

154848

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN MODELLENMESİ ve  
ÇEVİRİMDİŐI PROGRAMLANMASI**

**DOKTORA TEZİ**

**Serdar KÜÇÜK**

**Anabilim Dalı: Elektrik Eğitimi**

**Danışman: Yrd. Doç. Dr. Zafer BİNGÜL**

**TEMMUZ 2004**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN MODELLENMESİ ve  
ÇEVİRİMDIŞI PROGRAMLANMASI**

**DOKTORA TEZİ**

**Serdar KÜÇÜK**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18 Haziran 2004**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 12 Temmuz 2004**

**Tez Danışmanı**

**Üye**

**Üye**

**Yrd. Doç. Dr. Zafer BİNGÜL**

**Doç. Dr. İsmail ERTÜRK**

**Doç. Dr. Sarp ERTÜRK**

(*Zafer Bingül*.....)

(*İsmail Ertürk*.....)

(*Sarp Ertürk*.....)

**Üye**

**Üye**

**Yrd. Doç. Dr. Ercüment KARAKAŞ**

**Prof. Dr. Selçuk VAROL**

(*Ercüment Karakaş*.....)

(*Selçuk Varol*.....)

**TEMMUZ 2004**

# ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN MODELLENMESİ ve ÇEVİRİMDIŞI PROGRAMLANMASI

SERDAR KÜÇÜK

**Anahtar Kelimeler:** Robotların kinematik modelleri, Robotların çalışma uzayının eniyilenmesi, Robotların ters kinematiği, Robotların dinamiği, Robot benzetim programları

**ÖZET:** Bu tez çalışmasında Huang and Milenkovic tarafından sınıflandırılan temel on altı adet endüstriyel robot manipülatörünün kinematik modellenmesi, çalışma uzayının eniyilenmesi, iki farklı bilek düzenleştimli ters kinematiği, dinamiği ve benzetimi gerçekleştirilmiştir.

Kartezyen ve Kartonyum olmak üzere iki farklı uzayda toplam altı değişik robot kinematik modelleme yöntemi karşılaştırılmıştır. Bu yöntemler arasındaki farklılıkları incelemek amacıyla her bir yöntem PUMA-560 robotuna uygulanmıştır.

Bu temel on altı adet endüstriyel robot manipülatörünün çalışma uzayları, üç farklı yerel ve evrensel başarı göstergesi referans alınarak eniyilenmiştir. Eniyileme sonucunda her bir başarı göstergesine göre robotların geniş çaplı hareket yapabilme kabiliyeti ve kol uzunlukları tablolar şeklinde verilmiştir.

Temel on altı adet endüstriyel robotun bölgesel yapısına eklenen on altısı Euler, diğer on altısı eklem kaçıklılıklı bilekten oluşan 32 adet endüstriyel robotun ters kinematiği, analitik ve sayısal olarak çözülmüştür.

Temel on altı adet robot manipülatörünün dinamik modeli Lagrange-Euler yöntemi kullanılarak çıkarılmıştır.

Etkileştimli öğrenmeyi sağlamak amacıyla toplam otuz iki adet robotun çevrimdişı benzetim programları sunulmaktadır.

Tez çalışmasının sonucunda dört ana katkı sağlanmıştır. Öncelikle, dikgen düzenleştirme ve küresel çalışma uzayına sahip olan robot manipülatörleri daha iyi tasarım kriterlerine ve geniş çaplı hareket yapabilme becerisine sahiptir. İkinci olarak Euler bilekli robotların ters kinematik denklemlerinde konum ile yönelim birbirinden ayrı gerçekleştiğinden bu robotlar için her zaman bir analitik çözüm bulunur. Buna rağmen eklem kaçıklılıklı bilekli robotların ters kinematik denklemlerinde konum ile yönelim iç içe olduğundan her zaman analitik çözüm gerçekleşmez. Üçüncü olarak, robot dinamik modelini çıkaran Lagrange-Euler yöntemi durum uzayı değişkenlerini kullanan kontrol algoritmaları için uygun olduğu tespit edilmiştir. Son olarak, gerçekleştirilen çevrimdişı benzetim programı yardımıyla hem eğitim hem de endüstriyel amaçlı uygulamalara referans teşkil edecek bir ortam sağlanmaktadır.

# MODELLING and OFF-LINE PROGRAMMING of INDUSTRIAL ROBOTS

SERDAR KÜÇÜK

**Keywords:** Robot kinematic models, Workspace optimization of robot manipulators, Robot inverse kinematics, Robot dynamics, Robot simulation programmes

**ABSTRACT:** In this thesis, the kinematic modelling, workspace optimization, the inverse kinematics with two different wrist configuration, dynamic modelling, and simulation of the sixteen fundamental robot manipulators classified by Huang and Milenkovic have been studied.

The six different methods in two different spaces (Cartesian and Quaternion space) have been used in kinematic modelling of the robot manipulators. To examine the differences among these sixteen kinematic models, a PUMA 560 robot manipulator has been utilized.

The workspace optimization of the sixteen fundamental robot manipulators has been studied based on the three different local and global performance indices. According to the optimization results obtained, the gross motion capabilities, workspace volumes and link lengths of the robot manipulators have been presented for each performance index.

The inverse kinematics of thirty two robot manipulator configurations (sixteen Euler wrists and sixteen offset wrists) have been solved analytically and numerically.

The dynamic models of the sixteen fundamental robot manipulators have been driven by using Lagrange-Euler formulation.

An off-line programming of these thirty two robot manipulators has been developed for providing interactive learning.

There are four main contribution of the research studies presented in this thesis. Firstly, the robot manipulators with orthogonal configurations and spherical workspaces have better robot designs and gross motion capability. Secondly, there always exists an analytical solution for the robot manipulators with Euler wrist, since the orientation and position are decoupled. On the other hand, the robot manipulators with offset wrist do not produce analytical solution since, the orientation and position are coupled. Thirdly, Lagrange-Euler method for dynamic model of the robot manipulators is more suitable for the state space control algorithms. Finally, the simulation programme developed in this research can be used for educational and industrial purposes.



## ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bilgisayar destekli tasarım ve bilgisayar destekli üretim gibi tekniklerin bulunmasıyla, endüstriyel otomasyon sistemleri kısa zamanda çok hızlı gelişmiştir. Bu hızlı gelişmenin sonucunda endüstriyel robotların kullanımı ivme kazanmıştır. Son yıllarda oldukça önemli aşamalar kaydeden robot uygulamaları insan yaşamını gittikçe kolaylaştırmaktadır. Bu tez çalışmasında, bu alanın bir noktasına ışık tutmak amacıyla endüstriyel robotların modellenmesi, kinematiği, dinamiği ve benzetimi gerçekleştirilmiştir. Bundan sonra yapılacak çalışmalarda, bu doktora tezinin başvuru kaynaklarından biri olacağını ümit ediyorum.

Bu tez konusunun belirlenmesinde ve ilerleyen aşamalarında bana her konuda yardım eden, bilimsel çalışma disiplini öğretti, engin deneyimini benimle paylaştı ve ufku genişletti büyük katkısı olan Sn. Yrd. Doç. Dr. Zafer Bingül'e, tezin incelenmesinde ve düzenlenmesinde emeği geçen Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre Erdemli, Doç. Dr. İsmail Ertürk, Prof. Dr. Selçuk Varol ve tüm bölüm arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	ii
ABSTRACT .....	iii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR .....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR .....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	xiii
TABLolar DİZİNİ .....	xix
BÖLÜM 1. ROBOT MODELLEME YÖNTEMLERİ .....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Robotların Kontrolü ve Mekaniği.....	2
1.3. Robotların Kinematik Analizi.....	2
1.3.1. Robotların ileri yön kinematiği .....	5
1.3.2. Robotların ters kinematiği .....	5
1.4. Robotların Kinematik Modelinin Çıkarılması.....	6
1.4.1. Robotların Kartezyen uzayda kinematik modelinin çıkarılması .....	6
1.4.1.1. Denavit-Hartenberg yöntemi.....	6
1.4.1.2. Üstel yöntem (exponential method).....	13
1.4.1.3. Sıfır referans konum yöntemi (zero referance position position method-ZRP).....	17
1.4.1.3.1 Dönme-kayma gösterimi.....	17
1.4.1.4. Pieper - Roth yöntemi .....	24
1.4.1.5. Tam ve parametrik olarak sürekli kinematik yöntem (complete and parametrically continuous model-CPC) .....	27
1.4.2. Robotların Kartonyum uzayında kinematik modelinin çıkarılması .....	33
1.5. Robotların Sınıflandırılması .....	40
1.5.1. Serbestlik derecelerine göre robotlar.....	40
1.5.2. Kontrol yöntemlerine göre robotlar.....	43

1.5.2.1. Noktasal kontrol edilen robotlar.....	43
1.5.2.2. Sürekli yörünge kontrollü robotlar.....	43
1.5.3. Robot eyleyicilerinin kullandığı güç kaynağına göre robotlar .....	43
1.5.3.1. DC servo ve adım (step) motorları.....	43
1.5.3.2. Hidrolik robotlar.....	44
1.5.3.3. Pnömatik hareket ettiriciler .....	44
1.5.4. Kesinlik derecelerine göre robotlar .....	44
1.5.4.1. Çözünürlük.....	44
1.5.4.2. Doğruluk .....	44
1.5.4.3. Yinelenebilirlik .....	45
1.5.5. İkili harf kodunun kullanılmasıyla yapılan sınıflandırma .....	45
1.6. Benzetim (Simülasyon).....	48
1.6.1. Çevrimiçi programlama.....	49
1.6.2. Çevrimdışı programlama.....	48
1.7. Yöntemlerin Karşılaştırılması.....	49
1.8. Sonuç .....	50

## BÖLÜM 2. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN ÇALIŞMA

UZAYLARININ ENİYİLENMESİ.....	51
2.1.Giriş .....	51
2.2. Başarı Göstergeleri .....	54
2.2.1. Beceri ölçeği ve yapısal uzunluk göstergesi (strucural length index).....	57
2.2.2. Vaziyet numarası ve evrensel vaziyet göstergesi (global conditioning index).....	58
2.2.3. Yeni yerel ve evrensel başarı göstergesi .....	60
2.3. Çalışma Uzayının Eniyilenmesi.....	61
2.4. Temel Onaltı Adet Robotun Çalışma Uzaylarının Eniyilenmesi.....	62
2.4.1. SS (Kartezyen robot) robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	63
2.4.2. SC robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	64
2.4.3. SN robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	69
2.4.4. CS robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	73
2.4.5. CC robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi.....	77
2.4.6. CR robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi.....	81

2.4.7. NS robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	85
2.4.8. NN robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	90
2.4.9. NR (PUMA robotu) robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	95
2.4.10. RC robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	100
2.4.11. RN robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	104
2.4.12. RR robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	109
2.4.13. RS (Scara robotu) robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	114
2.4.14. SR robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	117
2.4.15. CN robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	122
2.4.16. NC robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi .....	126
2.5. Eniyileme Sonuçları .....	130
2.5.1. Beceri ölçeği ve yapısal uzunluk göstergesi .....	130
2.5.2. Vaziyet numarası evrensel vaziyet göstergesi .....	132
2.5.3. Yeni yerel ve evrensel başarı göstergeleri .....	134
2.6. Endüstriyel Robotların Çalışma Uzaylarının Şeklinin Belirlenmesi .....	136
2.7. Bazı Endüstriyel Robotların D-H Değişkenleri .....	138
2.8. Sonuçlar .....	141
BÖLÜM 3. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN TERS KİNEMATİĞİ .....	143
3.1. Giriş .....	143
3.2. Ters Kinematik Çözüm Yöntemleri .....	145
3.2.1. Analitik çözüm yaklaşımı .....	145
3.2.2. Sayısal çözüm yaklaşımı .....	149
3.3. Endüstriyel Robotlarda Kullanılan Bilek Düzenleşimleri .....	151
3.4. Euler Bilekli Endüstriyel Robotların Ters Kinematığı .....	153
3.4.1. Euler bilekli SS robotunun ters kinematığı .....	153
3.4.2. Euler bilekli SC robotunun ters kinematığı .....	155
3.4.3. Euler bilekli SN robotunun ters kinematığı .....	157
3.4.4. Euler bilekli CS robotunun ters kinematığı .....	159
3.4.5. Euler bilekli CC robotunun ters kinematığı .....	161
3.4.6. Euler bilekli CR robotunun ters kinematığı .....	163
3.4.7. Euler bilekli NS robotunun ters kinematığı .....	165
3.4.8. Euler bilekli NN robotunun ters kinematığı .....	167

3.4.9. Euler bilekli NR robotunun ters kinematığı .....	169
3.4.10. Euler bilekli RC robotunun ters kinematığı .....	171
3.4.11. Euler bilekli RN robotunun ters kinematığı .....	173
3.4.12. Euler bilekli RR robotunun ters kinematığı .....	175
3.4.13. Euler bilekli RS robotunun ters kinematığı .....	176
3.4.14. Euler bilekli SR robotunun ters kinematığı .....	178
3.4.15. Euler bilekli CN robotunun ters kinematığı .....	180
3.4.16. Euler bilekli NC robotunun ters kinematığı .....	182
3.5. Eklem Kaçıklılıklı Bilekli Endüstriyel Robotların Ters Kinematığı .....	185
3.5.1. Eklem kaçıklılıklı bilekli SS robotunun ters kinematığı .....	185
3.5.2. Eklem kaçıklılıklı bilekli SC robotunun ters kinematığı .....	187
3.5.3. Eklem kaçıklılıklı bilekli SN robotunun ters kinematığı .....	189
3.5.4. Eklem kaçıklılıklı bilekli CS robotunun ters kinematığı .....	190
3.5.5. Eklem kaçıklılıklı bilekli CC robotunun ters kinematığı .....	192
3.5.6. Eklem kaçıklılıklı bilekli CR robotunun ters kinematığı .....	195
3.5.7. Eklem kaçıklılıklı bilekli NS robotunun ters kinematığı .....	197
3.5.8. Eklem kaçıklılıklı bilekli NN robotunun ters kinematığı .....	198
3.5.9. Eklem kaçıklılıklı bilekli NR robotunun ters kinematığı .....	200
3.5.10. Eklem kaçıklılıklı bilekli RC robotunun ters kinematığı .....	203
3.5.11. Eklem kaçıklılıklı bilekli RN robotunun ters kinematığı .....	205
3.5.12. Eklem kaçıklılıklı bilekli RR robotunun ters kinematığı .....	206
3.5.13. Eklem kaçıklılıklı bilekli RS robotunun ters kinematığı .....	208
3.5.14. Eklem kaçıklılıklı bilekli SR robotunun ters kinematığı .....	211
3.5.15. Eklem kaçıklılıklı bilekli CN robotunun ters kinematığı .....	213
3.5.16. Eklem kaçıklılıklı bilekli NC robotunun ters kinematığı .....	215
3.6. Sonuç .....	217
<b>BÖLÜM 4. ROBOTLARIN DİNAMİK MODELLERİ .....</b>	<b>219</b>
4.1. Giriş .....	219
4.2. Lagrange-Euler Formülasyonu .....	221
4.2.1. Kinetik enerji ve potansiyel enerji kavramaları .....	222
4.2.2. Bir bağıın atalet tensörü .....	223
4.2.3. Bağ Jacobian matrisi .....	225

4.2.4. Manipülâtör atalet tensörü.....	226
4.2.5. Yerçekimi .....	228
4.2.6. Kuvvet .....	229
4.3.8. Lagrange-Euler dinamik modeli.....	229
4.3. Temel Onaltı Adet Endüstriyel Robotun Dinamik Analizi .....	236
4.3.1. SS robotunun dinamik modeli.....	236
4.3.2. SC robotunun dinamik modeli .....	245
4.3.3. SN robotunun dinamik modeli .....	246
4.3.4. CS robotunun dinamik modeli .....	249
4.3.5. CC robotunun dinamik modeli .....	250
4.3.6. CR robotunun dinamik modeli .....	252
4.3.7. NS robotunun dinamik modeli .....	253
4.3.8. NN robotunun dinamik modeli.....	256
4.3.9. NR robotunun dinamik modeli.....	261
4.3.10. RC robotunun dinamik modeli .....	265
4.3.11. RN robotunun dinamik modeli.....	267
4.3.12. RR robotunun dinamik modeli .....	270
4.3.13. RS robotunun dinamik modeli .....	272
4.3.14. SR robotunun dinamik modeli .....	273
4.3.15. CN robotunun dinamik modeli.....	275
4.3.16. NC robotunun dinamik modeli.....	277
4.4. Sonuçlar .....	279
<b>BÖLÜM 5. BENZETİM PROGRAMI.....</b>	<b>280</b>
5.1. Giriş .....	280
5.2. Uicontrol Elemanları.....	281
5.2.1. Check box.....	281
5.2.2. Editable text.....	282
5.2.3. Frame.....	282
5.2.4. Pop-up menu.....	283
5.2.5. List box.....	283
5.2.6. Push button .....	284
5.2.7. Toggle button .....	284

5.2.8. Radio button .....	285
5.2.9. Slider .....	285
5.2.10. Statik text.....	286
5.3. Uicontrol Özellikleri .....	286
5.3.1. Uicontrol position özelliği.....	287
5.3.2. Uicontrol callback özelliği .....	287
5.3.3. Uicontrol style özelliği .....	288
5.3.4. Uicontrol min, max ve value özelliği .....	288
5.3.5. Uicontrol foreground color özelliği.....	289
5.3.6. Uicontrol background color özelliği.....	289
5.3.7. Uicontrol font angle, name, size ve weight özelliği.....	289
5.3.8. Uicontrol horizontal alignment özelliği .....	290
5.3.9. Uicontrol string özelliği.....	290
5.3.10. Uicontrol visible özelliği.....	290
5.3.11. Uicontrol list box top özelliği.....	291
5.3.12. Uicontrol units özelliği.....	291
5.4. Robot Benzetim Programı .....	292
5.4.1. İleri kinematik-I.....	294
5.4.2. İleri kinematik-II .....	301
5.4.3. Ters kinematik.....	302
5.4.4. Sürekli yörünge-I.....	303
5.4.5. Sürekli yörünge-II .....	307
5.5. Sonuç .....	308
BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	310
KAYNAKLAR .....	316
EKLER .....	323
EK-A: TPS YÖNTEMİNDE KULLANILAN DÖNME MATRİSİNİN ELEMENLARI .....	323
EK-B :ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN JAKOBİYEN MATRİSLERİNİN ÇIKARILMASINDA KULLANILAN ARA İŞLEMLER .....	326
EK-C :ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN VAZİYET NUMARALARININ	

HESAPLANMASI İÇİN KULLANILAN ARA İŞLEMLER.....	340
EK-D :EULER BİLEKLİ ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN TERS KİNEMATİKLERİNİN ÇIKARILMASINDA KULLANILAN ARA İŞLEMLER.....	350
EK-E :EKLEM KAÇIKLILIKLI BİLEKLİ ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN TERS KİNEMATİKLERİNİN ÇIKARILMASINDA KULLANILAN ARA İŞLEMLER.....	375
EK-F :ROBOTLARIN DİNAMİK MODELLERİNİN ÇIKARILMASINDA KULLANILAN ARA İŞLEMLER.....	410
EK-G :BAZI DÜZENLİ GEOMETRİK ŞEKİLLERİN ATALET MOMENTLERİ.....	477
EK-H: İNGİLİZCE-TÜRKÇE TERİMLER SÖZLÜĞÜ .....	478
ÖZGEÇMİŞ .....	481



## SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

$a_{i-1}$	: bağ uzunluğu
$\alpha_{i-1}$	: bağ açısı
$d_i$	: eklem kaçıklılığı
$\theta_i$	: eklem açısı
I	: birim matris
${}^0T$	: D-H yönteminde dönüşüm matrisi
$\hat{C}^{(a,b)}$	: üssel yöntemde dönüşüm matrisi
$\tilde{N}$ veya U	: eksi bakışlı vektörel çarpım matrisi
$\bar{n}$	: kolon vektörü
u	: dönme-kayma eksenini boyunca birim vektör
s	: dönme-kayma eksenini boyunca öteleme
Q	: dönme-kayma ekseninde bir noktanın konum vektörü
$u_{i0}$	: SRK yönteminde robotun geometrisini tanımlayan eksen doğrultuları
$Q_{i0}$	: SRK yönteminde robotun geometrisini tanımlayan bağ yerleşimleri
$s_j$	: SRK yönteminde prizmatik eklem
$D_i$	: SRK yönteminde dönüşüm matrisi
$D_h$	: SRK yönteminde yer değiştirme matrisi
R	: dönme
$A_i$	: Pieper-Roth ve kartonyum yönteminde dönüşüm matrisi
$b_i$	: TPS yönteminde birim vektör
$b_x$	: b birim vektörünün x doğrultusundaki bileşeni
$b_y$	: b birim vektörünün y doğrultusundaki bileşeni
$b_z$	: b birim vektörünün z doğrultusundaki bileşeni
$B_i$	: TPS yönteminde homojen dönüşüm matrisi
$\beta_i$	: x ekseninin doğrultusuna bağımlı açı

$l_i$	: TPS yönteminde eksen numarası
$V_i$	: TPS yönteminde şekil matrisi
$Q_i$	: TPS yönteminde hareket matrisi
$q$	: Kartonyum vektörü
$p$	: Kartonyum yönteminde konum
${}^0Z_i$	: ana çerçeveye göre $i$ . koordinat çerçevesindeki birim $Z$ vektörü,
${}^0P_{iorg}$	: ana çerçeveye göre $i$ . koordinat çerçevesinin konumu
${}^0P_{araç\_ucu}$	: ana çerçeveye göre uç işlevcinin konumu
${}^0v$	: doğrusal hız
${}^0w$	: açısal hız
${}^0J$	: Jakobiyen matrisi
$w$	: beceri ölçeği
$Q_L$	: yapısal uzunluk göstergesi
$V$	: çalışma uzayının hacmi
$L$	: robotun sahip olduğu bağ uzunluklarının toplamı
$\kappa$	: vaziyet numarası
$\ \cdot\ $	: matris normu
$\eta$	: evrensel vaziyet numarası
$\rho_L$	: yeni yerel başarı göstergesi
$\rho_G$	: yeni evrensel başarı göstergesi
$m$	: vaziyet numarasının pay kısmı
$G_i$	: doğrusal olmayan eşitsizlik kısıtlamaları
$\perp$	: eksenlerin birbirine dik olması
$//$	: eksenlerin birbirine paralel olması
$T$	: robot kolunun kinetik enerjisi
$U$	: robot kolunun potansiyel enerjisi
$F_i$	: $i$ . ekleme etki eden genelleştirilmiş kuvvet
$m_k$	: $k$ . bağıın kütlesi
$D_k$	: $k$ . bağıın kütle merkezinin ana koordinat sistemine göre atalet tensörü

$\rho$	: katı nesnenin kütle yoğunluğu
$D_c$	: altı adet birbirinden bağımsız eleman içeren simetrik matris
$L_c$	: katı nesnenin kütle merkezine göre atalet tensörü
$L_0$	: robotun ana koordinat çerçevesi
$L_k$	: $k$ . bağa yerleştirilen koordinat sistemi
${}^0_k R(q)$	: $L_k$ koordinat sisteminin $L_0$ koordinat sistemine göre yönelimi
$P_k(q)$	: $L_k$ koordinat sisteminin $L_0$ koordinat sistemine göre konumu
$\bar{D}_k$	: kütle merkezinin $L_k$ koordinat sistemine göre tanımlanan atalet tensörü
$v_k$	: $k$ . bağın doğrusal hızı
$\omega_k$	: $k$ . bağın açısal hızı
$J_k(q)$	: $k$ . bağa ait Jakobiyen matrisi
$\bar{c}_k$	: ana koordinat sistemine göre $k$ . bağın kütle merkezi
$\Delta c_k$	: $L_k$ koordinat sistemine göre $k$ . bağın kütle merkezinin koordinatları
$H_1$	: homojen koordinat dönüşüm matrisi
$\delta$	: ölçüm faktörü
$\xi_k$	: eklem tip değişkeni
$z^i$	: $L_i$ koordinat sisteminin üçüncü kolon birim vektörü
$A_k$	: doğrusal hızları içeren Jakobiyen matrisi
$B_k$	: açısal hızları içeren Jakobiyen matrisi
$D(q)\ddot{q}$	: manipülatör genel atalet tensörü veya kütle matrisi
$g$	: yerçekimi ivmesi
$\bar{c}(q)$	: n tane bağın kütle merkezinin toplam ağırlığı
$\delta W$	: gerçek yer değiştirmeden dolayı üretilen gerçek iş
$c^i$	: $i$ . ekleme ait hız bağlaşım matrisi
$h_i$	: $i$ . ekleme ait yerçekimi vektörü
$\tau$	: eyleyicilere etki eden tork ifadesi
$C(q, \dot{q})$	: Coriolis ve merkezkaç kuvvetleri

$G(q)$	: robotun genel yerçekimi ivmesi
$F$	: robotun uç işlevcisine etki eden kuvvet-tork vektörü
$\chi$	: uç işlevcinin konum ve yönelimini gösteren kartezyen vektörü
$b_k^v \dot{q}$	: viskos sürtünmesi
$b_k^d$	: $k$ . ekleme ait viskos sürtünme katsayısı
$\varepsilon$	: değeri küçük olan pozitif değişken
CAD	: bilgisayar destekli tasarım
CAM	: bilgisayar destekli üretim
D-H	: Denavit-Hartenberg yöntemi
SRK	: sıfır referans konum yöntemi
TPS	: tam ve parametrik sürekli kinematik yöntem
ÇP	: çevrimdışı programlama
L-E	: Lagrange-Euler yöntemi
N-E	: Newton-Euler yöntemi
G-D	: genelleştirilmiş d'Alembert yöntemi
R-L	: özyineli Lagrange yöntemi

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Robota ve nesnelere koordinat çerçevelerinin yerleştirilmesi. ....	2
Şekil 1.2. İki bağ arasındaki olası eklem tipleri. ....	3
Şekil 1.3. Dönel eklemlerden oluşan bir robot. ....	3
Şekil 1.4. Prizmatik eklemden oluşan bir robot. ....	3
Şekil 1.5. Robot ve çalışma alanı. ....	4
Şekil 1.6. PUMA-560 robotu için dört farklı çözüm. ....	5
Şekil 1.7. $(i-1)$ ve $i$ bağlarının ve $(i-1)$ , $i$ , $(i+1)$ eksenlerinin yerleşimi. ....	6
Şekil 1.8. $(i-1)$ ve $i$ eksenlerine koordinat çerçevesinin yerleştirilmesi. ....	7
Şekil 1.9. $Z_{i-1}$ ile $Z_i$ arasında $X_i$ boyunca uzanan $a_{i-1}$ bağ uzunluğu. ....	7
Şekil 1.10. $X_{i-1}$ ile $X_i$ arasında $Z_i$ boyunca uzanan $d_i$ eklem kaçıklığı. ....	7
Şekil 1.11. $Z_{i-1}$ ile $Z_i$ eksenleri arasındaki $\alpha_{i-1}$ bağ açısı. ....	8
Şekil 1.12. Yeni $\{x', y', z'\}$ koordinat çerçevesinin oluşturulması. ....	9
Şekil 1.13. Sabit açı sisteminde dönme işlemi. ....	9
Şekil 1.14. Euler açı sisteminde dönme işlemi. ....	11
Şekil 1.15. PUMA-560 robotunun koordinat çerçevelerinin gösterimi. ....	12
Şekil 1.16. A ve B koordinat çerçeveleri. ....	14
Şekil 1.17. PUMA-560 robotunun üstel yöntem koordinat çerçevelerinin gösterimi. ....	15
Şekil 1.18. Dönme-kayma gösterimi yer değiştirmesi. ....	18
Şekil 1.19. SRK yöntemine göre tanımlanmış seri bir robot. ....	20
Şekil 1.20. SRK tanımlaması. ....	20
Şekil 1.21. PUMA 560 robotunun koordinat çerçevelerinin gösterimi ....	21
Şekil 1.22. PUMA 560 robotunun koordinat çerçevelerinin gösterimi. ....	26
Şekil 1.23. Tekil olmayan doğrusal gösterim. ....	28
Şekil 1.24. TPS yönteminin gösterimi. ....	30
Şekil 1.25. PUMA 560 robotunun koordinat çerçevelerinin gösterimi. ....	31
Şekil 1.26. Kartonyum yöntemindeki koordinat çerçevelerinin gösterimi. ....	36
Şekil 1.27. Robotların eklem yapılarına göre sınıflandırılması. ....	41

Şekil 1.28. Dört serbestlik derecesine sahip bir robot.....	43
Şekil 1.29. Huang ve Milenkoviç tarafından tanımlanan mekanizma. ....	45
Şekil 1.30. İkili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan 12 adet düzenleşim....	46
Şekil 1.31. RS ve SR kullanışlı robotları. ....	47
Şekil 1.32. CN ve NC kullanışsız robotları.....	47
Şekil 2.1. Vektörel çarpım yöntemi. ....	55
Şekil 2.2.a) SS robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi. ....	63
Şekil 2.3.a) SC robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.....	64
Şekil 2.4. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri.....	66
Şekil 2.5. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.....	67
Şekil 2.6. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen $\rho$ değerleri. ....	68
Şekil 2.7.a) SN robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.....	69
Şekil 2.8. Eklem açıları $\theta_2$ , $\theta_3$ ve bunlara karşılık gelen beceri ölçek değerleri..	71
Şekil 2.9. Eklem açıları $\theta_2$ , $\theta_3$ ve buna karşılık gelen $\kappa^{-1}$ eğerleri.....	72
Şekil 2.10. Eklem açıları $\theta_2$ , $\theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $\rho$ değerleri. ....	73
Şekil 2.11.a) CS robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.....	74
Şekil 2.12. Bağ uzunluğu $d_3$ ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri.....	75
Şekil 2.13. Bağ uzunluğu $d_3$ ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.....	76
Şekil 2.14. Bağ uzunluğu $d_3$ ve buna karşılık gelen $\rho$ değerleri. ....	77
Şekil 2.15.a) CC robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi. ....	77
Şekil 2.16. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri.....	79
Şekil 2.17. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.....	80
Şekil 2.18. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen $\rho$ değerleri.....	81
Şekil 2.19.a) CR robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi. ....	81
Şekil 2.20. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri.....	83
Şekil 2.21. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.....	84
Şekil 2.22. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen $\rho$ değerleri.....	85
Şekil 2.23.a) NS robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.....	86
Şekil 2.24. Bağ uzunluğu $d_3$ , eklem açısı $\theta_2$ ve bunlara karşılık gelen $w$ değerleri.	87

Şekil 2.25. Bağ uzunluğu $d_3$ , eklem açısı $\theta_2$ ve bunlara karşılık gelen $\kappa^{-1}$ değerleri.	88
Şekil 2.26. Bağ uzunluğu $d_3$ , eklem açısı $\theta_2$ ve bunlara karşılık gelen $\rho$ değerleri.	90
Şekil 2.27.a) NN robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.	90
Şekil 2.28. Eklem açıları $\theta_2, \theta_3$ ve bunlara karşılık gelen beceri ölçek değerleri.	92
Şekil 2.29. Eklem açıları $\theta_2, \theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $\kappa^{-1}$ değerleri.	93
Şekil 2.30. Eklem açıları $\theta_2, \theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $\rho$ değerleri.	95
Şekil 2.31.a) NR robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.	95
Şekil 2.32. Eklem açıları $\theta_2, \theta_3$ ve bunlara karşılık gelen beceri ölçek değerleri.	97
Şekil 2.33. Eklem açıları $\theta_2, \theta_3$ ve buna karşılık gelen $\kappa^{-1}$ değerleri.	98
Şekil 2.34. Eklem açıları $\theta_2, \theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $\rho$ değerleri.	99
Şekil 2.35.a) RC robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.	100
Şekil 2.36. Bağ uzunluğu $d_2$ , eklem açısı $\theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $w$ değerleri.	102
Şekil 2.37. Bağ uzunluğu $d_2$ , eklem açısı $\theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $\kappa^{-1}$ değerleri.	103
Şekil 2.38. Bağ uzunluğu $d_2$ , eklem açısı $\theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $\rho$ değerleri.	104
Şekil 2.39.a) RN robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.	105
Şekil 2.40. Eklem açıları $\theta_2, \theta_3$ ve bunlara karşılık gelen beceri ölçek değerleri.	106
Şekil 2.41. Eklem açıları $\theta_2, \theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $\kappa^{-1}$ değerleri.	107
Şekil 2.42. Eklem açıları $\theta_2, \theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $\rho$ değerleri.	109
Şekil 2.43.a) RR robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.	109
Şekil 2.38. Bağ uzunluğu $d_2$ , eklem açısı $\theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $w$ değerleri.	111
Şekil 2.45. Bağ uzunluğu $d_2$ , eklem açısı $\theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $\kappa^{-1}$ değerleri.	112
Şekil 2.46. Bağ uzunluğu $d_2$ , eklem açısı $\theta_3$ ve bunlara karşılık gelen $\rho$ değerleri.	113
Şekil 2.47.a) RS robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.	114
Şekil 2.48. Eklem açısı $\theta_2$ ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri.	115
Şekil 2.49. Eklem açısı $\theta_2$ ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.	116

Şekil 2.50. Eklem açısı $\theta_2$ ve buna karşılık gelen $\rho$ değerleri.....	117
Şekil 2.51.a) SR robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.....	118
Şekil 2.52. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen beceri ölçeği değerleri. ....	120
Şekil 2.53. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.....	120
Şekil 2.54. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen $\rho$ değerleri.....	121
Şekil 2.55.a) CN Robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.....	122
Şekil 2.56. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen beceri ölçeği değerleri. ....	124
Şekil 2.57. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.....	124
Şekil 2.58. Eklem açısı $\theta_3$ ve buna karşılık gelen $\rho$ değerleri.....	125
Şekil 2.59.a) NC Robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.....	126
Şekil 2.60. Eklem açısı $\theta_2$ , bağ uzunluğu $d_3$ ve bunlara karşılık gelen $w$ değerleri.	127
Şekil 2.61. Eklem açısı $\theta_2$ , bağ uzunluğu $d_3$ ve bunlara karşılık gelen $\kappa^{-1}$ değerleri.....	128
Şekil 2.62. Eklem açısı $\theta_2$ , bağ uzunluğu $d_3$ ve bunlara karşılık $\rho$ değerleri.....	129
Şekil 3.1. İleri ve ters kinematik problemin şematik gösterimi.....	144
Şekil 3.2. Euler bileğinin düzenleşimi. ....	151
Şekil 3.3. Bağ kaçıklıklı bileğin düzenleşimi. ....	152
Şekil 3.4. SS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	154
Şekil 3.5. SC robotunun Euler bilekli düzenleşimi. ....	155
Şekil 3.6. SN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. ....	157
Şekil 3.7. CS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	159
Şekil 3.8. CC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. ....	161
Şekil 3.9. CR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. ....	163
Şekil 3.10. NS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	165
Şekil 3.11. NN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	167
Şekil 3.12. NR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	169
Şekil 3.13. RC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. ....	171
Şekil 3.14. RN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	173
Şekil 3.15. RR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. ....	175
Şekil 3.16. RS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi. ....	177
Şekil 3.17. SR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	178



Şekil 3.18. CN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	180
Şekil 3.19. NC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.....	182
Şekil 3.20. SS robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	185
Şekil 3.21. SC robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	187
Şekil 3.22. SN robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	189
Şekil 3.23. CS robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	191
Şekil 3.24. CC robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	193
Şekil 3.25. CR robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	195
Şekil 3.26. NS robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	197
Şekil 3.27. NN robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	199
Şekil 3.28. NR robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	200
Şekil 3.29. RC robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	203
Şekil 3.30. RN robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	205
Şekil 3.31. RR robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	206
Şekil 3.32. RS robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	208
Şekil 3.33. SR robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	211
Şekil 3.34. CN robotunun eklem kaçıklılıklı bilekli düzenleşimi.....	213
Şekil 3.35. NC Robotunun eklem kaçıklılıklı eklenmiş düzenleşimi.....	215
Şekil 4.1. <i>k</i> bağı hareketi.....	222
Şekil 4.2. SS robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	237
Şekil 4.3. SC robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	245
Şekil 4.4. SN robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	247
Şekil 4.5. CS robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	249
Şekil 4.6. CC robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	250
Şekil 4.7. CR robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	252
Şekil 4.8. NS robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	254
Şekil 4.9. NN robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	256
Şekil 4.10. NR robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	261
Şekil 4.11. RC robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	265
Şekil 4.12. RN robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	267
Şekil 4.13. RR robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	270
Şekil 4.14. RS robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	272
Şekil 4.15. SR robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	274

Şekil 4.16. CN robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	275
Şekil 4.17. NC robotunun dinamik analiz düzenleşimi.....	277
Şekil 5.1. Check boxın arayüzdeki görünümü.....	282
Şekil 5.2. Editable text kutusuna kullanıcı tarafından girilmiş rakam ve metinler .	282
Şekil 5.3. Bir Frame kullanılarak gerçekleştirilen gruplama. ....	283
Şekil 5.4. Pop-up Menu'de herhangi bir durumun seçimi. ....	283
Şekil 5.5. Durum4'ün seçimi. ....	284
Şekil 5.6. Koş fiilinin çalıştırılması. ....	284
Şekil 5.7. Bir toggle buttondaki durum değişikliği.....	285
Şekil 5.8. Radi button uygulaması. ....	285
Şekil 5.9. Slider kullanarak değer seçilmesi. ....	286
Şekil 5.10 Font angle, font weight ve font size özellikleri.....	289
Şekil 5.11. Horizontal alignment özelliği .....	290
Şekil 5.12. Arayüz üzerindeki uicontrol nesnesinin görünümü. ....	290
Şekil 5.13. List box uicontrol nesnesindeki durumların görünümü.....	291
Şekil 5.14. Benzetim programının genel görünümü. ....	292
Şekil 5.15. NS robotunun genel görünümü.....	293
Şekil 5.16. Sliderla NS robotuna ait eklemlerin hareket ettirilmesi.....	294
Şekil 5.17. Üçüncü dereceden kübik bir yörüngeye ait konum,.....	
hız ve ivme grafiği.....	297
Şekil 5.18. Parabolik kısımlar eklenmiş doğrusal yörünge.....	297
Şekil 5.19.a) Birinci eklemin, b) dördüncü eklemin konum,.....	
hız ve ivme grafikleri.....	299
Şekil 5.20.a) Uç işlevcisinin konum, hız ve ivme grafiği, b) Uç işlevcisinin.....	
dönüşüm matrisi, RKT, Euler ve sabit açı sistemi.....	300
Şekil 5.21. NS robotunun farklı açı ve uzunluk değerleriyle çalıştırılması. ....	301
Şekil 5.22. Euler açı sistemiyle ters kinematik uygulaması.....	303
Şekil 5.23. Araç kutusunun sürekli yörünge-I modunda çalıştırılması.....	304
Şekil 5.24. Dosyadan formatlı veri okuma.....	306
Şekil 5.25. Silindir1.txt dosyasına formatlı bilgi girilmesi. ....	307
Şekil 5.26. NS robotuna bir silindirin çizdirilmesi. ....	307
Şekil 5.27. Araç kutusunun sürekli yörünge-II modunda çalıştırılması. ....	308

## TABLolar DİZİNİ

Tablo 1.1. PUMA-560 robotunun D-H değişkenleri. ....	12
Tablo 1.2. PUMA 560 robotuna ait SRK verisi. ....	22
Tablo 1.3. Pieper-Roth yöntemine göre ayarlanmış D-H değişkenleri. ....	26
Tablo 1.4. PUMA 560 robotuna ait BPS yöntem değişkenleri. ....	32
Tablo 1.5. T ile Q arasında birbirine karşılık gelen temel matematiksel eşitlikler. ...	35
Tablo 1.6. Üç yöntemin hesap yükü. ....	50
Tablo 2.1. SS robotunun D-H değişkenleri. ....	63
Tablo 2.2. SC robotunun D-H değişkenleri. ....	65
Tablo 2.3. SN robotunun D-H değişkenleri. ....	69
Tablo 2.4. CS robotunun D-H değişkenleri ....	74
Tablo 2.5. CC robotunun D-H değişkenleri ....	78
Tablo 2.6. CR robotunun D-H değişkenleri. ....	82
Tablo 2.7. NS robotunun D-H değişkenleri. ....	86
Tablo 2.8. NN robotunun D-H değişkenleri. ....	91
Tablo 2.9. NR robotunun D-H değişkenleri. ....	95
Tablo 2.10. RC robotunun D-H değişkenleri. ....	100
Tablo 2.11. RN robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri. ....	105
Tablo 2.12. RR robotunun D-H değişkenleri. ....	109
Tablo 2.13. RS robotunun D-H değişkenleri. ....	114
Tablo 2.14. SR robotunun D-H değişkenleri. ....	118
Tablo 2.15. CN Robotunun D-H değişkenleri. ....	122
Tablo 2.16. NC Robotunun D-H değişkenleri. ....	126
Table 2.17. Onaltı adet endüstriyel robotun eklem yapısı. ....	130
Tablo 2.18. Robot manipülatörlerinin $Q_L$ , $w$ ve $V$ değerleri. ....	131
Tablo 2.19. Beceri ölçeğine göre eniyilenmiş bağ uzunlukları. ....	132
Tablo 2.20. Robot manipülatörlerinin $\eta$ , $1/\kappa$ ve $V$ değerleri. ....	133
Tablo 2.21. Vaziyet numarasına göre eniyilenmiş bağ uzunlukları. ....	134
Tablo 2.22. Robot manipülatörlerinin $\rho_G$ , $\rho_L$ ve $V$ değerleri. ....	135

Tablo 2.23. Yeni yerel başarı göstergesine göre eniyilenmiş bağ uzunlukları. ....	136
Tablo 2.24. Eklem yapılarına göre çalışma uzaylarının şekli. ....	137
Tablo 2.25. Robot manipülatörlerinin çalışma uzaylarının sınıflandırılması. ....	138
Tablo 2.26. Bazı robotların D-H değişkenleri ve kod karşılıkları.....	139
Tablo 3.1. Euler bileğinin D-H değişkenleri.....	152
Tablo 3.2. Eklem kaçıklıklı bileğin D-H değişkenleri.....	153
Tablo 3.3. Euler bilekli SS robotunun D-H değişkenleri.....	154
Tablo 3.4. Euler bilekli SC robotunun D-H değişkenleri. ....	156
Tablo 3.5. Euler bilekli SN Robotunun D-H değişkenleri.....	158
Tablo 3.6. Euler bilekli CS robotunun D-H değişkenleri. ....	160
Tablo 3.7. Euler bilekli CC robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri. ....	161
Tablo 3.8. Euler bilekli CR robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri. ....	163
Tablo 3.9. Euler bilekli NS robotunun D-H değişkenleri. ....	165
Tablo 3.10. Euler bilekli NN robotunun D-H değişkenleri.....	167
Tablo 3.11. Euler bilekli NR robotunun D-H değişkenleri.....	169
Tablo 3.12. Euler bilekli RC robotunun D-H değişkenleri. ....	171
Tablo 3.13. Euler bilekli RN robotunun D-H değişkenleri.....	173
Tablo 3.14. Euler bilekli RR robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri. ....	175
Tablo 3.15. Euler bilekli RS robotunun D-H değişkenleri.....	177
Tablo 3.16. Euler bilekli SR robotunun D-H değişkenleri.....	179
Tablo 3.17. Euler bilekli CN robotunun D-H değişkenleri.....	181
Tablo 3.18. Euler bilekli NC robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri.....	183
Tablo 3.19. Robotların Euler bilekli ters kinematik çözüm sayısı.....	184
Tablo 3.20. Eklem kaçıklıklı bilekli SS robotunun D-H değişkenleri.....	185
Tablo 3.21. Eklem kaçıklıklı bilekli SC Robotunun D-H değişkenleri. ....	187
Tablo 3.22. Eklem kaçıklıklı bilekli SN Robotunun D-H değişkenleri.....	189
Tablo 3.23. Eklem kaçıklıklı bilekli CS Robotunun D-H değişkenleri. ....	191
Tablo 3.24. Eklem kaçıklıklı bilekli CC robotunun D-H değişkenleri.....	193
Tablo 3.25. Eklem kaçıklıklı bilekli CR robotunun D-H değişkenleri.....	195
Tablo 3.26. Eklem kaçıklıklı bilekli NS robotunun D-H değişkenleri. ....	197
Tablo 3.27. Eklem kaçıklıklı bilekli NN Robotunun D-H değişkenleri. ....	199
Tablo 3.28. Eklem kaçıklıklı bilekli NR robotunun D-H değişkenleri.....	201
Tablo 3.29. Eklem kaçıklıklı bilekli RC robotunun D-H değişkenleri.....	203

Tablo 3.30. Eklem kaçıklılıklı bilekli RN robotunun D-H değişkenleri.....	205
Tablo 3.31. Eklem kaçıklılıklı bilekli RR robotunun D-H değişkenleri. ....	207
Tablo 3.32. Eklem kaçıklılıklı bilekli RS robotunun D-H değişkenleri. ....	209
Tablo 3.33. Eklem kaçıklılıklı bilekli SR robotunun D-H değişkenleri. ....	211
Tablo 3.34. Eklem kaçıklılıklı bilekli CN robotunun D-H değişkenleri.....	214
Tablo 3.35. Eklem kaçıklılıklı bilekli NC robotunun D-H değişkenleri.....	216
Tablo 3.36. Robotların Eklem kaçıklılıklı bilekli ters kinematik çözüm sayısı.....	217
Tablo 5.1. Bir arayüz tasarlamak için gerekli olan elemanlar.....	281
Tablo 5.2. Doğrusal yörüngeye ait konum, hız ve ivme denklemleri .....	298



## **BÖLÜM 1. ROBOT MODELLEME YÖNTEMLERİ**

### **1.1. Giriş**

Bilgisayar destekli tasarım (Computer Aided Design-CAD) ve bilgisayar destekli üretim (Computer Aided Manufacturing-CAM) gibi tekniklerin bulunmasıyla, endüstriyel otomasyon sistemleri kısa zamanda çok hızlı gelişmiştir. Bu hızlı gelişmenin sonucunda endüstriyel robotların kullanımı ivme kazanmıştır. Günümüze kadar büyük aşama kaydeden robotlar, madde taşınması (kónveyör sistemler), boyacılık, kaynak endüstrisi, tıp vs. gibi bir çok sektörde kullanılmaktadır.

