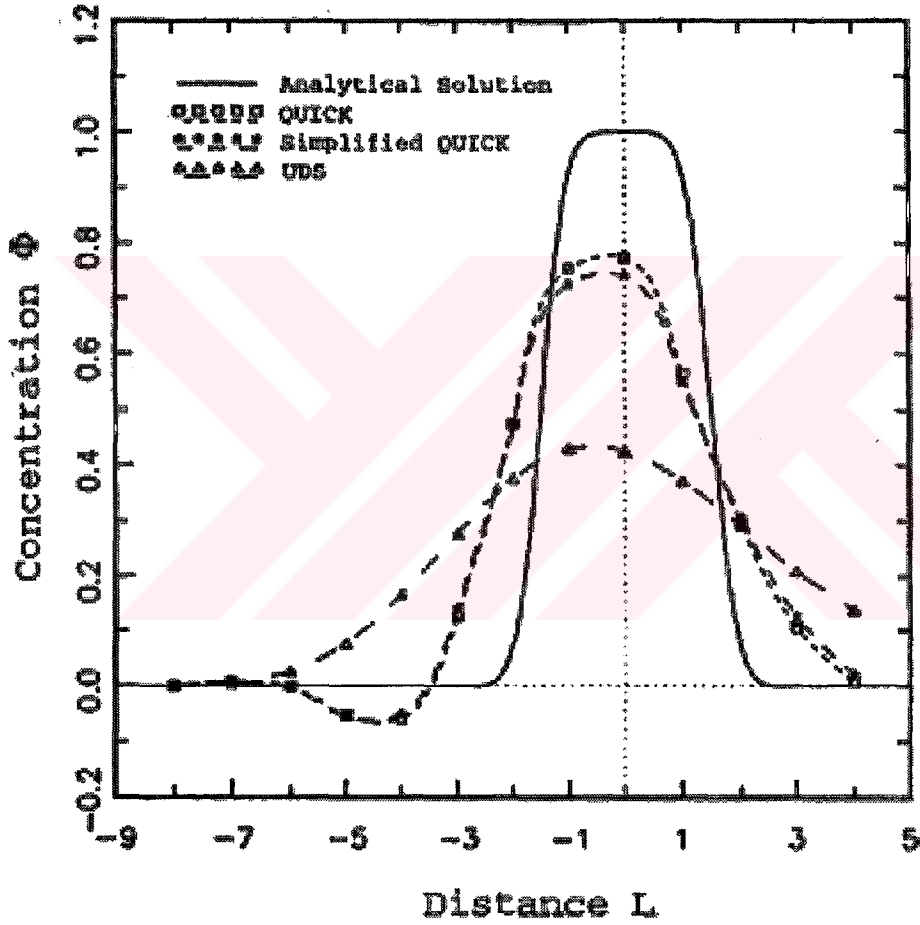
DW(I,J,K)	Kontrol hacminin batı (W) yönündeki difüzyon katsayısı
DE(I,J,K)	Kontrol hacminin doğu (E) yönündeki difüzyon katsayısı
DS(I,J,K)	Kontrol hacminin güney (S) yönündeki difüzyon katsayısı
DN(I,J,K)	Kontrol hacminin kuzey (N) yönündeki difüzyon katsayısı
DB(I,J,K)	Kontrol hacminin alt (B) yönündeki difüzyon katsayısı
DT(I,J,K)	Kontrol hacminin üst (T) yönündeki difüzyon katsayısı
CW(I,J,K)	Kontrol hacminin batı (W) yönündeki kütleli akısı
CE(I,J,K)	Kontrol hacminin doğu (E) yönündeki kütleli akısı
CS(I,J,K)	Kontrol hacminin güney (S) yönündeki kütleli akısı
CN(I,J,K)	Kontrol hacminin kuzey (K) yönündeki kütleli akısı
CB(I,J,K)	Kontrol hacminin alt (B) yönündeki kütleli akısı
CT(I,J,K)	Kontrol hacminin üst (T) yönündeki kütleli akısı
AW(I,J,K)	Ayrıklaştırılmış denklemin batı (W) yönündeki ana katsayısı
AE(I,J,K)	Ayrıklaştırılmış denklemin doğu (E) yönündeki ana katsayısı
AS(I,J,K)	Ayrıklaştırılmış denklemin güney (S) yönündeki ana katsayısı
AN(I,J,K)	Ayrıklaştırılmış denklemin kuzey (N) yönündeki ana katsayısı
AB(I,J,K)	Ayrıklaştırılmış denklemin alt (B) yönündeki ana katsayısı
AT(I,J,K)	Ayrıklaştırılmış denklemin üst (T) yönündeki ana katsayısı
AP(I,J,K)	Ayrıklaştırılmış denklemin kontrol hacmi merkezinin (P) ana katsayısı
SU(I,J,K)	Kaynak terimi
SP(I,J,K)	Kaynak teriminin negatif terimlerini içeren katsayı