Robot, Çekoslovak dilinde köle veya işçi anlamına gelen 'robot' kelimesinden gelmektedir. Birçok görevi yapmak üzere programlanabilen bir makinedir. Fakat, sıradan bir makineyle aralarındaki en belirgin fark, robotların birçok kez programlanabilmelerinden ve bünyelerinde mekanik sistemlerin yanında bir de denetleyici içermesinden kaynaklanmaktadır. Robot bilimi ise, matematik, fizik, kontrol, makine, elektrik ve bilgisayar mühendisliği gibi bir çok bilim dalını içine alan disiplinler arası bir terbiyedir. Bu bilim dallarından makine mühendisliği robotların dinamik ve statik yapısını incelerken, matematik robotların hareketlerini tanımlayıp modelini çıkarır. Kontrol mühendisliği, kontrol algoritmaları geliştirerek sistemin istenilen hareketi gerçekleştirmesini sağlar. Elektrik mühendisliği, eyleyicilerin (actuators) ve algılayıcıların (sensor) tasarımıyla ilgilenir. Bilgisayar mühendisliği ise gerekli robot programlarının yapılmasında katkı sağlar.

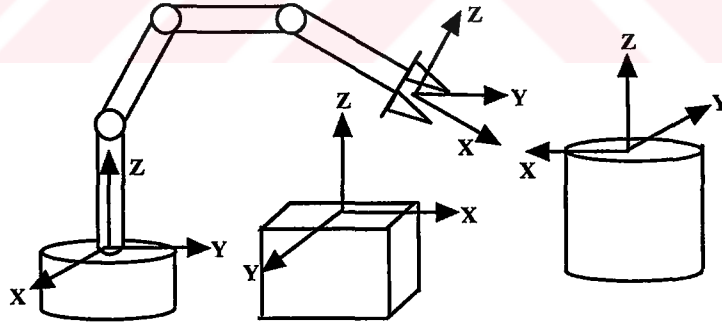
Genellikle, robotlar seri ve paralel olmak üzere iki temel gruba ayrılır. Seri robotlar bir dizi eklemler (joint) ve bu eklemleri birbirine birleştiren bağlardan (link) oluşur. Seri robotlar, geniş çalışma uzayına (aktif olarak robotun ulaşabileceği uzay), az sayıda mekanik parçaya ve paralel robotlara göre daha basit kinematik denklemlere sahiptir. Fakat, kaldıracakları kütlelerin mekanik yapılarının kütesine oranı çok küçüktür. Ana çerçeve ile yük arasında birbirine paralel pek çok bağın bir araya

gelmesiyle oluşan paralel robotlar, seri robotlara göre daha sağlam bir mekanik yapıya sahiptir. Kinematik denklemlerinin çok karmaşık olmasına karşın, kaldıracakları kütlenin mekanik yapılarının kütlesine oranı çok büyüktür.

## 1.2. Robotların Kontrolü ve Mekanığı

Robot kinematığı, üç boyutlu uzayda robotun kendi tasarımı ve çevresindeki nesnelerin yerleşimiyle ilgilenir. Yerleşim bilgisi konum vektörü ve yönelim (orientation) matrisi gibi iki nitelikle açıklanır. Matematiksel olarak nesnelerin konumu bir konum vektörüyle, yönelimi ise bir yönelim matrisi yardımıyla belirlenir.

Üç boyutlu uzayda bir nesnenin yönelimi ve konumunu tanımlamak için, o nesnenin merkezine bir koordinat çerçevesi yerleştirilir. Yerleştirilen bu koordinat çerçeveleri vasıtasıyla robotla çalışma alanındaki nesneler arasında yönelim ve konum ilişkisi tanımlanır. Şekil 1.1'de robotun eklemlerine ve çalışma alanındaki nesnelere koordinat çerçevesinin yerleştirilmesi gösterilmektedir.



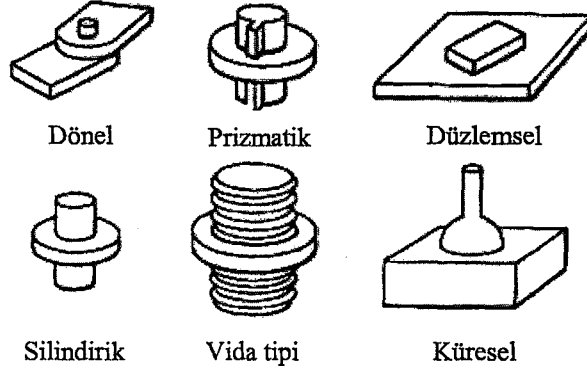
Şekil 1.1. Robota ve nesnelere koordinat çerçevelerinin yerleştirilmesi.

## 1.3. Robotların Kinematik Analizi

Kinematik bilimi nesnelerin devinimleriyle ilgilenen bir hareket bilimidir. Robot kinematığı ile robotun kuvvet, hız ve ivme analizi yapılır (Krishna and Gupta 1997). Özellikle uç işlevci (end-effector) ile eklemler arasında bir ilişki tanımlar. Bir robot yapısal olarak birbirine göre bağımsız hareket eden, öteleme (prismatic) ve dönme (revolute) hareketi gerçekleştiren eklemlerle, bu eklemleri birbirine birleştiren

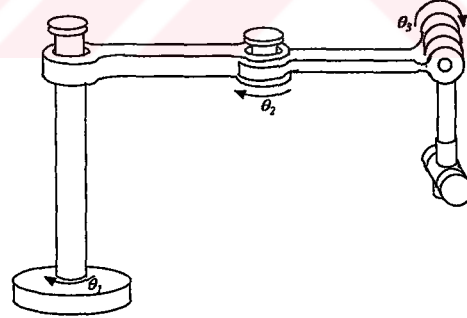


bağlardan oluşur. Dönme hareketinden dolayı gerçekleşen yer değiştirmeye eklem açısı (joint angle) ve bağlar arasındaki yer değiştirmeden dolayı oluşan ötelemeye ise eklem kaçıklığı kayması (joint offset) denir. Şekil 1.2’de iki bağ arasındaki olası altı eklem tipi görülmektedir.

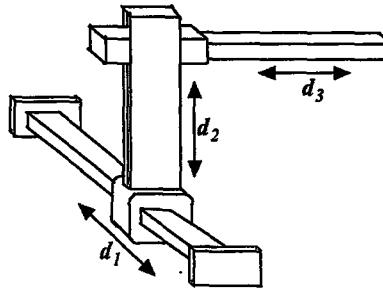


Şekil 1.2. İki bağ arasındaki olası eklem tipleri.

Şekil 1.3’de dönel eklemlerden (revolute joints) oluşan bir robot, Şekil 1.4’de ise prizmatik eklemlerden oluşan bir robot görülmektedir.



Şekil 1.3. Dönel eklemlerden oluşan bir robot.

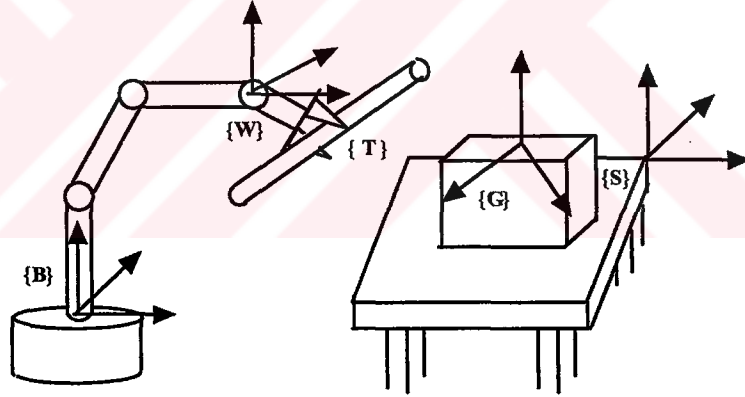


Şekil 1.4. Prizmatik eklemlerden oluşan bir robot.



Her bir robot eklemının konumu, bir öncekine veya bir sonrakine göre ifade edilir. Arka arkaya oluşturulan bu ilişkiye açık kinematik zincir denir. Bu ilişkiyi oluşturan ifadeler, robotun konum ve yönelim bilgisini içeren 4x4 homojen dönüşüm matrislerinden (transformation matrix) oluşur. Her bir eklem için bir homojen dönüşüm matrisi oluşturulur. Oluşturulan bu matrislerin sayısını, robotun serbestlik derecesi (degree of freedom) belirler. Üç boyutlu uzayda herhangi bir noktaya ulaşmak için altı serbestlik derecesi yeterlidir. Buna karşın, serbestlik derecesi altıdan fazla olan robotlarda artıklık (redundancy) durumu oluşur. Bu durumda, bir eklemının taradığı alan diğer eklemının taradığı alanla çakışır. Bu olay özel koşullar için tasarlanmış robotlarda görülür.

Robot ve robotun çalışma alanındaki nesnelere genel isimler verilir. Şekil 1.5’de bir robot ve çalışma alanındaki nesnelere görülmektedir.



Şekil 1.5. Robot ve çalışma alanı.

Ana Çerçeve {B} : Robotun sabit, yani hareket etmeyen parçasıdır.  
(Base Frame)

İstasyon Çerçevesi {S} : İstasyon çerçevesine evrensel çerçeve de denir. Robot bütün hareketlerini bu çerçevede yapar. İstasyon çerçevesi genellikle ana çerçeveye göre  ${}^B_S T$  şeklinde tanımlanır.

Bilek Çerçevesi {W} : Bilek çerçevesi robotun son bağlantısına yerleştirilmiştir.  
(Wrist Frame) Bu çerçeve, ana çerçeveye göre  ${}^B_W T$  şeklinde tanımlanır.

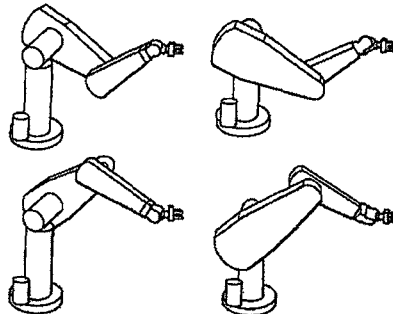
- Araç Çerçevesi  $\{T\}$  : Bu çerçeveye robotun herhangi bir işlevi (Tool Frame) gerçekleştirmesi için eleman yerleştirilir. Araç çerçevesi bilek çerçevesine göre  ${}^W_T$  şeklinde tanımlanır.
- Hedef Çerçevesi  $\{G\}$  : Robotun işlem yapacağı nesnenin üzerindeki çerçevesidir. (Goal Frame) Hedef çerçevesi istasyon çerçevesine göre  ${}^S_G$  şeklinde tanımlanır.

### 1.3.1. Robotların ileri yön kinematiği

Robotun ileri yön kinematiği (forward kinematics), robot bağlarının konumları, hızları ve ivmeleri arasındaki ilişkiyle ilgilenir. Bir robot, ana çerçevesinden araç çerçevesine doğru birbirine prizmatik veya dönel eklemlerle tutturulmuş seri bağlardan oluşur. İki bağ arasındaki ilişki bir homojen dönüşüm matrisiyle açıklanır. Eklem dönüşüm matrislerinin art arda çarpılmasıyla, ana çerçeveye araç çerçevesi arasındaki ilişki tanımlanır. Bu ilişki araç çerçevesinin yönelimini ve konumunu ana çerçeveye göre verir.

### 1.3.2. Robotların ters kinematiği

Robotların ileri yön kinematiğinde eklem açıları ve robotun fiziksel değişkenleri bulunur. Bulunan bu değişkenler dönüşüm matrisinde yerlerine konularak ana çerçeveden araç çerçevesine doğru robotun yönelimi ve konumu hesaplanır. Robotlar için ters kinematik problem ise, araç çerçevesinin ana çerçeveye göre yönelimi ve konumu verildiğinde, robotun bu yönelim ve konuma ulaşabilmesi için gerekli olan açı setlerinin hesaplanması şeklinde tanımlanır (Craig 1989).



Şekil 1.6. PUMA-560 robotu için dört farklı çözüm.

Ters kinematikte karşılaşılan denklemlerin doğrusal olmamasından dolayı bu denklemlerin çözümleri son derece karmaşıktır. Elde edilen doğrusal olmayan denklemler, tekil çözüm üretmeyip birden fazla çözüm üretebilir. Şekil 1.6'da görüldüğü gibi, aynı noktaya dört farklı eklem açısı değeriyle ulaşılabilir.

#### 1.4. Robotların Kinematik Modelinin Çıkarılması

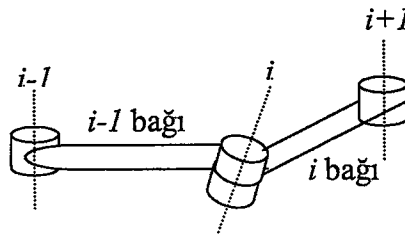
Robotların kinematik modelini çıkarmak için bir çok yöntem geliştirilmiştir. Kinematik problemlerin çözümü, Kartezyen üç boyutlu ve Kartonyum dört boyutlu olmak üzere iki farklı uzayda gerçekleştirilir.

##### 1.4.1. Robotların Kartezyen uzayda kinematik modelinin çıkarılması

Bu bölümde robotların Kartezyen uzayda kinematik modelini çıkarmak için beş farklı yöntem incelenmiştir.

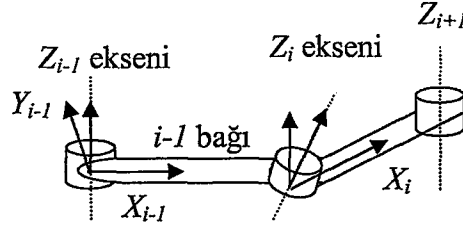
###### 1.4.1.1. Denavit-Hartenberg yöntemi

Robotların kinematik modelini çıkarırken en sık kullanılan yöntem, Denavit-Hartenberg yöntemidir. Bu yöntemde dört ana değişken kullanılarak robot kinematiği çıkarılır. Bu değişkenler, iki eksen arasındaki bağ uzunluğu (link length)  $a_{i-1}$ ,  $(i-1)$  ile  $i$  eksenleri arasındaki bağ açısı (link twist)  $\alpha_{i-1}$ , üst üste çakışan bağlar arasındaki eklem kaçıklığı (joint offset)  $d_i$ , ve iki bağ arasında oluşan eklem açısı (joint angle)  $\theta_i$ 'dir (Denavit and Hartenberg 1955). Bu dört değişkene Denavit-Hartenberg değişkeni denir ve kısaca D-H değişkenleri olarak isimlendirilir. Bu değişkenleri belirlemek için, öncelikle Şekil 1.7'de gösterildiği gibi robotun dönme eksenleri belirlenir ve dönme eksenleri bağlardan bir fazla olacak şekilde numaralandırılır.



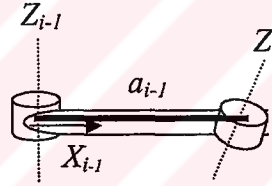
Şekil 1.7.  $(i-1)$  ve  $i$  bağlarının ve  $(i-1)$ ,  $i$ ,  $(i+1)$  eksenlerinin yerleşimi.

Daha sonra bu eksenlerin her birine bir koordinat çerçevesi yerleştirilir ve bağ dönme eksenini, Şekil 1.8’de görüldüğü gibi, koordinat çerçevesinin Z eksenini kabul edilir.



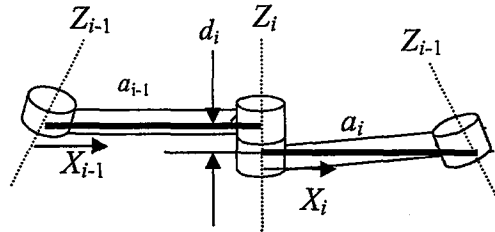
Şekil 1.8. (i-1) ve i eksenlerine koordinat çerçevesinin yerleştirilmesi.

Daha sonra Şekil 1.9’da görüldüğü gibi  $X_{i-1}$  yönünde uzanan  $Z_{i-1}$  ile  $Z_i$  arasındaki mesafe  $a_{i-1}$  bağ uzunluğu olarak belirlenir.



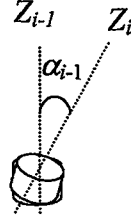
Şekil 1.9.  $Z_{i-1}$  ile  $Z_i$  arasında  $X_i$  boyunca uzanan  $a_{i-1}$  bağ uzunluğu.

$X_{i-1}$  ile  $X_i$  arasında  $Z_i$  boyunca uzanan üst üste çakışan bağlar arasındaki mesafe Şekil 1.10’da görüldüğü gibi bağ kaçıklığı  $d_i$  olarak belirlenir.



Şekil 1.10.  $X_{i-1}$  ile  $X_i$  arasında  $Z_i$  boyunca uzanan  $d_i$  bağ kaçıklığı.

$Z_{i-1}$  ile  $Z_i$  dönme eksenleri arasında oluşan açı, Şekil 1.11’de görüldüğü gibi  $\alpha_{i-1}$  bağ açısıdır. Son olarak, dönel eklemler için iki bağ arasında oluşan eklemler açısı  $\theta_i$  belirlenir.



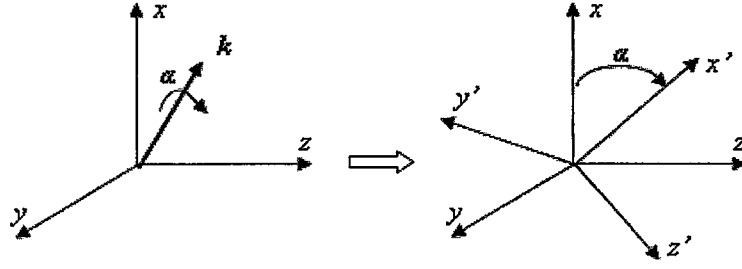
Şekil 1.11.  $Z_{i-1}$  ile  $Z_i$  eksenini arasındaki  $\alpha_{i-1}$  bağ açısı.

Robotun bir eklemine ait dönüşüm matrisi bu dört değişkenden yararlanılarak yazılır. Bu dört değişkenin meydana getirdiği matrislerin çarpımıyla, sadece  $n$  serbestlik derecesine sahip robotun bir eklemine ait dönüşüm matrisi elde edilir. Bir dönüşüm matrisi,  $3 \times 3$ 'lük bir dönme matrisinden ve  $3 \times 1$ 'lik bir konum vektöründen oluşur.

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}T_i &= R_x(\alpha_{i-1})D_x(a_{i-1})R_z(\theta_i)Q_i(d_i) \\
 {}^{i-1}T_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^{i-1}T_i &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

Denklem 1.1'de gösterilen  $n$  tane matrisin yan yana çarpılmasıyla  $n$  serbestlik derecesine sahip bir robotun ileri yön kinematik modeli çıkarılır. Robotların ileri yön kinematiği çıkarılırken iki koordinat çerçevesi arasındaki dönme işlemi, RKT, Euler ve sabit açı (Roll-pitch-Yaw) sistemi olmak üzere üç farklı şekilde gerçekleştirilir.

Şekil 1.12'deki  $\{x, y, z\}$  koordinat çerçevesinin merkezine bir  $k$  vektörü yerleştirilerek bu  $k$  vektörü  $\theta$  açısıyla döndürülürse,  $\{x', y', z'\}$  gibi yeni bir koordinat çerçevesi elde edilir. Oluşan yeni koordinat çerçevesiyle eski koordinat çerçevesinin orijinleri çakışık olduğundan, bu işlem sırasında sadece dönme gerçekleşir ve Denklem 1.2'deki gibi  $R = Rot(k, \theta)_{3 \times 3}$  matrisi ile gösterilir (Paul 1981).



Şekil 1.12. Yeni  $\{x', y', z'\}$  koordinat çerçevesinin oluşturulması.

$$R = Rot(k, \theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x V\theta + c\theta & k_y k_x V\theta - k_z s\theta & k_z k_x V\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y V\theta + k_z s\theta & k_y k_y V\theta + c\theta & k_z k_y V\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z V\theta - k_y s\theta & k_y k_z V\theta + k_x s\theta & k_z k_z V\theta + c\theta \end{bmatrix} = [r_{ij}]_{3 \times 3} \quad (1.2)$$

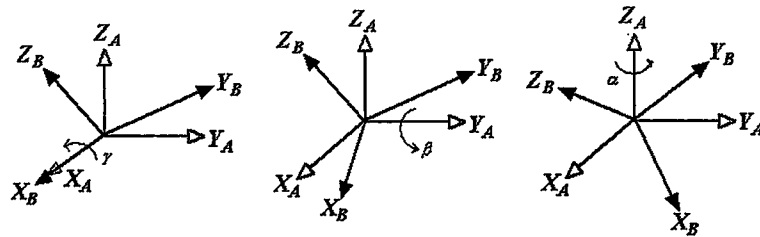
Denklemler 1.2'de kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$V\theta = 1 - \cos \theta \quad (1.3)$$

$$k = \frac{1}{2 \sin \theta} [r_{32} - r_{23} \quad r_{13} - r_{31} \quad r_{21} - r_{12}]^T \quad (1.4)$$

$$\theta = \arctan 2[\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}, (r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)] \quad (1.5)$$

Sabit açı sisteminde dönme işlemi, hareket etmeyen sabit koordinat çerçevesine göre gerçekleştirildiğinden, bu yöntemde sabit açı sistemi veya Roll-Pitch-Yaw açı sistemi denir. Bu açı sistemine göre, iki koordinat çerçevesi arasında dönme işlemi gerçekleştirmek için 12 farklı sabit açı kümesi bulunmaktadır.  $B$  koordinat çerçevesinin  $A$  koordinat çerçevesine göre dönme işlemi  $X$ - $Y$ - $Z$  sabit açı sisteminde aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 1.13. Sabit açı sisteminde dönme işlemi.

İlk önce  $B$  koordinat çerçevesi  $X_A$  boyunca  $\gamma$ ,  $Y_A$  boyunca  $\beta$  ve  $Z_A$  boyunca  $\alpha$

açısıyla döndürülerek elde edilir.  $X_A$   $Y_A$  ve  $Z_A$  boyunca gerçekleştirilen dönme işlemleri, sabit  $\{A\}$  koordinat çerçevesine göre ifade edilir. Bu işlemin matematiksel ifadesi aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}
{}^A R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) &= R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Sabit açı sisteminde  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  açı kümesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
{}^A R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.7)
\end{aligned}$$

Her iki matriste (1,1), (2,1) ve (3,1) elemanlar birbirine eşitlendikten sonra (1,1) ve (2,1) matris elemanlarının kareleri alınıp toplanırsa  $\cos \beta = \pm \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}$  ve  $\sin \beta = -r_{31}$  şeklinde elde edilir. Bu iki denklem kullanılarak  $\beta$  açısının  $-90^\circ < \beta < 90^\circ$  arasındaki çözümü denklem 1.8'deki gibi elde edilir.

$$\beta = \text{Atan} 2 \left( -r_{31}, \pm \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2} \right) \quad (1.8)$$

(1,1) ve (2,1) matris elemanlarından yararlanarak  $\alpha$  açısı,  $\beta \neq \pm 90^\circ$  olmamak koşuluyla, Denklem 1.9'da ifade edildiği gibi bulunur ( $\cos \alpha = \frac{r_{11}}{\cos \beta}$  ve

$$\sin \alpha = \frac{r_{21}}{\cos \beta}.$$

$$\alpha = A \tan 2 \left( \frac{r_{21}}{\cos \beta}, \frac{r_{11}}{\cos \beta} \right) \quad (1.9)$$

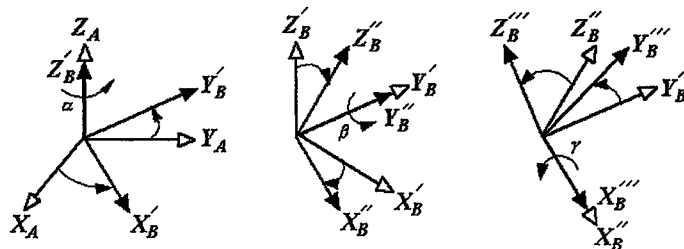
(3,2) ve (3,3) matris elemanlarından yararlanarak  $\gamma$  açısı aynı şekilde,  $\beta \neq \pm 90^\circ$  olmamak koşuluyla Denklem 1.10'da ifade edildiği gibi bulunur ( $\sin \gamma = \frac{r_{32}}{\cos \beta}$  ve

$$\cos \gamma = \frac{r_{33}}{\cos \beta}.$$

$$\gamma = A \tan 2 \left( \frac{r_{32}}{\cos \beta}, \frac{r_{33}}{\cos \beta} \right) \quad (1.10)$$

Son olarak, Euler açısı sisteminde dönme işlemi, hareket eden koordinat çerçevesine göre gerçekleştirilir. Sabit açı sisteminde olduğu gibi, Euler açısı sisteminde de iki koordinat çerçevesi arasında dönme işlemi on iki farklı şekilde gerçekleştirilir.  $B$  koordinat çerçevesinin  $A$  koordinat çerçevesine göre yönelimi Euler açısı sistemine göre aşağıdaki gibi bulunur.

İlk önce eksenleri  $\{A\}$  koordinat çerçevesiyle çakışık olan  $\{B\}$  koordinat çerçevesi  $Z_B$  boyunca  $\alpha$  açısıyla döndürülür. Dönme sonucu oluşan yeni  $\{B'\}$  koordinat çerçevesi  $Y'_B$  boyunca  $\beta$  açısıyla döndürülür. Yine, dönme sonucu oluşan  $\{B''\}$  koordinat çerçevesi  $X''_B$  boyunca  $\gamma$  açısıyla döndürülür. Bu işlem matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.



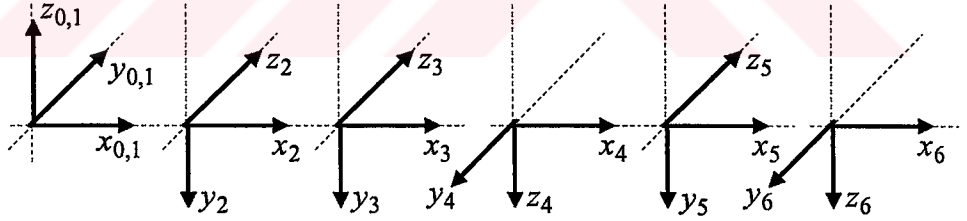
Şekil 1.14. Euler açısı sisteminde dönme işlemi.



$$\begin{aligned}
{}^A_B R_{ZYX}(\alpha, \beta, \gamma) &= R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.11)
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi Z-Y-X Euler açı kümesi ile X-Y-Z sabit açı kümesi aynı dönme matrisini üretmektedir. Dolayısıyla,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  açı kümeleri de aynı bulunur.

Şekil 1.6'da gösterilen PUMA-560 robotunun Kartezyen uzayda koordinat çerçevelerinin gösterimi Şekil 1.15'de görülmektedir. Bu işlem gerçekleştirilirken eklem eksenleri, döner eksenler için dönme yönü Z eksenine, buna dik olan bağ uzunluğu X eksenine kabul edilir. Y ise sağ el kuralına göre bulunur. Buna göre, PUMA-560 robotunun D-H değişkenleri Tablo 1.1'deki gibi çıkarılır.



Şekil 1.15. PUMA-560 robotunun koordinat çerçevelerinin gösterimi.

Tablo 1.1. PUMA-560 robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	$\theta_2$	-90	0	0
3	$\theta_3$	0	$a_2$	$d_3$
4	$\theta_4$	-90	$a_3$	$d_4$
5	$\theta_5$	90	0	0
6	$\theta_6$	90	0	0

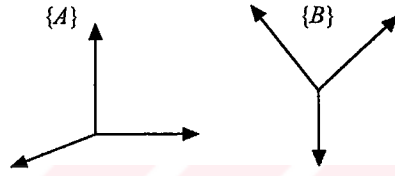
Tablo 1.1'deki D-H değişkenleri Denklem 1.1'de yerine konarak ileri kinematik matrisleri bulunur.

$$\begin{aligned}
{}^0_6T &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_6T &= \begin{bmatrix} c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) & \dots & \dots \\ s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) & \dots & \dots \\ -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} \dots & c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5c_6] + s_1(c_4c_6 + s_4c_5s_6) & \dots & \dots \\ \dots & s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5c_6] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) & \dots & \dots \\ \dots & -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) - c_{23}s_5s_6 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} \dots & -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5 & c_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_3s_1 \\ \dots & -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5 & s_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_3c_1 \\ \dots & s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 & -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23} \\ \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.12)
\end{aligned}$$

#### 1.4.1.2. Üstel yöntem (exponential method)

Genellikle ileri yön kinematikte verilen eklem değişkenlerini kullanarak uç işlevcinin (end-effector) konumu ve yönelimi, kartezyen uzayda kapalı formda kolayca çözülür. Ters kinematik probleminin doğrusal olmayan denklemler içermesinden dolayı, Kartezyen uzay verilerini kullanarak eklem değişkenlerini bulmak garanti edilemeyebilir. Dolayısıyla, robotlar için kapalı çözümün mümkün olmadığı durumlarda ters kinematik çözüm için değişik yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bunlardan en çok kullanılanı Newton-Raphson algoritmasıdır (Wu and Paul 1982). Bu algoritma eklem değişkenlerini sayısal olarak çözer.

Bu yöntemlerin ağır trigonometrik polinomlar içermesinden dolayı, kinematik problemin çözümü için alternatif olarak üstel yöntem geliştirilmiştir. Kinematik problem üstel dönme matris tabanlı cebir kullanılarak sistematik olarak çözülür (Özgören 1987). Bu yöntemde sabit eksene göre dönme gerçekleştirilerek toplam ileri yön kinematik bulunur (Balkan ve Özgören 1999). Eksi bakışlı matris (skew symmetric matrix) kullanan üstel yöntemde, başlangıç eksenini birinci hareketli eksenin göbeğine yerleştirilirken, aynı matrisi kullanan SRK yönteminde ana çerçeveye yerleştirilir.



Şekil 1.16. A ve B koordinat çerçeveleri.

Üstel yöntemde Şekil 1.16'da gösterilen B koordinat çerçevesinin A koordinat çerçevesine göre dönüşüm matrisi  $\hat{C}^{(a,b)}$  şeklinde gösterilir. Bir başka deyişle B koordinat çerçevesi A koordinat çerçevesinin n birim vektörü tarafından  $\theta$  açısıyla döndürülmesi sonucunda elde edilir.  $\hat{C}^{(a,b)}$  üstel dönme matrisi Denklem 1.13'teki gibi yazılır.

$$\hat{C}^{(a,b)} = e^{\hat{n}\theta} = \hat{I}\cos\theta + \hat{n}\sin\theta + \bar{n}\bar{n}^T[1 - \cos\theta] \quad (1.13)$$

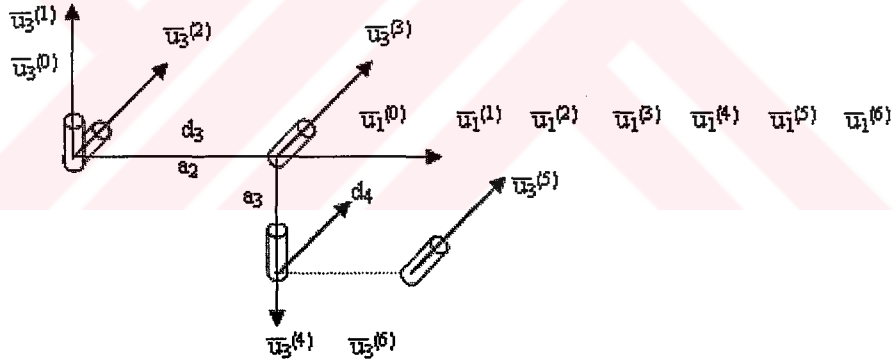
Bu denklemde  $\hat{I}$  birim vektör,  $\hat{n}$  ise  $\bar{n}$  kolon vektöründen elde edilen eksi bakışlı vektörel çarpım matrisidir (skew-symmetric cross-product matrix).

$$\bar{n} = \bar{n}^a = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \longrightarrow n = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Bu durumda,  $\hat{C}^{(a,b)}$  matrisi şeklinde aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
\widehat{C}^{(a,b)} &= e^{\widehat{n}\theta} = \widehat{I}\cos\theta + \widehat{n}\sin\theta + \overline{n}\overline{n}^T [1 - \cos\theta] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} c\theta + \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} s\theta + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} (1 - \cos\theta) \\
\widehat{C}^{(a,b)} &= \begin{bmatrix} n_1 n_1 (1 - c\theta) + c\theta & n_1 n_2 (1 - c\theta) - n_3 s\theta & n_1 n_3 (1 - c\theta) + n_2 s\theta \\ n_2 n_1 (1 - c\theta) + n_3 s\theta & n_2 n_2 (1 - c\theta) + c\theta & n_2 n_3 (1 - c\theta) - n_1 s\theta \\ n_3 n_1 (1 - c\theta) - n_2 s\theta & n_3 n_2 (1 - c\theta) + n_1 s\theta & n_3 n_3 (1 - c\theta) + c\theta \end{bmatrix} \quad (1.15)
\end{aligned}$$

$\widehat{n} = \widehat{u}_k^{(a)}$  burada  $k, a$ . eksenin  $k$ . birim vektörüdür.  $\overline{n} = \overline{u}_k$  ve  $\widehat{C}^{(a,b)} = e^{\widehat{u}_k\theta}$  'dır. Aynı şekilde,  $\overline{u}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\overline{u}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$  ve  $\overline{u}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ . Şekil 1.6'daki PUMA-560 robotunun ileri yön kinematiği, üstel yöntemle aşağıdaki gibi bulunur. Şekil 1.17'de koordinat çerçevelerinin gösterimi verilen PUMA-560 robotuna ait üstel yöntem çözümünde Tablo 1.1'deki D-H değişkenler kullanılır.



Şekil 1.17. PUMA-560 robotunun üstel yöntem koordinat çerçevelerinin gösterimi.

PUMA-560 robotu için üstel yöntemde  $\widehat{C}^{(0,6)}$  dönme matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
\widehat{C}^{(0,6)} &= \widehat{C}^{(0,1)} \widehat{C}^{(1,2)} \widehat{C}^{(2,3)} \widehat{C}^{(3,4)} \widehat{C}^{(4,5)} \widehat{C}^{(5,6)} \\
\widehat{C}^{(0,6)} &= e^{\widehat{u}_3\theta_1} e^{\widehat{u}_3\theta_2} e^{-\widehat{u}_1\frac{\pi}{2}} e^{\widehat{u}_3\theta_3} e^{\widehat{u}_3\theta_4} e^{-\widehat{u}_1\frac{\pi}{2}} e^{\widehat{u}_3\theta_5} e^{\widehat{u}_1\frac{\pi}{2}} e^{\widehat{u}_3\theta_6} e^{-\widehat{u}_1\frac{\pi}{2}} \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Burada  $\overline{n}_1 = \overline{u}_1 = \overline{n}_2 = \overline{u}_2$  'dir. Denklem 1.6'daki genel matris biçimini kullanarak

$\widehat{C}^{(0,6)}$  matrisleri sırayla bulunur.

$$\widehat{C}^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$$\widehat{C}^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_3\theta_2} e^{-\tilde{u}_1\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c90 & s90 \\ 0 & -s90 & c90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$\widehat{C}^{(2,3)} = e^{\tilde{u}_3\theta_3} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

$$\widehat{C}^{(3,4)} = e^{\tilde{u}_3\theta_4} e^{-\tilde{u}_1\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c90 & s90 \\ 0 & -s90 & c90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\widehat{C}^{(4,5)} = e^{\tilde{u}_3\theta_5} e^{\tilde{u}_1\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c90 & -s90 \\ 0 & s90 & c90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

$$\widehat{C}^{(5,6)} = e^{\tilde{u}_3\theta_6} e^{-\tilde{u}_1\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c90 & s90 \\ 0 & -s90 & c90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Elde edilen bu altı adet 3x3 matrisin çarpılmasıyla, genel yönelim matrisi Denklem 1.2'deki yönelim matrisiyle aynı çıkar. Bu yöntemde sabit eksene göre dönme gerçekleştirildiği için, ilk önce  $e^{\tilde{u}_1\frac{\pi}{2}}$  matrisi sonra  $e^{\tilde{u}_3\theta}$  matrisi yazılarak ön çarpma (premultiplication) işlemi yapılır. Böylece, sonuç dönme matrisi bulunur.

Konum vektörünü bulmak için,  $a$  ve  $d$  değişkenlerinin ana koordinat çerçevesinden ait olduğu koordinat çerçevesine göre ifade edilen dönme matrisiyle (rotation matrix) birim yön vektörü çarpılır.

$$\vec{r} = a_2 \widehat{C}^{(0,2)} \vec{u}_1 + d_3 \widehat{C}^{(0,2)} \vec{u}_3 + a_3 \widehat{C}^{(0,3)} \vec{u}_1 + d_4 \widehat{C}^{(0,3)} \vec{u}_2 \quad (1.23)$$

$$a_2 \widehat{C}^{(0,2)} \vec{u}_1 = a_2 \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a_2 \begin{bmatrix} c_1 c_2 \\ s_1 c_2 \\ -s_2 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$d_3 \widehat{C}^{(0,2)} \bar{u}_3 = d_3 \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = d_3 \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} a_3 \widehat{C}^{(0,3)} \bar{u}_1 &= a_3 \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & -c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 c_3 & -s_1 \\ s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 & c_1 \\ s_2 c_3 - c_2 s_3 & s_2 s_3 - c_2 c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= a_3 \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 \\ c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 \\ s_2 c_3 - c_2 s_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} d_4 \widehat{C}^{(0,3)} \bar{u}_2 &= d_4 \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & -c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 c_3 & -s_1 \\ s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 & c_1 \\ s_2 c_3 - c_2 s_3 & s_2 s_3 - c_2 c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= d_4 \begin{bmatrix} -c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 c_3 \\ -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 \\ s_2 s_3 - c_2 c_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Denklem 1.23'te konum vektörünü oluşturan dört matris toplanırsa, Denklem 1.12'deki konum vektörü elde edilir.

#### 1.4.1.3. Sıfır referans konum yöntemi (zero reference position method-ZRP)

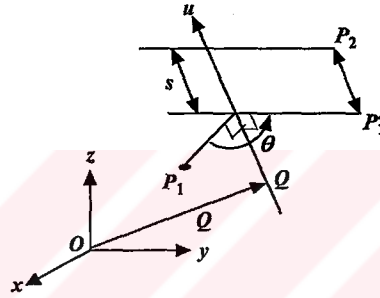
Sıfır referans konum yöntemi kısaca SRK yöntemi olarak isimlendirilir. SRK yöntemini açıklamadan önce hem bu yöntemde hem de Pieper-Roth yönteminde kullanılan dönme-kayma (turn-slide) gösterimi anlatılacaktır.

##### 1.4.1.3.1. Dönme-kayma gösterimi

Euler teoremine göre, sonlu küresel uzaklıkta sabit bir noktaya, birim eksenin belli bir açıyla döndürülmesi sonucunda ulaşılabilir. Dönme matrisi,  $R = R(\theta, u)$  olsun. Gösterimde kullanılan  $u$  birim vektör  $\theta$  ise dönme açısıdır.

Üç boyutlu uzayda gerçekleştirilen yer değiştirme, birim ekseninde dönme-kayma gösterimi uygulanarak da bulunabilir. Burada, yer değiştirme matrisi  $D = D(\theta, s, u, Q)$  şeklinde tanımlanır. Denklemden,  $u$  ve  $s$  sırasıyla dönme-kayma eksenini boyunca birim vektör ve ötelemeyi temsil ederken,  $Q$  ve  $\theta$  ise sırasıyla dönme-kayma ekseninde bir noktanın konum vektörünü ve dönme açısını gösterir.

Şekil 1.18’de genel bir yer değiştirmenin dönme-kayma gösterimi kullanılarak gerçekleştirilmesi görülmektedir.  $P_1$  noktası  $\theta$  açısıyla döndürülerek  $P_1'$  elde ediliyor. Daha sonra  $u$  vektörü boyunca  $s$  kadar ötelenerek  $P_2$  noktası elde ediliyor.



Şekil 1.18. Dönme-kayma gösterimi yer değiştirmesi.

Dönme-kayma gösterimiyle elde edilen uzaysal yer değiştirmede kullanılan dönme matrisi Denklem 1.28’de ve konum vektörü de Denklem 1.29’da ifade edildiği gibi bulunur.

$$R = R(\theta, u) = I + U \sin \theta + U^2 (1 - \cos \theta) \quad (1.28)$$

$$d = d(\theta, S, u, Q) = su - (R - I)Q \quad (1.29)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Denklemden,  $U$  matrisi eksi bakışlı matristir.  $R$  matrisi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$R(\theta, u) = \begin{bmatrix} (u_x^2 - 1)(1 - \cos \theta) & u_x u_y (1 - \cos \theta) - u_z s \theta & u_x u_z (1 - \cos \theta) + u_y s \theta \\ -u_x u_y (1 - \cos \theta) + u_z s \theta & (u_y^2 - 1)(1 - \cos \theta) & u_z u_y (1 - \cos \theta) - u_x s \theta \\ u_x u_z (1 - \cos \theta) + u_y s \theta & -u_y u_z (1 - \cos \theta) & (u_z^2 - 1)(1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Eğer  $u$  birim vektörü  $x$  ekseninde  $\theta$  açısıyla döndürülürse, Denklem 1.32'deki gibi ifade edilir.

$$R(\theta, I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} s\theta + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} (1 - c\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Aynı şekilde  $u$  birim vektörü  $y$  ve  $z$  eksenlerinde  $\theta$  açısıyla döndürülürse, Denklem 1.33 ve 1.34, sadece öteleme gerçekleştiğinde ise Denklem 1.35 elde edilir.

$$R(\theta, J) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$R(\theta, K) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$$D(\theta, s, u, Q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & su_x \\ 0 & 1 & 0 & su_y \\ 0 & 0 & 1 & su_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

$D(\theta, s, u, Q)$  yer değiştirme matrisinde dönme-kayma değişkenleri  $\theta$  ve  $u_x, u_y, u_z$  ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \quad (1.36)$$

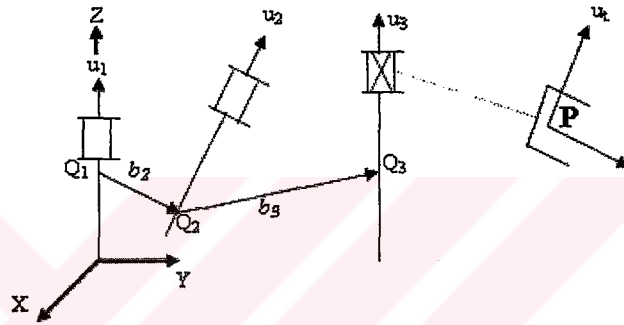
$$u_x = \frac{1}{2s\theta} (r_{32} - r_{23}) \quad (1.37)$$

$$u_y = \frac{1}{2s\theta} \left( \frac{r_{13} - r_{31}}{2s\theta} \right) \quad (1.38)$$

$$u_z = \frac{r_{21} - r_{12}}{2s\theta} \quad (1.39)$$

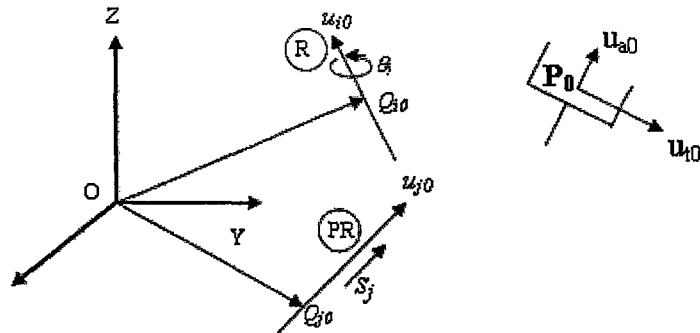


Robot kinematik problemlerini çözenin başka bir yolu da, SRK yöntemini kullanmaktır. SRK yöntemi, bütün değişkenlere bir sıfır referans değeri bularak basitçe robotun geometrisini tanımlar ve hareket işlemlerini gerçekleştirir (Gupta 1986). Bu yöntemde, robot uygun bir şekilde dondurulur ve oluşan sıfır referans konumda bütün eksen değişkenleri ( $\theta_i$  dönel ve  $s_j$  prizmatik) tanımlanır. Daha sonra bu konumda, robotun geometrisini tanımlayan eksen doğrultuları ( $u_{i0}$ ) ve bağ yerleşimleri ( $Q_{i0}$ ) belirlenir. Burada,  $u$  dönme veya kayma eksen yönündeki birim vektör,  $Q$  ise eklem eksenlerinin yerleşimini gösteren değişkendir.



Şekil 1.19. SRK yöntemine göre tanımlanmış seri bir robot.

Şekil 1.19'da herhangi bir andaki herhangi bir konuma sahip bir seri robot görülmektedir. Bu robot uygun konumda dondurularak, Şekil 1.18'deki sıfır referans konumu elde edilir. Şekil 1.20'de görülen uç işlevcinin sıfır referans konumu bir referans nokta  $P_0$  ve çapraz birim vektör ( $u_{a0}, u_{i0}$ ) ile birlikte gösterilir.



Şekil 1.20. SRK tanımlaması.

Bu yöntemde birden fazla sıfır referans konum noktası seçilebilir. Bu durum, uygun olan bir çok SRK konuma ulaşılmasından dolayı avantaj sağlar. Fakat bazı

koşullarda, istenmeyen çalışma değişkenlerinden dolayı ulaşılan sonuç fiziksel olarak gerçek bir konumu sağlamayabilir veya bu uç seçimlerden dolayı aynı robot için iki farklı matematiksel sonuç çıkabilir. Bu açıdan sonuçlar D-H yöntemiyle karşılaştırılmalıdır. Bu ise, SRK yönteminin bir dezavantajıdır. Ayrıca, SRK yöntemi genellikle açık kinematik çözümlerde kullanılır. Kapalı kinematik çözümlerde sonuç vermediğinden, bu aşamada D-H yönteminde üretilen veriler SRK yöntemi tarafından kullanılarak kapalı çözüm gerçekleştirilir.

İleri yön kinematik analizde  $\theta_i$  dönel ve  $s_j$  prizmatik eklem değişkenleri bilindiğinden  $n$  tane  $4 \times 4$  boyutlu  $D_i$  matrisin çarpımından yer değiştirme matrisi  $D_h$  bulunur.

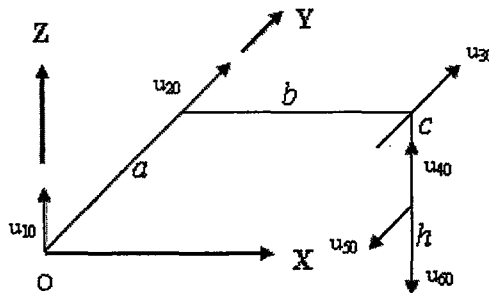
Robotun Şekil 1.20'deki  $P_0$  konumundan Şekil 1.19'daki  $P$  konumuna geçmesiyle oluşan yer değiştirme, Denklem 1.40'daki  $P$  kolon matrisiyle bulunur. Bu, aslında bir ters kinematik problem çözümdür ve çoğunlukla SRK yöntemi, ters kinematik problem çözümlerinde kullanılır.

$$\begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdot D_4 \cdot D_5 \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Şekil 1.19'daki  $P$  noktasını bulmak için ayrıca aşağıdaki eşitliklerden yararlanır.

$$u_a = [R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5] u_{a0}, \quad u_t = [R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot R_6] u_{t0} \quad (1.41)$$

Şekil 1.21'de koordinat çerçevelerinin gösterimi verilen PUMA-560 robotunun SRK yöntemindeki ileri yön kinematik problem çözümü aşağıda verilmiştir.



Şekil 1.21. PUMA-560 robotunun koordinat çerçevelerinin gösterimi.

Şekil 1.19'daki robotun geometrisini tanımlayan eksen doğrultuları  $u_{io}$  ve bağ yerleşimleri  $Q_{io}$  Tablo 1.2'de verilmiştir. Eksen doğrultusu  $u_{io}$  belirlenirken robotun 1. eksenine bir koordinat çerçevesi (koordinat frame) yerleştirilir ve dönme yönü belirlenir. Eğer 1. eksenin dönme yönü  $Z$  ise,  $u_{10} = [0 \ 0 \ 1]^T$  şeklinde gösterilir ve sonraki eksenlerin dönme yönlerini gösteren doğrultu vektörü 1. eksenindeki belirlenen koordinat çerçevesine göre yazılır. 2. eksenin dönme yönü 1. koordinat çerçevesinin  $Y$  bileşeniyle aynı doğrultuda ise  $u_{20} = [0 \ 1 \ 0]^T$  veya 3. eksenin dönme yönü 1. koordinat çerçevesinin  $X$  bileşeniyle zıt doğrultudaysa  $u_{30} = [-1 \ 0 \ 0]^T$  şeklinde belirlenir. Bağ yerleşimleri  $Q_{io}$ 'nun belirlenmesinde de başlangıç koordinat çerçevesine göre işlem yapılır.

**Tablo 1.2.** PUMA-560 robotuna ait SRK verisi; eksen türü:dönel.

$i$	$u_{io}$ doğrultusu	$Q_{io}$ yerleşimi
1	0,0,1	0,0,0
2	0,1,0	0,0,0
3	0,1,0	$b,0,0$
4	0,0,1	$b,a,0$
5	0,-1,0	$b,a,-c$
6	0,0,-1	$b,a,0$

$D_1$ 'i elde etmek için  $D_1 = [R \ d]$  matrisindeki  $R$  ve  $d$  sırayla bulunur.

$$\begin{aligned}
 R(\theta_1, k) &= I + U \sin \theta + U^2 (1 - \cos \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin \theta + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (1 - \cos \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.42)
 \end{aligned}$$

$d = (0,0,0)$  olduğundan,  $D_1$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$D_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Sadece dönme olduğundan,  $D_2$  ve  $D_3$  matrisleri de aynı şekilde bulunur.

$$D_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & su_x \\ 0 & 1 & 0 & su_y \\ -s_3 & 0 & c_3 & su_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

$D_3$  matrisinde yer alan konum vektörü  $d = [su_x \quad su_y \quad su_z]^T$ , Denklem 1.29 kullanılarak elde edilir.

$$d = su - (R - I)Q, \quad s = 0 \quad \text{ve} \quad d = -(R - I)Q$$

$$d = - \left( \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-c_3 & 0 & -s_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ s_3 & 0 & 1-c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(1-c_3) \\ 0 \\ bs_3 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & b(1-c_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & bs_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

$D_4, D_5, D_6$  aynı şekilde bulunur.

$$D_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & as_4 + b(1-c_4) \\ s_4 & c_4 & 0 & -bs_4 + a(1-c_4) \\ 0 & 0 & 1 & -bs_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & -cs_5 + b(1-c_5) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & -bs_5 - c(1-c_5) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_6 = \begin{bmatrix} c_6 & s_6 & 0 & (a_2 + a_3 + a_4)(1 - c_6) \\ -s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(a_2 + a_3 + a_4)s_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

Bu robotun ileri yön kinematiği,  $D_h = D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6$  dönüşüm matrislerinin çarpılmasıyla elde edilir. Bulunan sonuç, Denklem 1.12'deki D-H yönteminde elde edilen sonuçla aynıdır.

#### 1.4.1.4. Pieper-Roth yöntemi

Pieper-Roth yöntemi D-H değişkenlerini kullanarak yeni bir dönüşüm matrisi düzenlemiştir. Bu yöntemde dönüşüm matrisi, D-H yönteminin aksine  $(i+1)$ . ekseninden  $i$ . eksene doğru bakılarak oluşturulur.  $d_i$  ile  $\alpha_i$  değişkenleri yer değiştirilerek matris çarpımı gerçekleştirilir. Dönüşüm matrislerinin farklı olmasına rağmen, bakış açısının doğurduğu 90 derecelik açı farkı, ileri yön kinematik analizinde D-H dönüşüm matrisi ile Pieper-Roth dönüşüm matrisinin aynı sonucu üretmesine neden olur.

Pieper-Roth dönüşüm matrisi şu şekilde oluşturulmaktadır.  $i$ . ile  $(i+1)$ . koordinat çerçeveleri arasında bir ilişki kurmak için  $\{x' y' z'\}$  şeklinde bir yardımcı koordinat çerçevesi tanımlanır.  $\{x_i, y_i, z_i\}$  koordinat çerçevesi dönme-kayma gösterimini kullanarak,  $\{x' y' z'\}$  yardımcı koordinat çerçevesine,  $z_n$  ekseninde  $\theta_i$  dönmesi ve  $s_i$  ötelemesi boyunca yer değiştirirsin. Bu durumda  $\{x' y' z'\}$  yardımcı koordinat çerçevesinden  $\{x_i, y_i, z_i\}$  koordinat çerçevesine homojen dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi oluşur.

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Bir sonraki adım olarak,  $\{x' y' z'\}$  koordinat çerçevesi,  $x'$  ekseninde  $\alpha_i$  dönmesi ve  $a_i$  ötelemesini gerçekleştirip  $\{x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}\}$  koordinat çerçevesine kaydırılsın.  $\{x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}\}$  koordinat çerçevesinden  $\{x' y' z'\}$  koordinat çerçevesine homojen dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Bu iki dönüşüm matrisi birlikte çözülerek  $(i+1)$ . koordinat çerçevesi  $\{x_{i+1} y_{i+1} z_{i+1}\}$ 'den  $i$ . koordinat çerçevesi  $\{x_i y_i z_i\}$ 'ye homojen dönüşüm matrisi Denklem 1.50'deki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

Böylece Pieper-Roth yönteminin kullanacağı dönüşüm matrisi, Denklem 1.51'deki gibi elde edilir.

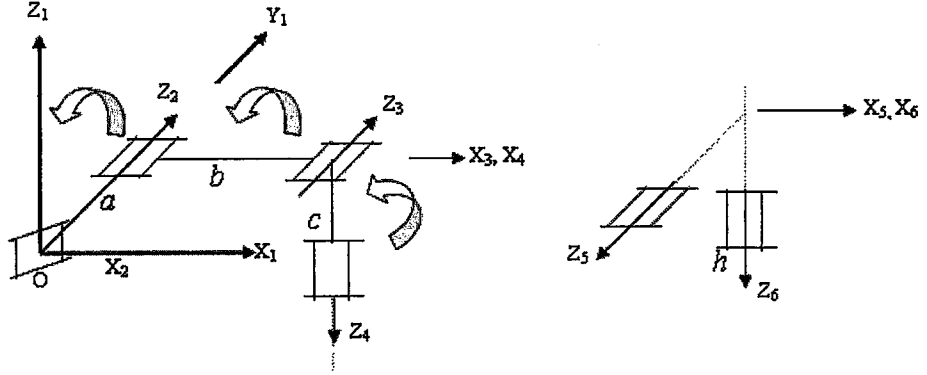
$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

Ayrıca,  $A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & b_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  lük bir matristir ve bu matrisin tersi için

$A^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  eşitliği yazılır. Burada  $R_{3 \times 3}$  dönme matrisini ve  $b_{3 \times 1}$  konum

vektörünü göstermektedir. Sonuç olarak, Pieper-Roth yönteminde ileri yön kinematik problem  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  ve  $A_6$  matrislerinin yan yana çarpılmasıyla bulunur.

Şekil 1.22'de koordinat çerçevelerinin gösterimi verilen PUMA-560 robotunun Pieper-Roth yöntemiyle elde edilen çözümü aşağıda verilmiştir.



Şekil 1.22. PUMA-560 robotunun koordinat çerçevelerinin gösterimi.

Tablo 1.3. Pieper-Roth yöntemine göre ayarlanmış D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$s_i$	$\alpha_i$	$a_i$
1	$\theta_1$	0	$-90^\circ$	0
2	$\theta_2$	a	$0^\circ$	b
3	$\theta_3$	0	$-90^\circ$	0
4	$\theta_4$	-c	$90^\circ$	0
5	$\theta_5$	0	$-90^\circ$	0
6	$\theta_6$	h	$0^\circ$	0

Denklem 1.52'deki  $A_i$  genel matrisini kullanarak  $A_1$  dönüşüm matrisi yazılır.

$$A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 c(-90^\circ) & s\theta_1 s(-90^\circ) & 0c(-90^\circ) \\ s\theta_1 & c\theta_1 c(-90^\circ) & -c\theta_1 s(-90^\circ) & 0s(-90^\circ) \\ 0 & s(-90^\circ) & c(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

Diğer matrisler de sırayla aynı şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & bc\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & bs\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_3 &= \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_4 &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_5 &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_6 &= \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & (1.53)
\end{aligned}$$

Bu robotun ileri yön kinematığı  $A_h = A_1.A_2.A_3.A_4.A_5.A_6$  dönüşüm matrislerinin çarpılmasıyla bulunur. Elde edilen sonuç Denklem 1.12'deki D-H yönteminde bulunan sonuçla aynıdır.

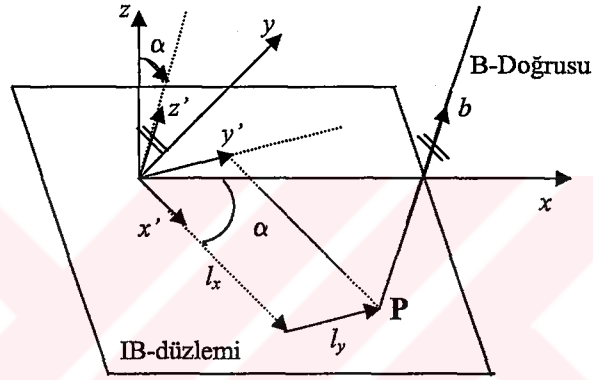
#### 1.4.1.5. Tam ve parametrik olarak sürekli kinematik yöntem (complete and parametrically continuous model-CPC)

Yeni bir robot kinematik modelleme yöntemi olarak geliştirilen tam ve parametrik sürekli kinematik yöntem, kısaca TPS olarak isimlendirilir (Zhuang 1992). Özellikle, TPS yönteminde hata modelinin (robot error model) uygulanmasından dolayı, robot kalibrasyonu için önemli avantaj sağlanmaktadır ( Mooring, Roth and Driels 1991; Hollerbach 1988).

Tam (Complete) kinematik bir yöntem, herhangi bir robotta, eklem değişkenlerini, robotun araç çerçevesine veya keyfi yönde seçilen evrensel çerçevesine göre ifade edebilmelidir (Everett, Driels and Mooring 1987). Daha açık bir ifadeyle, tam kinematik bir yöntem robotun her türlü hareketini modelleyecek parameterleri içermelidir. Parametrik süreklilik (Parametrically Continuity) ise, tamamen yöntemin tekilliğiyle (singularity) ilgilidir (Zuang 1989). Robot eklemlerinin yönelimi veya konumunun değişmesi sonucunda kinematik yöntem bağı değişkenleri de bu değişime esnek bir şekilde cevap veriyorsa, bu kinematik yöntem parametrik olarak sürekli denir.



TPS yönteminde dönme matrisi bulunurken tekil olmayan bir doğru gösterimi (singularity-free line representation) kullanılır (Roberts 1988). Şekil 1.23'deki bu gösterime göre bir B doğrusunun yönelimi uygun bir  $\{x, y, z\}$  koordinat sistemi ve konumu bir P noktası tarafından tanımlanır. B doğrusuyla IB düzlemi P noktasında birbirlerine dik olacak şekilde kesişirler. Şekil 1.23'deki B doğrusu üç boyutlu uzayda  $\{bx, by, l_x, l_y\}$  gibi dört değişkenle gösterilir. Burada  $b_x$  ve  $b_y$ , b birim vektörünün x ve y doğrultusundaki bileşenleri,  $l_x$  ve  $l_y$  ise IB-düzlemi üzerinde iki boyutlu olarak tanımlanan P noktasının koordinatlarıdır.  $b_z$  ise b birim vektörünün z yönündeki bileşenidir ve



Şekil 1.23. Tekil olmayan doğrusal gösterim.

$$b_z = (1 - b_x^2 - b_y^2)^{1/2} \quad (1.54)$$

şeklinde tanımlanır. z birim vektörü referans koordinat çerçevesinin Z ekseninde olsun.  $\{x, y, z\}$  koordinat çerçevesi bir k birim vektörüyle  $\alpha$  (D-H yöntemdeki dönme açısı) kadar döndürüldüğünde,  $R = Rot(k, \alpha)$  dönme matrisi bulunur.

$$k = \frac{zxb}{\|zxb\|} = \begin{bmatrix} -b_y & -b_x & 0 \end{bmatrix}^T \quad (1.55)$$

Denklem 1.55'te kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$\alpha \equiv \arccos(z.b) = \arccos(b_z) \quad \text{ve} \quad b_z = \cos\alpha \quad (1.56)$$

Denklem 1.2'de, Denklem 1.55'deki  $k$  birim vektör değerleri yerine konursa, Denklem 1.57'deki TPS yönteminde kullanılan dönme matrisi elde edilir (Paul 1981). Denklem 1.57'deki matrisin elemanlarının nasıl bulunduğu EK-A'da verilmiştir.

$$R = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b_x^2}{1+b_z} & \frac{-b_x b_y}{(1+b_z)} & b_x \\ \frac{-b_x b_y}{(1+b_z)} & 1 - \frac{b_y^2}{1+b_z} & b_y \\ -b_x & -b_y & b_z \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Denklem 1.57'deki dönme matrisi  $i$ . eklem değişkeni için yazılırsa, Denklem 1.58 elde edilir.

$$R_i = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b_{i,x}^2}{1+b_{i,z}} & \frac{-b_{i,x} b_{i,y}}{(1+b_{i,z})} & b_{i,x} \\ \frac{-b_{i,x} b_{i,y}}{(1+b_{i,z})} & 1 - \frac{b_{i,y}^2}{1+b_{i,z}} & b_{i,y} \\ -b_{i,x} & -b_{i,y} & b_{i,z} \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

D-H kinematik yönteminde olduğu gibi uç işlevcinin evrensel koordinat çerçevesine göre yönelimi ve konumu,  $n$  tane  $4 \times 4$  homojen dönüşüm matrisinin yan yana çarpılmasıyla bulunur.

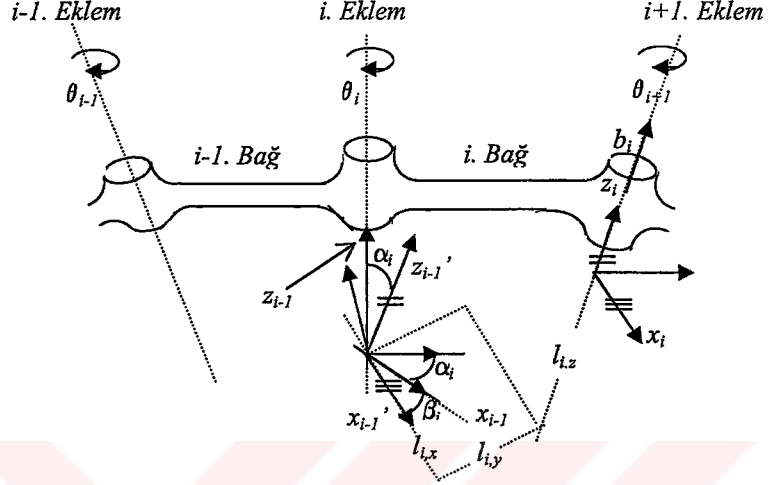
$$T_n = B_0 B_1 B_2 \dots B_{n-1} B_n \quad (1.59)$$

Bu kinematik modelde  $B_i$  homojen dönüşüm matrisi oluşturulurken  $\{b_{i,x}, b_{i,y}, b_{i,z}, l_{i,x}, l_{i,y}, l_{i,z}, \beta_i\}$  değişkenleri ve dönel eklem değişkeni  $\theta_i$  veya prizmatik eklem değişkeni  $d_i$  kullanılır. Eklem eksenleri bağ çerçevesinden bir fazla olacak şekilde numaralandırılır.  $l_i = [l_{i,x} \ l_{i,y} \ l_{i,z}]^T$  ve  $b_i = [b_{i,x} \ b_{i,y} \ b_{i,z}]^T$  olsun. Bu yöntemde kullanılan değişkenler,

$b_i$  :  $(i-1)$ . bağ çerçevesine göre  $(i+1)$ . eksendeki birim vektör

$\beta_i$  :  $x$  ekseninin doğrultusuna bağımlı açı

$l_i$  : Döndürülmüş  $(i-1)$ . çerçevesine göre  $i$ . bağ eksenini göstermektedir.



**Şekil 1.24.** TPS yönteminin gösterimi.

Her denklem için oluşturulan dönüşüm matrisi, hareket matrisi (motion matrix) ve şekil matrisinin (shape matrix) çarpılmasıyla bulunur.

Denklem 1.58'de verilen  $R_i$  matrisini belirlemek için, Şekil 1.24'deki  $i$ . eksen üzerindeki  $k$  vektörü  $\alpha_i$  kadar döndürülerek,  $z_{i-1}$  eksenine paralel yapılır. Daha sonra  $z_{i-1}$  eksenine  $\beta_i$  kadar döndürülerek  $x'_{i-1}$  eksenine paralel yapılır. Bu işlemlerin gerçekleştirilmesiyle  $(i-1)$ . ile  $i$ . eksenlerin yönelimleri birbiriyle aynı yapılır. Bir sonraki adımda, konum vektörünün belirlenmesi için yönelimlerin eşit olduğu durumda  $(i-1)$ . ile  $i$ . eksenlerin arasındaki  $l_{i,x}$ ,  $l_{i,y}$  ve  $l_{i,z}$  uzunlukları belirlenir. Bu işlemler gerçekleştirildikten sonra bağ dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$B_i = Q_i V_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (1.60)$$

Denklemden,  $Q_i$  hareket matrisidir ve aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_i = \begin{cases} R(z, \theta_i) & \text{döner eksenler için} \\ Trans(0,0,d_i) & \text{prizmatik eksenler için} \\ i = 1,2,\dots,n & \text{dir.} \end{cases}$$

$V_i$  şekil matrisidir ve Denklem 1.61'deki gibi ifade edilir.

$$V_i = R_i R(z, \beta_i) Trans(l_{i,x}, l_{i,y}, l_{i,z}), \quad i = 0,1,\dots,n \quad (1.61)$$

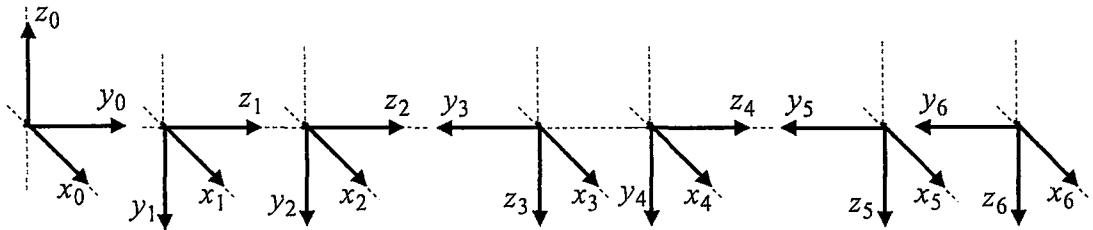
$V_i$  şekil matrisinin bir elemanı olan  $R_i$  matrisi ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_i = \begin{cases} R(k_i, \alpha_i), & z_i \text{ ile } z_{i-1} \text{ paralel değilse} \\ I_{4 \times 4}, & z_i \text{ ile } z_{i-1} \text{ paralelse} \\ i = 0,1,\dots,n \end{cases}$$

Sonuçta, genel dönüşüm matrisi Denklem 1.62'deki gibi bulunur.

$$B_i = Q_i V_i = R(z, \theta_i) R_i R(z, \beta_i) Trans(l_{i,x}, l_{i,y}, l_{i,z}) \quad (1.62)$$

Şekil 1.25'de koordinat çerçevelerinin gösterimi verilen PUMA-560 robotuna ait TPS yöntemi ileri yön kinematik problem çözümü aşağıda verilmiştir.



Şekil 1.25. PUMA 560 robotunun koordinat çerçevelerinin gösterimi.

$b_{i,x}, b_{i,y}$  ve  $b_{i,z}$  birim vektör değerleri belirlenirken, Z ekseninin doğrultusu bir önceki koordinat çerçevesinin hangi bileşeniyle aynı yöndeysse,  $b_i = [b_{i,x} \ b_{i,y} \ b_{i,z}]^T$  matrisinin o elemanı 1 kabul edilir. Örneğin  $Z_i$  bileşeni,  $X_{i-1}$  bileşeni yönündeyse  $b_i = [1 \ 0 \ 0]^T$  veya  $Y_{i-1}$  bileşeni yönündeyse  $b_i = [0 \ 1 \ 0]^T$

gibi. Buna göre Şekil 1.25'te verilen PUMA-560 robotunun BPS yöntem değişkenleri Tablo 1.4'teki gibi elde edilir.

**Tablo 1.4.** PUMA-560 robotuna ait BPS yöntem değişkenleri.

Eksen no	$b_{i,x}$	$b_{i,y}$	$b_{i,z}$	$l_{i,x}$	$l_{i,y}$	$l_{i,z}$	$\beta_i$
1	0	1	0	0	0	$l_{1,z}$	0
2	0	0	1	$l_{2,x}$	0	0	0
3	0	1	0	$l_{3,x}$	0	$-l_{3,z}$	0
4	0	-1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0

Dikkat edilecek olursa, koordinat çerçeveleri arasındaki  $x$  bileşenlerinin yönünde herhangi bir değişme olmadığından,  $\beta_i = 0$  kabul edilir.

$B_i$  dönüşüm matrisi,  $B_i = R(z, \theta_i) R_i R(z, \beta_i) Trans(l_{i,x}, l_{i,y}, l_{i,z})$  genel formülü yazılarak bulunur. Bu denklemde  $R(z, \theta_i)$ ,  $z$  eksenindeki dönmeyi temsil etmektedir.  $R_i$  dönme matrisini bulmak için Tablo 1.4'te 1. eksene ait  $b_i = [0 \ 0 \ 1]^T$  değerleri,  $R_i$  matrisinde yerlerine yazılır. Aynı şekilde,  $R(z, \beta_i)$  matrisi de Tablo 1.4'te 1. eksene ait 0 derecelik açının  $R(z, 0)$  matrisinde yerine konmasıyla bulunur. Eksen orijinleri arasında  $x, y, z$  yönlerindeki uzunlukların belirlenip  $Trans(l_{i,x}, l_{i,y}, l_{i,z})$  matrisinde yerine yazılmasıyla  $Trans(0, 0, l_{i,z})$  matrisi bulunur. Bu işlemler yapıldığında 1. eklem için Denklem 1.63'teki  $B_i$  dönüşüm matrisi elde edilir.

$$B_i = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c0 & -s0 & 0 & 0 \\ s0 & c0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_{i,z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & -s\theta_1 l_{1,z} \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & -c\theta_1 l_{1,z} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

Diğer  $B_i$  matrisler de aynı şekilde bulunur.

$$B_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 l_{2,x} \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & s\theta_2 l_{2,x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & -s\theta_3 & c\theta_3 l_{3,x} + s\theta_3 l_{3,z} \\ s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & s\theta_3 l_{3,x} - c\theta_3 l_{3,z} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

Bu robotun ileri yön kinematiği  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  ve  $B_6$  dönüşüm matrislerinin çarpılmasıyla bulunur. Elde edilen sonuç, Denklem 1.12'deki D-H yönteminde bulunan sonuçla aynıdır.

#### 1.4.2. Robotların Kartonyum uzayında kinematik modelinin çıkarılması

Kartonyum uzayı kompleks sayıların genişletilmiş şeklidir. Bu uzay  $i, j, k$  ve  $s$  olmak üzere dört farklı değişkenle ifade edilir.  $q = s + xi + yj + zk$  veya  $q = [s, v]$  şeklinde gösterilir. Burada  $s$  skaler bir sayı,  $v = (x, y, z)$  bir vektördür. Aslında Kartonyum vektör çifti üç boyutlu uzaydaki dönme kavramını, dört boyutlu uzaydaki dönme kavramına genişletmiştir. Bir yönelimden diğerine geçişte küresel yüzeydeki noktalar, küresel doğrusal (lineer) bir hareket gerçekleştirir.

Robot kinematığının çözümlenmesinde alternatif bir yöntem olan kartonyum uzayı teorik olarak bir çok robot kinematik analiz problemine uygulanmasına karşın, pratikte bu yöntem pek tercih edilmemiştir (Bottema and Roth 1979; W. Blaschke 1982; Yang and Freudenstein 1964). Kartonyum uzayında robot kinematığının modellenmesi iki farklı gösterimle gerçekleştirilebilir: birim Kartonyum gösterimi ve çift sayı Kartonyum gösterimi. Çift sayı Kartonyum gösterimi ilk olarak Hamilton (1869) tarafından ortaya atılmıştır. Perwin ve Webb (1982) çift sayı Kartonyum gösterimi özelliklerini açıklarken, Taylor (1999) ise çift sayı kartonyum gösterimini robot kinematığına uygulamıştır. Çift sayı Kartonyum, vida yer değiştirmesini en kısa ve en iyi şekilde gösterir. Birim Kartonyum gösteriminin bazı avantajları olmasına rağmen, robot kinematığında dönme ve öteleme dönüşümlerini ifade etmenin en iyi yolu çift sayı kartonyum gösterimidir. Bu gösterimde kartonyum vektörü  $q=[s,v]$ ,  $q=[\cos(\theta/2), k \sin(\theta/2)]$   $s \in R$  ve  $v \in R^3$  şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $\theta$  ve  $k$  sırasıyla açı ve birim vektörleri göstermektedir. Kartonyum vektör çifti ise rotasyon  $q$  ve öteleme  $p$  elemanlarından oluşmaktadır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Q = (q, p) = [\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)(k_x, k_y, k_z), \langle p_x, p_y, p_z \rangle] \quad (1.65)$$

Verilmiş bir  $q = [\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)k]$  Kartonyumu,  $k$  birim vektörü ve  $\theta$  açısıyla döndürülürse  $R$  Kartonyum dönüşüm matrisi elde edilir.

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2sz & 2xz + 2sy \\ 2xy + 2sz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2sx \\ 2xz - 2sy & 2yz + 2sx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$x = \frac{r_{32} - r_{23}}{4s} \quad (1.67)$$

$$y = \frac{r_{13} - r_{31}}{4s} \quad (1.68)$$

$$z = \frac{r_{21} - r_{12}}{4s} \quad (1.69)$$

$$s = \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \quad (1.70)$$

$$\theta = \arccos(s) \quad (1.71)$$

$T = [n \ o \ a \ p]$  homojen dönüşüm matrisi,  $Q = (q, p)$  kartonyum vektör çifti  $q = [s, v]$  ve  $r$  rasgele bir nokta vektördür. Bu değişkenler arasında birbirine karşılık gelen temel matematiksel eşitlikler Tablo 1.5'te verilmiştir.

**Tablo 1.5.**  $T$  ile  $Q$  arasında birbirine karşılık gelen temel matematiksel eşitlikler.

Bir nokta vektörle gerçekleştirilen dönüşüm	
$r' = [n \ o \ a \ p] [r]$	$r' = q * r * q^{-1} + p$
İki uzay operatörünün çarpımı	
$T' = [n \ o \ a \ p] [n' \ o' \ a' \ p']$	$Q' = (q, p) * (q', p')$ $= q * q', q * p * q^{-1} + p$

Kartonyum bölümünde kullanılan “\*” Kartonyum çarpanını göstermektedir. Bu çarpım aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

$$q_1 * q_2 = [s_1, v_1] * [s_2, v_2] = [s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2, \ s_1 v_2 + s_2 v_1 + v_1 \times v_2] \quad (1.72)$$

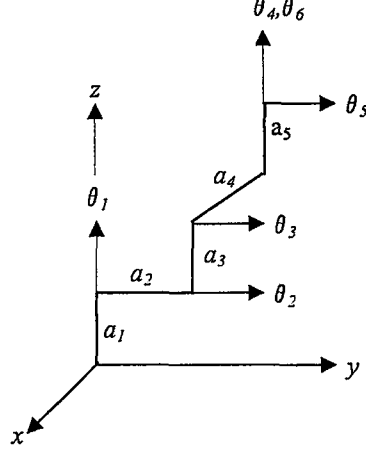
$q = [s, v]$  gibi bir kartonyumun bir vektörle döndürülmesiyle oluşan matematiksel ifade, Denklem 1.73'te verilmiştir.

$$q * r * q^{-1} = r + 2s(v \times r) + 2v \times (v \times r) + q \quad (1.73)$$

Denklem 1.72'de kullanılan “·” nokta çarpımı, ve Denklem 1.73'de kullanılan “×” ise vektör çarpımı ifade etmektedir.



Şekil 1.26'da koordinat çerçevelerinin gösterimi verilen PUMA-560 robotuna ait Kartonyum yöntemindeki ileri yön kinematik problem çözümü aşağıda verilmiştir.



Şekil 1.26. Kartonyum yöntemindeki koordinat çerçevelerinin gösterimi.

Kartonyum vektör çiftini kullanarak PUMA-560 robotunun ileri yön kinematiği Denklem 1.31'deki gibi yazılır.

$$(R_w, T_w) = T(z, a_1)R(z, \theta_1)T(x, s_2 a_3)T(z, c_2 a_3)R(y, \theta_2)T(x, a_4) \\ T(y, a_2)T(z, a_5)R(z, \theta_4)R(y, \theta_5)R(z, \theta_6) \quad (1.74)$$

$$\bar{c}_1 = c(\theta_1/2), \bar{s}_1 = s(\theta_1/2), s_{12} = s_1 c_2 + c_1 s_2 \quad \text{ve} \quad c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2 \quad (1.75)$$

Denklem 1.74 kullanılarak eşdeğer uzaysal ilişki Denklem 1.76'daki gibi yazılır.

$$A_1 = R(z, \theta_1) = ([\bar{c}_1, \bar{s}_1 k], 0), \\ A_2 = T(x, s_2 a_3) T(z, c_2 a_3) = (I, \langle s_2 a_3, 0, c_2 a_3 \rangle) \\ A_3 = R(y, \theta_{(2+3)}) = ([\bar{c}_{(2+3)}, \bar{s}_{(2+3)} j], 0) \\ A_4 = T(x, a_4) T(y, a_2) T(z, a_5) R(z, \theta_4) = ([\bar{c}_4, \bar{s}_4 k], \langle a_4, a_2, a_5 \rangle) \\ A_5 = R(y, \theta_5) = ([\bar{c}_5, \bar{s}_5 j], 0) \\ A_6 = R(y, \theta_6) = ([\bar{c}_6, \bar{s}_6 k], 0) \quad (1.76)$$

$A_1 = R(z, \theta_1)$  homojen dönüşüm matrisi,  $A = ([\bar{c}_1, \bar{s}_1 k], 0)$  Kartonyum matrisi ile homojen dönüşüm matrisi birbirine eşittir. Denklem 1.66'daki Kartonyum dönme matrisinde  $([\bar{c}_1, \bar{s}_1 k], 0)$  değerleri yerine konursa,

$$A_1 = R(z, \theta_1) = ([\bar{c}_1, \bar{s}_1, k], 0) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \bar{s}_1^2 & -2\bar{c}_1\bar{s}_1 & 0 \\ 2\bar{c}_1\bar{s}_1 & 1 - 2\bar{s}_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

bulunur. Sağ taraftaki Kartonyum matrisinde yeniden düzenleme yapılırsa her iki yöntemin de aynı matrisleri ürettiği görülür ( $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$  ve  $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ ).

$$\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

Kartonyum yönteminde PUMA 560 robotunun ileri yön kinematığı aşağıdaki gibi bulunur.

$$(R_w, T_w) = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = ([\bar{c}_1, \bar{s}_1, k], 0)(1, \langle \bar{s}_2 a_3, 0, \bar{c}_2 a_3 \rangle)([\bar{c}_{23}, \bar{s}_{23}, j], 0) \\ ([\bar{c}_4, \bar{s}_4, k], \langle a_4, a_2, a_5 \rangle)([\bar{c}_5, \bar{s}_5, j], 0)([\bar{c}_6, \bar{s}_6, k], 0) \quad (1.79)$$

$$A_1 A_2 = ([\bar{c}_1, \bar{s}_1, k], 0)(1, \langle \bar{s}_2 a_3, 0, \bar{c}_2 a_3 \rangle) \\ = ([\bar{c}_1, \bar{s}_1(0,0,1)], 0)([\bar{c}_2, \bar{s}_2(1,1,1)], \langle \bar{s}_2 a_3, 0, \bar{c}_2 a_3 \rangle) \quad (1.80)$$

$$q_1 * q_2 = [\bar{c}_1 \bar{c}_2 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1(1,1,1) + \bar{s}_2(0,0,1) + (-\bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{s}_2 \bar{s}_1, 0), \\ = [\bar{c}_1 \bar{c}_2 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 + \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 \bar{s}_2, \quad (1.81)$$

$$q_1 * p_2 * q_1^{-1} + p_1 = \langle \bar{s}_2 a_3 - 2\bar{s}_1 \bar{s}_2, 2\bar{c}_1 \bar{s}_2 a_3, \bar{c}_2 a_3 \rangle \quad (1.82)$$

$$A_1 A_2 = ([\bar{c}_1 \bar{c}_2 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 + \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 \bar{s}_2], \langle \bar{s}_2 a_3 - 2\bar{s}_1 \bar{s}_2, 2\bar{c}_1 \bar{s}_2 a_3, \bar{c}_2 a_3 \rangle) \quad (1.83)$$

Kısaltmalar yapılarak Denklem 1.85'de olduğu gibi daha kısa bir ifade elde edilir.

$$s_{12} = \bar{c}_1 \bar{c}_2 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \quad v_{12x} = \bar{c}_1 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \quad v_{12y} = \bar{c}_1 + \bar{s}_1 \bar{s}_2, \quad v_{12z} = \bar{c}_1 \bar{s}_2 \\ p_{12x} = \bar{s}_2 a_3, \quad p_{12y} = -2\bar{s}_1 \bar{s}_2, 2\bar{c}_1 \bar{s}_2 a_3, \quad p_{12z} = \bar{c}_2 a_3 \quad (1.84)$$

$$A_1 A_2 = [s_{12}, (v_{12x}, v_{12y}, v_{12z}), \langle p_{12x}, p_{12y}, p_{12z} \rangle] \quad (1.85)$$

$A_3 A_4$  ve  $A_5 A_6$ 'da aynı yöntemle bulunur.

$$\begin{aligned}
A_3 A_4 &= ([\bar{c}_{(2+3)}, \bar{s}_{(2+3)} j], 0) ([\bar{c}_4, \bar{s}_4 k], \langle a_4, a_2, a_5 \rangle) \\
&= [\bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4 - \bar{s}_{(2+3)} (0, 1, 0) \cdot \bar{s}_4 (0, 0, 1), \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4 (0, 0, 1) + \bar{c}_4 \bar{s}_{(2+3)} (0, 1, 0) + \\
&\quad + \bar{s}_{(2+3)} (0, 1, 0) x \bar{s}_4 (0, 0, 1),
\end{aligned}$$

$$[q_3 * q_4] = [\bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4, (\bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4, \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4, \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4)],$$

$$\begin{aligned}
\langle q_3 * p_4 * q_3^{-1} + p_3 \rangle &= \langle a_4, a_2, a_5 + 2\bar{c}_{(2+3)} (\bar{s}_{(2+3)} (0, 1, 0)) \cdot x(a_4, a_2, a_5) + \\
&\quad + 2\bar{s}_{(2+3)} (0, 1, 0) x \bar{s}_{(2+3)} (0, 1, 0) x(a_4 a_2 a_5) (0, 0, 0) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle q_3 * p_4 * q_3^{-1} + p_3 \rangle &= \langle a_4 + 2(\bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_5 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_2), a_2, \\
&\quad a_5 - 2(\bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_2 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_5) + (0, 0, 0) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 A_4 &= [\bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4, (\bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4, \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4, \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4), \langle a_4 + 2(\bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_5 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_2), \\
&\quad a_2, a_5 - 2(\bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_2 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_5) \rangle] \quad (1.86)
\end{aligned}$$

$$A_5 A_6 = ([\bar{c}_5, \bar{s}_5 j], 0) ([\bar{c}_6, \bar{s}_6 k], 0)$$

$$\begin{aligned}
[q_5 * q_6] &= [s_5, v_5] * [s_6, v_6], \langle q_5 * p_6 * q_5^{-1} + p_5 \rangle \\
&= [\bar{c}_5 \bar{c}_6 - (0, \bar{s}_5, 0) \cdot (0, 0, \bar{s}_6), \bar{c}_5 (0, 0, \bar{s}_6) + \bar{c}_6 (0, \bar{s}_5, 0) + (0, \bar{s}_5, 0) x (0, 0, \bar{s}_6), \langle 0, 0, 0 \rangle]
\end{aligned}$$

$$A_5 A_6 = [\bar{c}_5 \bar{c}_6, (\bar{s}_5 \bar{s}_6, \bar{c}_6 \bar{s}_5, \bar{c}_5 \bar{s}_6), \langle 0, 0, 0 \rangle] \quad (1.87)$$

$$\begin{aligned}
A_3 A_4 A_5 A_6 &= [\bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4, (\bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4, \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4, \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4), \langle a_4 + 2(\bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_5 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_2), \\
&\quad a_2, a_5 - 2(\bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_2 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_5) \rangle * [\bar{c}_5 \bar{c}_6, (\bar{s}_5 \bar{s}_6, \bar{c}_6 \bar{s}_5, \bar{c}_5 \bar{s}_6), \langle 0, 0, 0 \rangle] \quad (1.88)
\end{aligned}$$

Kısaltmalar yapılarak işlemler basitleştirilebilir.

$$p_{36x} = a_4 + 2(\bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_5 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_2) \quad (1.89)$$

$$p_{36y} = a_2 \quad (1.90)$$

$$p_{36z} = a_5 - 2(\bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_2 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_{(2+3)} a_5) \quad (1.91)$$

Yeni durumda,

$$\begin{aligned}
A_3 A_4 A_5 A_6 &= [\bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4, (\bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4, \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4, \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4), \\
&\quad \langle p_{36x}, p_{36y}, p_{36z} \rangle] * [\bar{c}_5 \bar{c}_6, (\bar{s}_5 \bar{s}_6, \bar{c}_6 \bar{s}_5, \bar{c}_5 \bar{s}_6), \langle 0, 0, 0 \rangle] \\
&= [\bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{s}_5 \bar{s}_6 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{c}_6 \bar{s}_5 - \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{s}_6 \bar{c}_5, \\
&\quad \bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{s}_5 \bar{s}_6 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{s}_6 - \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{s}_5 \bar{c}_6, \\
&\quad \bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{s}_5 \bar{c}_6 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6 + \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{s}_5 \bar{s}_6 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{c}_5 \bar{s}_6, \\
&\quad \bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{s}_6 + \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{s}_5 \bar{c}_6 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{s}_5 \bar{s}_6, \\
&\quad \langle p_{36x}, p_{36y}, p_{36z} \rangle] \tag{1.92}
\end{aligned}$$

olur. Kısaltmalar yapılarak işlemler sadeleştirilebilir.

$$s_{36} = \bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{s}_5 \bar{s}_6 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{c}_6 \bar{s}_5 - \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{s}_6 \bar{c}_5 \tag{1.93}$$

$$v_{36x} = \bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{s}_5 \bar{s}_6 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{c}_5 \bar{s}_6 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{s}_6 - \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{s}_5 \bar{c}_6 \tag{1.94}$$

$$v_{36y} = \bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{s}_5 \bar{c}_6 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6 + \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{s}_5 \bar{s}_6 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{c}_5 \bar{s}_6 \tag{1.95}$$

$$v_{36z} = \bar{c}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{s}_6 + \bar{c}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6 + \bar{s}_{(2+3)} \bar{s}_4 \bar{s}_5 \bar{c}_6 - \bar{s}_{(2+3)} \bar{c}_4 \bar{s}_5 \bar{s}_6 \tag{1.96}$$

Yeni durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 &= [s_{12}, (v_{12x}, v_{12y}, v_{12z}), \langle p_{12x}, p_{12y}, p_{12z} \rangle] * \\
&\quad [s_{36}, (v_{36x}, v_{36y}, v_{36z}), \langle p_{36x}, p_{36y}, p_{36z} \rangle] \\
&= [s_{12} s_{36} - v_{12x} v_{36x} - v_{12y} v_{36y} - v_{12z} v_{36z}, (s_{12} v_{36x}, s_{12} v_{36y}, s_{12} v_{36z}) + \\
&\quad (s_{36} v_{12x}, s_{36} v_{12y}, s_{36} v_{12z}) + (v_{12y} v_{36z} - v_{12z} v_{36y}, v_{12z} v_{36x} - v_{36z} v_{12x}, v_{12x} v_{36y} - v_{12y} v_{36x}), \\
&\quad \langle p_{36x}, p_{36y}, p_{36z} \rangle] + 2s_{12} (v_{12y} p_{36z} - v_{12z} p_{36y}, v_{12z} p_{36x} - v_{12x} p_{36z}, v_{12x} p_{36y} - v_{12y} p_{36x}) \\
&\quad + 2(v_{12x}, v_{12y}, v_{12z}) x 2 (s_{12} v_{12y} p_{36z} - s_{12} v_{12z} p_{36y}, s_{12} v_{12z} p_{36x} - s_{12} v_{12x} p_{36z}, \\
&\quad s_{12} v_{12x} p_{36y} - s_{12} v_{12y} p_{36x}), p_{12x}, p_{12y}, v_{12z} \rangle] \\
A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 &= [(s_{12} s_{36} - v_{12x} v_{36x} - v_{12y} v_{36y} - v_{12z} v_{36z}), (s_{12} v_{36x} + s_{36} v_{12x} + v_{12y} v_{36z} \\
&\quad - v_{12z} v_{36y}, s_{12} v_{36y} + s_{36} v_{12y} + v_{12z} v_{36x} - v_{36z} v_{12x}, s_{12} v_{36z} + s_{36} v_{12z} + v_{12x} v_{36y} - v_{12y} v_{36x}), \\
&\quad \langle p_{36x}, p_{36y}, p_{36z} \rangle] + 2s_{12} (v_{12y} p_{36z} - v_{12z} p_{36y}, v_{12z} p_{36x} - v_{12x} p_{36z}, + v_{12x} p_{36y} - v_{12y} p_{36x}) \\
&\quad + 4[v_{12y} (s_{12} v_{12x} p_{36y} - s_{12} v_{12y} p_{36x}) - v_{12z} (s_{12} v_{12z} p_{36x} - s_{12} v_{12x} p_{36z}), \\
&\quad v_{12z} (s_{12} v_{12y} p_{36z} - s_{12} v_{12z} p_{36y}) - v_{12x} (s_{12} v_{12x} p_{36y} - s_{12} v_{12y} p_{36x}), v_{12x} (s_{12} v_{12z} p_{36z}
\end{aligned}$$

$$-s_{12}v_{12x}P_{36z}) - v_{12y}(s_{12}v_{12y}P_{36z} - s_{12}v_{12z}P_{36y}) + P_{12x}, P_{12y}, P_{12z} > \quad (1.97)$$

Sonuç olarak Denklem 1.98 elde edilir.