**Tablo 7.3.** Programda kullanılan diğer terimler

U(I,J,K)	Yatay hız bileşeni ( x – ekseni doğrultusunda)
V(I,J,K)	Düşey hız bileşeni ( y – ekseni doğrultusunda)
W(I,J,K)	Üçüncü hız bileşeni ( z – ekseni doğrultusunda)
T(I,J,K)	Konsantrasyon terimi .
TOLD(I,J,K)	Bir önceki zaman adımında hesaplanan konsantrasyon değeri
PHIOLD(I,J,K)	Aynı zaman adımında önceki iterasyona ait konsantrasyon değeri
GAMA(I,J,K)	Viskozite
RHO	Yoğunluk
MAXIT	Her bir zaman adımındaki maksimum iterasyon
SORMAX	İstenilen hassasiyet
E	Zaman adımı
NITER	İterasyon sayacı
RESORT	Enerji denkleminin çözüm hassasiyeti

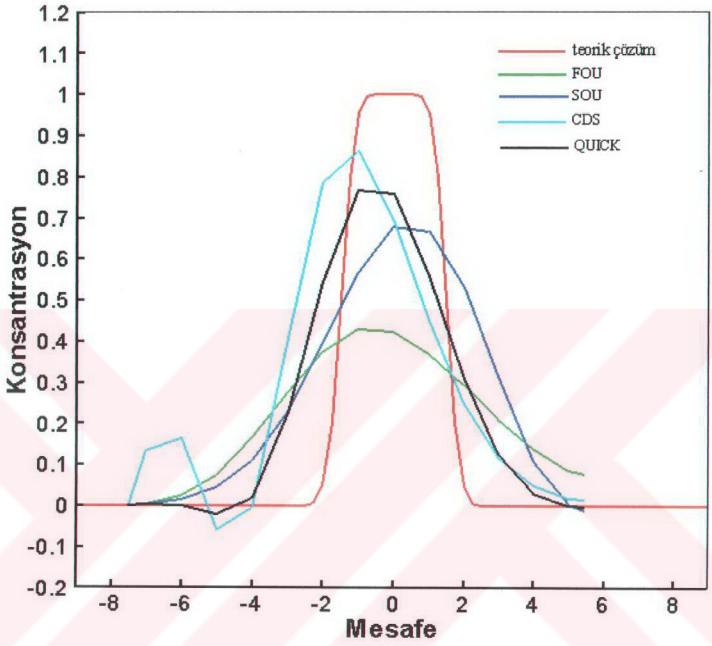
#### 7.4. Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması

Yukarıda tanımlanan problem farklı yaklaşımlarla çözülmüş ve sonuçlar aşağıdaki grafiklerle bir arada gösterilmiştir. Bu çalışmada kullanılan programla elde edilen sonuçlarla, problemin alındığı 2 numaralı kaynaktan grafikler art arda verilerek yazılan programın doğruluğu test edilmiştir.