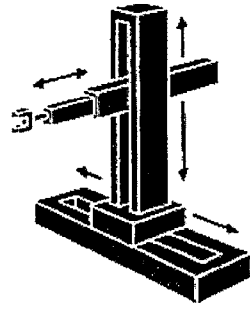
$$\begin{aligned} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = [s, v, p] = & [(s_{12}s_{36} - v_{12x}v_{36x} - v_{12y}v_{36y} - v_{12z}v_{36z}), \\ & (s_{12}v_{36x} + s_{36}v_{12x} + v_{12y}v_{36z} - v_{12z}v_{36y}, s_{12}v_{36y} + s_{36}v_{12y} + v_{12z}v_{36x} - v_{36z}v_{12x}, \\ & (s_{12}v_{36z} + s_{36}v_{12z} + v_{12x}v_{36y} - v_{12y}v_{36x}), \\ & < P_{36x} + 2s_{12}(v_{12y}P_{36z} - v_{12z}P_{36y}) + 4v_{12y}(s_{12}v_{12x}P_{36y} - s_{12}v_{12y}P_{36x}) \\ & - v_{12z}(s_{12}v_{12z}P_{36x} - s_{12}v_{12x}P_{36z}) + P_{12x}, P_{36y} + 2s_{12}(v_{12z}P_{36x} - v_{12x}P_{36z}) \\ & + 4v_{12z}(s_{12}v_{12y}P_{36z} - s_{12}v_{12z}P_{36y}) - v_{12x}(s_{12}v_{12x}P_{36y} - s_{12}v_{12y}P_{36x}) + P_{12y}, \\ & P_{36z} + 2s_{12}(v_{12x}P_{36y} - v_{12y}P_{36x}) + 4v_{12x}(s_{12}v_{12z}P_{36x} - s_{12}v_{12x}P_{36z}) \\ & - v_{12y}(s_{12}v_{12y}P_{36z} - s_{12}v_{12z}P_{36y}) + P_{12z} > \end{aligned} \quad (1.98)$$

## 1.5. Robotların Sınıflandırılması

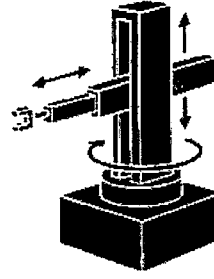
Robotları birbirinden ayırmak için beş farklı sınıflandırma yapılır.

### 1.5.1. Serbestlik derecelerine göre robotlar

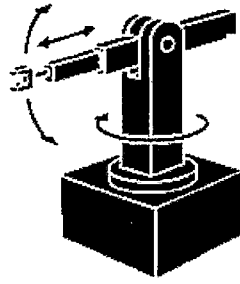
Günümüz endüstrisinde genellikle altı serbestlik derecesine sahip robotların kullanılması tercih edilmektedir. Robotlar serbestlik derecelerine göre sınıflandırılırken ilk üç bağın eklem özelliği dikkate alınır (Wolovich 1995). Eğer ilk üç bağın tamamı prizmatik eklemlere sahipse, sonuçta oluşan kinematik düzenleme (configuration) ‘‘Kartezyen’’ sınıflandırma denir. İlk bağ döner, ikinci ve üçüncü bağ prizmatik eklemlere sahipse, bu tip sınıflandırma ‘‘silindirik’’ olarak adlandırılır. İlk iki bağ döner, üçüncü bağ prizmatik eklemlere sahipse robot ‘‘küresel’’ olarak sınıflandırılır. İlk üç bağın tamamı döner eklemlere sahipse, sonuçta oluşan kinematik düzenleme ‘‘dönel’’ (articulated) sınıflandırma denir. Şekil 1.27’de bu dört sınıflandırmaya ait robot düzenleşimi görülmektedir. Ayrıca, bu dört robot düzenleşiminin birbirine göre avantaj ve dezavantajları aşağıda sıralanmıştır.



Kartezyen



Silindirik



Küresel



Dönel

Şekil 1.27. Robotların eklem yapılarına göre sınıflandırılması.

#### 1-Kartezyen düzenleşim (Gentry tipi robotlar)

##### Avantajları:

- i- Kinematik denklemler basit olduğundan kontrolü çok kolaydır.
- ii- Gövde yapısı çok sağlam olduğundan yük kaldırabilme kapasitesi çok iyidir.
- iii- Çalışma uzayının her noktasında geniş çaplı hareket kabiliyeti aynıdır.
- iv- Kinematik yapısı basit olduğundan yeni eleman eklenmesi çok kolaydır.

##### Dezavantajları:

- i- Çalışma uzayının hacmi robotun boyutlarından küçüktür.
- ii- Robotun kendi ana gövdesine ulaşamaz.
- iii- Prizmatik eklemlerinin çalışma ortamındaki tozlardan korunması güçtür.

#### 2-Silindirik düzenleşim ( Adept One, Seiko)

##### Avantajları:

- i- Temel çerçevenin dönel olmasından dolayı uç işlevci hızlı hareket eder.

- ii- Kinematik denklemler basit olduğunda kontrolü de kolaydır.
- iii- Kartezyen robotlara göre daha büyük çalışma uzayına sahiptir.

Dezavantajları:

- i- Küresel robotlara göre daha küçük çalışma uzayına sahiptir.
- ii-Geniş çaplı hareket kabiliyeti kol uzunluğuna göre değişir.

### 3-Küresel düzenleşim (Standford robotu)

Avantajları:

- i- Çok büyük çalışma uzayına sahiptir.

Dezavantajları:

- ii- Çok karmaşık kinematik denklemlere sahip olduğundan kontrolleri de zordur.
- iii-Geniş çaplı hareket kabiliyeti her noktada farklıdır. Özellikle ana çerçeve civarında çok düşük olduğundan eklem açılarındaki küçük bir değişim uç işlevcinin daha büyük bir yer değiştirmesine sebep olur.

### 4-Dönel düzenleşim (Puma, Cincinnati Milacron, ABB Graco)

Avantajları:

- i- Çok büyük bir çalışma uzayına sahiptir.
- ii- Tamamı dönel olan eklemlerin hareket ettirilmesi kolaydır.
- iii-Çok esnek ve hızlıdır.

Dezavantajları:

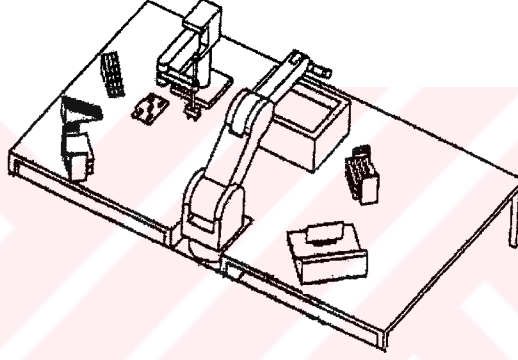
- i. Geniş çaplı hareket kabiliyeti her noktada farklıdır. Çalışma uzayında her noktaya ulaşamaz.
- ii- Çok karmaşık kinematik denklemlere sahip olduğundan kontrolleri de zordur.
- iii- Doğruluğu düşüktür. Her eklem oluşturduğu küçük hatalar sonuçta toplanarak daha büyük bir hataya neden olur.

## 1.5.2. Kontrol yöntemlerine göre robotlar

Kontrol yöntemlerine göre robotlar iki alt sınıfa ayrılır.

### 1.5.2.1. Noktasal kontrol edilen robotlar

Bu tür robotlar için özellikle belirtilmiş bir çalışma alanı yoktur. Bu sınıfa giren robotların serbestlik derecesi altıdan küçüktür ve genellikle bir nesneyi bir yerden başka bir yere yerleştirmede (tut ve yerleştir, pick and place) kullanılır. Şekil 1.28’de bu sınıfa giren dört serbestlik derecesine sahip bir robot görülmektedir.



Şekil 1.28. Dört serbestlik derecesine sahip bir robot.

### 1.5.2.2. Sürekli yörünge kontrollü robotlar

Bu tip robotlar bir kullanıcı tarafından belli bir yörüngeyi izleyecek şekilde kontrol edilirler. Kaynak işlemleri gerçekleştiren robotlar bu sınıf için uygun bir örnektir.

## 1.5.3. Robot eyleyicilerinin kullandığı güç kaynağına göre robotlar

Bu grup temel olarak elektrik, pnömatik ve hidrolik olmak üzere üçe ayrılır.

### 1.5.3.1. DC servo ve adım (step) motorları

DC servo motorların robotlarda kullanılmasının en önemli nedeni, düşük gerilimde



yüksek tork üretmeleridir. Adım motorları ise daha basit uygulamalarda (tut ve yerleştir) kullanılırlar. Çünkü bu uygulamalarda yüksek tork ihtiyacı yoktur.

### **1.5.3.2. Hidrolik robotlar**

Bu tip robotlar, daha çok ağır endüstride kullanılırlar. Ürettikleri yüksek torka oranla tükettikleri güç düşüktür. Bu avantajlarına rağmen performansları doğrusal olmadığından elektrik motorlarına göre kontrolleri daha zordur.

### **1.5.3.3. Pnömatik eyleyiciler**

Robot uygulamalarında kullanılan en basit tasarıma sahip sürücülerdir. Prensip olarak hidrolik robotlara benzerler. Fakat hareket eden robot pistonlarının ataletini hızla ortadan kaldıracak hava basıncının üretilmemesinden dolayı pnömatik sürücülerin kontrolü zordur. Bu yüzden basit uygulamalarda kullanılırlar.

## **1.5.4. Kesinlik derecelerine göre robotlar**

Bu sınıf, çözünürlük (resolution), doğruluk (accuracy) ve yinelenbilirlik (repeatability) şeklinde üçe ayrılır.

### **1.5.4.1. Çözünürlük**

Çok küçük bir yer değiştirmeyi gerçekleştirme yeteneği olan çözünürlük endüstriyel gelişmelere paralel olarak her geçen gün artmaktadır.

### **1.5.4.2. Doğruluk**

Doğruluğu tanımlamak oldukça güçtür. Doğruluk daha çok çevrim dışı uygulamalarda kullanılan bir özelliktir ve bir robotun hareket edebilmesi için yazılan programın, uç işlevci tarafından gerçekleştirilme derecesidir.

### 1.5.4.3. Yinelenebilirlik

Robotun uç işlevcisinin bir çok işlemi gerçekleştirdikten sonra tekrar aynı noktaya gelebilme özelliğidir. Bir robotun “tut ve yerleştir” özelliği için programlandığında her seferinde aynı noktadan nesneyi alabilmesi örnek olarak verilebilir. Günümüzde kullanılan robotların tekrar edebilirliği 0.05 ile 0.005 inç arasındadır.

### 1.5.5. İkili harf kodunun kullanılmasıyla yapılan sınıflandırma

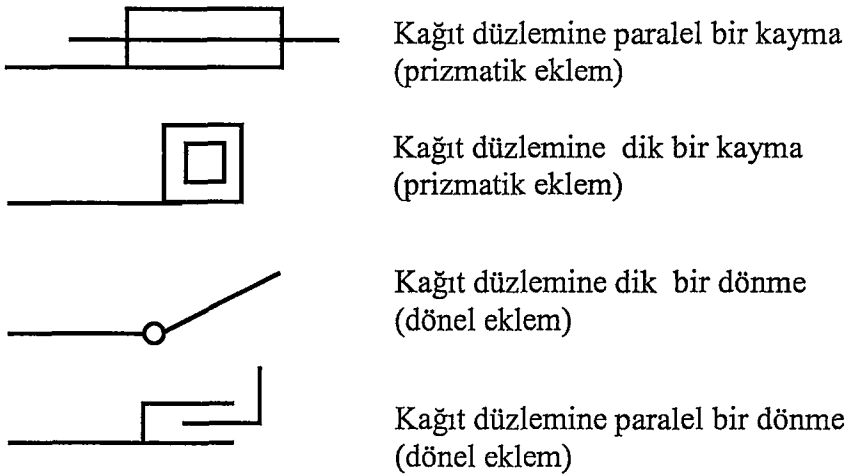
Yukarıda anlatılanlardan başka bir çok sınıflandırma yapılabilir. Ancak aşağıda son olarak Huang ve Milenkovic (1983) tarafından ileri sürülen ikili harf kodunun kullanılmasıyla yapılan sınıflandırma anlatılmıştır. Huang ve Milenkovic robot türlerini tanımlamak için iki harften oluşan bir kod kullanmıştır. İlk harf, birinci eklem özelliğini ve ikinci eklem göre nasıl döndüğünü açıklamaktadır. İkinci harf ise, üçüncü eklem ve ikinci eklem ile üçüncü eklem arasındaki ilişkiyi tanımlar. Tanımlanan bu mekanizma Şekil 1.29’da verilmiştir. Kullanılan harfler ve anlamları da şu şekildedir:

S : Kayma,

C : Kayma eksenine dik dönme,

N : Dönme eksenine dik dönme,

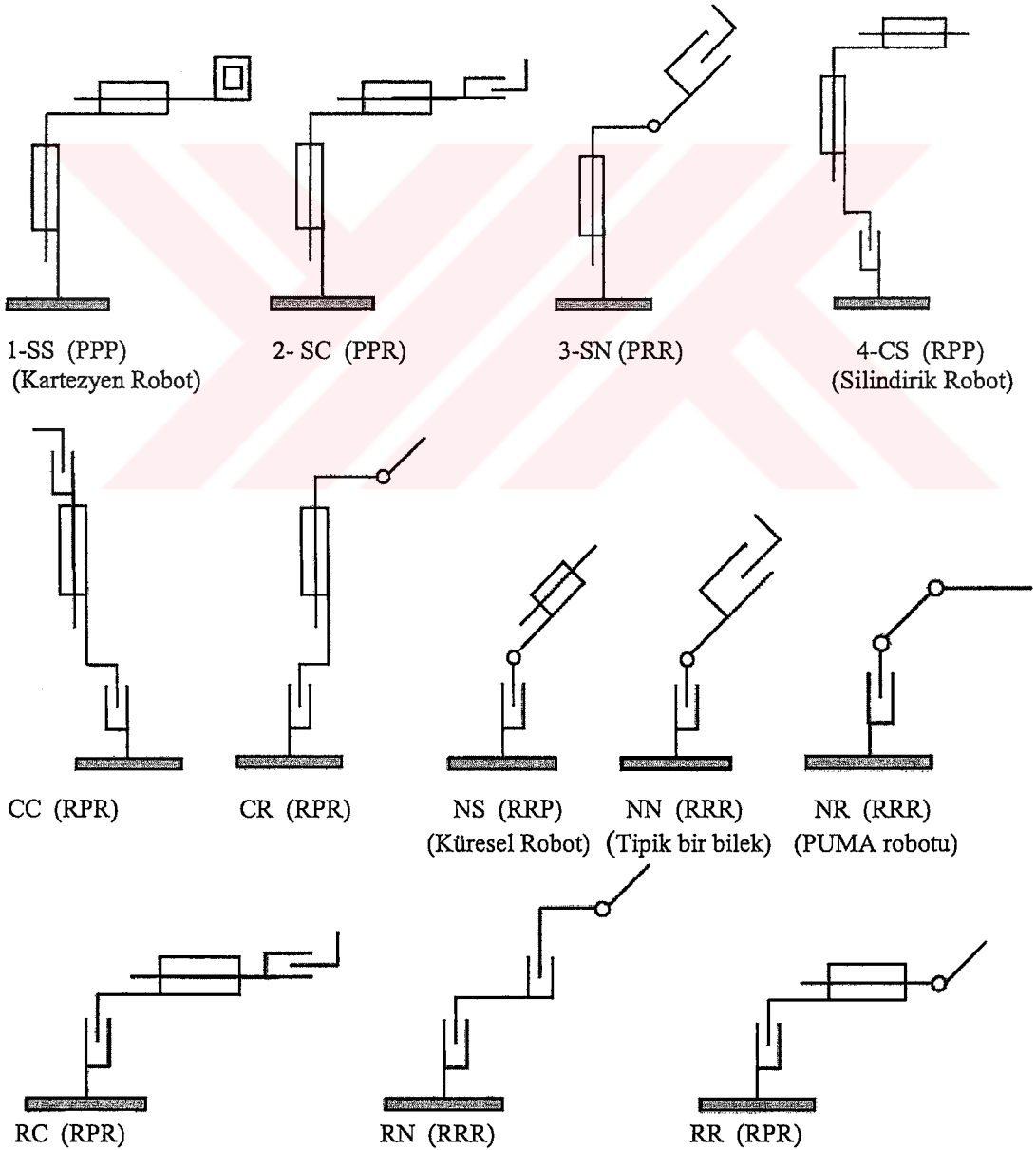
R : Kayma eksenine dik dönme veya dönme eksenine paralel dönme.



Şekil 1.29. Huang ve Milenkovic tarafından tanımlanan mekanizma.

Huang ve Milenkoviç robot bağları için 16 adet 2 harf kombinasyonu kullanmıştır. Fakat bunların tamamı robot bağları için kullanışlı (useful) ve farklı (distinct) değildir. Kullanışlı bir bağ, 3 boyutlu uzayda geniş çaplı hareket (gross motion) yapabilme yeteneğine sahip olmalıdır. Farklılık ise her bir bağın kinematik olarak diğer kategoriler arasında tek olmasıdır. İkili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan 16 olası kod aşağıdaki gibidir. Ayrıca, Şekil 1.30, 1.31 ve 1.32’de ise ikili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan 16 adet düzenleşim görülmektedir (Bingül 1998).

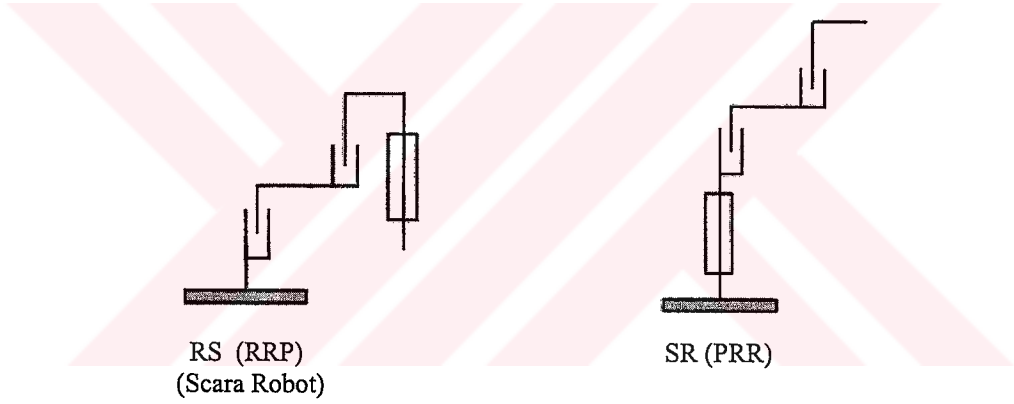
(CC , CN , CR , CS , NC , NN , NR , NS , RC , RN , RR , RS , SC , SN , SR , SS)



Şekil 1.30. İkili harf kombinasyonun kullanılmasıyla oluşan on iki adet düzenleşim.

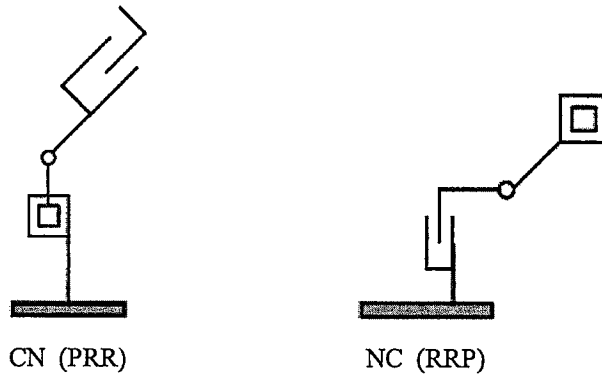
Huang ve Milenkovic yukarıdaki kodlardan CN, NC, RS, ve SR'yi kullanışlı ve farklı bulmamıştır. Dolayısı ile bu robot türlerini sınıflandırma dışı bırakmışlardır. Buna rağmen RS kodu endüstride çok popüler olan “Skara” robotunu temsil eder. SR kodu da kullanışlı bir düzenleşimi temsil eder. Bu düzenleşimlerin her ikisi de üç boyutlu hareket etmesine rağmen düzlemsel robotlar (planar robots) olarak kabul edilirler. CN ve RC ise herhangi bir robot düzenleşimi olarak kabul edilmez.

Huang ve Milenkovic Şekil 1.31’de verilen RS ve SR robotlarını kullanışlı ve farklı bulmamasına rağmen, bu robotlar silindirik çalışma alanları nedeniyle sık tercih edilirler. Huang ve Milenkovic’in bunları farklı ve kullanışlı bulmayışının nedeni, CS robotu ile aynı alanı taramalarından kaynaklanmaktadır. Sebep ne olursa olsun bunlar kullanışlı robotlar kategorisinde incelenecektir.



Şekil 1.31. RS ve SR kullanışlı robotları.

Şekil 1.32’de gösterilen CN ve NC kodlarının tanımladıkları robot düzenleşimleri kullanışsızdırlar.



Şekil 1.32. CN ve NC kullanışsız robotları.

## 1.6. Benzetim (Simülasyon)

Benzetim, fiziksel bir etkinliği gerçekleştirmeden önce, bilgisayar ortamında gerekli programlar yardımıyla olayı canlandırma işlemine denir. Robot programları gerçek robotlar üzerinde denenmeden önce benzetim programları vasıtasıyla test edilir. Benzetim programlarının robotlar açısından bir çok avantajı vardır. Yazılan robot programlarının eksik olması durumunda, robot beklenmeyen hareketler yaparak kendine ve çevresine zarar verebilir. Benzetim programları robotların yapacağı hareketleri önceden göstererek bu tehlikeyi ortadan kaldırmaktadır. Böylece benzetim programları hem ekonomik kazanç hem de zaman tasarrufu sağlar.

Bilindiği gibi, robotlar eklemler ve bu eklemleri birleştiren bağlardan oluşmaktadır. İyi bir robot benzetim programı, robot bağlarının konumlarını, yönelimlerini, çevresini ve çevresindeki nesnelere doğru bir şekilde modelleyebilmelidir.

Robotlar bir çok görevi yapabilecek esneklikte üretilerek firmalar için ekonomik bir getiri sağlamaktadır. Robotların alışma alanlarının esnek ve geniş olmasında benzetim programları önemli yer tutar. Son yıllarda robot benzetim programları, robot çalışma sahasının eniyelenmesi (optimization), programlanması ve tasarımı gibi konularda çok yol kat etmiştir. Robot benzetim programları genel olarak evrimdişi (off-line) ve evrimii (on-line) olmak üzere iki kısıma ayrılır.

### 1.6.1. Çevrimiçi programlama

Çevrimiçi programlama tamamen üretim aşamasında gerçekleştirilir. Robotun uç işlevcisini, bir kullanıcı arabirimi vasıtasıyla, eř zamanlı olarak istenilen noktaya ulaştırmak için kullanılır. Çevrimiçi programlama, robotun çalışma alanının çok karmaşık ve değişken olduğu (rnek olarak kaynak işlemlerinin gerçekleştirildiği limanlar) ortamlarda avantaj sağlar (Ang, Wei and Yong 2000).

### 1.6.2. Çevrimdışı programlama

Çevrimdışı programlama (ÇP) sistemi, bilgisayar destekli tasarım yardımıyla desteklenen her türlü fizibilite çalışmasını sağlar. ÇP, günümüz endüstriyel otomasyonunda olduğu kadar robot araştırmalarında da kullanılan vazgeçilmez bir yöntemdir. Bilgisayar ortamında kullanıcıya doğruyu buluncaya kadar deneme imkanı sağlayan bu yöntem, ayrıca zamandan ve ekonomiden tasarruf sağlamaktadır. Bunun dışında, ÇP sistemini kullanmanın bir takım avantajları vardır. ÇP sistemini kullanarak, robotlar bir kullanıcı arabirimi vasıtasıyla (teach pendant) kolaylıkla programlanabilir ve bu arabirim vasıtasıyla çalıştırılıp test edilebilirler.

ÇP sisteminde, robot ve çalışma hücresinde (working cell) bulunan bütün robot parçaları ve diğer nesnelere üç boyutlu olarak modellendiğinden, bu parçaların gerçek uygulamada çarpışma ihtimali ortadan kalkmış olur. Modelleme sonucunda benzetim ortamında iki nesne çarpışsa bile, ÇP sistemi kullanıcıyı uyarıp çarpışmanın koordinatlarını vererek problemin çözümüne yardımcı olur.

ÇP sistemini kullanarak çizilen bir yörüngeyi (path planning emulation) robotun takip etmesi yüzde yüz doğrulukla gerçekleştirilebilir. Ayrıca manipülâtörün ters kinematik hesaplamalarında yanlış açı kullanımından doğacak kazaları ve hatalı uygulamaları da ortadan kaldırır.

### 1.7. Yöntemlerin Karşılaştırılması

D-H yöntemi, SRK yöntemi, Pieper-Roth yöntemi ve tam ve parametrik sürekli yöntem, robot kinematiğini doğrudan on iki yararlı eleman içeren matrislerle ifade etmektedir. Üstel yöntem üç yararlı elemanla dönme hareketini en iyi şekilde ifade etmektedir. Kartonyum yöntemi ise dört yararlı elemanla dönme ve öteleme hareketini açıklamaktadır. Pratikte robotla uğraşan insanlar matris işlemlerine daha yatkın, diğer yöntemlerde kullanılan operatörlere de alışkın olmadıklarından dolayı, D-H yöntemi gibi matrisleri kullanarak kinematik model çıkaran yöntemler daha sık kullanılmaktadır. Oysa ki, bilgisayar ortamında hesaplama yükü göz önüne alındığında, Kartonyum yöntemi, üstel yöntem ve matrisleri kullanan diğer

yöntemlerden daha hızlı çalışmaktadır. Yöntemlerin hesap yükünü daha ayrıntılı gösteren veriler Tablo 1.6’da verilmiştir (Nicholos, Aspragathos and Dimitros 1998).

**Tablo 1.6.** Üç yöntemin hesap yükü.

Yöntem	Hesap Yükü		Toplam işlem n=serbestlik derecesi
	+, -	*, /	
D-H Yöntemi	36n-36	54n-48	126n-120
Üstel Yöntem	33n-18	36+18	115n-48
Kartonyum Yöntemi	22n+3	39n-12	80n+12

Tablo 1.6’da her bir yöntemin bilgisayar ortamında meydana getirdikleri hesap yükü görülmektedir. Bilgisayarda her bir çarpma işleminin, toplama işleminin iki katı zamanda gerçekleştiği varsayılmıştır. Tablo 1.6’nın son kolonunda bilgisayarda gerçekleşen eşdeğer toplama miktarı verilmiştir. Tablo 1.6’dan da görüldüğü gibi, serbestlik derecesi üçten fazla olan robotlar için çift sayı Kartonyum gösterimi, bilgisayar ortamında daha hızlı çalışmaktadır.

## 1.8. Sonuçlar

Bu bölümde, iki farklı uzayda altı robot kinematik modelleme yöntemi anlatılmıştır. Bu yöntemler arasındaki farklılıkları görmek için her bir yöntem kullanılarak PUMA-560 robotunun kinematik modeli çıkarılmıştır. Bütün bu yöntemlere kinematik açıdan bakıldığında; Kartezyen uzay içinde incelenen üstel yöntem, robotun ileri yön kinematiğini iki aşamada çıkarır. Bu yöntem trigonometrik ifadeler kullanmak yerine, işlenmesi daha basit olan üstel dönme matris tabanlı cebir kullanır. Pieper-Roth ve SRK yöntemi ise daha çok ters kinematik problemlerde avantaj sağlayan yöntemlerdir. TPS yöntemi, bütün robot hareketlerini modelleyerek küçük hata değişkenleri içermek suretiyle, robotun tekil noktalardan geçmesini engeller. Yukarıda anlatılan yöntemler birbirleriyle karşılaştırıldığında, ileri yön kinematiğini doğrudan çıkararak ve daha basit gösterime sahip olan D-H yöntemi en çok tercih edilen yöntemdir. Buna karşın, alışkın olunmayan matematik operatörleri kullanan Kartonyum yöntemi bilgisayar ortamında daha hızlı çalışmasına karşın pratikte daha az tercih edilmiştir.

## BÖLÜM 2. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN ÇALIŞMA UZAYLARININ ENİYİLENMESİ

### 2.1.Giriş

Robot manipülatörlerinin tasarımı robot çalışmalarının çok önemli bir parçasını oluşturmaktadır. Uzun zamandan beri değişik tasarımlar gerçekleştirilerek robot manipülatörlerinin performanslarının artırılması üzerinde durulmaktadır. Robot manipülatörlerinin kinematik performansı ile tasarımı arasında çok ciddi bir ilişki bulunmaktadır. Bu açıdan günümüze kadar robotların dexterous çalışma uzayına (uç işlevcinin, üç boyutlu uzayda herhangi bir nokta etrafında üç ekseninde de tam bir yönelme gerçekleştirdiği ve en büyük tork uyguladığı bölge veya geniş çaplı hareket yaptığı bölge ) sahip olabilmesi için bir çok kinematik tasarım kriteri önerildi. Roth (1975), bu çalışma uzayı ile kinematik tasarım arasında bir ilişki olduğunu gösteren ilk araştırmacılardan biridir. Bundan sonra bir çok bilim adamı (Shimano and Roth 1976; Tsai and Soni 1981; Gupta and Roth 1982; Yang and Lee 1982, 1983, 1984; Kohli and Spanos 1985; Yang and Lai 1985; Lin and Freudenstein 1986; Bajpai and Roth 1986; Cwikala and Lee 1989; Kumar and Patel 1986) robotların çalışma uzayını inceledi. Kumar ve Waldron (1980, 1981), çalışma uzayının sınır yüzeylerini kullanarak bir robot manipülatörünün çalışma uzayının hacmini sayısal olarak bulup dexterous çalışma uzayını tanımladı. Tsai ve Soni (1981) düzlemsel robot manipülatörlerinin çalışma uzayının ulaşılabilir bölgeleri üzerinde çalışırken, Gupta ve Roth (1982) uç işlevcinin çalışma uzayı analizindeki etkisini inceledi. Gupta ve Roth (1982) ile Gosselin ve Angeles (1991) eniyileme ve tasarım kriteri olarak kullanılacak başarı göstergeleri (performance indices) geliştirdi. Paul ve Stevenson (1983) Jakobiyen matrisin determinantını bir robot manipülatörünün beceri ölçeği (manipulability measure) olarak tanımladı ve bunu bir başarı göstergesi olarak önerdi. Beceri ölçeğinin, Jakobiyen matrisin tersinin determinantının alınmasıyla da elde edilebileceği durumu, Forsythe ve Moler (1967) tarafından sakıncalı bulundu. Bir matrisin köşegeninde çok büyük değerler ( $\sim 10^{10}$ ) olduğu



zaman tersinin determinantı kabul edilemez büyüklükte yuvarlama (round-off) hatalarına sebep olmaktadır. Salisbury ve Craig (1982) bu durumu fark etti ve Jakobiyen matrisin vaziyet numarasını (condition number) başarı göstergesi olarak tanımladı. Bu durumda, Jakobiyen matrisi aşırı değerler içerse bile, vaziyet numarası mantıklı sonuçlar üretir. Vaziyet numarası, beceri ölçeğinde olduğu gibi bir çok araştırmacı tarafından bir başarı göstergesi olarak kullanıldı (Kumar and Waldron 1981; Angeles and Rojas 1987; Gosselin and Angeles 1991). Jakobiyen matrisin determinantı hala vaziyet numarasının bir parçasını oluşturarak tekil noktalarda beklenmedik çok büyük değerler üretmektedir. Bu bölümde önerilen yeni başarı göstergesi, Jakobiyen matrisin determinant bölümünü yok edilerek, robotların kinematik eniyilemesinde görülen beklenmedik ve kontrol edilemeyen değerleri tamamen ortadan kaldırır.

Genel olarak bir robot manipülatörü, bölgesel yapı (regional structure) ve yönelim yapısı (orientation structure) olmak üzere iki ana kısımdan oluşur (Vijiyakumar and Waldron 1986). İnsandaki kol ve omuza benzeyen ve altı serbestlik derecesine sahip bir robotun ilk üç eklemden meydana gelen bölgesel yapı, uç işlevcisini robotun çalışma uzayında arzu edilen konuma ulaştırmaya yarar. Etkili bir bölgesel yapı uç işlevcinin hareket kabiliyetini artırır. Aynı şekilde, insandaki bileğe benzeyen ve altı serbestlik derecesine sahip bir robotun son üç eklemden meydana gelen yönelim yapısı, robotun çalışma uzayında, uç işlevcisini amaçlanan doğrultuya yönlendirmesini sağlar. Üç boyutlu uzayda herhangi bir nokta etrafında uç işlevcinin tam bir yönelme gerçekleştirebilmesi için, bileği oluşturan son üç eklemin birbirine dik olarak yerleştirilmesi gerekir (Vijkamar, Waldron and Tsai 1986). Bir robottaki kolların meydana getirdiği çalışma uzayı birincil, bileğin meydana getirdiği çalışma uzayı ise ikincil çalışma uzayı olarak isimlendirilir ve genellikle birincil çalışma uzayının hacmi ikincil çalışma uzayının hacminden daha büyüktür.

Çalışma uzayının şekli veya genişliği bir robot manipülatörünün serbestlik derecesine ve kolu oluşturan ilk üç eklemin koordinatlarının yerleşimine bağlıdır. Birbirine dik veya paralel yerleştirilen ilk üç eklem genellikle prizmatik, silindirik, küresel veya dönel bir çalışma uzayı üretir. Bazı çalışma uzayları ise birkaç çalışma uzayı şeklini birden içeren karmaşık bir şekle sahiptir. Endüstriyel bir robot seçerken

gerçekleştirilecek işe uygun çalışma uzayına sahip bir robotun belirlenmesi son derece önemlidir.

Ulaşılabilir çalışma uzayı (reachable workspace) ve dexterious çalışma uzayı, robot manipülatörlerinin çalışma uzaylarını belirleyen çok önemli iki özelliktir. Ulaşılabilir çalışma uzayı, bir robot manipülatörünün uç işlevcisini rastgele hareket ettirip yönlendirdiği, robotların serbestlik derecelerinin azalmasına neden olan tekil noktaların bulunmadığı bölgeye denir (Craig 1989). Dexterious çalışma uzayı ise uç işlevcisinin yönelme ve öteleme hareketlerini en büyük kapasitede gerçekleştirdiği bölgedir. Dolayısıyla dexterious çalışma uzayı ulaşılabilir çalışma uzayının bir alt kümesidir. İyi tasarlanmış bir robot, en kısa bağ uzunluğuna sahip olmasına rağmen, enbüyük hacimli bir çalışma uzayını tarayan ve bu hacim içerisinde de en iyi hareket kabiliyetinin gerçekleştirildiği enbüyük dexterious çalışma uzayına sahip olan robottur.

Bu bölümde, Huang ve Milenkovic (1983) tarafından ileri sürülen ve ikili harf kodunun kullanılmasıyla sınıflandırılan temel onaltı adet endüstriyel robotun çalışma uzayları, başarı göstergeleri temel alınarak eniyenip en uygun bağ uzunlukları ve çalışma uzayları elde edilmiştir. Bu sınıflandırmaya göre elde edilen robotların kinematik düzenleşimleri gerçekleştirilirken, robot manipülatörlerinin mekanizmalarını net bir şekilde açıklamasından ve robot programlarına kolayca uygulanabilmesinden dolayı çok fazla tercih edilen Denevit-Hartenberg yöntemi kullanılmıştır (Abderrahim and Whittaker 2000).

Genel robot tasarım kriterleri göz önünde bulundurularak bu onaltı robotun kinematik düzenleşimleri gerçekleştirilmiştir. Bir robot manipülatörünün mekanik yapısı robotun kinematiğini ve dinamiğini, dolayısıyla performansını önemli ölçüde etkiler. Örneğin bazı kinematik düzenleşimler çözülmesi kolay ileri ve ters kinematik eşitlikler sunarken; bazıları çözülmesi zor veya karmaşık eşitlikler üreterek, amaçlanan hareketi gerçekleştirecek bilgisayar programının uzun sürmesine neden olarak verimsiz sonuçlar doğurur. Basit kinematik ve dinamik eşitliklerse robotların daha seri bir şekilde çalışmasını sağlar. Bu açıdan, aynı hareketi sağlayan değişkenler asgari düzeyde kullanılarak buna göre robot düzenleşimleri

gerçekleştirildi. Ayrıca, bu bölümde gerçekleştirilen onaltı adet robot düzenleşimi, en iyi (optimum) robot tasarım kriterleri olan eklem eksenlerinin birbirine paralel veya dik olması (Vijaykumar 1985; Vijaykumar, Waldron and Tsai 1986) göz önünde bulundurularak gerçekleştirilmiştir.

## 2.2. Başarı Göstergeleri

Yapısal uzunluk göstergesi hariç diğer başarı göstergeleri, Jakobiyen matristen yararlanarak sonuç üretmektedir. Jakobiyen matrisi, her bir eklem uçuş işlevcisinin Kartezyen uzaydaki hızına katkısını belirler. Başka bir ifadeyle Jakobiyen matrisi eklem hızlarıyla uç işlevcisinin Kartezyen uzaydaki hızı arasında bir bağ kurar.

Matematiksel bir ifade olarak Jakobiyen, türevin çok boyutlu olarak gerçekleştirildiği bir işlem biçimidir. Örneğin, Denklem 2.1'deki gibi altı tane birbirinden bağımsız ve farklı değişkenler içeren fonksiyonlar olsun.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \\
 y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \\
 &\vdots \\
 y_6 &= f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Her bir  $y_i$  eşitliği,  $x_j$ 'nin türevsel bir fonksiyonu olarak yazıldığında Denklem 2.2 elde edilir  $\{i=1,2,\dots,6 \text{ ve } j=1,2,\dots,6\}$ .

$$\begin{aligned}
 \delta y_1 &= \frac{\delta f_1}{\delta x_1} \delta x_1 + \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\delta f_1}{\delta x_6} \delta x_6 \\
 \delta y_2 &= \frac{\delta f_2}{\delta x_1} \delta x_1 + \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\delta f_2}{\delta x_6} \delta x_6 \\
 &\vdots \\
 \delta y_6 &= \frac{\delta f_6}{\delta x_1} \delta x_1 + \frac{\delta f_6}{\delta x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\delta f_6}{\delta x_6} \delta x_6
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

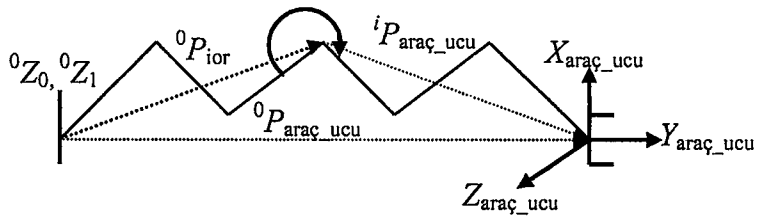
Denklem 2.2, vektör gösterimiyle aşağıdaki gibi yazılır.

$$\delta Y = \frac{\delta F}{\delta X} \delta X \quad (2.3)$$

kısmi türevler içeren Denklem 2.3'deki ifade Jakobiyen olarak isimlendirilir ve  $J$  ile gösterilir. Robot uygulamalarında ise Jakobiyen matris şeklinde tanımlanır. Bu matris robotu oluşturan bütün eklemlerin sonuç hız vektörüne katkısını gösterir ve Denklem 2.4'teki gibi ifade edilir.

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta \theta_1} & \frac{\delta f_1}{\delta \theta_2} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta \theta_6} \\ \frac{\delta f_2}{\delta \theta_1} & \frac{\delta f_2}{\delta \theta_2} & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta \theta_6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_6}{\delta \theta_1} & \frac{\delta f_6}{\delta \theta_2} & \dots & \frac{\delta f_6}{\delta \theta_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta F_i \\ \delta \theta_j \end{bmatrix} \dot{\theta} = [J_{ij}] \dot{\theta} = J \dot{\theta} \quad (2.4)$$

$f$  vektörünün zamana göre türevi alınır, Kartezyen koordinat sisteminde hız vektörü  $\dot{Y}$  elde edilir. Bu ise, 6x6 kısmi türev içeren Jakobiyen matrisin kendisidir. Denklemde,  $Y$  uç işlevcinin konumunu,  $\theta$  ise eklem değişkenlerini göstermektedir. Bir robotun Jakobiyen matrisi, iteratif, vektörel çarpım (cross product) ve doğrudan türev gibi üç farklı yöntem kullanılarak çıkarılabilir. İteratif ve çapraz-çarpım yöntemleri robotun her bir eklemine ait hem açısal hem de doğrusal hızlarını vermesi açısından her koşulda uygulanabilen çok kullanışlı yöntemlerdir. Üçüncü yöntemse doğrudan türev yöntemidir ve sadece robot eklemlerinin doğrusal hızlarını verir. Bu bölümde kullanılacak olan vektörel çarpım yöntemi şu şekilde uygulanmaktadır:



Şekil 2.1. Vektörel çarpım yöntemi.

Şekil 2.1’de  ${}^0Z_i$ , ana çerçeveye göre  $i$ . koordinat çerçevesindeki birim  $Z$  vektörü,

${}^0P_{iorg}$ , ana çerçeveye göre  $i$ . koordinat çerçevesinin konumu,  ${}^0P_{araç\_ucu}$ , ana çerçeveye göre uç işlevcinin konumu olsun. Burada  ${}^0P_{iorg}$  vektörü,  ${}^0T$  dönüşüm matrisinin ve  ${}^0P_{araç\_ucu}$  vektörü de,  ${}_{araç\_ucu}^i T = {}_{i+1}^i T \dots {}_6^5 T {}_{araç\_ucu}^6 T$  dönüşüm matrisinin 4. kolonudur. Ayrıca,  ${}^0Z_i = {}^0R^i Z_i$  ve  ${}^i Z_i = [0 \ 0 \ 1]^T$ ’dir.

Genel olarak  $i$ . eksene ait Jakobiyen bulunurken, diğer bütün eksenler dondurularak sadece  $i$ . eksene ait işlem yapılır. Bütün eksenler için aynı işlem tekrarlanarak toplam Jakobiyen matris bulunur. Dönel hareket yapan  $i$ . eksenenden dolayı oluşan uç işlevcinin doğrusal hızı Denklem 2.5’te verilmiştir.

$${}^i v_{araç\_ucu} = \dot{\theta}_i {}^i Z_i \times {}^i P_{araç\_ucu} \quad (2.5)$$

Doğrusal hız ana çerçeve cinsinden yazılırsa Denklem 2.6 elde edilir.

$${}^0 v_{araç\_ucu} = {}^0R^i v_{araç\_ucu} = \dot{\theta}_i {}^0R^i Z_i \times {}^i P_{araç\_ucu} \quad (2.6)$$

Şekil 2.1’den  ${}^i P_{araç\_ucu} = {}^0P_{araç\_ucu} - {}^0P_{iorg}$  olduğu kolaylıkla görülür. Denklem 2.6 düzenlenirse Denklem 2.7 elde edilir.

$${}^0 v_{araç\_ucu} = \dot{\theta}_i {}^0R^i Z_i \times ({}^0P_{araç\_ucu} - {}^0P_{iorg}) = \dot{\theta}_i {}^0Z_i \times ({}^0P_{araç\_ucu} - {}^0P_{iorg}) \quad (2.7)$$

Denklemde  $\dot{\theta}_i$  skaler,  ${}^0 v_{araç\_ucu}$  ise vektörel bir büyüklüktür ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$${}^0 v_{araç\_ucu} = \begin{bmatrix} {}^0 v_{araç\_ucu-x} \\ {}^0 v_{araç\_ucu-y} \\ {}^0 v_{araç\_ucu-z} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Aynı şekilde açısal hız ana çerçeve cinsinden yazılırsa, Denklem 2.9 elde edilir.

$${}^0\omega_{araç\_ucu} = \dot{\theta}_i {}^iZ_i \quad \text{veya} \quad {}^0\omega_{araç\_ucu} = \begin{bmatrix} {}^0\omega_{araç\_ucu-x} \\ {}^0\omega_{araç\_ucu-y} \\ {}^0\omega_{araç\_ucu-z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i {}^0Z_{ix} \\ \dot{\theta}_i {}^0Z_{iy} \\ \dot{\theta}_i {}^0Z_{iz} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Yukarıdaki eşitliklerden yararlanarak Jakobiyen matrisi, Denklem 2.10'daki gibi bulunur.

$${}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} {}^0Z_1 \times ({}^0P_{araç\_ucu} - {}^0P_{1org}) & {}^0Z_2 \times ({}^0P_{araç\_ucu} - {}^0P_{2org}) & \dots & {}^0Z_3 \times ({}^0P_{araç\_ucu} - {}^0P_{3org}) \\ {}^0Z_1 & {}^0Z_2 & \dots & {}^0Z_6 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Prizmatik eksenler için Jakobiyen matrisi Denklem 2.11'de verilmiştir.

$${}^0v_i = {}^0d_i {}^0Z_i, \quad {}^0\omega_i = 0 \quad (2.11)$$

### 2.2.1. Beceri ölçeği ve yapısal uzunluk göstergesi (structural length index)

Bir robot manipülâtörünün Jakobiyen matrisinin determinanı, beceri ölçeği olarak tanımlanır ve  $w$  ile gösterilir.

$$w = |\det(J(\theta))| \quad (2.12)$$

İyi tasarlanmış bir robot manipülâtörünün hem tekil noktalar içermeyen ulaşılabilir çalışma uzayının hacmi büyüktür, hem de beceri ölçeğinin değeri yüksektir. Bir robotun geçmemesi istenen çalışma uzayındaki tekil noktalar, Jakobiyen matrisin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

$$Det(J(\theta)) = 0 \quad (2.13)$$

Beceri ölçeği gibi bir tasarım kriteri olan yapısal uzunluk göstergesi  $Q_L$  Denklem 2.14'te verilmiştir. Yapısal uzunluk göstergesi bir evrensel başarı göstergesidir

(global performance index) ve toplam robot baş uzunluğunun robotun çalışma uzayının hacminin kp köküne bölünmesiyle elde edilir (Waldron 1988).

$$Q_L = \frac{L}{\sqrt[3]{V}} \quad (2.14)$$

Denklemdede,  $V$  alışma uzayının hacmini,  $L$  ise kabaca robotun sahip olduğu baş uzunluklarının toplamını göstermektedir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$L = \sum_{i=1}^n (a_{i-1} + d_i) \quad (2.15)$$

Denklemdede,  $a_{i-1}$  baş uzunluğunu,  $d_i$  ise eklem kaçıklığını ifade etmektedir. İyi tasarlanmış bir robot, küçük baş uzunluğuna karşın daha geniş çalışma uzayına sahip olur ve bu da  $Q_L$  değerinin mümkün olduğunca küçük olması demektir.

### 2.2.2. Vaziyet numarası ve evrensel vaziyet göstergesi (global conditioning index)

Bir robotun Jakobiyeen matris normuyla ifade edilen ve robotun çalışma uzayında herhangi bir noktadaki geniş çaplı hareket yapabilme kabiliyetini gösteren vaziyet numarası  $\kappa$ , Denklem 2.16'da verilmiştir.

$$\kappa = \|J\| \|J^{-1}\| \quad (2.16)$$

Denklemdede  $\|\cdot\|$  herhangi bir matris normunu ifade eder. Bu çalışmada kullanılan matris normu Denklem 2.17'de verilmiştir.

$$\|J\| = \sqrt{\text{tr}(JWJ^T)} \quad (2.17)$$

Denklemdede  $W = n^{-1}$  ve  $n$  ise kare Jakobiyeen matrisin boyutudur. Aynı şekilde  $\|J^{-1}\|$  matris normu, Jakobiyeen matrisin tersidir ve köşegendeki elemanları 1/3 olan

kare matris ile Jakobiyen matrisin tersinin devriğinin (transpose) çarpılmasıyla elde edilen yeni matrisin izi (trace- $tr$ ) alınarak bulunur.

$$\|J^{-1}\| = \sqrt{tr(J^{-1}W(J^{-1})^T)} \quad (2.18)$$

Vaziyet numarası robotun düzenlemesine bağımlı olduğundan, bir yerel (local) başarı göstergesidir ve sadece aynı robotun tasarımının iyileştirilmesinde kullanılabilir. Yerel olan bu başarı göstergesini evrensel başarı göstergesi yapmak için Denklem 2.19'daki evrensel vaziyet göstergesi  $\eta$  tanımlanmıştır.

$$\eta = \frac{A}{B} \quad (2.19)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$A = \int_W \left(\frac{1}{\kappa}\right) dW \quad (2.20)$$

$$B = \int_W dW \quad (2.21)$$

Denklemden,  $W$  manipülatöre ait çalışma uzayında herhangi bir noktayı,  $B$  ise robotun çalışma uzayının hacmini göstermektedir. Denklem 2.16'daki vaziyet numarası 1 değerine yaklaştıkça robotun geniş çaplı hareket yapma kabiliyeti o derece artar. Vaziyet numarası ve evrensel vaziyet göstergesi sırasıyla aşağıdaki aralıklarda değişir.

$$0 < \frac{1}{\kappa} \leq 1 \quad (2.22)$$

$$0 < \eta < 1 \quad (2.23)$$



Eğer sınırlar belliyse, Denklem 2.20 ve 2.21'deki  $A$  ve  $B$  değerleri Kartezyen uzayda kolayca hesaplanabilir. Aksi durumda, aşağıdaki gibi  $A$  ve  $B$  değerleri eklem uzayında hesaplanır.

$$A = \int_R \left| \left( \frac{1}{\kappa} \right) \Delta \right| d\theta_n \dots d\theta_2 d\theta_1 \quad (2.24)$$

$$B = \int_R |\Delta| d\theta_n \dots d\theta_2 d\theta_1 \quad (2.25)$$

Denklem 2.24 ve 2.25'teki  $R$ , eklem uzayındaki çalışma uzayını ifade etmektedir. Kareköklü ifadelerden kurtulmak için Denklem 2.24 aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$A = \int_R \left| \left( \frac{1}{\kappa} \right)^2 \Delta \right| d\theta_n \dots d\theta_2 d\theta_1 \quad (2.26)$$

### 2.2.3. Yeni yerel ve evrensel başarı göstergesi

Diğer bir başarı göstergesi de Jakobiyeen matristen türetilen, vaziyet numarası ile beceri ölçeğinin çarpılmasından elde edilen yeni yerel başarı göstergesi  $\rho_L$ 'dir.

$$\rho_L = w\kappa \quad (2.27)$$

Denklemden,  $w$  beceri ölçeğini,  $\kappa$  ise vaziyet numarasını göstermektedir. Bu iki başarı göstergesinin çarpılmasıyla oluşan yeni başarı göstergesi, Jakobiyeen matrisin determinantını içermez. Denklem 1.16'daki vaziyet numarası aşağıdaki gibi ifade edilsin.

$$\kappa = \frac{\sqrt{m}}{\Delta} \quad (2.28)$$

Denklemden,  $m$  vaziyet numarasının pay kısmını oluştururken  $\Delta$  ise payda kısmını oluşturmaktadır. Beceri ölçeği de Jakobiyeen matrisin determinantı olduğuna göre

Denklem 2.27 açılırsa,

$$\rho_L = w\kappa = \Delta \frac{\sqrt{m}}{\Delta} = \sqrt{m} \quad (2.29)$$

elde edilir. Denklemde  $m$  her zaman pozitif olan bir değerdir ve Jakobiyen matrisin determinantından bağımsızdır. Jakobiyen matris robot düzenlemesine bağımlı olduğundan  $\rho_L$  yerel bir başarı göstergesidir. Evrensel başarı göstergesini elde etmek için Denklem 2.30 kullanılır.

$$\rho_G = \frac{C}{D} \quad (2.30)$$

Denklemde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$C = \int_W m dW \quad (2.31)$$

$$D = \int_W dW \quad (2.32)$$

Denklemde,  $\rho_G$  yeni evrensel başarı göstergesini,  $m$  robotun  $W$  çalışma uzayının herhangi bir noktasındaki yerel başarı göstergesini ve  $D$  çalışma uzayının hacmini göstermektedir.

### 2.3. Çalışma Uzayının Eniyilenmesi

Çok kriterli (multiobjective) tasarım eniyileme probleminde, üç tane amaç fonksiyonu (objective function) bulunmaktadır. Bu amaç fonksiyonlarından robot tarafından taranan çalışma uzayının hacmi en büyük yapılırken, beceri ölçeği ve yeni yerel başarı göstergesi en büyük, vaziyet numarası ise en küçük (minimum) yapılır. Amaç fonksiyonlarında kullanılan tasarım değişkenleri (design variables) alt ve üst sınırlara sahip olan bağ uzunluklarıdır. Robot düzenlemesine bağlı olarak en fazla üç en az bir tane tasarım değişkeni kullanılır. Komşu iki bağın uzunluklarının birbirine

oranı üst sınır için 2, alt sınır için 1.1 olarak uygulanmıştır. Çok kriterli tasarım eniyileme problemi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

En büyük  $w(a,b,c)$ , en küçük  $\kappa(a,b,c)$  veya en büyük  $\rho_L(a,b,c)$

En büyük  $V(a,b,c)$

Değişkenleri aşağıdaki sınırlar temel alınarak eniyileme gerçekleştirilir.

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{a}{b} \geq 1.1 \\ G_2 &= \frac{a}{b} \leq 2 \\ G_3 &= \frac{b}{c} \geq 1.1 \\ G_4 &= \frac{b}{c} \leq 2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

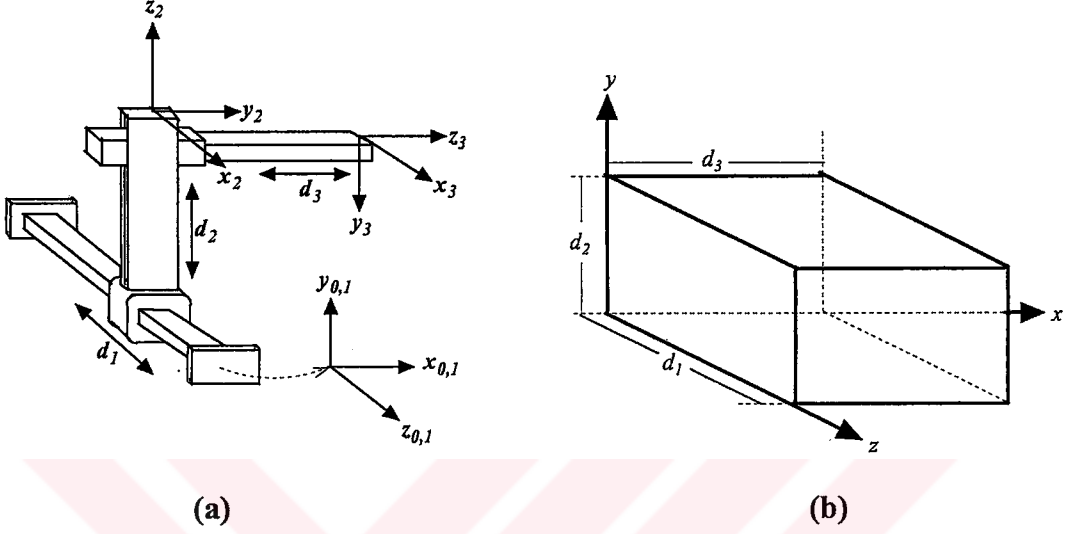
Denklemden,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bağ uzunlukları, tasarım değişkenlerini,  $w$ ,  $\kappa$ ,  $\rho_L$ ,  $V$  amaç fonksiyonlarını,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  ve  $G_4$  doğrusal olmayan eşitsizlik kısıtlamalarını (nonlinear inequality constraints) göstermektedir.

#### 2.4. Temel Onaltı Adet Robotun Çalışma Uzaylarının Eniyilenmesi

Bu bölümde Huang ve Milenkovic (1983) tarafından ileri sürülen ikili harf kodunun kullanılmasıyla oluşan temel onaltı adet endüstriyel robotun katı (rigid) gövde yapısı ve çalışma uzaylarının hacmi aynı şekil üzerinde gösterilmiştir. Katı gövde yapısı verilen robotlara koordinat çerçevesi yerleştirilip, D-H değişkenleri kullanılarak her bir robotun ileri yön kinematiği ve Jakobiyen matrisleri bulunmuştur. Daha sonra Huang ve Milenkovic (1983) tarafından sınıflandırılan bu robotların, başarı göstergeleri ( $w$ ,  $\kappa$  ve  $\rho_L$ ) göz önünde bulundurularak çalışma uzayları optimize edilmiştir. Ayrıca, her bir robotun yerel başarı göstergeleri  $w$ ,  $\kappa$ ,  $\rho_L$ , evrensel başarı göstergeleri  $Q_L$ ,  $\eta$ ,  $\rho_G$  ve eniyilenmiş bağ uzunlukları hesaplanarak bölümün sonunda tablo şeklinde verilmiştir.

### 2.4.1. SS robotunun (Kartezyen robot) çalışma uzayının eniyilenmesi

SS robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.2.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.2.b'de verilmiştir.



Şekil 2.2.a) SS robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

Şekil 2.2.a'da koordinat çerçevelerinin gösterimi verilen SS robotunun D-H değişkenleri Tablo 2.1'deki gibi çıkarılır.

Tablo 2.1. SS robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	90	-90	0	$d_2$
3	0	90	0	$d_3$

Tablo 2.1'deki D-H değişkenleri Denklem 1.1'de yerine konarak SS robotunun  ${}^0_3T$  ileri kinematiği aşağıdaki gibi bulunur.

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ -1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

SS robotunun Jakobiyen matrisi çapraz-çarpım yöntemi kullanılarak Denklem 2.35' teki gibi bulunur (robotların Jakobiyen matrisleri çıkarılırken kullanılan ara işlemler EK-B'de verilmiştir).

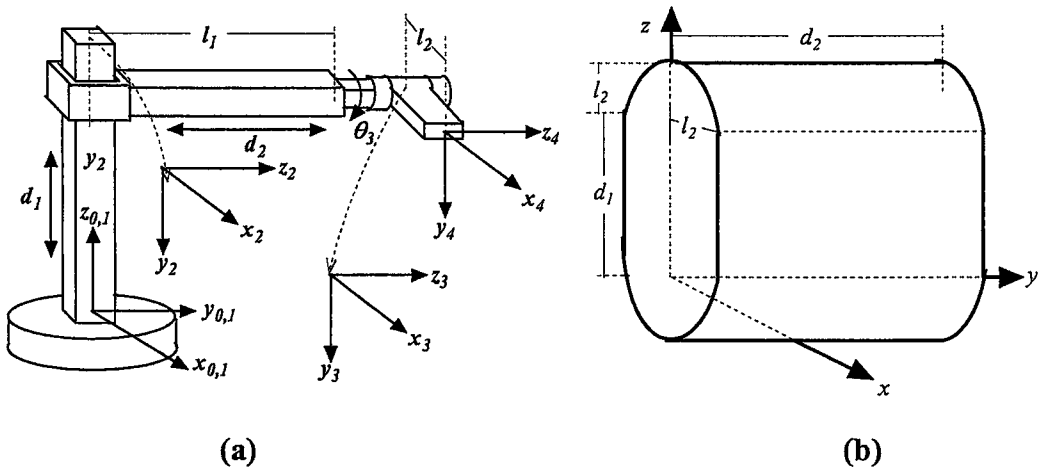
$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

SS robotunun Jakobiyen matrisinin determinanı ve tersi  $d_1$ ,  $d_2$  ve  $d_3$  bağ uzunluklarından bağımsız olduğundan, beceri ölçeği, vaziyet numarası ve yeni yerel başarı göstergesi 1'e eşittir. Bundan dolayı bu robotun çalışma uzayının eniyilenmesi, üç başarı göstergesi içinde bağ uzunlukları 2 alınarak gerçekleştirildi. Robotun eniyilenmiş çalışma uzayının hacmi doğrudan Denklem 2.36'da görüldüğü gibi  $d_1$ ,  $d_2$  ve  $d_3$  bağ uzunluğunun çarpılmasıyla bulunur.

$$V_{SS} = \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} \int_0^{d_3} dx dy dz = d_1 d_2 d_3 \quad (2.36)$$

#### 2.4.2. SC robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

SC robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.3.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.3.b'de verilmiştir.



Şekil 2.3.a) SC robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

SC robotunun D-H değişkenleri Tablo 2.2'deki gibi çıkarılır.

**Tablo 2.2.** SC robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	0	90	0	$-d_2$
3	$\theta_3$	0	0	$-l_1$
4	0	0	$l_2$	0

SC robotunun  ${}^0_4T$  ileri kinematiği Denklem 2.37'deki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_4T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_2 \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 + d_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & l_2 \sin \theta_3 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

SC robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.38, beceri ölçeği Denklem 2.39 ve çalışma uzayının hacmi Denklem 2.40'ta verilmiştir.

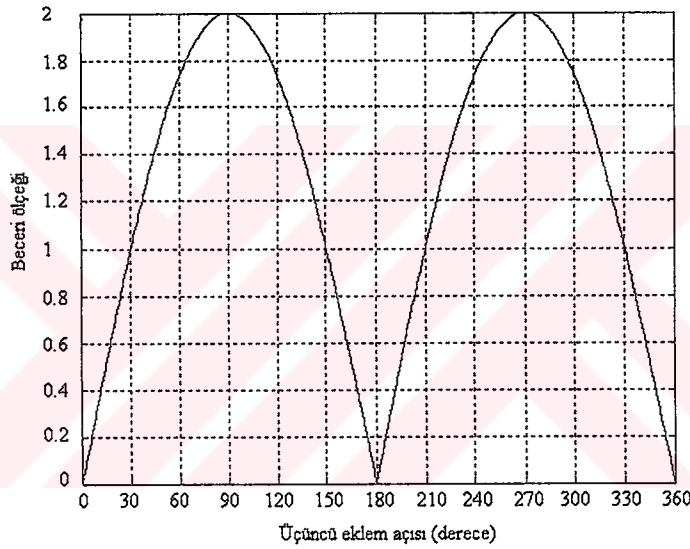
$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_2 \sin \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & l_2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$w = |\det J(\theta)| = |l_2 \sin \theta_3| \quad (2.39)$$

$$V_{SC} = \int_0^{d_2} \int_0^{l_2} \int_0^{2\pi} l_2 d\theta dl_2 dz + \int_0^{d_1} \int_0^{2l_2} \int_0^{d_2} dx dy dz = l_2^2 d_2 \pi + 2d_1 d_2 l_2 \quad (2.40)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.39 ve 2.40'in eniyilenmesiyle,  $w = 2$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 41.133 olarak bulunur. En iyi  $l_2$  uzunluğu 2 olur. Hacim ifadesindeki doğrusal çarpanların çalıştırılan eniyileme programında herhangi bir etkisi olmadığından bu ifadelerin yerine  $d_1 = d_2 = 2$  değerleri kullanılmıştır.

Şekil 2.4'den, bu robotun geniş çaplı hareket yapma kabiliyeti, beceri ölçeğini en büyük yapan açı değerlerinde ( $\theta_3 = 90^\circ$  ve  $\theta_3 = 270^\circ$ ) gerçekleştiği görülür. Şekil 2.4'deki grafikte eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri görülmektedir.



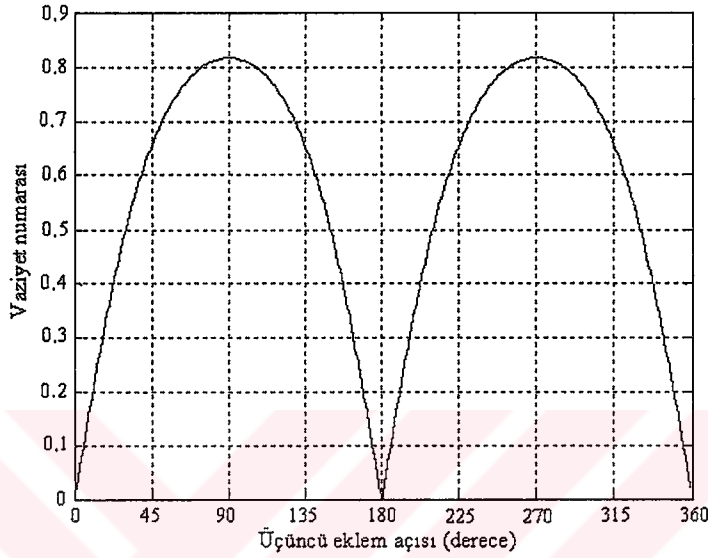
**Şekil 2.4.** Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri.

SC robotunun vaziyet numarası Denklem 2.41'teki gibi bulunur. (Robotların vaziyet numaraları bulunurken kullanılan ara işlemler EK-C'de verilmiştir).

$$\kappa_{SC} = \|J\| \|J^{-1}\| = \frac{\sqrt{2 + 5l_2^2 + 2l_2^4 - 2l_2^2 \cos^2 \theta_3 - l_2^4 \cos^2 \theta_3}}{3l_2 \sin \theta_3} \quad (2.41)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.40 ve 2.41'in eniyilenmesiyle  $\kappa^{-1} = 0.8165$ , en büyük çalışma uzayı 41.133 ve en iyi  $l_2$  uzunluğu 2 olur. Şekil 2.5'den, bu robotun geniş çaplı hareket kabiliyetinin en iyi olduğu alanın normalleştirilmiş vaziyet

numarasını  $\kappa^{-1}$  bire yaklaştıran açı değerleri olduğu görülür. Ayrıca, Şekil 2.25’de görülen vaziyet numarası, normalleştirilmiş ( $\kappa^{-1}$ ) vaziyet numarasını göstermektedir. Şekil 2.5’deki grafikte eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri görülmektedir.



Şekil 2.5. Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.

SC robotunun evrensel vaziyet göstergesi, eklem uzayında Denklem 2.24 ve 2.25 kullanılarak hesaplanır. Denklem 2.42’deki SC robotunun evrensel vaziyet göstergesindeki sabit ifadelerin yerine, eniyilemeden elde edilen değerler yazılarak karmaşık olan ifadenin integrali daha kolay alınır. Bu durumda, SC robotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.43’teki gibi bulunur.

$$\eta_{SC} = \frac{A}{B} = \frac{1}{B_{SC}} \int_{\mathcal{R}} \left| \left( \frac{1}{\kappa_{SC}} \right) \Delta \right| d\theta_3$$

$$\eta_{SC} = \frac{1}{41.113} \int_0^{2\pi} \left| \frac{3l_2^2 \sin^2 \theta_3}{\sqrt{2 + 5l_2^2 + 2l_2^4 - 2l_2^2 \cos^2 \theta_3 - 2l_2^4 \cos^2 \theta_3}} \right| d\theta_3 \quad (2.42)$$

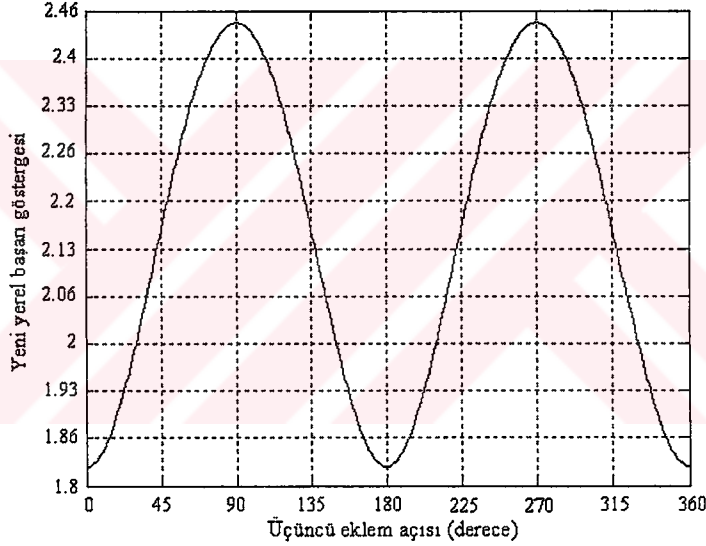
$$\eta_{SC} = \frac{1}{41.113} \int_0^{2\pi} \left| \frac{12 \sin^2 \theta_3}{\sqrt{54 - 24 \cos^2 \theta_3}} \right| d\theta_3 = 0.1331 \quad (2.43)$$



SC robotunun yeni yerel başarı göstergesi  $\rho_{LSC}$ , vaziyet numarası  $\kappa_{SC}$  ile beceri ölçeği  $w_{SC}$ 'nin çarpılmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\rho_{LSC} = w_{SC} \kappa_{SC} = \frac{\sqrt{2 + 5l_2^2 + 2l_2^4 - 2l_2^2 \cos^2 \theta_3 - l_2^4 \cos^2 \theta_3}}{3} \quad (2.44)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.40 ve 2.43'ün eniyilenmesiyle,  $\rho_{LSC \max} = 2.449$ , en büyük çalışma uzayının hacmi 41.113 ve en iyi  $l_2$  uzunluğu ise 2 olur. Şekil 2.6'dan, bu robotun geniş çaplı hareket kabiliyetinin en iyi olduğu alanın, yerel başarı göstergesinin en büyük değerini aldığı  $\theta_3 = 90^\circ$  ve  $\theta_3 = 270^\circ$  derece olduğu görülür.



Şekil 2.6. Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

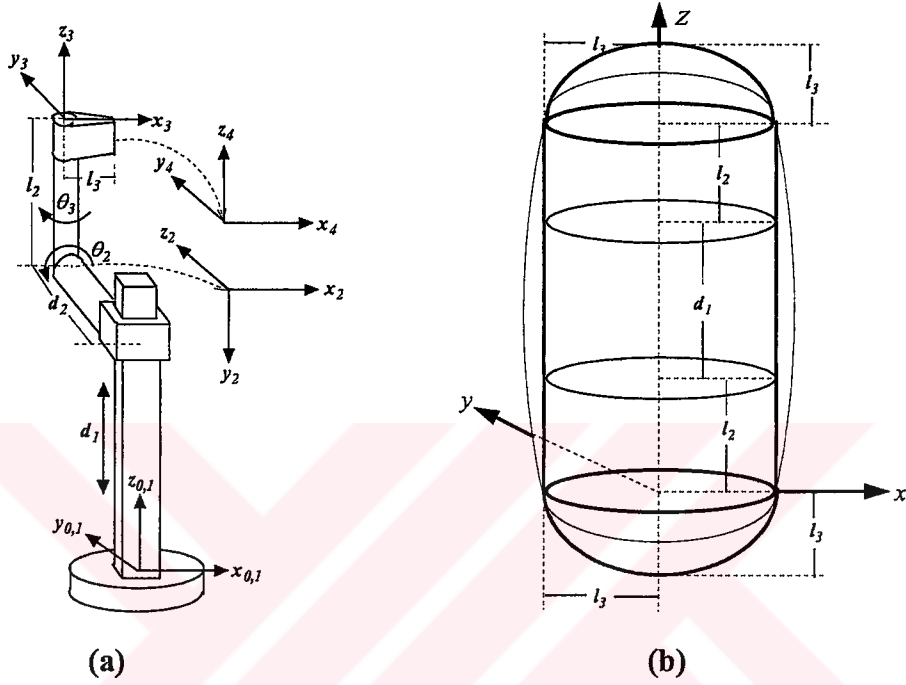
Optimize edilmiş  $l_2$  uzunluğunu Denklem 2.45'de yerine koyarak yeni evrensel başarı göstergesi  $\rho_G = 0.3284$  olarak bulunur.

$$\rho_{GSC} = \frac{C}{D} = \frac{1}{D_{SC}} \int w_{SC} \kappa_{SC} d\theta_3$$

$$\rho_{GSC} = \frac{1}{41.113} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sqrt{2 + 5l_2^2 + 2l_2^4 - 2l_2^2 \cos^2 \theta_3 - l_2^4 \cos^2 \theta_3}}{3} \right) d\theta_3 = 0.3284 \quad (2.45)$$

### 2.4.3. SN robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

SN robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.7.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.7.b'de verilmiştir. Ayrıca SN robotunun D-H değişkenleri Tablo 2.3'teki gibi çıkarılır.



Şekil 2.7.a) SN robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

Tablo 2.3. SN robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	$\theta_2$	90	0	$-d_2$
3	$\theta_3$	-90	0	$l_2$
4	0	0	$l_3$	0

SN robotunun  ${}^0_4T$  ileri kinematiği aşağıdaki gibi bulunur.

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_2 & l_3(\cos \theta_2 \cos \theta_3) - l_2 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & l_3(\sin \theta_3) + d_2 \\ \sin \theta_2 \cos \theta_3 & -\sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_2 & l_3(\sin \theta_2 \cos \theta_3) + l_2 \cos \theta_2 + d_1 \\ 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

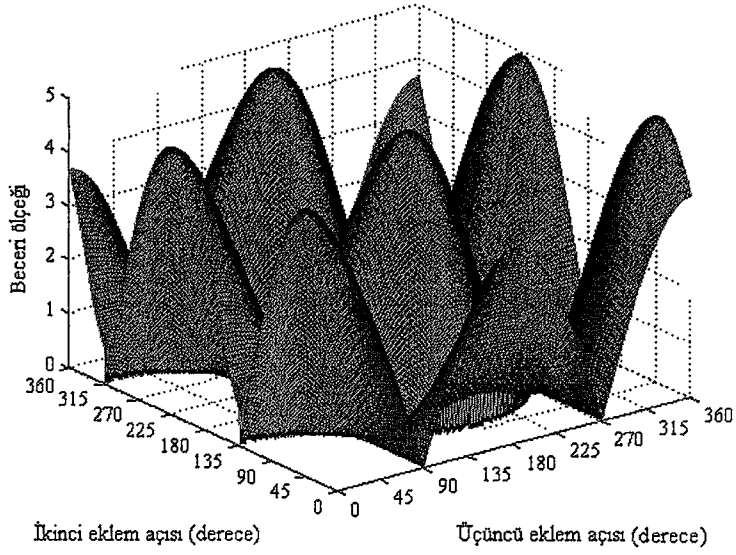
SN robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.47, beceri ölçęęi Denklem 2.48 ve çalışma uzayının hacmi Denklem 2.49'daki gibi bulunur.

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - l_2 \cos \theta_2 & -l_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & l_3 \cos \theta_3 \\ 1 & l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_2 \sin \theta_2 & -l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$w = |\det J(\theta)| = \left| -l_3^2 \cos^2 \theta_3 \sin \theta_2 - l_2 l_3 \cos \theta_3 \cos \theta_2 \right| \quad (2.48)$$

$$V_{SN} = 2 \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{l_3} l_3^2 \sin \theta_1 dl_3 d\theta_1 d\theta_2 + \int_0^{d_1+2l_2} \int_0^{l_3} \int_0^{2\pi} l_3 d\theta_1 dl_3 dz = \frac{4}{3} \pi l_3^3 + (d_1 + 2l_2) \pi l_3^2 \quad (2.49)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.48 ve 2.49'un eniyilenmesiyle,  $w = 4.9143$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 87.491 bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir.  $d_2$  uzunluğu hacim ve beceri ölçęęi ifadelerinde yer almadığından dolayı, eniyilemeye herhangi bir etkisi yoktur. Bu ifade sadece robotun konum denklemlerinde kullanılmaktadır. Ayrıca, Şekil 2.8'de ki grafikte eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen beceri ölçek değerleri görülmektedir.



**Şekil 2.8.** Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen beceri ölççek değerleri.

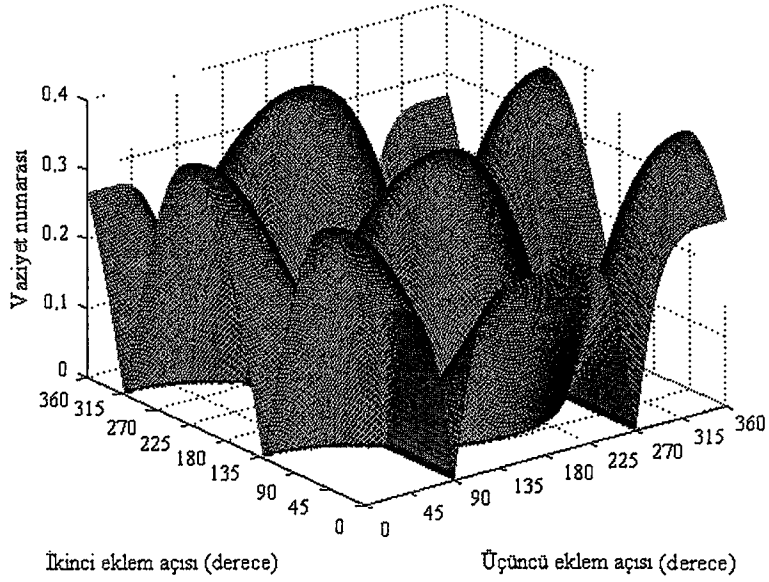
SN robotunun vaziyet numarası Denklem 2.50'deki gibi bulunur.

$$\kappa_{SN} = \frac{\sqrt{(1+l_2^2+l_3^2+l_3^2 \cos^2 \theta_3)a_{SN}}}{3l_3^2 \cos^2 \theta_3 \sin \theta_2 + 3l_2 l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3} \quad (2.50)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$a_{SN} = ((l_2^2 + l_3^2)(l_3^2 \cos^2 \theta_3 + \cos^2 \theta_2) + 2l_3^2 \cos^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_2) \quad (2.51)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.49 ve 2.50'nin eniyilenmesiyle  $\kappa^{-1} = 0.3714$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 87.491 olur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.9'da eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen vaziyet numarası değerleri görülmektedir.



**Şekil 2.9.** Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri.

SN robotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.52'deki gibi elde edilir.

$$\eta_{SN} = \frac{1}{87.491} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{b_{SN}}{\sqrt{(1+l_2^2+l_3^2+l_3^2 \cos^2 \theta_3)a_{SN}}} \right| d\theta_2 d\theta_3$$

$$\eta_{SN} = \frac{1}{87.491} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{c_{SN}}{\sqrt{d_{SN}}} \right| d\theta_2 d\theta_3 = 0.2181 \quad (2.52)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$b_{SN} = 3l_3^4 \cos^4 \theta_3 \sin^2 \theta_2 + 6l_2 l_3^3 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos^3 \theta_3 + 3l_2^2 l_3^2 \cos^2 \theta_3 \cos^2 \theta_2 \quad (2.53)$$

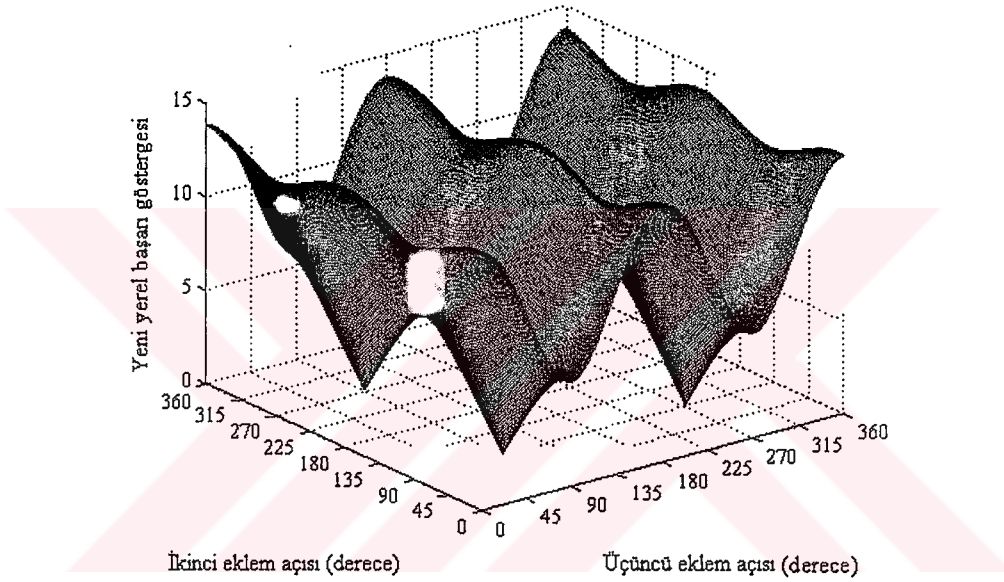
$$c_{SN} = 33 \cos^4 \theta_3 \sin^2 \theta_2 + 72 \cos^3 \theta_3 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + 40 \cos^2 \theta_2 \cos^3 \theta_3 \quad (2.54)$$

$$d_{SN} = 930 \cos^2 \theta_3 + 282 \cos^2 \theta_2 + 55 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + 61 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_2 + 112 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + 370 \cos^4 \theta_3 + 22 \cos^4 \theta_3 \sin^2 \theta_2 + 24 \cos^3 \theta_3 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \quad (2.55)$$

SN robotunun yeni yerel başarı göstergesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\rho_{LSN} = \frac{\sqrt{(1+l_2^2+l_3^2+l_3^2 \cos^2 \theta_3)a_{SN}}}{3} \quad (2.56)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.48 ve 2.55'in eniyilenmesiyle,  $\rho_{LSN \max} = 13.742$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 87.491 olur. Eniyilenmiş  $l_2$  ve  $l_3$  uzunlukları sırasıyla 2 ve 1.8182 olarak bulunur. Şekil 2.10'da ise eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen yeni yerel başarı göstergesi değerleri görülmektedir.



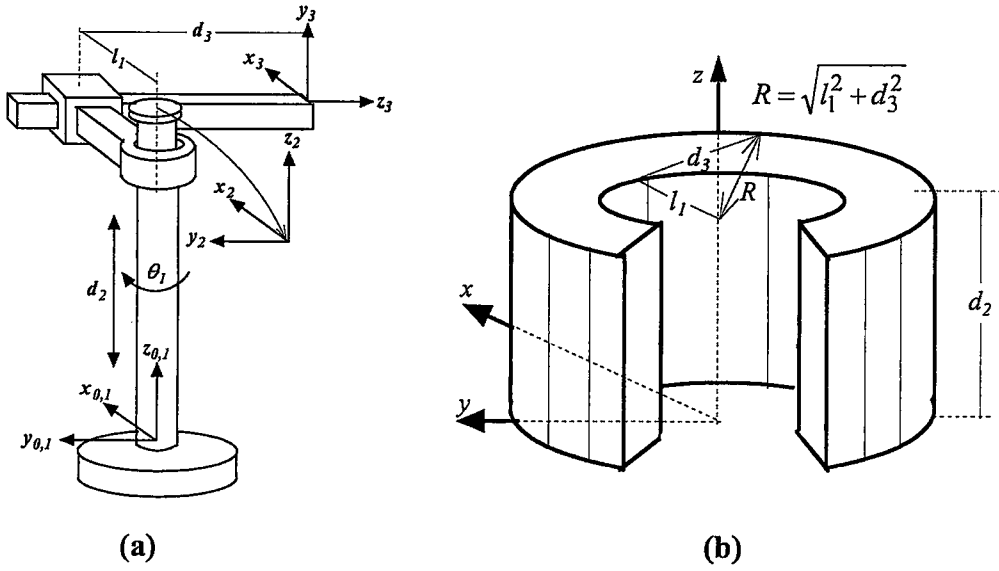
Şekil 2.10. Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

Yeni evrensel başarı göstergesi 3.9476 şeklinde elde edilir.

$$\rho_{GSN} = \frac{1}{87.491} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{d_{SN}}}{3} d\theta_2 d\theta_3 = 3.9476 \quad (2.57)$$

#### 2.4.4. CS robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

CS robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.11.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.11.b'de verilmiştir. Ayrıca, CS robotunun D-H değişkenleri Tablo 2.4'teki gibi çıkarılır.



Şekil 2.11.a) CS robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

Tablo 2.4. CS robotunun D-H değişkenleri

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	0	0	0	$d_2$
3	0	90	$l_1$	$d_3$

CS robotunun  ${}^0_3T$  ileri kinematiği Denklem 2.58'deki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_3T &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & l_1 \cos \theta_1 + d_3 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & l_1 \sin \theta_1 - d_3 \cos \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

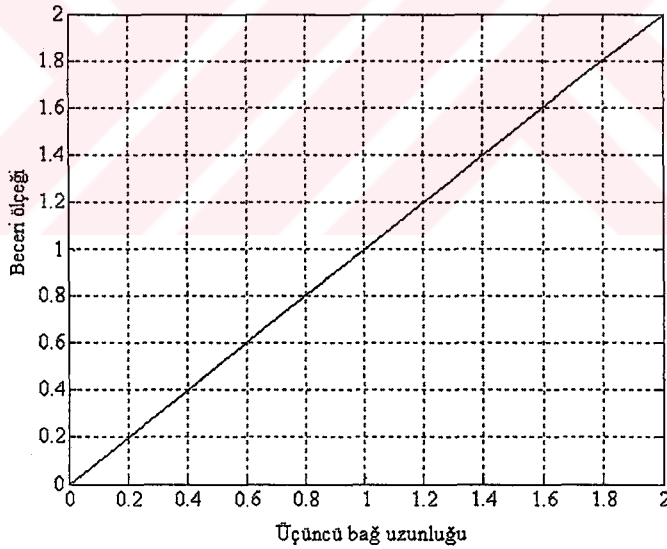
CS robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.59, beceri ölçeği Denklem 2.60 ve çalışma uzayının hacmi Denklem 2.61'de verilmiştir.

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 + d_3 \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ l_1 \cos \theta_1 + d_3 \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$w = |d_3| \quad (2.60)$$

$$V_{CS} = \int_0^{d_2} \int_{l_1}^{\sqrt{l_1^2 + d_3^2}} \int_0^{2\pi} d_3 d\theta dd_3 dd_2 = d_2 d_3^2 \pi \quad (2.61)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.59 ve 2.60'ın eniyilenmesiyle,  $w = 2$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 25.1327 olarak bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunluğu  $d_3 = 2$  şeklinde elde edilir. Şekil 2.12'de bağ uzunluğu  $d_3$  ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri görülmektedir.



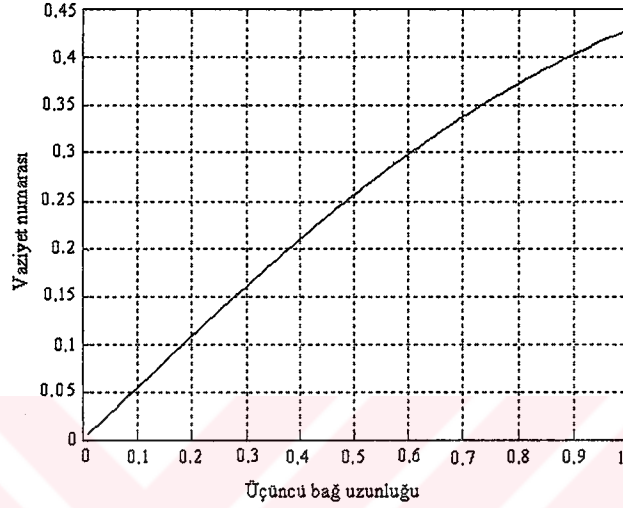
Şekil 2.12. Bağ uzunluğu  $d_3$  ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri.

CS robotunun vaziyet numarası Denklem 2.61'deki gibi bulunur.

$$K_{CS} = \frac{\sqrt{2 + 3l_1^2 + l_1^4 + 3l_1^2 d_3^2 + 5d_3^2 + 2d_3^4}}{3d_3} \quad (2.62)$$



Amaç fonksiyonları Denklem 2.61 ve 2.62'nin eniyilenmesiyle  $\kappa^{-1} = 0.4286$  ve en büyük çalışma uzayı ise 6.28 bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $l_1 = 2$  ve  $d_3 = 1$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.13'den bu robotun hareket kabiliyetinin beceri ölçeğinde olduğu gibi doğrudan  $d_3$  bağ uzunluğuna bağlı olduğu görülmektedir.



Şekil 2.13. Bağ uzunluğu  $d_3$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.

CS robotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.63'teki gibi elde edilir.

$$\eta_{cs} = \frac{1}{6.2832} \int_0^1 \left| \frac{3d_3^2}{\sqrt{2 + 3l_1^2 + l_1^4 + 3l_1^2 d_3^2 + 5d_3^2 + 2d_3^4}} \right| dd_3$$

$$\eta_{cs} = \frac{1}{6.2832} \int_0^1 \left| \frac{3d_3^2}{\sqrt{30 + 17d_3^2 + 2d_3^4}} \right| dd_3 = 0.0499 \quad (2.63)$$

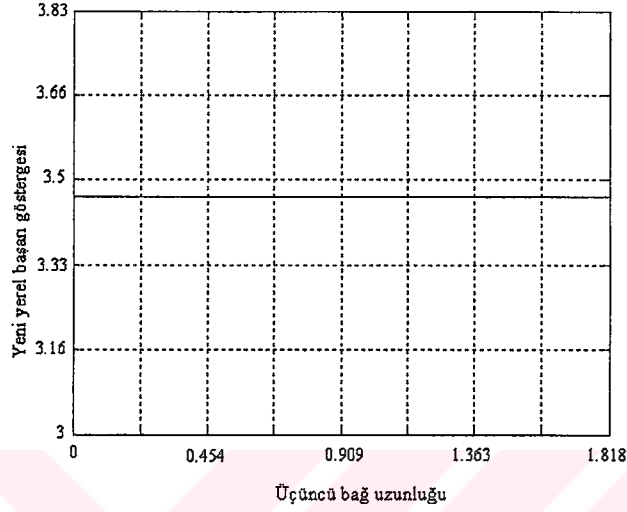
CS robotunun yeni yerel başarı göstergesi Denklem 2.64'teki gibi bulunur.

$$\rho_{LCS} = w_{cs} \kappa_{cs} = \frac{\sqrt{2 + 3l_1^2 + l_1^4 + 3l_1^2 d_3^2 + 5d_3^2 + 2d_3^4}}{3} \quad (2.64)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.61 ve 2.64'ün eniyilenmesiyle,  $\rho_{LCS \max} = 3.464$

ve

en büyük çalışma uzayının hacmi ise 22.2759 olur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $l_1 = 2$  ve  $d_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, yeni evrensel başarı göstergesi 0.1939 olarak bulunur. Şekil 2.14'te ise  $d_3$  bağ uzunluğu ve buna karşılık gelen  $\rho$  değerleri görülmektedir.