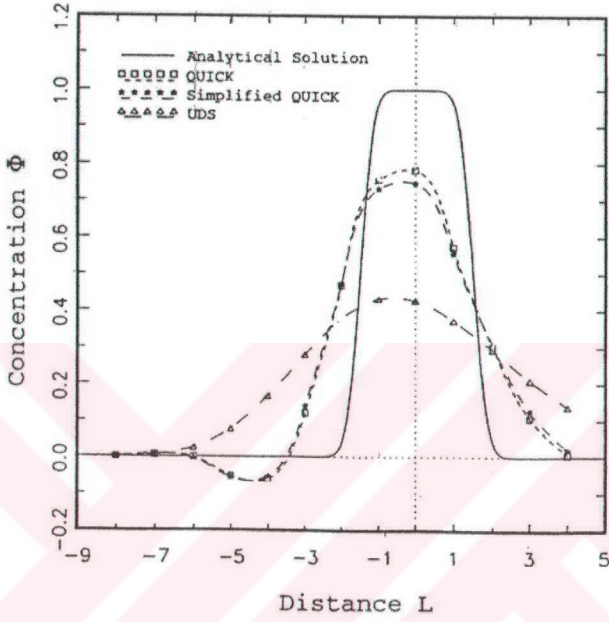


Şekil 7.3. Üç boyutlu, zamana bağlı benchmark probleminin farklı yaklaşımlarla çözümü.  $Pe = 100$ ,  $T = 6$  ve akış z eksenine paralel iken [2].

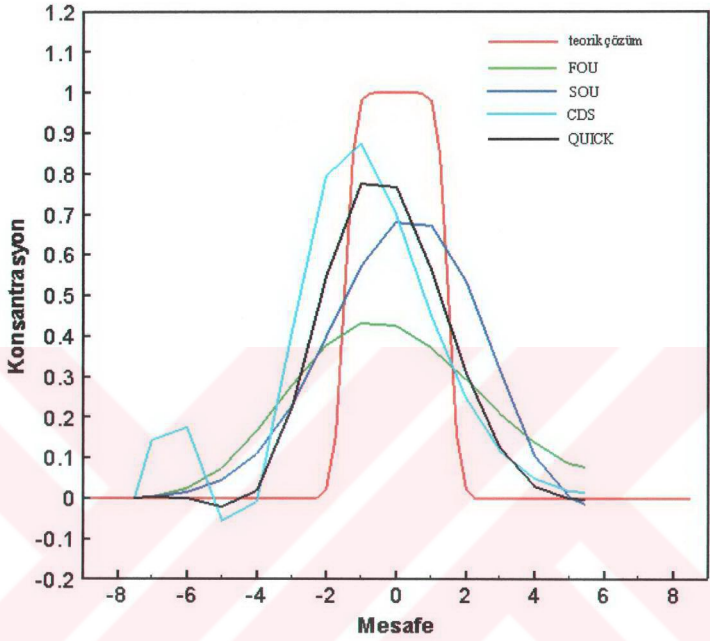




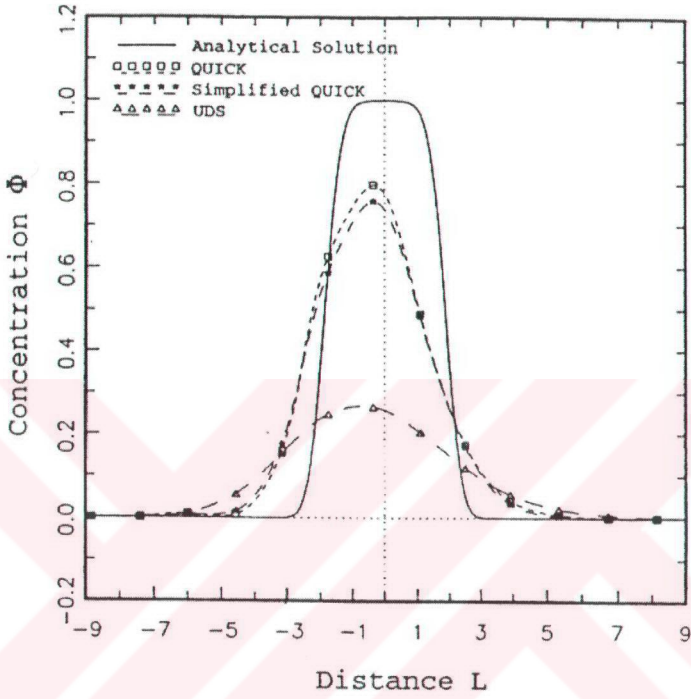
Şekil 7.4. Problemin farklı yaklaşımlarla (teorik, FOU, SOU, CDS, QUICK) çözümü  
 $Pe = 100$ ,  $T = 6$ , akış z eksenine paralel