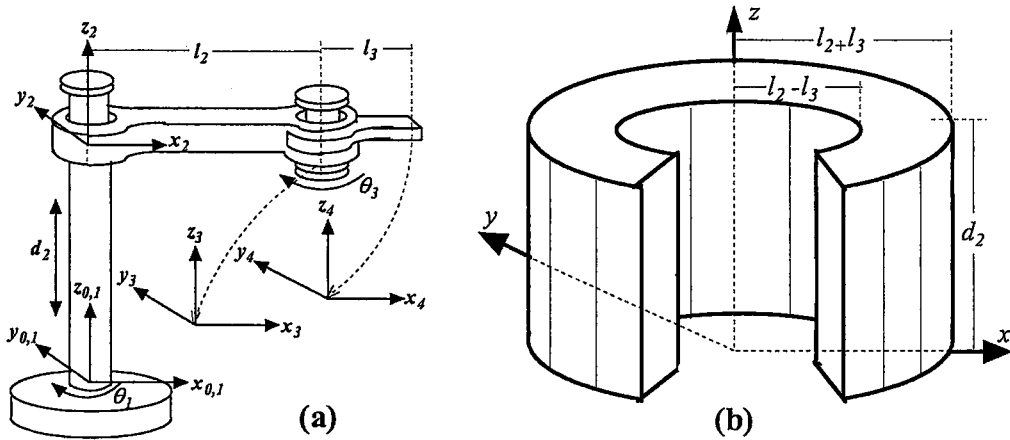


Şekil 2.14. Bağ uzunluğu  $d_3$  ve buna karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

$$\rho_{GCS} = \frac{1}{22.2759} \int_0^{1.8182} \frac{\sqrt{30 + 17d_3^2 + 2d_3^4}}{3} dd_3 = 0.1939 \quad (2.65)$$

#### 2.4.5. CC robotunun çalışma uzayının eniylenmesi

CC robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.15.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.15.b'de verilmiştir.



Şekil 2.15.a) CC robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

CC robotunun D-H değişkenleri Tablo 2.5’de verilmiştir.

**Tablo 2.5.** CC robotunun D-H değişkenleri

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	0	0	0	$d_2$
3	$\theta_3$	0	$l_2$	0
4	0	0	$l_3$	0

CC robotunun  ${}^0_4T$  ileri yön kinematiği Denklem 2.66’deki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_4T &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{13} & -\sin \theta_{13} & 0 & l_3 (\cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) + l_2 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_{13} & \cos \theta_{13} & 0 & l_3 (\sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3) + l_2 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.66)
 \end{aligned}$$

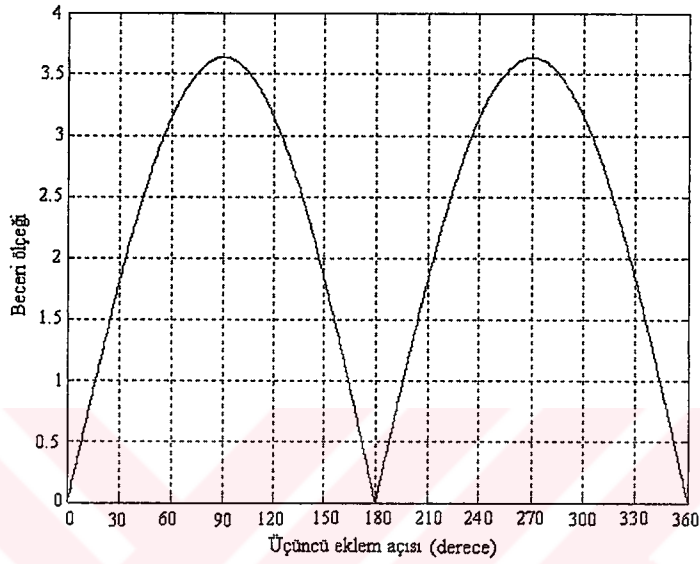
CC robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.67, beceri ölççeği Denklem 2.68 ve çalışma uzayının hacmi Denklem 2.69’da verilmiştir.

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_3 \sin \theta_{13} - l_2 \sin \theta_1 & 0 & -l_3 \sin \theta_{13} \\ l_3 \cos \theta_{13} + l_2 \cos \theta_1 & 0 & l_3 \cos \theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$w = l_2 l_3 \sin \theta_3 \quad (2.68)$$

$$V_{CC} = \int_0^{d_2 l_2 + l_3} \int_{l_2 - l_3}^{2\pi} \int_0^{2\pi} l_3 d\theta dl_3 dz = 4d_2 l_2 l_3 \pi \quad (2.69)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.68 ve 2.69'un eniyilenmesiyle,  $w = 3.6364$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 91.3918 olarak bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Şekil 2.16'da ise eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri görülmektedir.



**Şekil 2.16.** Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri.

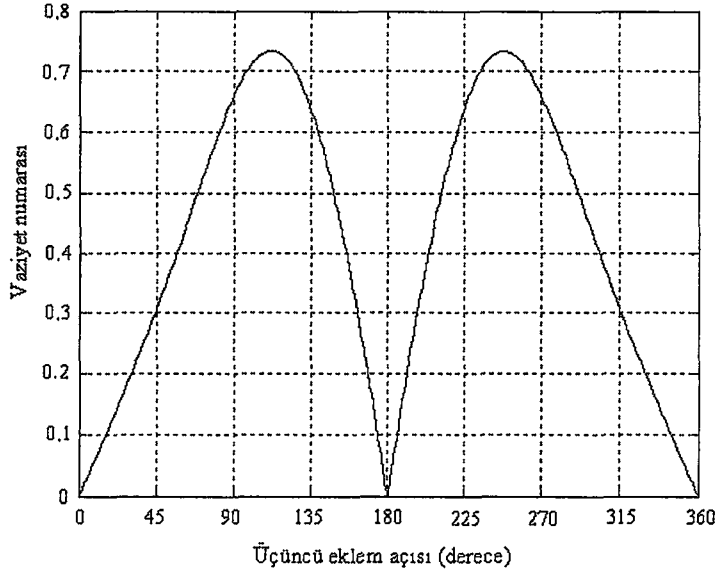
CC robotunun vaziyet numarası Denklem 2.70'deki gibi bulunur.

$$\kappa_{CC} = \frac{\sqrt{(l_2^2 + 2l_3^2 + 2l_2l_3 \cos \theta_3 + 1)} a_{CC}}{3l_2l_3 \sin \theta_3} \quad (2.70)$$

Denklemden kullanılan  $a_{CC}$  kısaltması aşağıda verilmiştir.

$$a_{CC} = (2l_3^2 + l_2^2 + l_2^2 l_3^2 + l_2^2 l_3^2 \cos^2 \theta_3 + 2l_2l_3 \cos \theta_3) \quad (2.71)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.69 ve 2.70'in eniyilenmesiyle,  $\kappa^{-1} = 0.733$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 91.3918 olur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.8182$  olarak elde edilir. Şekil 2.17'de ise eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri görülmektedir.



Şekil 2.17. Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.

CC robotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.72'deki gibi elde edilir.

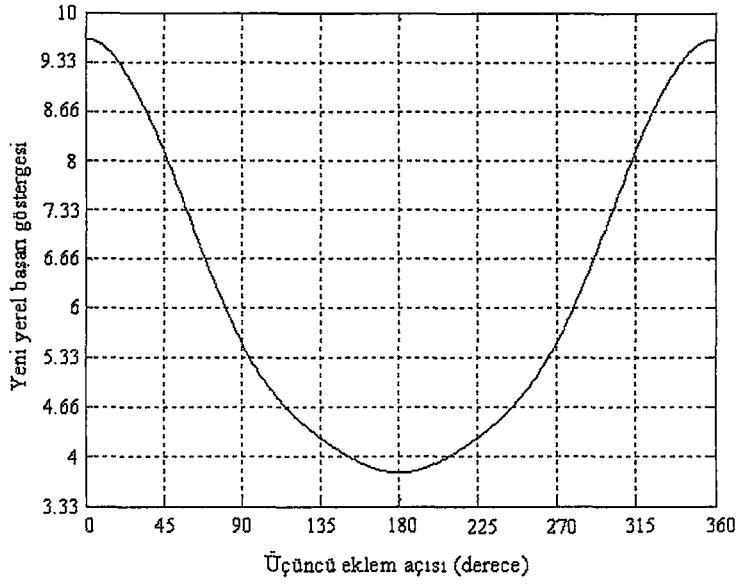
$$\eta_{CC} = \frac{1}{91.3918} \int_0^{2\pi} \frac{3l_2^2 l_3^2 \sin^2 \theta_3}{\sqrt{(l_2^2 + 2l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + 1)a_{CC}}} d\theta_3$$

$$\eta_{CC} = \frac{1}{91.3918} \int_0^{2\pi} \frac{39.63 \sin^2 \theta_3}{\sqrt{(276 + 205 \cos^2 \theta_3 + 257 \cos \theta_3 + 96 \cos^3 \theta_3)}} d\theta_3 = 0.08168 \quad (2.72)$$

CC robotunun yeni yerel başarı göstergesi Denklem 2.73'teki gibi bulunur.

$$\rho_{LCC} = \frac{\sqrt{(l_2^2 + 2l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + 1)D_d}}{3} \quad (2.73)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.68 ve 2.72'in eniyilenmesiyle,  $\rho_{LCC_{\max}} = 9.644$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi 91.3918 olarak bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, yeni evrensel başarı göstergesi 0.423 olarak bulunur. Şekil 2.18'de ise eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen  $\rho$  değerleri görülmektedir.

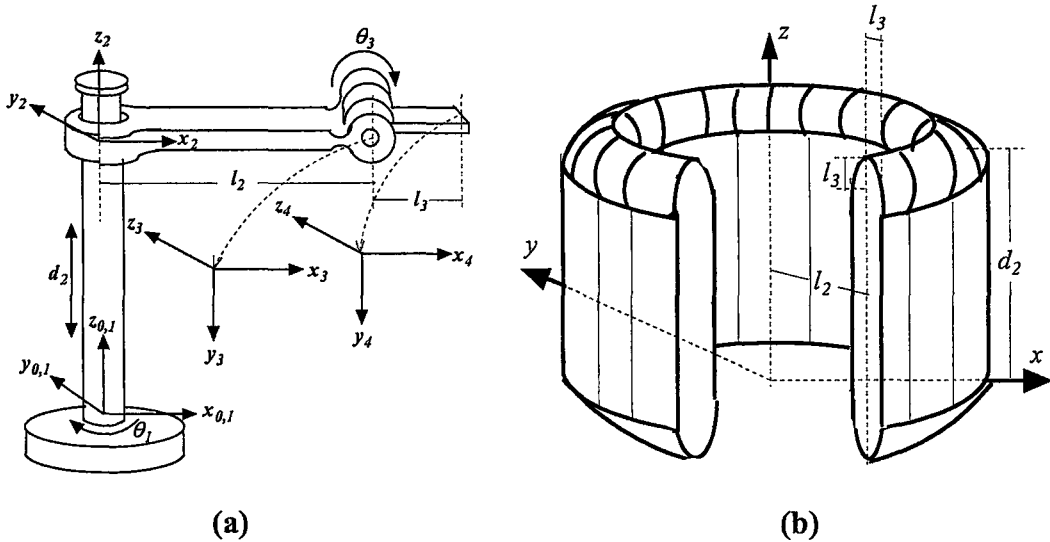


Şekil 2.18. Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

$$\rho_{GCC} = \frac{1}{91.39} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(276 + 205 \cos^2 \theta_3 + 257 \cos \theta_3 + 96 \cos^3 \theta_3)}}{3} d\theta_3 = 0.423 \quad (2.74)$$

#### 2.4.6. CR robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

CR robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.19.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.19.b'de verilmiştir. Ayrıca, CR Robotunun D-H değişkenleri Tablo 2.6'da gösterilmiştir.



Şekil 2.19.a) CR robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

**Tablo 2.6.** CR robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	0	0	0	$d_2$
3	$\theta_3$	90	$l_2$	0
4	0	0	$l_3$	0

CR robotunun  ${}^0_4T$  ileri kinematığı Denklem 2.75'deki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_4T &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_3 & -\cos \theta_1 \sin \theta_3 & \sin \theta_1 & l_3 (\cos \theta_1 \cos \theta_3) + l_2 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_3 & -\sin \theta_1 \sin \theta_3 & -\cos \theta_1 & l_3 (\sin \theta_1 \cos \theta_3) + l_2 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & l_3 \sin \theta_3 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.75)
 \end{aligned}$$

CR robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.76, beceri ölçeği Denklem 2.77, çalışma uzayının hacmi Denklem 2.78'de verilmiştir.

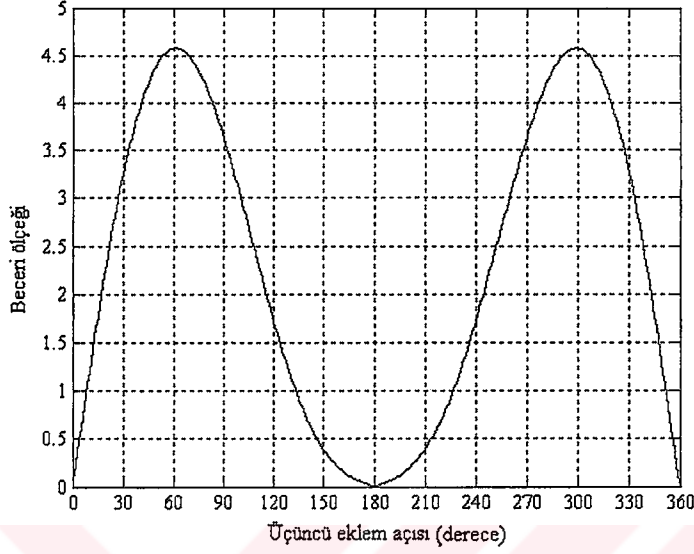
$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_3 \sin \theta_1 \cos \theta_3 - l_2 \sin \theta_1 & 0 & -l_3 \cos \theta_1 \sin \theta_3 \\ l_3 \cos \theta_1 \cos \theta_3 + l_2 \cos \theta_1 & 0 & -l_3 \sin \theta_1 \sin \theta_3 \\ 0 & 1 & l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$w = l_3^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + l_2 l_3 \sin \theta_3 \quad (2.77)$$

$$V_{CR} = \int_0^{d_2 l_2 + l_3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} l_3 d\theta dl_3 dd_2 + \int_0^{l_3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} l_3 (l_2 + l_3 \cos \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 dl_3 = 4d_2 l_2 l_3 \pi + 2l_2 l_3^2 \pi^2 \quad (2.78)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.77 ve 2.78'in eniyilenmesiyle,  $w = 4,5822$  ve en büyük çalışma uzayı 221.89 olarak bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ

uzunlukları  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Şekil 2.20’de ise eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri görülmektedir.



Şekil 2.20. Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri.

CR robotunun vaziyet numarası Denklem 2.79’deki gibi bulunur.

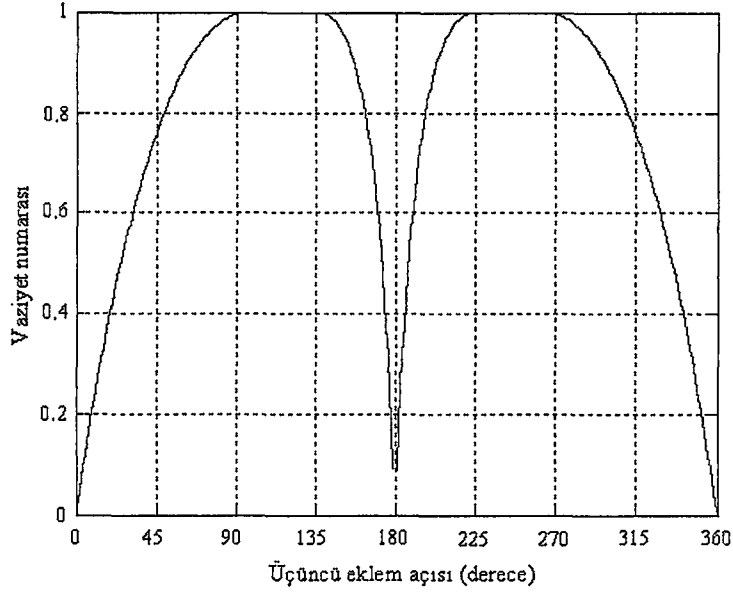
$$\kappa_{CR} = \frac{\sqrt{(l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos \theta_3 + 1)a_{CR}}}{3l_3^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + 3l_2l_3 \sin \theta_3} \quad (2.79)$$

Denklemden kullanılan  $a_{CR}$  kısaltması aşağıda verilmiştir.

$$a_{CR} = l_2^2 + l_3^2 + l_3^4 \cos^2 \theta_3 \sin^2 \theta_3 + 2l_2l_3^3 \cos \theta_3 \sin^2 \theta_3 + l_2^2l_3^2 \sin^2 \theta_3 + 2l_2l_3 \cos \theta_3 \quad (2.80)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.78 ve 2.79’un eniyilenmesiyle,  $\kappa^{-1} = 1$  ve en büyük çalışma uzayı 221.893 olarak bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Şekil 2.21’de ise eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri görülmektedir.





Şekil 2.21. Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.

CR robotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.81'deki gibi elde edilir.

$$\eta_{CR} = \frac{1}{221.899} \int_0^{2\pi} \left| \frac{3l_3^4 \sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_3 + 6l_2 l_3^3 \sin^2 \theta_3 \cos \theta_3 + 3l_2^2 l_3^2 \sin^2 \theta_3}{\sqrt{(l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + 1)a_{CR}}} \right| d\theta_3$$

$$\eta_{CR} = \frac{1}{221.899} \int_0^{2\pi} \left| \frac{3.3 \sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_3 + 72 \sin^2 \theta_3 \cos \theta_3 + 40 \sin^2 \theta_3}{\sqrt{b_{CR}}} \right| d\theta_3 = 0.0477 \quad (2.81)$$

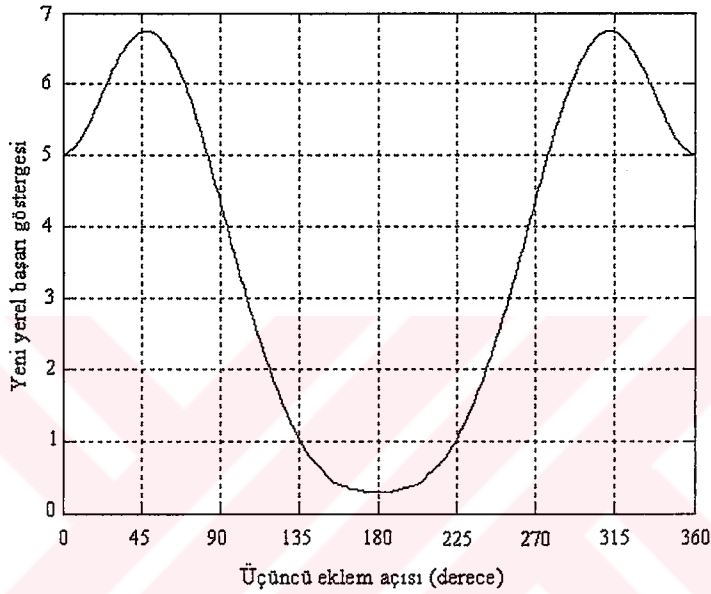
Denklemden kullanılan  $b_{CR}$  kısaltması aşağıda verilmiştir.

$$b_{CR} = (61 + 265 \cos^2 \theta_3 \sin^2 \theta_3 + 295 \cos \theta_3 \sin^2 \theta_3 + 110 \sin^2 \theta_3 + 113 \cos \theta_3 + 79 \cos^3 \theta_3 \sin^2 \theta_3 + 53 \cos^2 \theta_3) \quad (2.82)$$

CR robotunun yeni yerel başarı göstergesi Denklem 2.83'teki gibi bulunur.

$$\rho_{LCR} = \frac{\sqrt{(l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + 1)a_{CR}}}{3} \quad (2.83)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.78 ve 2.83'ün eniyilenmesiyle,  $\rho_{LCR_{max}} = 6.742$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 221.899 olur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Ayrıca yeni evrensel başarı göstergesi 0.3737 bulunur. Şekil 2.22'de ise eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen  $\rho$  değerleri görülmektedir.

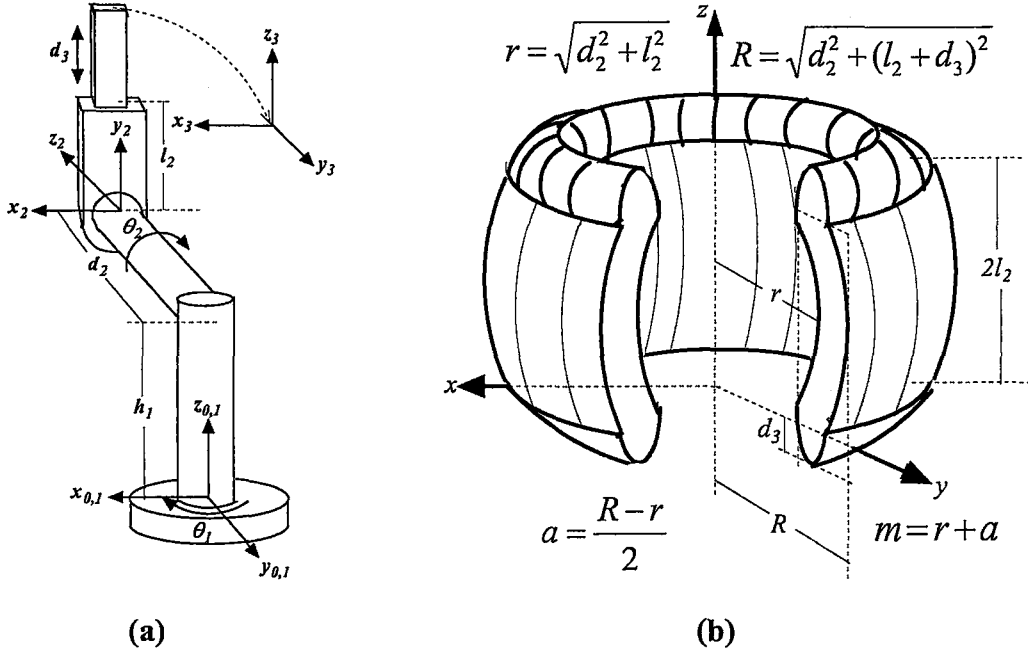


Şekil 2.22. Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

$$\rho_{GCR} = \frac{1}{221.899} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{b_{CR}}}{3} d\theta_3 = 0.3737 \quad (2.84)$$

#### 2.4.7. NS robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

NS robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.23.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.23.b'de verilmiştir. Ayrıca, NS robotunun D-H değişkenleri Tablo 2.7'de görülmektedir.



Şekil 2.23.a) NS robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

Tablo 2.7. NS robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	90	0	$d_2$
3	0	-90	0	$l_2 + d_3$

NS robotunun  ${}^0_3T$  ileri kinematığı Denklem 2.85'deki bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_3T &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 + l_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 & -(d_3 + l_2)(\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & -(d_3 + l_2)(\sin \theta_1 \sin \theta_2) - d_2 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 & (d_3 + l_2) \cos \theta_2 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.85)
 \end{aligned}$$

NS robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.86, beceri ölçeği Denklem 2.87 ve

çalışma uzayının hacmi Denklem 2.88’de verilmiştir.

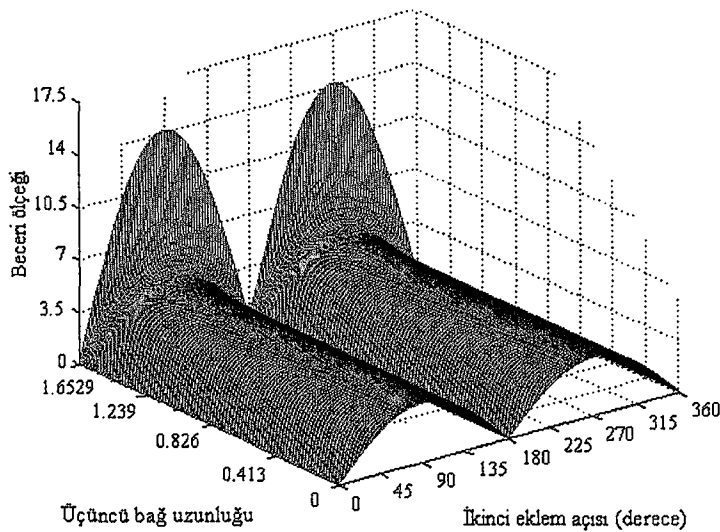
$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} (d_3 + l_2)(\sin \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \cos \theta_1 & \cdot & \cdot \\ -(d_3 + l_2)(\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & -(d_3 + l_2)(\cos \theta_1 \cos \theta_2) & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cdot & -(d_3 + l_2)(\sin \theta_1 \cos \theta_2) & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cdot & -(d_3 + l_2) \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$w = \left| -\sin \theta_2 (d_3^2 + 2d_3 l_2 + l_2^2) \right| \quad (2.87)$$

$$V_{NS} = \int_0^{2l_2} \int_r^{r+2a} \int_0^{2\pi} ad\theta_1 dadl_2 + \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(m + a \cos \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 da$$

$$= 8l_2 a \pi (r + a) + 2a^2 \pi^2 m \quad (2.88)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.87 ve 2.88’in eniyilenmesiyle,  $w = 14.5785$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi 185.14 olarak bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $l_2 = 2$  ve  $d_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Şekil 2.24’te ise bağ uzunluğu  $d_3$ , eklem açısı  $\theta_2$  ve bunlara karşılık gelen  $w$  değerleri görülmektedir.



Şekil 2.24. Bağ uzunluğu  $d_3$ , eklem açısı  $\theta_2$  ve bunlara karşılık gelen  $w$  değerleri.

NS robotunun vaziyet numarası Denklem 2.89'daki gibi bulunur.

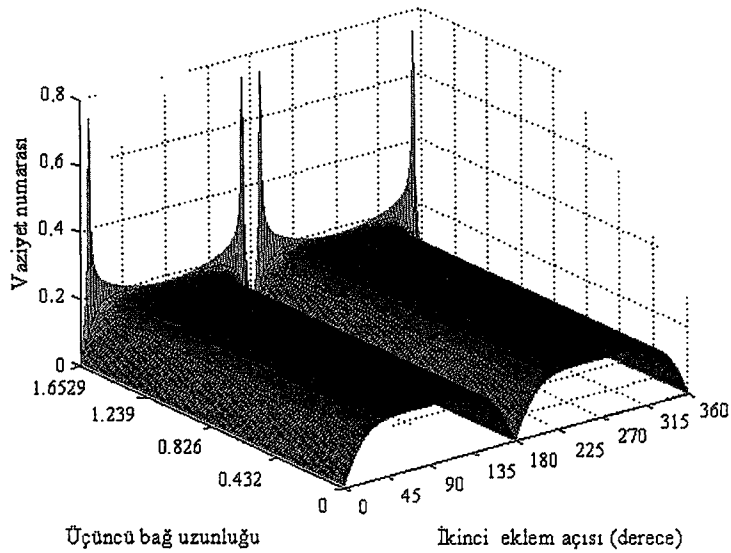
$$\kappa_{NS} = \frac{\sqrt{a_{NS} b_{NS}}}{3d_3^2 \sin \theta_2 + 6l_2 d_3 \sin \theta_2 + 3l_2^2 \sin \theta_2} \quad (2.89)$$

Denklemden kullanılan  $a_{NS}$  ve  $b_{NS}$  kısaltmaları aşağıda verilmiştir.

$$a_{NS} = (2d_3^2 + 4l_2 d_3 + 2l_2^2 + d_2^2 - d_3^2 \cos^2 \theta_2 - 2l_2 d_3 \cos^2 \theta_2 - l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 1) \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} b_{NS} = & -\cos^2 \theta_2 (l_2^2 + 2l_2 d_3 d_2^2 + d_3^2 + 6d_3^2 l_2^2 + d_2^2 l_2^2 + d_3^3 l_2 + 4d_3 l_2^3 \\ & + d_3^4 + 2d_3 l_2 + d_3^2 d_2^2 - d_2^2 + l_2^4) + 2l_2^2 + 2d_3^2 + 2l_2 d_2^2 d_3 + d_3^4 \\ & + l_2^4 + 4d_3 l_2 + d_3^2 d_2^2 + d_2^2 l_2^2 + d_3^2 l_2^2 + 4d_3^3 l_2 + 4d_3 l_2^3 \end{aligned} \quad (2.91)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.88 ve 2.89'un eniyilenmesiyle  $\kappa^{-1} = 0.7367$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 137.89 olarak bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $d_2 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $d_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Şekil 2.25'de ise bağ uzunluğu  $d_3$ , eklem açısı  $\theta_2$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri görülmektedir.



Şekil 2.25. Bağ uzunluğu  $d_3$ , eklem açısı  $\theta_2$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri.

NS robotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.92'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\eta_{NS} &= \frac{1}{137.89} \int_0^{1.6529} \int_0^{2\pi} \left| \frac{-\sin^2 \theta_2 (3l_2^4 + 3d_3^4 + 12l_2 d_3^3 + 18d_3^2 l_2^2 + 12l_2^3 d_3)}{\sqrt{a_{NS} b_{NS}}} \right| d\theta_2 dd_3 \\ &= \frac{1}{137.89} \int_0^{1.6529} \int_0^{2\pi} \left| \frac{-\sin^2 \theta_2 (48 + 3d_3^4 + 22d_3^3 + 64d_3^2 + 87d_3)}{\sqrt{c_{NS} d_{NS}}} \right| d\theta_2 dd_3 \\ &= 0.2504\end{aligned}\quad (2.92)$$

Denklemden kullanılan  $c_{NS}$  ve  $d_{NS}$  kısaltmaları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}c_{NS} &= -\cos^2 \theta_2 (23.4 + 41d_3 + 25d_3^2 + 1.8d_3^3 + d_3^4) \\ &\quad + 30 + 46d_3 + 9.3d_3^2 + 7.3d_3^3 + d_3^4\end{aligned}\quad (2.93)$$

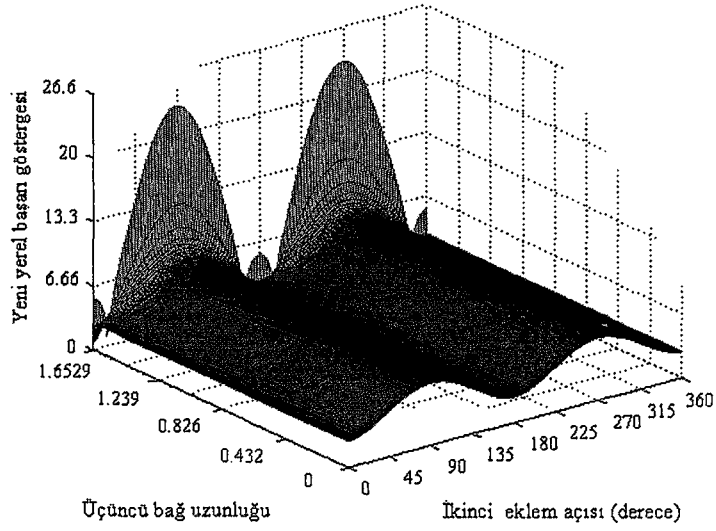
$$d_{NS} = (11.6 + 2d_3^2 + 7.3d_3 - d_3^2 \cos^2 \theta_2 - 3.63d_3 \cos^2 \theta_2 - 3.3 \cos^2 \theta_2)\quad (2.94)$$

NS robotunun yeni yerel başarı göstergesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\rho_{LNS} = \frac{\sqrt{a_{NS} b_{NS}}}{3}\quad (2.95)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.88 ve 2.95'in eniyilenmesiyle  $\rho_{LNS \max} = 22.992$ , en büyük çalışma uzayının hacmi ise 137.89 olur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $d_2 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $d_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, yeni evrensel başarı göstergesi 0.5977 olarak bulunur. Şekil 2.26'da ise bağ uzunluğu  $d_3$ , eklem açısı  $\theta_2$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri görülmektedir.

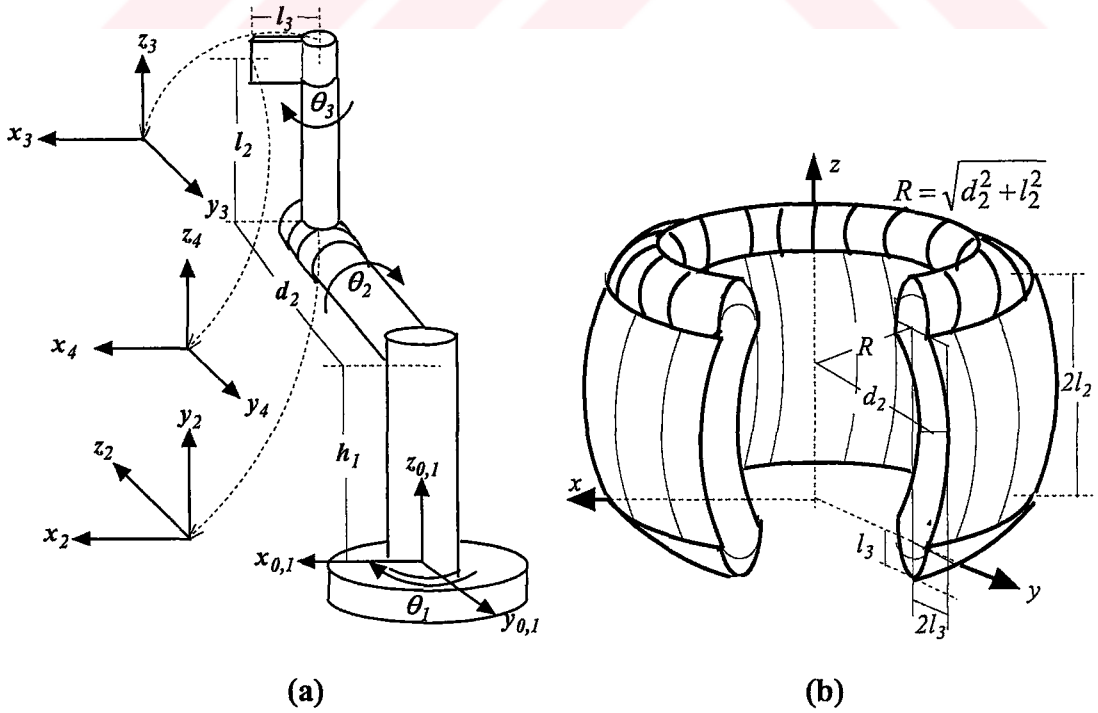
$$\rho_{GNS} = \frac{1}{137.89} \int_0^{1.6529} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{c_{NS} d_{NS}}}{3} d\theta_2 dd_3 = 0.5977\quad (2.96)$$



Şekil 2.26. Bağ uzunluğu  $d_3$ , eklem açısı  $\theta_2$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

#### 2.4.8. NN robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

NN robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.27.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.27.b'de verilmiştir. Ayrıca, Tablo 2.8'de NN robotunun D-H değişkenleri görülmektedir.



Şekil 2.27.a) NN robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

**Tablo 2.8.** NN robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	90	0	$d_2$
3	$\theta_3$	-90	0	$l_2$
4	0	0	$l_3$	0

NN robotunun  ${}^0_4T$  ileri kinematiği Denklem 2.97'deki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_4T &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3 & -\cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \sin \theta_1 \cos \theta_3 & \dots & \dots \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3 & -\sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_1 \cos \theta_3 & \dots & \dots \\ \sin \theta_2 \cos \theta_3 & -\sin \theta_2 \sin \theta_3 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} \dots & \dots & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 & \dots \\ \dots & \dots & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & \dots \\ \dots & \dots & \cos \theta_2 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} \dots & \dots & l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) - l_2(\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 & \dots \\ \dots & \dots & l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3) - l_2(\sin \theta_1 \sin \theta_2) - d_2 \cos \theta_1 & \dots \\ \dots & \dots & l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_2 \cos \theta_2 + h_1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots \end{bmatrix} \quad (2.97)
 \end{aligned}$$

NN robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.98, beceri ölççeği Denklem 2.99 ve çalışma uzayının hacmi Denklem 2.100'de verilmiştir.

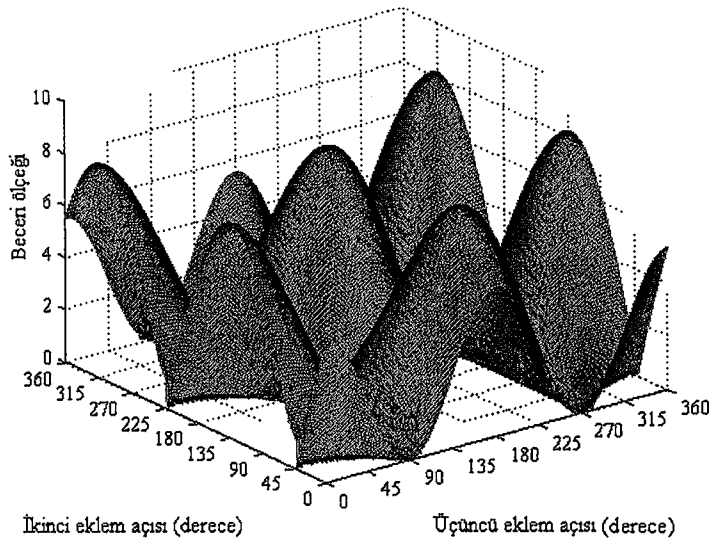


$$\begin{aligned}
{}^3J(\theta) &= \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3) + l_2(\sin \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \cos \theta_1 & \cdot & \cdot \\ l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) - l_2(\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & -l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3) - l_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2) & \cdot \\ \cdot & -l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3) - l_2(\sin \theta_1 \cos \theta_2) & \cdot \\ \cdot & l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_2 \sin \theta_2 & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_3) \\ \cdot & \cdot & -l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \cos \theta_3) \\ \cdot & \cdot & -l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.98)
\end{aligned}$$

$$w = \left| d_2 l_2 l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - d_2 l_3^2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3 \right| \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned}
V_{NN} &= \int_0^{2l_2} \int_{d_2-l_3}^{d_2+l_3} \int_0^{2\pi} l_3 d\theta dl_3 dl_2 + \int_0^{l_3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} l_3 (R + l_3 \cos \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 dl_3 \\
&= 8l_2 d_2 l_3 \pi + 2l_3^2 R \pi^2 = 8l_2 d_2 l_3 \pi + 2l_3^2 \sqrt{d_2^2 + l_2^2} \pi^2 \quad (2.100)
\end{aligned}$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.99 ve 2.100'ün eniyilenmesiyle,  $w = 8.1229$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 296.83 olarak bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $d_2 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.28'de eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen beceri ölçek değerleri görülmektedir.



Şekil 2.28. Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen beceri ölçek değerleri.

NN robotunun vaziyet numarası Denklem 2.101'deki gibi bulunur.

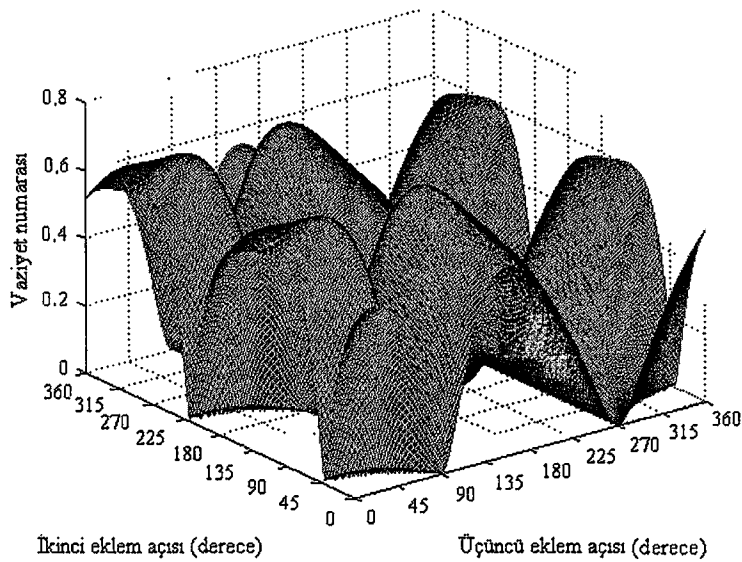
$$\kappa_{NN} = \frac{\sqrt{a_{NN}b_{NN}}}{3d_2l_2l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - 3d_2l_3^2 \cos \theta_2 \cos^2 \theta_3} \quad (2.101)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{NN} = (d_2^2 + 2l_2^2 + 2l_3^2 - 2l_2l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_2 + l_3^2 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 - l_2^2 \cos^2 \theta_2 - 2d_2l_3 \sin \theta_3) \quad (2.102)$$

$$b_{NN} = \cos^2 \theta_2 (2d_2^2l_3^2 \cos^2 \theta_3 - 2l_2^2l_3^2 - d_2^2l_3^2 - d_2^2l_2^2 - l_3^4 + 2l_2^2d_2l_3 \sin \theta_3 - l_2^4 + 2d_2l_3^3 \sin \theta_3 + 2l_3^4 \cos^2 \theta_3 + 2l_2^2l_3^2 \cos^2 \theta_3 - 2l_3^3d_2 \sin \theta_3 \cos^2 \theta_3) - 2d_2l_3 \sin \theta_3 (l_2^2 + l_3^2) - 2l_2l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 (l_2^2 + l_3^2 + d_2^2 - d_2l_3 \sin \theta_3) + 2l_2^2l_3^2 + d_2^2l_3^2 + d_2^2l_2^2 + l_3^4 + l_2^4 \quad (2.103)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.100 ve 2.101'in eniyilenmesiyle  $\kappa^{-1} = 0.7132$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 296.83 olarak bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $d_2 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.29'da eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen vaziyet numarası değerleri görülmektedir.



Şekil 2.29. Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri.

NN robotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.104' deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\eta_{NN} &= \frac{1}{296.83} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{c_{NN}}{\sqrt{a_{NN}b_{NN}}} \right| d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \frac{1}{296.83} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f_{NN}}{\sqrt{d_{NN}e_{NN}}} \right| d\theta_2 d\theta_3 = 0.2059\end{aligned}\quad (2.104)$$

Denklemden kullanılan  $c_{NN}$ ,  $d_{NN}$ ,  $e_{NN}$  ve  $f_{NN}$  kısaltmaları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}c_{NN} &= 3d_2^2 l_2^2 l_3^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 - 6d_2^2 l_2 l_3^3 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos^3 \theta_3 \\ &\quad + 3d_2^2 l_3^4 \cos^2 \theta_2 \cos^4 \theta_3\end{aligned}\quad (2.105)$$

$$\begin{aligned}d_{NN} &= \cos^2 \theta_2 (22 \cos^2 \theta_3 + 40 \sin \theta_3 + 33 \cos^2 \theta_3 - 18 \sin \theta_3 \cos^2 \theta_3 - 50) \\ &\quad + 58 - 40 \sin \theta_3 - 60 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + 20 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3\end{aligned}\quad (2.106)$$

$$e_{NN} = 16 - 6 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_2 + 2.7 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 - 3 \cos^2 \theta_2 - 6.6 \sin \theta_3 \quad (2.107)$$

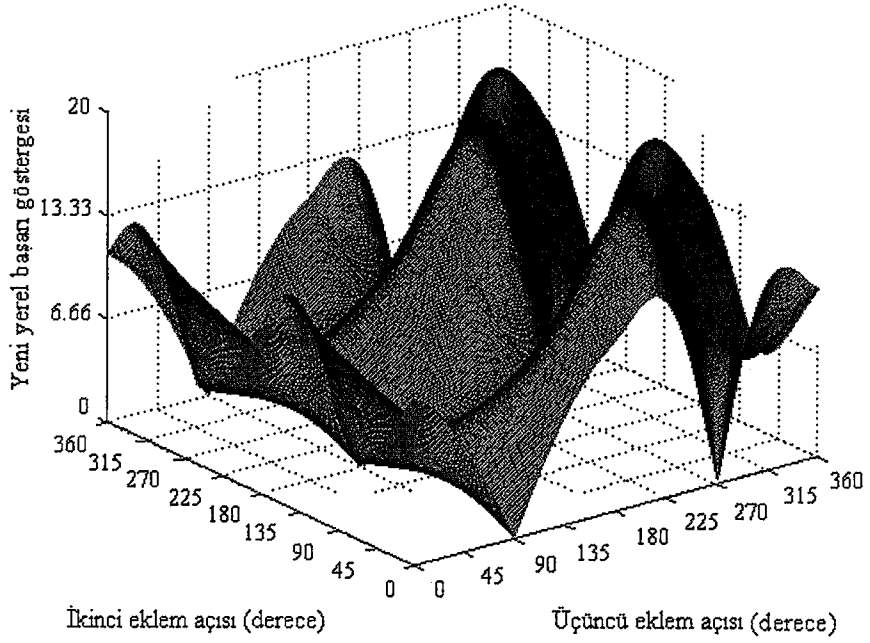
$$f_{NN} = 108 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 - 198 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos^3 \theta_3 + 90 \cos^2 \theta_2 \cos^4 \theta_3 \quad (2.108)$$

NN robotunun yeni yerel başarı göstergesi Denklem 2.109'deki gibi bulunur.

$$\rho_{LNN} = w_{NN} \kappa_{NN} = \frac{\sqrt{a_{NN}b_{NN}}}{3} \quad (2.109)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.100 ve Denklem 2.109'un eniyilenmesiyle,  $\rho_{LNN \max} = 17.633$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi 296.83 olur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $d_2 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, yeni evrensel başarı göstergesi 1.013 olarak bulunur. Ayrıca, Şekil 2.30'da eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri görülmektedir.

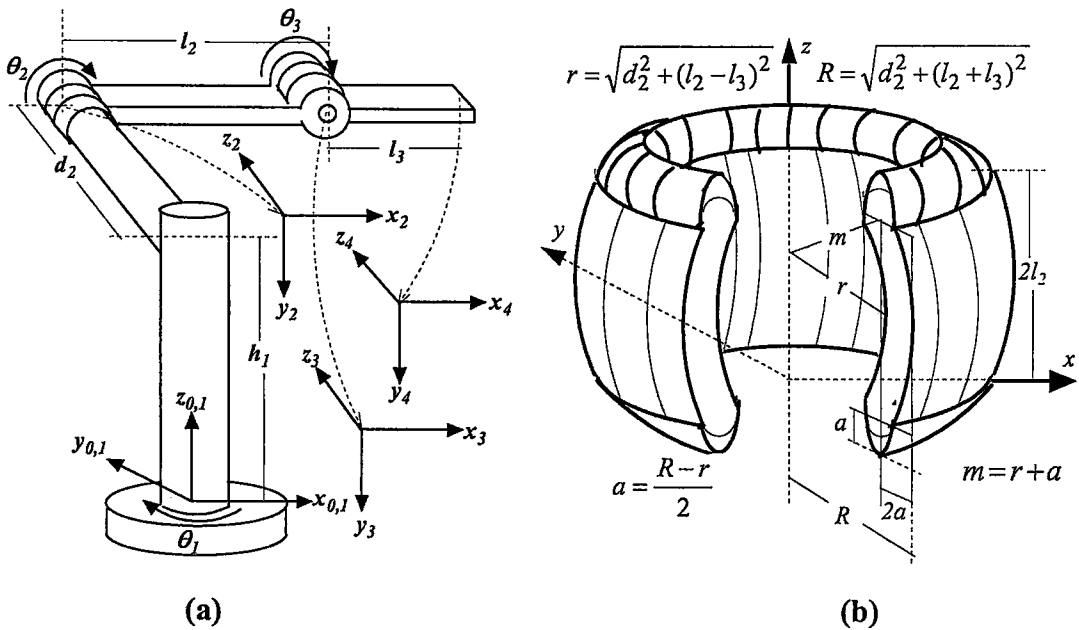
$$\rho_{GNN} = \frac{1}{296.83} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a_{NN}d_{NN}}}{3} d\theta_2 d\theta_3 = 1.013 \quad (2.110)$$



Şekil 2.30. Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

#### 2.4.9. NR robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

NR robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.31.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.31.b'de verilmiştir. Ayrıca, Tablo 2.9'da NR robotunun D-H değişkenleri gösterilmiştir.



Şekil 2.31.a) NR robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

**Tablo 2.9.** NR robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	-90	0	$d_2$
3	$\theta_3$	0	$l_2$	0
4	0	0	$l_3$	0

NR robotunun  ${}^0_4T$  ileri kinematığı Denklem 2.111'deki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_4T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_{23} & -\cos\theta_1 \sin\theta_{23} & -\sin\theta_1 & \cdot \\ \sin\theta_1 \cos\theta_{23} & -\sin\theta_1 \sin\theta_{23} & \cos\theta_1 & \cdot \\ -\sin\theta_{23} & -\cos\theta_{23} & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \sin\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + d_2 \cos\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -l_3(\sin\theta_{23}) - l_2 \sin\theta_2 + h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (2.111)
 \end{aligned}$$

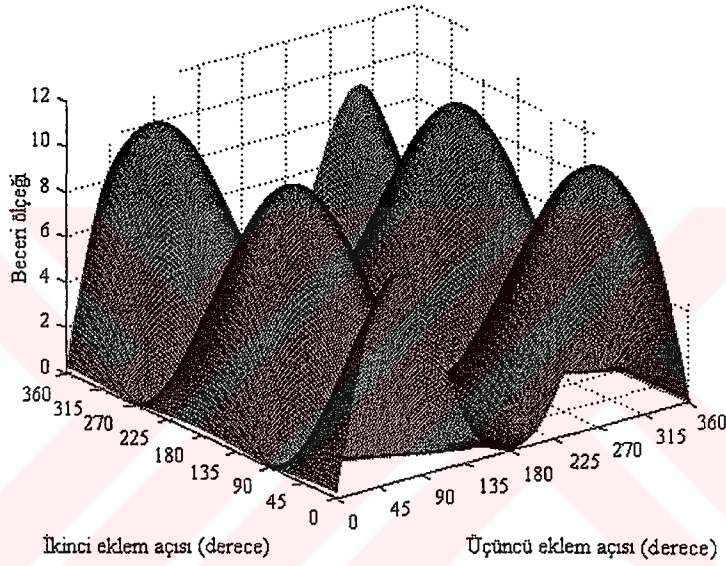
NR robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.112, beceri ölççeği Denklem 2.113, ve çalışma uzayının hacmi 2.114'te verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 {}^3J(\theta) &= \begin{bmatrix} -l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_{23}) - l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \cos\theta_1 & \cdot & \cdot \\ l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \sin\theta_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_{23}) - l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 & -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_{23}) \\ \cdot & -l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_{23}) - l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 & -l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_{23}) \\ \cdot & -l_3(\cos\theta_{23}) - l_2(\cos\theta_2) & -l_3(\cos\theta_{23}) \end{bmatrix} \quad (2.112)
 \end{aligned}$$

$$w = |l_2 l_3 \sin\theta_3 (l_3 \cos\theta_{23} + l_2 \cos\theta_2)| \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned}
V_{NR} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(m + a \cos \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 da + \int_0^{2l_2} \int_r^{r+2a} \int_0^{2\pi} ad\theta da dl_2 \\
&= 2a^2\pi^2 m + 8l_2\pi a(r + a)
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.113 ve 2.114'ün eniyilenmesiyle,  $w = 10.6934$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 265.43 olarak bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları,  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.32'de eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen beceri ölçek değerleri görülmektedir.



Şekil 2.32. Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen beceri ölçek değerleri.

NR robotunun vaziyet numarası Denklem 2.115' teki gibi bulunur.

$$\kappa_{NR} = \frac{\sqrt{a_{NR} b_{NR}}}{3l_2 l_3 \sin \theta_3 (l_3 \cos \theta_{23} + l_2 \cos \theta_2)} \tag{2.115}$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

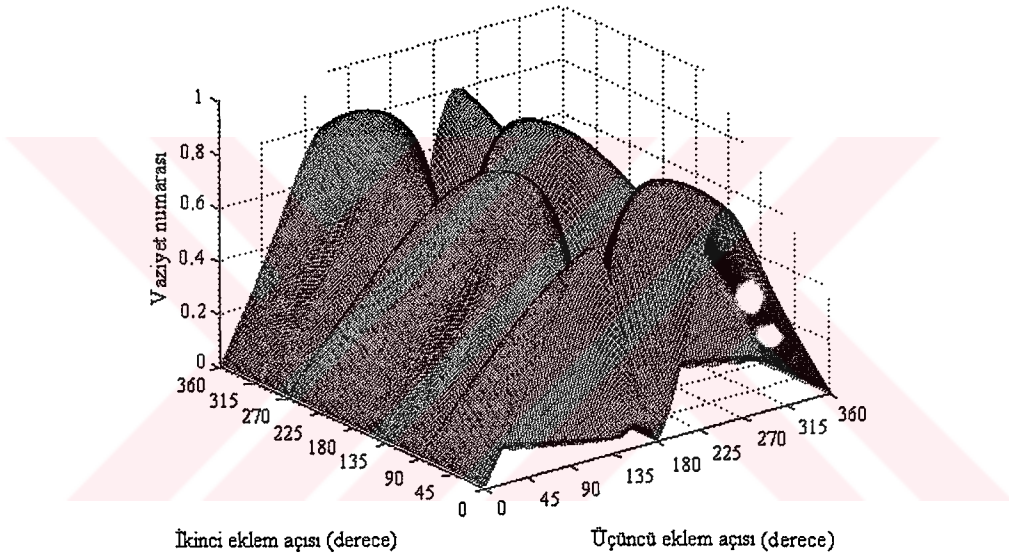
$$\begin{aligned}
a_{NR} &= l_3^2 \cos^2 \theta_{23} + 4l_2 l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_{23} + l_2^2 \\
&\quad + d_2^2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_{23}
\end{aligned} \tag{2.116}$$

$$\begin{aligned}
b_{NR} &= -(2d_2^2 l_3^2 \cos^2 \theta_{23} + 2l_2^2 l_3^2 \cos^2 \theta_{23} + 4l_2 l_3^3 \cos \theta_2 \cos \theta_{23} + 2l_2^2 l_3^2 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_{23} \\
&\quad + 2l_2^2 l_3^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \cos \theta_{23} \sin \theta_{23} + 2l_2 l_3^3 \cos \theta_2 \cos^3 \theta_{23} + 2l_2^3 l_3 \cos^3 \theta_2 \cos \theta_{23}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 2d_2^2 l_2 l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_{23} + 3l_2^2 l_3^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_2^3 l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_{23} + 2l_3^4 \cos^2 \theta_{23} + l_2^4 \cos^2 \theta_2 \\
& + 2l_2^3 l_3 \cos^2 \theta_2 \sin \theta_2 \sin \theta_{23} + 2l_2 l_3^3 \sin \theta_2 \sin \theta_{23} \cos^2 \theta_{23} + l_2^2 d_2^2 \cos^2 \theta_2) \quad (2.117)
\end{aligned}$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.113 ve 2.114'ün eniyilenmesiyle,  $\kappa^{-1} = 0.8767$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 265.43 olarak bulunur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları,  $d_2 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.33'te eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen vaziyet numarası değerleri görülmektedir.



Şekil 2.33. Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri.

NR obotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.118'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\eta_{NR} &= \frac{1}{265.43} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{3l_2^2 l_3^2 \sin^2 \theta_3 (l_3^2 \cos^2 \theta_{23} + 2l_2 l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_{23} + l_2^2 \cos^2 \theta_2)}{\sqrt{a_{NR} b_{NR}}} \right| d\theta_2 d\theta_3 \\
&= \frac{1}{265.43} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin^2 \theta_3 (74 \cos^2 \theta_{23} + 162 \cos \theta_2 \cos \theta_{23} + 89.5 \cos^2 \theta_2)}{\sqrt{c_{NR} d_{NR}}} \right| d\theta_2 d\theta_3 \\
&= 0.2178 \quad (2.118)
\end{aligned}$$

Denklemden kullanılan  $c_{NR}$  ve  $d_{NR}$  kısaltmaları aşağıda verilmiştir.

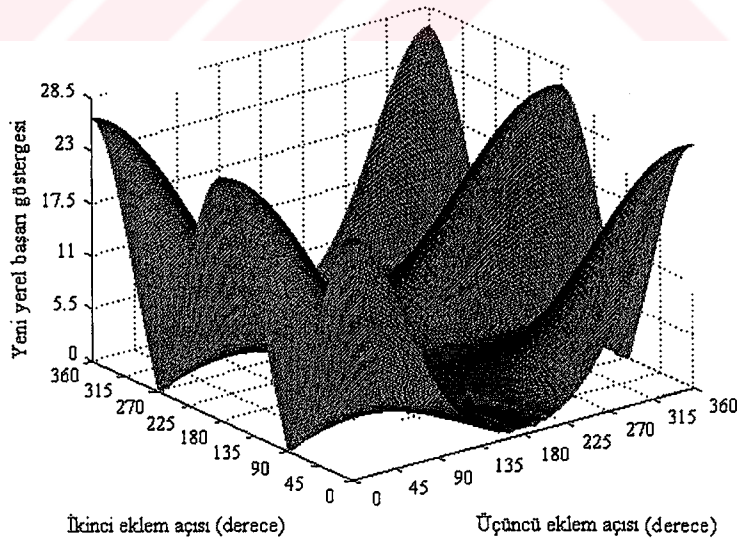
$$c_{NR} = 2.73 \cos^2 \theta_{23} + 12 \cos \theta_2 \cos \theta_{23} + 3.3 \cos^2 \theta_2 + 6 \sin \theta_2 \sin \theta_{23} + 10 \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} d_{NR} = & -(54.8 \cos^2 \theta_{23} + 76.7 \cos \theta_2 \cos \theta_{23} + 18 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_{23} + 51.2 \cos^2 \theta_2 \\ & + 16.4 \cos \theta_2 \cos^3 \theta_{23} + 19.8 \cos^3 \theta_2 \cos \theta_{23} + 87 \cos^2 \theta_2 \sin \theta_2 \sin \theta_{23} \\ & + 18 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \cos \theta_{23} \sin \theta_{23} + 16.4 \sin \theta_2 \sin \theta_{23} \cos^2 \theta_{23}) \end{aligned} \quad (2.120)$$

NR robotunun yeni yerel başarı göstergesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\rho_{LNR} = \frac{\sqrt{a_{NR} b_{NR}}}{3} \quad (2.121)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.114 ve 2.121'in eniyilenmesiyle,  $\rho_{LNR \max} = 25.8559$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 265.43 olur. Bu noktadaki eniyilenmiş bağ uzunlukları  $d_2 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Yeni evrensel başarı göstergesi 1.3144 olarak bulunur. Ayrıca, Şekil 2.34'te eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri görülmektedir.



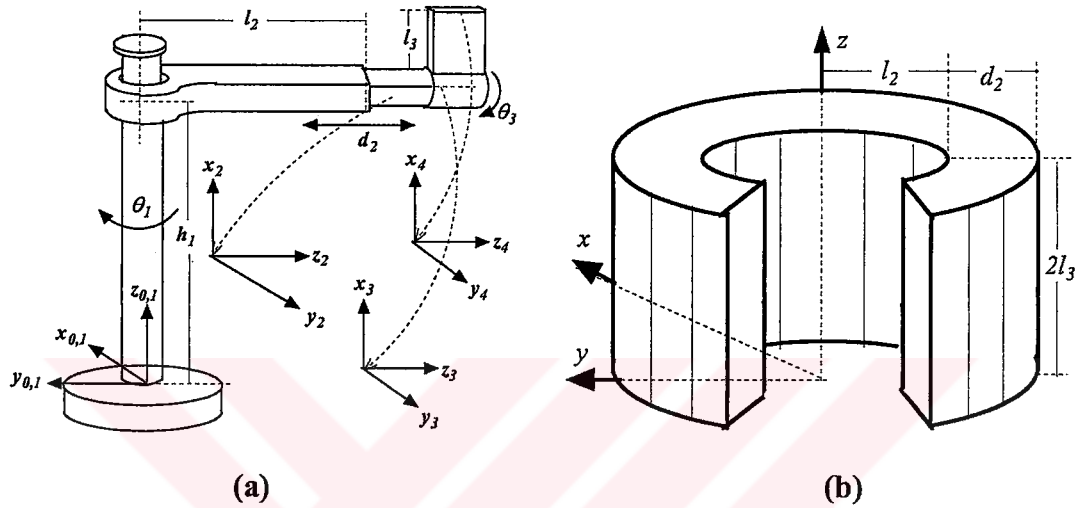
Şekil 2.34. Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

$$\rho_{GNR} = \frac{1}{265.43} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{c_{NR} d_{NR}}}{3} d\theta_2 d\theta_3 = 1.3144 \quad (2.122)$$



### 2.4.10. RC robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

RC robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.35.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.35.b'de verilmiştir. Ayrıca, RC robotunun D-H değişkenleri Tablo 2.10'daki gibi çıkarılır.



Şekil 2.35.a) RC robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

Tablo 2.10. RC robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	90	90	0	$d_2$
3	$\theta_3$	0	0	$l_2$
4	0	0	$l_3$	0

RC robotunun  ${}^0_4T$  ileri kinematiği Denklem 2.123'teki gibi bulunur.

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_3 & -\cos \theta_1 \sin \theta_3 & \sin \theta_1 & -l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_3 & -\sin \theta_1 \sin \theta_3 & -\cos \theta_1 & -l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_3) - (l_2 + d_2) \cos \theta_1 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

RC robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.124, beceri ölçeği Denklem 2.125 ve çalışma uzayının hacmi Denklem 2.126'da verilmiştir.

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & -l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3) \\ -l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & -l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3) \\ 0 & 0 & -l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

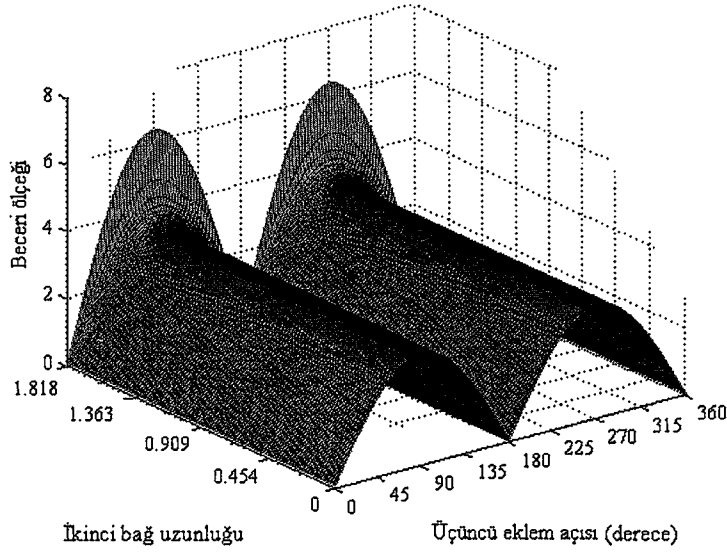
$$w = |l_2 l_3 \sin \theta_3 + d_2 l_3 \sin \theta_3| \quad (2.125)$$

$$V_{RC} = \int_0^{2l_3 l_2 + d_2 2\pi} \int_{l_2} \int_0^{2\pi} d_2 d\theta dd_2 dl_3 = 4l_2 l_3 d_2 \pi + 2l_3 d_2^2 \pi \quad (2.126)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.124 ve 2.125'in eniyilenmesiyle,  $w = 6.3110$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 109.862 olarak bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_2 = 2$ ,  $d_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.36'da bağ uzunluğu  $d_2$ , eklem açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $w$  değerleri görülmektedir.

RC robotunun vaziyet numarası Denklem 2.127'deki gibi bulunur.

$$K_{RC} = \frac{\sqrt{a_{RC} b_{RC}}}{3l_2 l_3 \sin \theta_3 + 3d_2 l_3 \sin \theta_3} \quad (2.127)$$



Şekil 2.36. Bağ uzunluğu  $d_2$ , eklem açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $w$  değerleri.

Denklem 2.127’de kullanılan  $a_{RC}$  ve  $b_{RC}$  kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

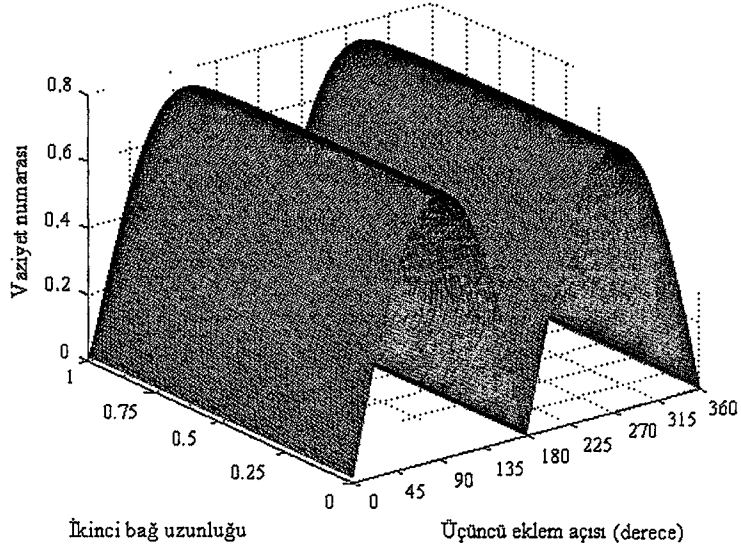
$$a_{RC} = (l_3^2 \sin^2 \theta_3 + l_2^2 + d_2^2 + l_3^2 + 2l_2d_2 + 1) \quad (2.128)$$

$$b_{RC} = l_3^2 (\sin^2 \theta_3 (l_2 + d_2)^2 + l_3^2 \sin^2 \theta_3 + 1) + (l_2 + d_2)^2 \quad (2.129)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.126 ve 2.127’nin eniyilenmesiyle,  $\kappa^{-1} = 0.7976$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 15.708 olarak bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_2 = 2$ ,  $d_2 = 1$  ve  $l_3 = 0.5$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.37’de bağ uzunluğu  $d_2$ , eklem açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri görülmektedir.

RC robotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.130’daki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \eta_{RC} &= \frac{1}{73.6192} \int_0^{1.2\pi} \int_0^{1.2\pi} \left| \frac{3l_3^2 \sin^2 \theta_3 (l_2^2 + 2l_2d_2 + d_2^2)}{\sqrt{c_{RC}}} \right| d\theta_3 dd_2 \\ &= \frac{1}{73.6192} \int_0^{1.2\pi} \int_0^{1.2\pi} \left| \frac{0.75 \sin^2 \theta_3 (4 + 4d_2 + d_2^2)}{\sqrt{c_{RC}}} \right| d\theta_3 dd_2 = 0.0304 \end{aligned} \quad (2.130)$$



**Şekil 2.37.** Bağ uzunluğu  $d_2$ , eklem açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri.

Denklem 2.130'da kullanılan  $c_{RC}$  kısaltması aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 c_{RC} = & 0.3 \sin^4 \theta_3 + 0.25 d_2 \sin^4 \theta_3 + 0.0625 d_2^2 \sin^4 \theta_3 + 6.6 \sin^2 \theta_3 \\
 & + 6.6 d_2^2 \sin^2 \theta_3 + 22 + 38 d_2 + 25.5 d_2^2 + 2 d_2^3 \sin^2 \theta_3 + 8 d_2^3 \\
 & + 10.5 d_2 \sin^2 \theta_3 + d_2^4 + 0.25 d_2^4 \sin^2 \theta_3
 \end{aligned} \tag{2.131}$$

RC robotunun yeni yerel başarı göstergesi Denklem 2.132'deki gibi bulunur.

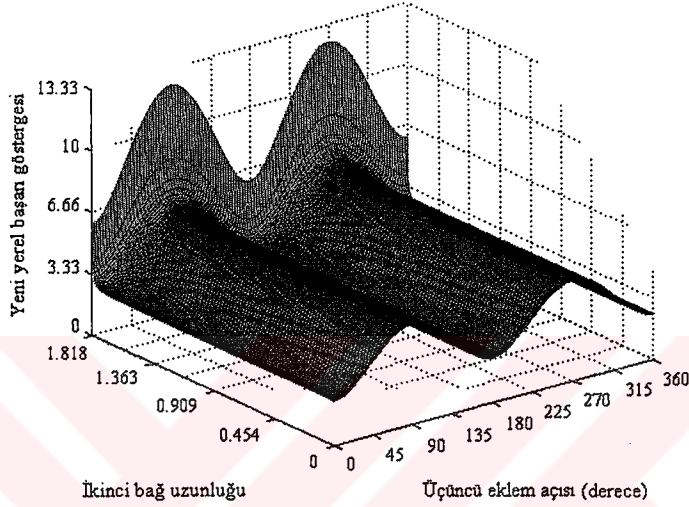
$$\rho_{LRC} = w_{RC} \kappa_{RC} = \frac{\sqrt{a_{RC} b_{RC}}}{3} \tag{2.132}$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.126 ve 2.132'nin eniyilenmesiyle,  $\rho_{LRC \max} = 12.284$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi 109.8629 olur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_2 = 2$ ,  $d_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Yeni evrensel başarı göstergesi ise 0.0359 olarak bulunur. Ayrıca, Şekil 2.38'de bağ uzunluğu  $d_2$ , eklem açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri görülmektedir.

$$\rho_{GRC} = \frac{1}{109.86} \int_0^{1.8182} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{(2.73 \sin^2 \theta_3 + 7.73 + d_2^2 + 4d_2)d_{RC}}{3}} d\theta_3 dd_2 = 0.0359 \quad (2.133)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

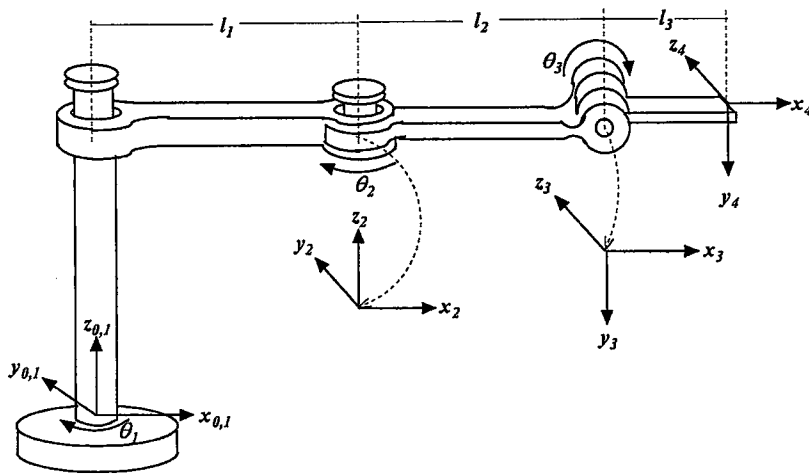
$$d_{RC} = 9.46 - 2.73 \cos^2 \theta_3 (6.73 + 4d_2 + d_2^2) + 4d_2 + d_2^2 \quad (2.134)$$



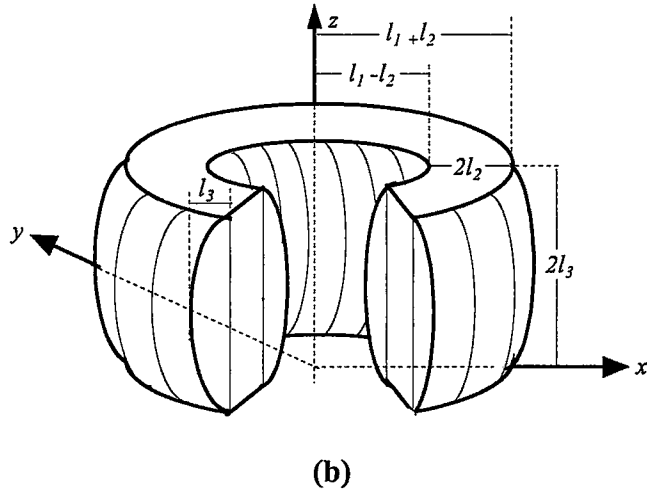
Şekil 2.38. Bağ uzunluğu  $d_2$ , ekleme açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

#### 2.4.11. RN robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

RN robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.39.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.39.b'de verilmiştir. Ayrıca, Tablo 2.11'de RN robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri görülmektedir.



(a)



Şekil 2.39.a) RN robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

Tablo 2.11. RN robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	0	$l_1$	0
3	$\theta_3$	90	$l_2$	0
4	0	0	$l_3$	0

RN robotunun  ${}^0_4T$  ileri kinematiği Denklem 2.135'deki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_4T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta_3 \cos\theta_{12} & -\sin\theta_3 \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12}(l_3 \cos\theta_3 + l_2) + l_1 \cos\theta_1 \\ \cos\theta_3 \sin\theta_{12} & -\sin\theta_3 \sin\theta_{12} & -\cos\theta_{12} & \sin\theta_{12}(l_3 \cos\theta_3 + l_2) + l_1 \sin\theta_1 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3(\sin\theta_3) + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.135)
 \end{aligned}$$

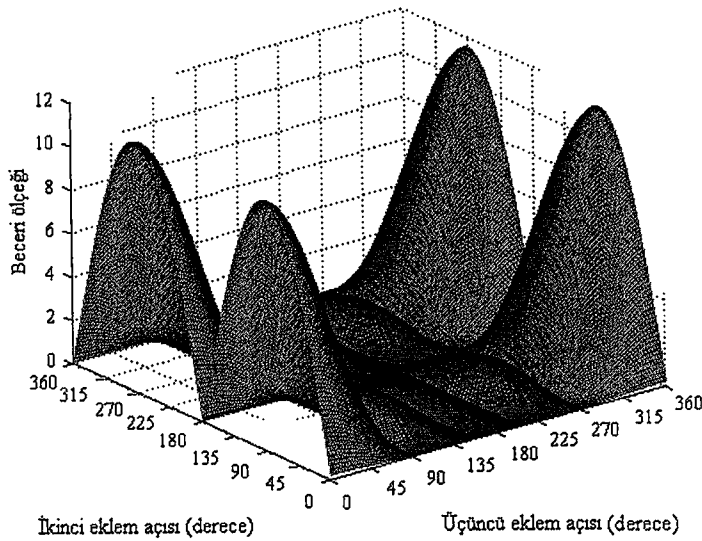
RN robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.136, beceri ölçeği Denklem 2.137 ve çalışma uzayının hacmi Denklem 2.138’de verilmiştir.

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin\theta_{12}(l_3 \cos\theta_3 + l_2) - l_1 \sin\theta_1 & \cdot & \cdot \\ \cos\theta_{12}(l_3 \cos\theta_3 + l_2) + l_1 \cos\theta_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & -\sin\theta_{12}(l_3 \cos\theta_3 + l_2) & -l_3(\cos\theta_{12} \sin\theta_3) \\ \cdot & \cos\theta_{12}(l_3 \cos\theta_3 + l_2) & -l_3(\sin\theta_{12} \sin\theta_3) \\ \cdot & 0 & l_3 \cos\theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

$$w = |l_1 l_3^2 \cos^2 \theta_3 \sin \theta_2 + l_1 l_2 l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3| \quad (2.137)$$

$$V_{RN} = \int_0^{2l_3} \int_{l_1-l_2}^{l_1+l_2} \int_0^{2\pi} l_2 d\theta dl_2 dl_3 + \frac{1}{2} \int_0^{l_3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} l_3 (l_1 - l_2 + l_3 \cos\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 dl_3 + \frac{1}{2} \int_0^{l_3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} l_3 (l_1 + l_2 + l_3 \cos\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 dl_3 = 8l_1 l_2 l_3 \pi + 2l_3^2 l_1 \pi^2 \quad (2.138)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.137 ve 2.138’in eniyilenmesiyle,  $w = 11.4643$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi 258.92 olarak bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_1 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.40’da eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen beceri ölçek değerleri görülmektedir.



Şekil 2.40. Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen beceri ölçek değerleri.

RN robotunun vaziyet numarası Denklem 2.139'daki gibi bulunur.

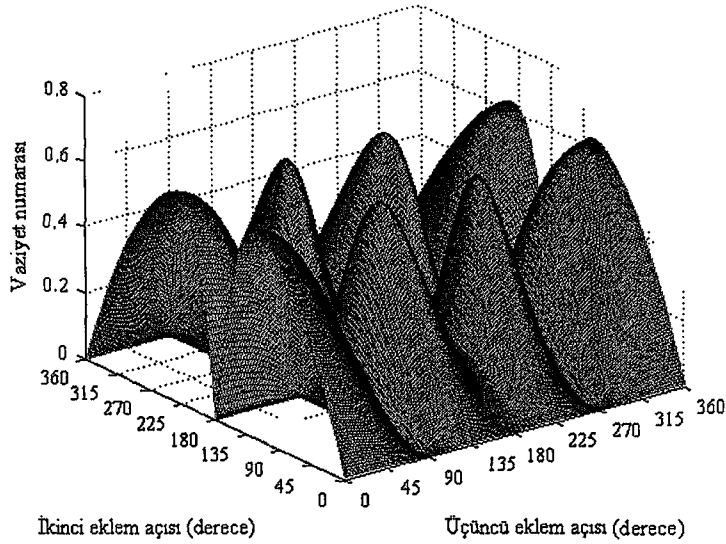
$$\kappa_{RN} = \frac{\sqrt{a_{RN} b_{RN}}}{3l_1 l_2 l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + 3l_1 l_3^2 \sin \theta_2 \cos^2 \theta_3} \quad (2.139)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{RN} = 2l_2^2 + 4l_2 l_3 \cos \theta_3 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_3^2 + 2l_1 l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + 2l_3^2 \cos^2 \theta_3 + l_1^2 \quad (2.140)$$

$$b_{RN} = (2l_2^2 l_3^2 + l_1^2 l_3^2 \cos^2 \theta_2 + 4l_2 l_3^3 \cos \theta_3 + 2l_3^4 \cos^2 \theta_3 + 2l_1 l_2 l_3^2 \cos \theta_2 + 2l_1 l_3^3 \cos \theta_3 \cos \theta_2 + 2l_1^2 l_2 l_3 \cos \theta_3 \sin^2 \theta_2 + l_1^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2 + 2l_1^2 l_3^2 \cos^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2) \quad (2.141)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.137 ve 2.138'in eniyilenmesiyle  $\kappa^{-1} = 0.6269$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 258.92 bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_1 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.41'de eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri görülmektedir.



Şekil 2.41. Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri.



RN robotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.142'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\eta_{RN} &= \frac{1}{258.92} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{3l_1^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 (l_2^2 l_3^2 + 2l_2 l_3^3 \cos \theta_3 + l_3^4 \cos^2 \theta_3)}{\sqrt{a_{RN} b_{RN}}} \right| d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \frac{1}{258.92} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{12 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 (9 + 16.4 \cos \theta_3 + 7.46 \cos^2 \theta_3)}{\sqrt{c_{RN} d_{RN}}} \right| d\theta_2 d\theta_3 \\ &= 0.15032\end{aligned}\quad (2.142)$$

Denklemden kullanılan  $c_{RN}$  ve  $d_{RN}$  kısaltmaları aşağıda verilmiştir.

$$c_{RN} = 13.33 + 12 \cos \theta_3 + 7.3 \cos \theta_2 + 6.6 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + 5.46 \cos^2 \theta_3 \quad (2.143)$$

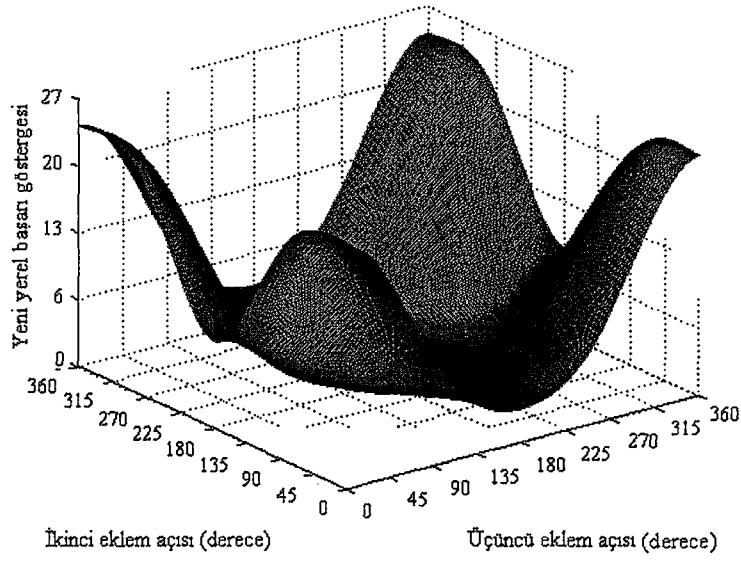
$$\begin{aligned}d_{RN} &= 18 + 11 \cos^2 \theta_2 + 33 \cos \theta_3 + 15 \cos^2 \theta_3 + 19 \cos \theta_2 \\ &\quad + 18 \cos \theta_3 \cos \theta_2 + 24 \cos \theta_3 \sin^2 \theta_2 + 13 \sin^2 \theta_2 + 22 \cos^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2\end{aligned}\quad (2.144)$$

RN robotunun yeni yerel başarı göstergesi Denklem 2.145'teki gibi bulunur.

$$\rho_{LRN} = w_{RN} K_{RN} = \frac{\sqrt{a_{RN} b_{RN}}}{3} \quad (2.145)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.138 ve 2.145'in eniyilenmesiyle,  $\rho_{LRN \max} = 24.083$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 258.92 olur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_1 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, yeni evrensel başarı göstergesi 1.3203 bulunur. Şekil 2.42'de ise eklem açısı  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri görülmektedir.

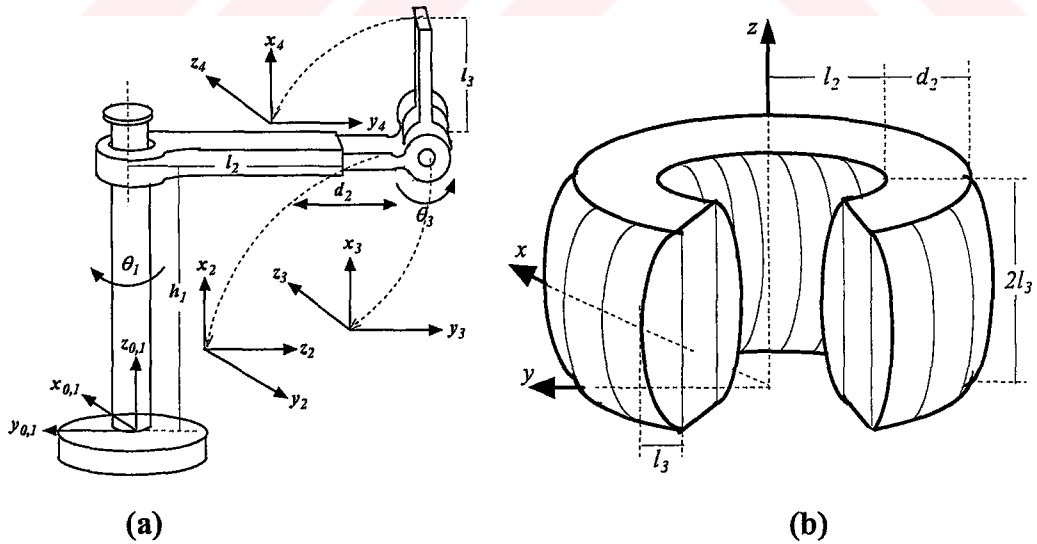
$$\rho_{GRN} = \frac{1}{258.92} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{c_{RN} d_{RN}}}{3} d\theta_2 d\theta_3 = 1.3203 \quad (2.146)$$



Şekil 2.42. Eklem açıları  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

#### 2.4.12. RR robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

RR robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.43.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.43.b'de verilmiştir. Ayrıca, Tablo 2.12'de RR robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri görülmektedir.



Şekil 2.43.a) RR robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

**Tablo 2.12.** RR robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	90	90	0	$d_2 + l_2$
3	$\theta_3$	-90	0	0
4	0	0	$l_3$	0

RR robotunun  ${}^0_4T$  ileri kinematığı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_4T &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -(l_2 + d_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \sin \theta_3 & -\sin \theta_1 \cos \theta_3 & -\cos \theta_1 & -l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_3 & -\sin \theta_1 & l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_3) - (l_2 + d_2) \cos \theta_1 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.147)
 \end{aligned}$$

RR robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.148, beceri ölçeği Denklem 2.149 ve çalışma uzayının hacmi Denklem 2.150'de verilmiştir.

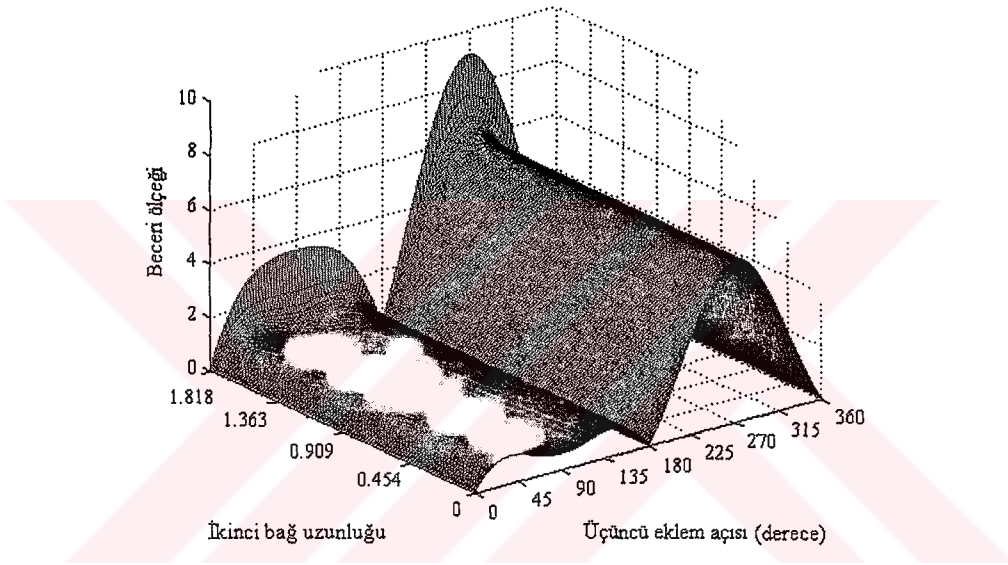
$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & -l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3) \\ -l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3) \\ 0 & 0 & -l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.148)$$

$$w = \left| -l_3^2 \sin^2 \theta_3 + l_2 l_3 \sin \theta_3 + d_2 l_3 \sin \theta_3 \right| \quad (2.149)$$

$$V_{RR} = \frac{1}{2} \int_0^{l_3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} l_3 (l_2 + l_3 \cos \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 dl_3 + \frac{1}{2} \int_0^{l_3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} l_3 (l_2 + d_2 + l_3 \cos \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 dl_3$$

$$+ \int_0^{2l_3} \int_{l_2}^{l_2+d_2} \int_0^{2\pi} d_2 d\theta_1 dd_2 dl_3 = l_2 l_3^2 \pi^2 + l_3^2 \pi^2 (l_2 + d_2) + 2l_3 d_2^2 \pi + 4l_2 l_3 d_2 \pi \quad (2.150)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.149 ve 2.150'nin eniyilenmesiyle,  $w = 9.043$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 266.74 olarak bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_2 = 2$ ,  $d_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.44'de bağ uzunluğu  $d_2$ , eklem açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $w$  değerleri görülmektedir.



Şekil 2.44. Bağ uzunluğu  $d_2$ , eklem açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $w$  değerleri.

RR robotunun vaziyet numarası Denklem 2.151'deki gibi bulunur.

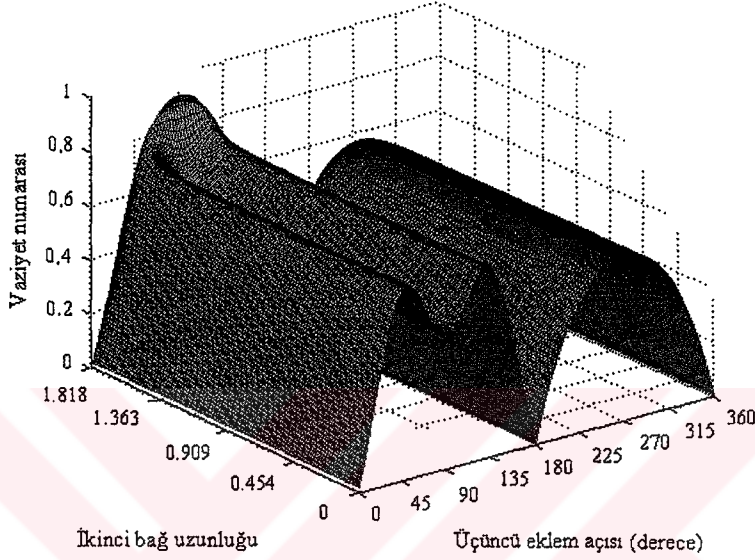
$$\kappa_{RR} = \frac{\sqrt{a_{RR} b_{RR}}}{-3l_3^2 \sin^2 \theta_3 + 3l_2 l_3 \sin \theta_3 + 3d_2 l_3 \sin \theta_3} \quad (2.151)$$

Denklemden kullanılan  $a_{RR}$  ve  $b_{RR}$  kısaltmaları aşağıda verilmiştir.

$$a_{RR} = (1 - 2l_3 d_2 \sin \theta_3 + (l_2 + d_2)^2 - 2l_2 l_3 \sin \theta_3 + 2l_3^2 - l_3^2 \cos^2 \theta_3) \quad (2.152)$$

$$b_{RR} = (l_3^2 + 1)(l_3^2 \sin^2 \theta_3 + (l_2 + d_2)(l_2 + d_2 - 2l_3 \sin \theta_3)) + l_3^2 \sin^2 \theta_3 \quad (2.153)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.149 ve 2.151'in eniyilenmesiyle  $\kappa^{-1} = 0.9141$ , en büyük çalışma uzayının hacmi 265.75 olarak bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_2 = 2$ ,  $d_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.45'de bağ uzunluğu  $d_2$ , eklem açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri görülmektedir.