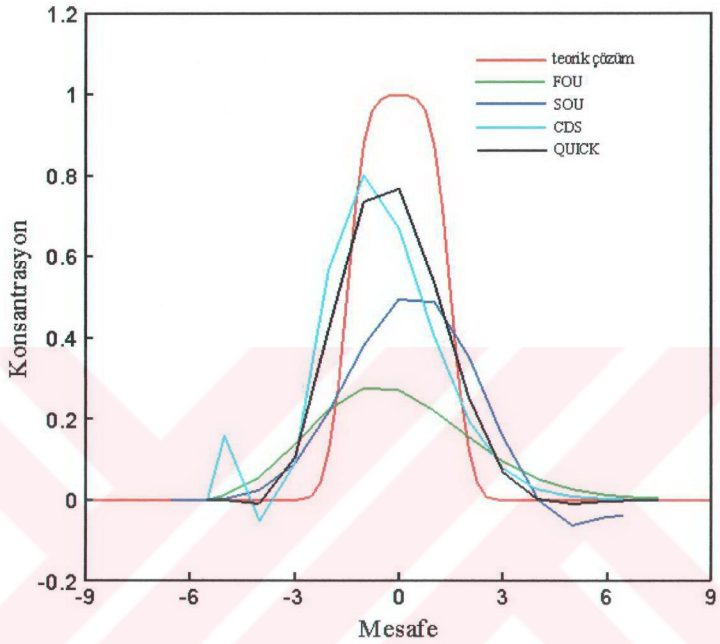
**Şekil 7.5.** Üç boyutlu, zamana bağlı benchmark probleminin farklı yaklaşımlarla çözümü.  $Pe = 150$ ,  $T = 6$  ve akış  $z$  eksenine paralel iken [2].



Şekil 7.6. Problemin farklı yaklaşımlarla (teorik, FOU, SOU, CDS, QUICK) çözümü  
 $Pe = 150$ ,  $T = 6$ , akış z eksenine paralel



**Şekil 7.7.** Üç boyutlu, zamana bağlı benchmark probleminin farklı yaklaşımlarla çözümü.  $Pe = 100$ ,  $T = 6$ , akış  $z$  ve  $y$  ekseninde  $45^\circ$  açı ile hareket ederken [2].



Şekil 7.8. Problemin farklı yaklaşımlarla (teorik, FOU, SOU, CDS, QUICK) çözümü  $Pe=100$ ,  $T=6$ , akış z- ve y- ekseninde  $45^\circ$  açı ile hareket ederken.

## SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada günümüzde akışkanlar mekaniği ve ısı transferinin incelenmesinde her alanda yer bulan sayısal yöntemlerle akışların incelenmesinin çözümünde kullanılan temel denklemlerden konveksiyon-difüzyon denklemi çözülmüştür.

Analitik çözümü olan bir problem ele alınmış, Sonlu Hacimler Yöntemi yardımıyla üç boyutlu ve zamana bağlı olan konveksiyon – difüzyon denklemi ayrıntılandırılmış ve birinci mertebeden upwind yaklaşımı, ikinci mertebeden upwind yaklaşımı, merkezi farklar yaklaşımı ve QUICK yaklaşımları ile çözülmüştür. Problemden konsantrasyon dağılımı incelenecek olan dumanın z – eksenine paralel olarak hareket ederken,  $Pe = 100$  ve  $Pe = 150$  için, z- ve y- ekseninde  $45^\circ$  açı ile hareket ederken ise  $Pe = 100$  için farklı yaklaşımlarla çözülmüş, sonuçların analitik çözümle ve birbirleriyle karşılaştırılabilmesi için Şekil 7.3 – 7.8’ de bir arada gösterilmiştir.

Sonuçlar incelendiğinde, tüm yaklaşımlarda nümerik difüzyonun etkisi açıkça görülmektedir. Birinci mertebeden upwind yaklaşımında nümerik difüzyonun çok etkili olduğu ve dolayısıyla sonuçların analitik sonuçlardan uzak olduğu, ikinci mertebeden upwind yaklaşımında ise bu hataların kısmen giderildiği, analitik çözüme biraz daha yakın olduğu ama osilasyonların meydana geldiği görülmektedir. Hata mertebesi ikinci dereceden olan merkezi farklar yaklaşımı da, ikinci mertebeden upwind yaklaşımı gibi konsantrasyonun negatif olması gibi fiziksel anlamı olmayan sonuçlar vermesine rağmen, bazı noktalarda daha iyi olduğu görülmektedir. Genel olarak hata payının çok yüksek olması dikkate alınmalıdır. QUICK yaklaşımının büyük dezavantajı olan kararlı olmama durumu, akışın z- eksenine paralel olduğu durumda gözlemlenmiş, z ve y düzleminde  $45^\circ$  açı ile hareket ederken ise herhangi bir osilasyon meydana gelmediği görülmüştür. Bu yaklaşımın diğer bütün yaklaşımlara nazaran analitik sonuçlara daha yakın olduğu aşikardır.

## KAYNAKLAR

1. ANDERSON, J.D., 1995. Computational Fluid Dynamics, the basics with applications. McGraw – Hill, Inc.
2. ARAMPATZIS, G., ASSIMACOPOULOS, D. and MITSOULIS, E. 1994. Treatment of numerical diffusion in strong convective flows. International journal for numerical methods in fluids. Vol. 18, 313-331.
3. ARPACI, V. S., LARSEN, P.S., 1984. Convection Heat Transfer. Prentice – Hall, Inc., Englewood Cliffs
4. BÖRÜ, H.İ., 2001. Baca gazlarının atmosfere yayılmasının matematik modellenmesi. Kocaeli Üniversitesi, F.B.E. Yüksek lisans tezi.
5. PATANKAR, S. V. 1980. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere publishing corporation, McGraw – Hill, New York.
6. SEÇİLMİŞ, M. 1994. Çakışık ağ sisteminde iki boyutlu sıkıştırılmaz laminar akış problemlerini çözen bir program. Kocaeli Üniversitesi. F.B.E. Yüksek lisans tezi.
7. SHYY, W., 1983. A study of finite difference approximations to steady-state, convection-dominated flow problems. Journal of computational physics. Vol 57, 415-438.
8. SHYY, W., THAKUR, S. and WRIGHT, J., 1992. Second-order upwind and central difference schemes for recirculating flow computation. AIAA journal, Vol.30, No. 4.
9. TANNEHILL, J.C., ANDERSON, D.A. and PLETCHER, R.H. 1997. Computational fluid mechanics and heat transfer. Taylor & Francis.
10. VANKA, S.P. , 1987. Second-order upwind differencing in a recirculating flow. AIAA journal. Vol.25, No.11.
11. VERSTEEG, H.K. and MALALASEKERA, W. 1995. An introduction to computational fluid dynamics The finite volume method. Longman Scientific&Technical

## ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Şanlıurfa'nın Birecik ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Birecik ilçesinde tamamladıktan sonra, 1996 yılında Kocaeli Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü'nde öğrenim görmeye hak kazandı ve 2000 yılında mezun oldu. 2001 yılından itibaren aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.