Şekil 2.45. Bağ uzunluğu  $d_2$ , eklem açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri.

RR robotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.154'teki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \eta_{RR} &= \frac{1}{265.75} \int_0^{1.8182} \int_0^{2\pi} \frac{c_{RR}}{\sqrt{a_{RR}b_{RR}}} d\theta_3 dd_2 \\ &= \frac{1}{265.75} \int_0^{1.8182} \int_0^{2\pi} \frac{f_{RR}}{\sqrt{d_{RR}e_{RR}}} d\theta_3 dd_2 = 0.1227 \end{aligned} \quad (2.154)$$

Denklemden kullanılan  $c_{RR}$ ,  $d_{RR}$ ,  $e_{RR}$  ve  $f_{RR}$  kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{RR} = 3l_3^2 \sin^2 \theta_3 (l_3^2 \sin^2 \theta_3 - 2l_2l_3 \sin \theta_3 - 2d_2l_3 \sin \theta_3 + (l_2 + d_2)^2) \quad (2.155)$$

$$d_{RR} = 10.4 - 3.3d_2 \sin \theta_3 + 4d_2 + d_2^2 - 6.6 \sin \theta_3 - 2.73 \cos^2 \theta_3 \quad (2.156)$$

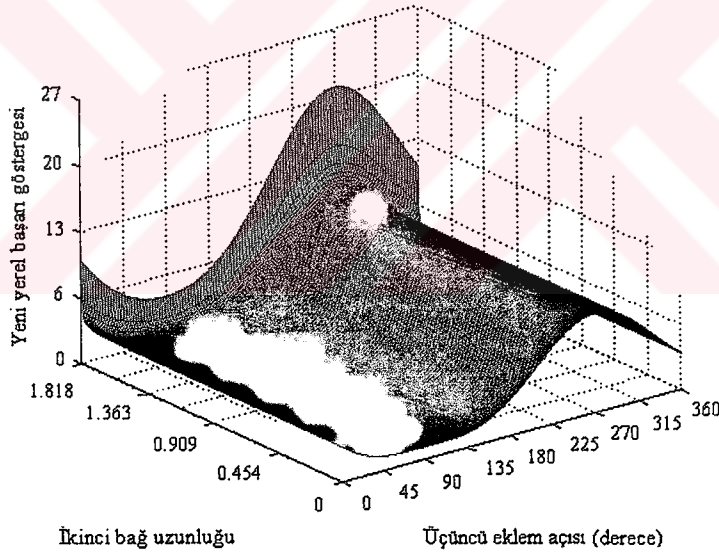
$$e_{RR} = 14.92 + 17.5 \sin^2 \theta_3 + 14.92d_2 + 3.73d_2^2 - 18 \sin \theta_3 - 9d_2 \sin \theta_3 \quad (2.157)$$

$$f_{RR} = 8.19 \sin^2 \theta_3 (2.73 \sin^2 \theta_3 - 6.6 \sin \theta_3 - 3.3d_2 \sin \theta_3 + 4 + 4d_2 + d_2^2) \quad (2.158)$$

RR robotunun yeni yerel başarı göstergesi Denklem 2.159'daki gibi bulunur.

$$\rho_{LRR} = \frac{\sqrt{a_{RR} b_{RR}}}{3} \quad (2.159)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.150 ve 2.158'in eniyilenmesiyle  $\rho_{LRR \max} = 20.668$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi 266.745 olur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_2 = 2$ ,  $d_2 = 1.8182$  ve  $l_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Yeni evrensel başarı göstergesi 0.1745 bulunur. Şekil 2.46'da ise bağ uzunluğu  $d_2$ , eklem açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri görülmektedir.

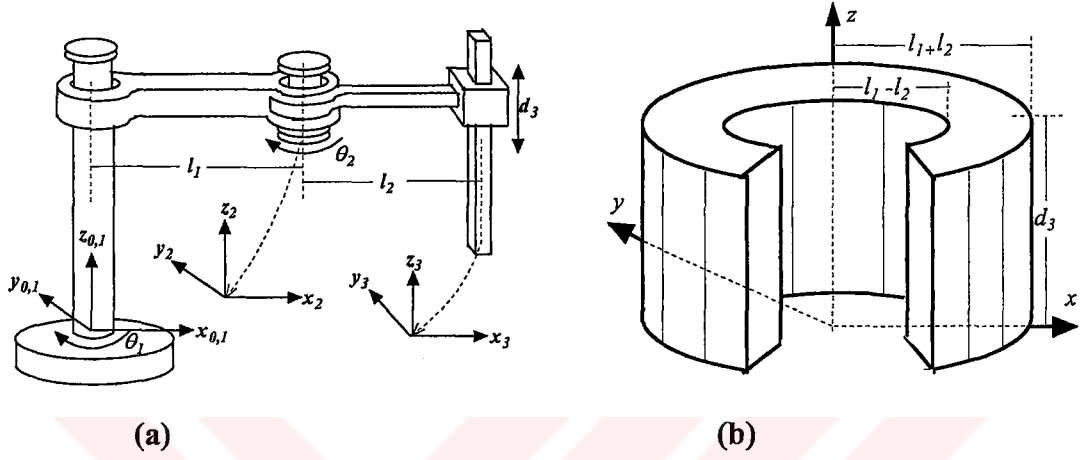


Şekil 2.46. Bağ uzunluğu  $d_2$ , eklem açısı  $\theta_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

$$\rho_{GRR} = \frac{1}{266.7455} \int_0^{1.8182} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{d_{RR} e_{RR}}}{3} d\theta_3 dd_2 = 0.1745 \quad (2.160)$$

### 2.4.13. RS (Scara) robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

RS robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.47.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.47.b'de verilmiştir. Ayrıca, Tablo 2.13'te RS Robotunun D-H değişkenleri görülmektedir.



Şekil 2.47.a) RS robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

Tablo 2.13. RS robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	0	$l_1$	0
3	0	0	$l_2$	$d_3$

RS robotunun  ${}^0_3T$  ileri kinematiği Denklem 2.161'deki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_3T &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} & 0 & l_2 \cos \theta_{12} + l_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 & l_2 \sin \theta_{12} + l_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.161)
 \end{aligned}$$

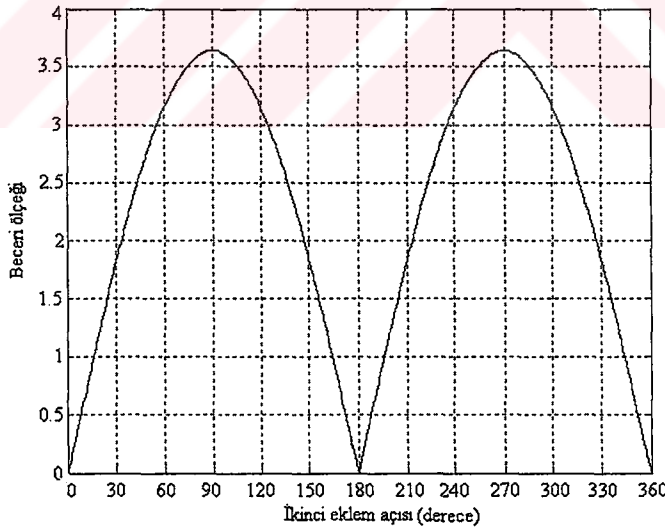
RS robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.162, beceri ölçeği Denklem 2.163 ve çalışma uzayının hacmi Denklem 2.164'te verilmiştir.

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_{12} - l_1 \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_{12} & 0 \\ l_2 \cos \theta_{12} + l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

$$w = |l_1 l_2 \sin \theta_2| \quad (2.163)$$

$$V_{RS} = \int_0^{d_3 l_1 + l_2} \int_{l_1 - l_2}^{2\pi} \int_0 l_2 d\theta dl_2 dd_3 = 4d_3 l_1 l_2 \pi \quad (2.164)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.163 ve 2.164'ün eniyilenmesiyle,  $w = 3.6364$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 91.393 olarak bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_1 = 2$  ve  $l_2 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.48'de eklem açısı  $\theta_2$  ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri görülmektedir.



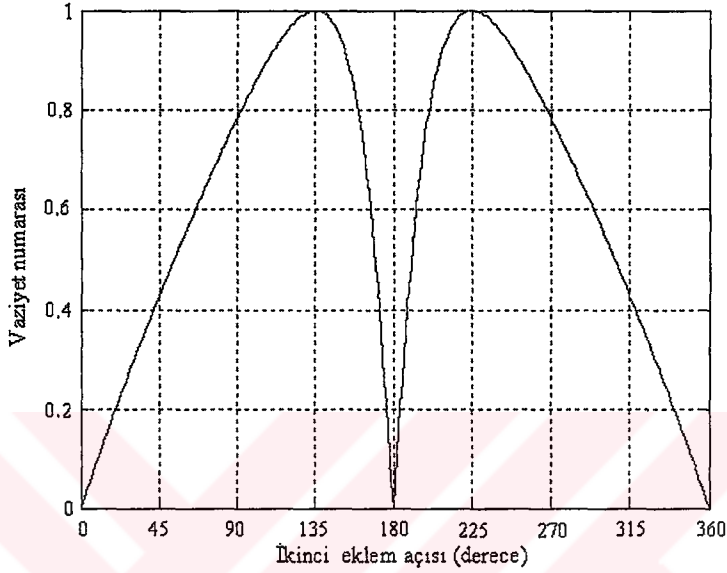
Şekil 2.48. Eklem açısı  $\theta_2$  ve buna karşılık gelen beceri ölçek değerleri.

RS robotunun vaziyet numarası Denklem 2.165'teki gibi bulunur.

$$\kappa_{RS} = \frac{\sqrt{(2l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + 1)(l_1^2 + 2l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_1^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2)}}{3l_1 l_2 \sin \theta_2} \quad (2.165)$$



Amaç fonksiyonları Denklem 2.164 ve 2.165'in eniyilenmesiyle  $\kappa^{-1} = 1$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 73.8528 bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_1 = 2$  ve  $l_2 = 1.470$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.49'da eklem açısı  $\theta_2$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri görülmektedir.



Şekil 2.49. Eeklem açısı  $\theta_2$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.

RS robotunun, evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.165'teki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \eta_{RS} &= \frac{1}{75.2647} \int_0^{2\pi} \left| \frac{3l_1^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2}{\sqrt{a_{RS}}} \right| d\theta_2 \\ &= \frac{1}{75.2647} \int_0^{2\pi} \left| \frac{26 \sin^2 \theta_2}{\sqrt{78 + 104 \cos \theta_2 + 81 \sin^2 \theta_2 + 35 \cos^2 \theta_2 + 51 \cos \theta_2 \sin^2 \theta_2}} \right| d\theta_2 \\ &= 0.10296 \end{aligned} \quad (2.166)$$

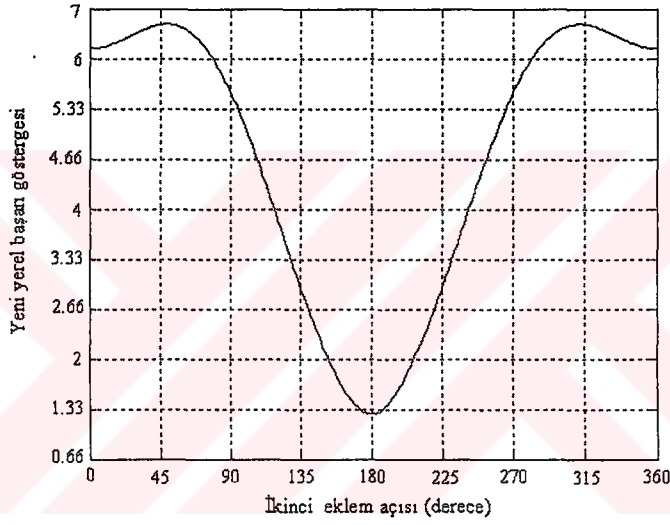
Denklemden kullanılan  $a_{RS}$  kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$a_{RS} = (2l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + 1)(l_1^2 + 2l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_1^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2) \quad (2.167)$$

RS robotunun yeni yerel başarı göstergesi Denklem 2.168'deki gibi bulunur.

$$\rho_{LRS} = \frac{\sqrt{(2l_2^2 + l_1^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2 + 1)(l_1^2 + 2l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2 + l_1^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2)}}{3} \quad (2.168)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.164 ve 2.168'in eniyilenmesiyle,  $\rho_{LRS \max} = 6.458$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 91.3918 olarak bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_1 = 2$  ve  $l_2 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, yeni evrensel başarı göstergesi 0.2477 bulunur. Şekil 2.50'de ise eklem açısı  $\theta_2$  ve buna karşılık yeni yerel başarı göstergesi değerleri gösterilmiştir.



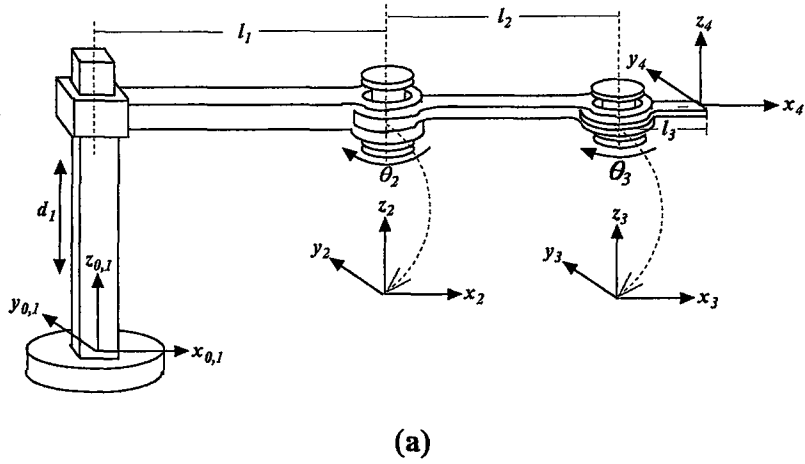
Şekil 2.50. Eklem açısı  $\theta_2$  ve buna karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

$$\rho_{GRS} = \frac{1}{91.3918} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{78 + 104 \cos \theta_2 + 81 \sin^2 \theta_2 + 35 \cos^2 \theta_2 + 51 \cos \theta_2 \sin^2 \theta_2}}{3} d\theta_2$$

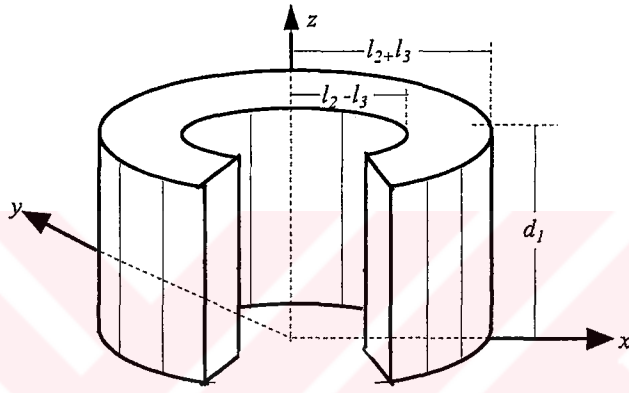
$$= 0.2477 \quad (2.169)$$

#### 2.4.14. SR robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

SR robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.51.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.51.b'de verilmiştir. Ayrıca, Tablo 2.14'de SR robotunun D-H değişkenleri görülmektedir.



(a)



(b)

Şekil 2.51.a) SR robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

Tablo 2.14. SR robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	$\theta_2$	0	$l_1$	0
3	$\theta_3$	0	$l_2$	0
4	0	0	$l_3$	0

SR robotunun  ${}^0_4T$  ileri kinematiği Denklem 2.170'deki gibi bulunur.

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_{23} & -\sin \theta_{23} & 0 & l_3 \cos \theta_{23} + l_2 \cos \theta_2 + l_1 \\ \sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} & 0 & l_3 \sin \theta_{23} + l_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

SR robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.171, beceri ölçeği Denklem 2.172 ve çalışma uzayının hacmi Denklem 2.173'de verilmiştir.

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -l_3 \sin \theta_{23} & -l_2 \sin \theta_2 & -l_3 \sin \theta_{23} \\ 0 & l_3 \cos \theta_{23} + l_2 \cos \theta_2 & l_3 \cos \theta_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.171)$$

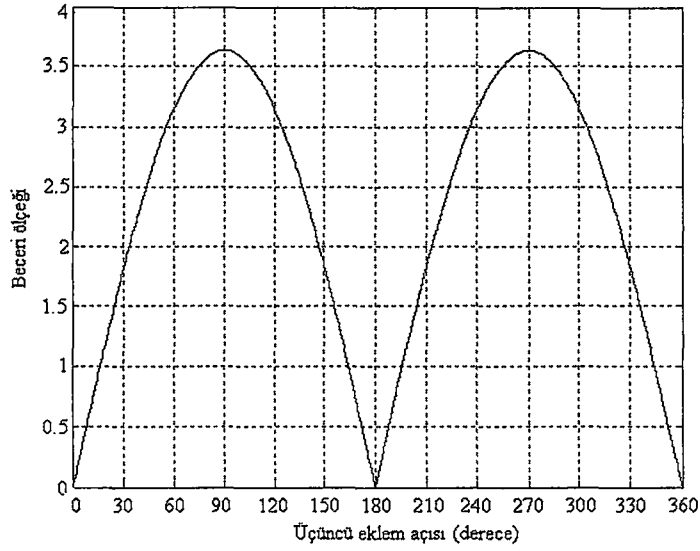
$$w = |-l_2 l_3 \sin \theta_3| \quad (2.172)$$

$$V_{SR} = \int_0^{d_1} \int_{l_2-l_3}^{l_2+l_3} \int_0^{2\pi} l_3 d\theta dl_3 dd_1 = 4d_1 l_2 l_3 \pi \quad (2.173)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.172 ve 2.173'ün eniyilenmesiyle,  $w = 3.6364$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 95.961 olarak bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları,  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.52'de eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen beceri ölçeği değerleri görülmektedir.

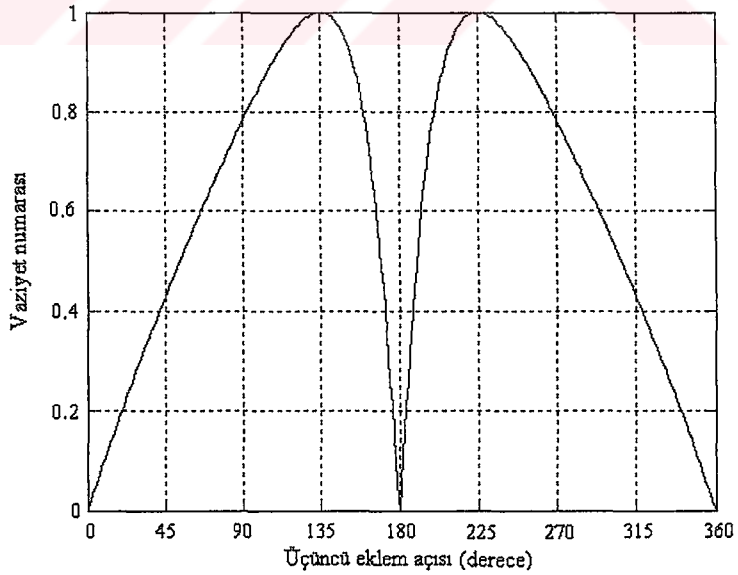
SR robotunun vaziyet numarası Denklem 2.174'deki gibi bulunur.

$$\kappa_{SR} = \frac{\sqrt{(l_2^2 + 2l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + 1)(2l_3^2 + l_2^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + l_2^2 l_3^2 \sin^2 \theta_3)}}{3l_2 l_3 \sin \theta_3} \quad (2.174)$$



**Şekil 2.52.** Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen becceri ölçeği değerleri.

Amaç fonksiyonları Denklem 2.173 ve 2.174'ün eniyilenmesiyle  $\kappa^{-1} = 1$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 95.961 bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları,  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.497$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.53'te eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri görülmektedir.



**Şekil 2.53.** Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.

SR robotunun evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.175'teki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\eta_{SR} &= \frac{1}{95.9614} \int_0^{2\pi} \left| \frac{3l_2^2 l_3^2 \sin^2 \theta_3}{\sqrt{a_{SR}}} \right| d\theta_3 \\
&= \frac{1}{95.9614} \int_0^{2\pi} \left| \frac{26.8 \sin^2 \theta_3}{\sqrt{89 + 36 \cos^2 \theta_3 + 54 \cos \theta_3 \sin^2 \theta_3 + 114 \cos \theta_3 + 94.5 \sin^2 \theta_3}} \right| d\theta_3 \\
&= 0.0766
\end{aligned} \tag{2.175}$$

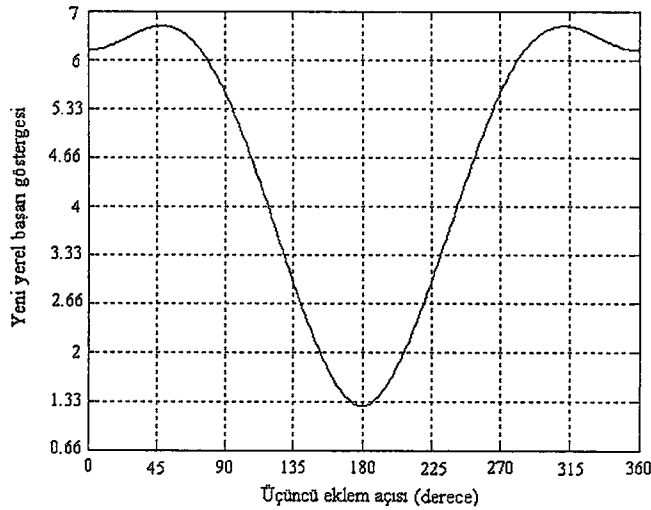
Denklemden kullanılan  $a_{SR}$  kısaltması aşağıda verilmiştir.

$$a_{SR} = (l_2^2 + 2l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + 1)(2l_3^2 + l_2^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + l_2^2 l_3^2 \sin^2 \theta_3) \tag{2.176}$$

SR robotunun yeni yerel başarı göstergesi Denklem 2.177'deki gibi bulunur.

$$\rho_{LSR} = \frac{\sqrt{(l_2^2 + 2l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + 1)(2l_3^2 + l_2^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + l_2^2 l_3^2 \sin^2 \theta_3)}}{3} \tag{2.177}$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.173 ve 2.177'nin eniyilenmesiyle,  $\rho_{LSR \max} = 6.458$ , en büyük çalışma uzayının hacmi ise 95.9614 olur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_2 = 2$  ve  $l_3 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Yeni evrensel başarı göstergesi ise 0.2516 olarak bulunur. Şekil 2.54'te ise eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık yeni yerel başarı göstergesi değerleri görülmektedir.



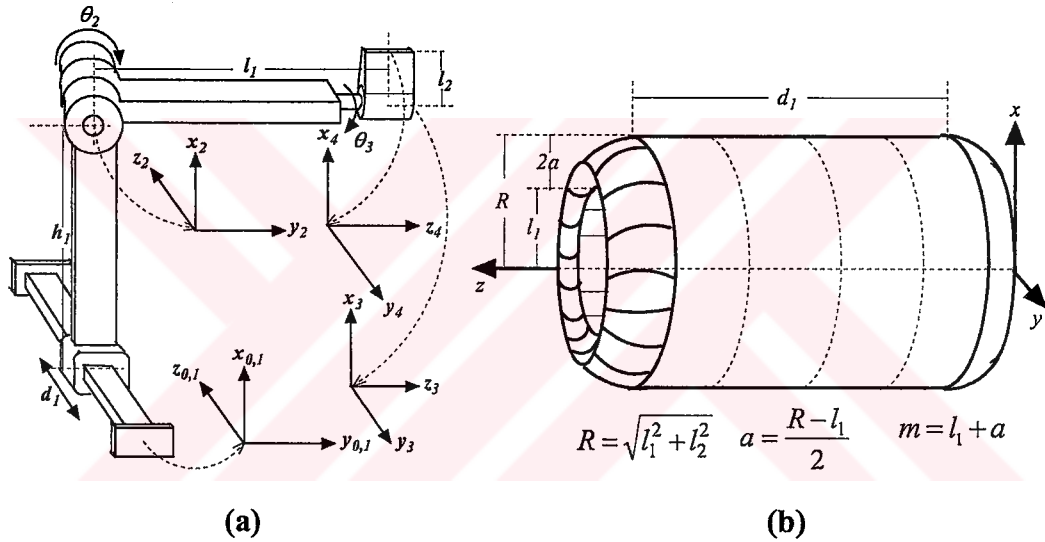
Şekil 2.54. Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

$$\rho_{GSR} = \frac{1}{191.3} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{99 + 131 \cos \theta_3 + 43.7 \cos^2 \theta_3 + 114 \sin^2 \theta_3 + 72.2 \cos \theta_3 \sin^2 \theta_3}}{3} d\theta_3$$

$$= 0.2516 \quad (2.178)$$

#### 2.4.15. CN robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

CN robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.55.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.55.b'de verilmiştir. Ayrıca, Tablo 2.15'te CN robotunun D-H değişkenleri görülmektedir.



Şekil 2.55.a) CN Robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

Tablo 2.15. CN Robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	$\theta_2$	0	$h_1$	0
3	$\theta_3$	90	0	$-l_1$
4	0	0	$l_2$	0

CN robotunun  ${}^0_4T$  ileri kinematiği Denklem 2.179'daki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
{}^0_4T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & h_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & \sin \theta_2 & l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_1 \sin \theta_2 + h_1 \\ \sin \theta_2 \cos \theta_3 & -\sin \theta_2 \sin \theta_3 & -\cos \theta_2 & l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & l_2 \sin \theta_3 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.179)
\end{aligned}$$

CN robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.180, beceri ölçęęi Denklem 2.181 ve çalışma uzayının hacmi Denklem 2.182’de verilmiştir.

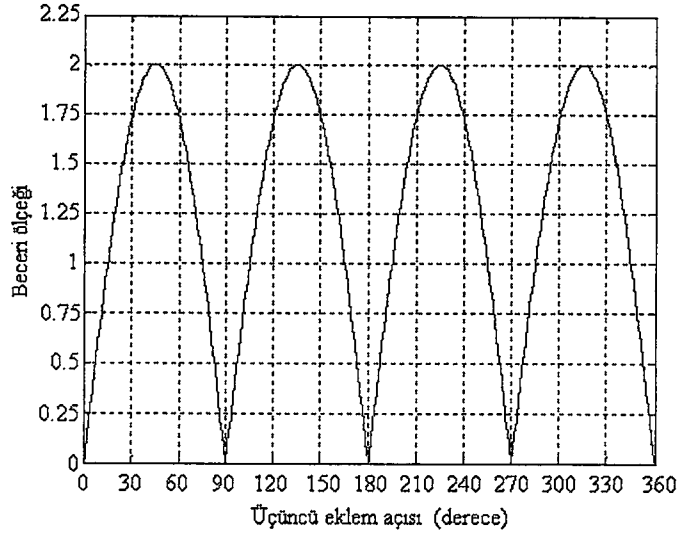
$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - l_1 \cos \theta_2 & -l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ 0 & l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_1 \sin \theta_2 & -l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ 1 & 0 & l_2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.180)$$

$$w = |l_2^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3| \quad (2.181)$$

$$V_{CN} = \int_0^{d_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\theta dR dd_1 + \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(m + a \cos \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 da = d_1 \pi l_2^2 + 2a^2 \pi^2 m \quad (2.182)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.181 ve 2.182’in eniyilenmesiyle  $w = 2$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 33.309 olarak bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunluğu  $l_2 = 2$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.56’da eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen beceri ölçęęi değerleri görülmektedir.



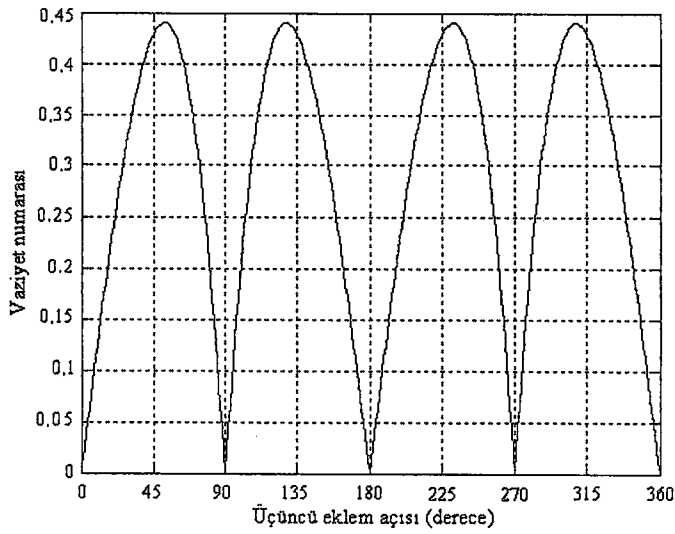


Şekil 2.56. Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen beceri ölçeği değerleri.

CN robotunun vaziyet numarası Denklem 2.183'deki gibi bulunur.

$$\kappa_{CN} = \frac{\sqrt{(l_2^2 \cos^2 \theta_3 + l_1^2 + l_2^2 + 1)(l_1^2 l_2^2 \cos^2 \theta_3 + l_2^4 \cos^2 \theta_3 + l_1^2 + l_2^2)}}{3l_2^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3} \quad (2.183)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.182 ve 2.183'ün eniyilenmesiyle  $\kappa^{-1} = 0.4401$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi 29.503 bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_1 = 2$  ve  $l_2 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.57'de eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri görülmektedir.



Şekil 2.57. Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen vaziyet numarası değerleri.

CN robotunun evrensel vaziyet göstergesi Denklem 2.184'deki gibi elde edilir.

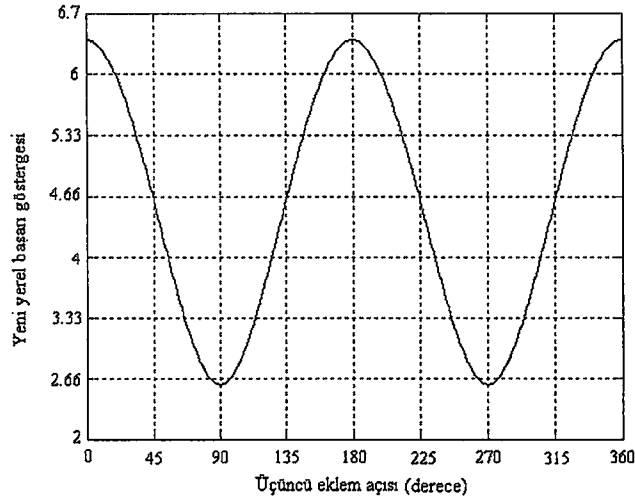
$$\eta_{CN} = \frac{1}{29.503} \int_0^{2\pi} \left| \frac{3l_2^4 \sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_3}{\sqrt{(l_2^2 \cos^2 \theta_3 + l_1^2 + l_2^2 + 1)(l_1^2 l_2^2 \cos^2 \theta_3 + l_2^4 \cos^2 \theta_3 + l_1^2 + l_2^2)}} \right| d\theta_3$$

$$= \frac{1}{29.5044} \int_0^{2\pi} \left| \frac{10.9 \sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_3}{\sqrt{79.5 \cos^4 \theta_3 + 224 \cos^2 \theta_3 + 61}} \right| d\theta_3 = 0.02447 \quad (2.184)$$

CN robotunun yeni yerel başarı göstergesi Denklem 2.185'deki gibi bulunur.

$$\rho_{LCN} = \frac{\sqrt{(l_2^2 \cos^2 \theta_3 + l_1^2 + l_2^2 + 1)(l_1^2 l_2^2 \cos^2 \theta_3 + l_2^4 \cos^2 \theta_3 + l_1^2 + l_2^2)}}{3} \quad (2.185)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.182 ve 2.185'ün eniyilenmesiyle  $\rho_{LCN \max} = 6.370$ , en büyük çalışma uzayının hacmi ise 26.50 olur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $l_1 = 2$  ve  $l_2 = 1.8182$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Yeni evrensel başarı göstergesi 0.9717 bulunu. Şekil 2.58'de ise eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık yeni yerel başarı göstergesi değerleri görülmektedir.

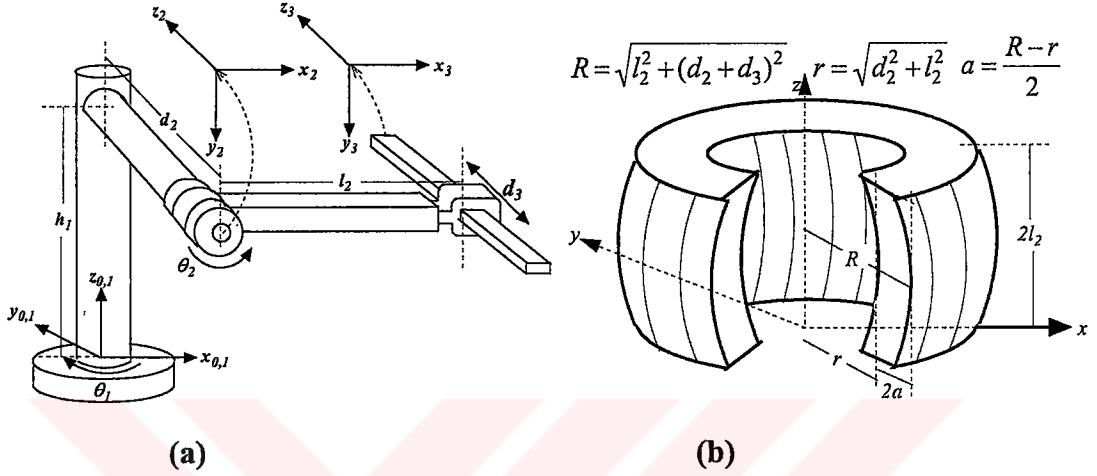


Şekil 2.58. Eklem açısı  $\theta_3$  ve buna karşılık gelen  $\rho$  değerleri.

$$\rho_{GCN} = \frac{1}{29.5044} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{79.5 \cos^4 \theta_3 + 224 \cos^2 \theta_3 + 61}}{3} d\theta_3 = 0.9717 \quad (2.186)$$

## 2.4.16. NC robotunun çalışma uzayının eniyilenmesi

NC robotunun eşdeğer katı gövde yapısı Şekil 2.59.a'da, ulaşabildiği çalışma uzayının hacmi ise Şekil 2.59.b'de verilmiştir. Ayrıca, Tablo 2.16'da NC robotunun D-H değişkenleri görülmektedir.



Şekil 2.59.a) NC Robotunun katı gövde yapısı. b) Çalışma uzayının hacmi.

Tablo 2.16. NC Robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	90	0	$d_2$
3	0	0	$l_2$	$d_3$

NC robotunun  ${}^0_3T$  ileri kinematiği Denklem 2.187'deki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_3T &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 & \sin \theta_1 & l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (d_2 + d_3) \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 & l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - (d_2 + d_3) \cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \sin \theta_2 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.187)
 \end{aligned}$$

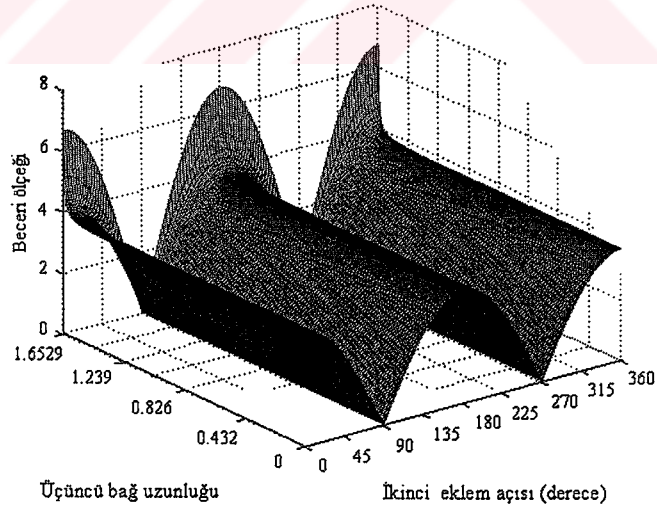
NC robotunun Jakobiyen matrisi Denklem 2.188, beceri ölçeği Denklem 2.189, ve çalışma uzayının hacmi denklem 2.190'da verilmiştir.

$${}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + (d_2 + d_3) \cos \theta_1 & -l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \sin \theta_1 \\ l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (d_2 + d_3) \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \\ 0 & l_2 \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.188)$$

$$w = |l_2 \cos \theta_2 (d_2 + d_3)| \quad (2.189)$$

$$V_{NC} = \int_0^{2l_2} \int_r^{r+2a} \int_0^{2\pi} ad\theta_1 dadl_2 = 8l_2 a \pi (r + a) \quad (2.190)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.189 ve Denklem 2.190'nun eniyilenmesiyle  $w = 6.6416$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 91.9442 bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $d_2 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $d_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.60'da eklem açısı  $\theta_2$ , bağ uzunluğu  $d_3$  ve bunlara karşılık gelen  $w$  değerleri görülmektedir.



Şekil 2.60. Eklem açısı  $\theta_2$ , bağ uzunluğu  $d_3$  ve bunlara karşılık gelen  $w$  değerleri.

NC robotunun çalışma vaziyet numarası denklem 2.191'deki gibi bulunur.

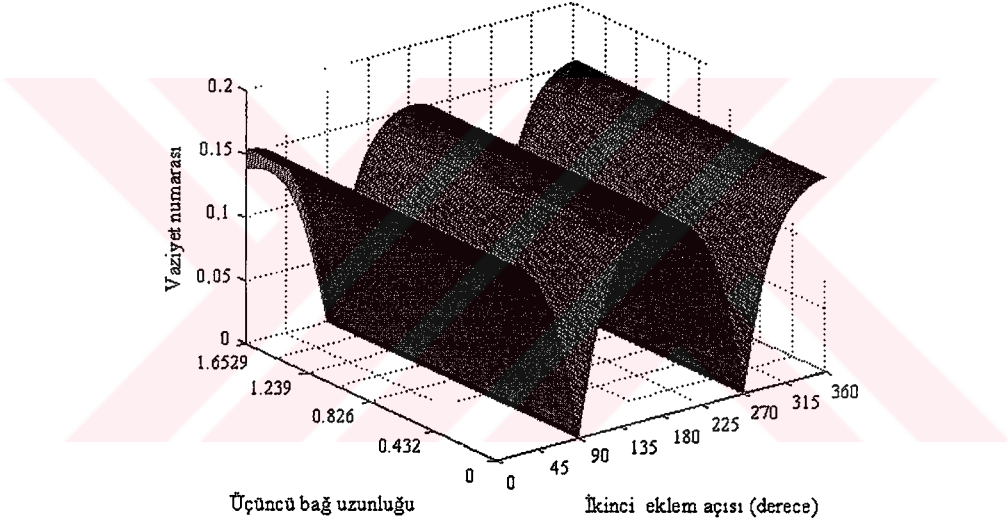
$$\kappa_{NC} = \frac{\sqrt{a_{NC}}}{3l_2 \cos \theta_2 (d_2 + d_3)} \quad (2.191)$$

Denklemden kullanılan  $a_{CN}$  kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$a_{NC} = [l_2^2 (\cos^2 \theta_2 + 1) + (d_2 + d_3)^2 + 1] \quad (2.192)$$

$$[(l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 1)((d_2 + d_3)^2 + l_2^2) + l_2^4 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_2]$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.190 ve Denklem 2.191'in eniyilenmesiyle  $\kappa^{-1} = 0.1545$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 91.944 olarak bulunur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $d_2 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $d_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, Şekil 2.61'de eklem açısı  $\theta_2$ , bağ uzunluğu  $d_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri görülmektedir.



Şekil 2.61. Eklem açısı  $\theta_2$ , bağ uzunluğu  $d_3$  ve bunlara karşılık gelen  $\kappa^{-1}$  değerleri.

NC robotunun, evrensel vaziyet göstergesi denklem 2.193'teki gibi elde edilir.

$$\eta_{NC} = \frac{1}{106.741} \int_0^{1.6529} \int_0^{2\pi} \frac{3l_2^2 \cos^2 \theta_2 (d_2 + d_3)^2}{\sqrt{a_{NC}}} d\theta_2 dd_3$$

$$= \frac{1}{91.9442} \int_0^{1.6529} \int_0^{2\pi} \frac{9.9 \cos^2 \theta_2 (2 + d_3)^2}{\sqrt{b_{NC}}} d\theta_2 dd_3 = 0.1851 \quad (2.193)$$

Denklemden kullanılan  $b_{NC}$  kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$b_{NC} = [3.3(\cos^2 \theta_2 + 1) + (2 + d_3)^2 + 1] \quad (2.194)$$

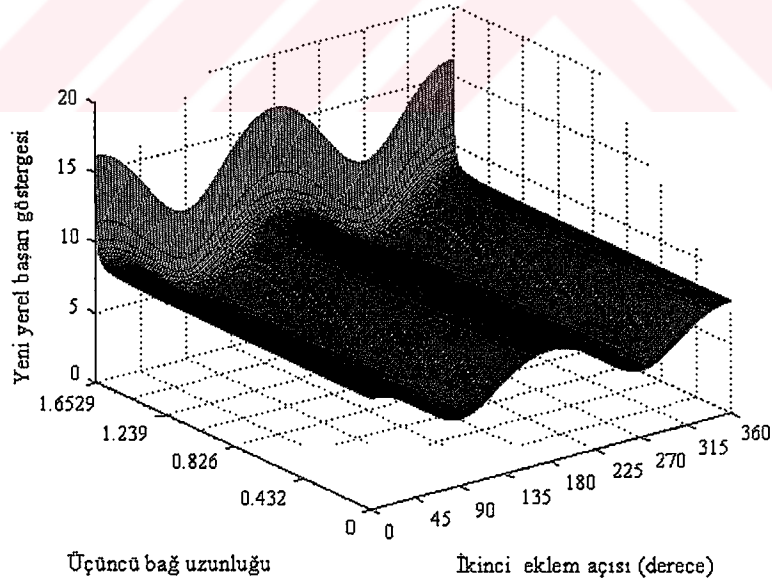
$$[(3.3 \cos^2 \theta_2 + 1)((2 + d_3)^2 + 3.3) + 10.92 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_2]$$

NC robotunun yeni yerel başarı göstergesi Denklem 2.195'deki gibi bulunur.

$$\rho_{LNC} = \frac{\sqrt{a_{NC}}}{3} \quad (2.195)$$

Amaç fonksiyonları Denklem 2.190 ve Denklem 2.195'in eniyilenmesiyle,  $\rho_{LNC_{max}} = 16.009$  ve en büyük çalışma uzayının hacmi ise 91.944 olur. Bu noktadaki en iyi bağ uzunlukları  $d_2 = 2$ ,  $l_2 = 1.8182$  ve  $d_3 = 1.6529$  şeklinde elde edilir. Ayrıca, yeni evrensel başarı göstergesi ise 0.7863 bulunur. Şekil 2.62'de ise eklem açısı  $\theta_2$ , bağ uzunluğu  $d_3$  ve bunlara karşılık  $\rho$  değerleri.

$$\rho_{GNC} = \frac{1}{91.9442} \int_0^{1.6529} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{b_{NC}}}{3} d\theta_2 dd_3 = 0.7863 \quad (2.196)$$



Şekil 2.62. Eklem açısı  $\theta_2$ , bağ uzunluğu  $d_3$  ve bunlara karşılık  $\rho$  değerleri.

## 2.5. Eniyileme Sonuçları

Bu bölümde on altı adet temel endüstriyel robot, üç farklı başarı göstergesi temel alınarak eniyileme gerçekleştirildi. Eniyilenen endüstriyel robotların eklem yapıları Tablo 2.17’de verilmiştir. Tablo2.17’de D ve R sırasıyla prizmatik ve dönel eklemi temsil etmektedir. Kinematik olarak her bir robot, dönel, prizmatik veya her iki eklem türünü birden içerebilir.

**Table 2.17.** Onaltı adet endüstriyel robotun eklem yapısı.

Manipülâtör	S	S	S	C	C	C	N	N	N	R	R	R	R	S	C	N
	S	C	N	S	C	R	S	N	R	C	N	R	S	R	N	C
Birinci eklem	P	P	P	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	P	P	D
İkinci eklem	P	P	D	P	P	P	D	D	D	P	D	P	D	D	D	D
Üçüncü eklem	P	D	D	P	D	D	P	D	D	D	D	D	P	D	D	P

Endüstriyel robot manipülâtörleri eklem özelliklerine göre dört tipe ayrılabilir. Birinci tipte, beş adet, üç eklemi de birbirine dik, SS, SN, NS, NN ve RR dikgen robotları; ikinci tipte, dört adet, ilk iki eklemi birbirine paralel, CS, CR, RN ve CN robotları; üçüncü tipte, dört adet, son iki eklemi bir birine paralel, SC, NR, RC ve NC robotları; son olarak dördüncü tipte ise, üç adet, bütün eklemleri birbirine paralel, CC, RS ve SR robotları bulunmaktadır.

### 2.5.1. Beceri ölçeği ve yapısal uzunluk göstergesi

Robot manipülâtörlerinin eniyileme sonucunda elde edilen yapısal uzunluk göstergesi (küçük değerlerden büyük değerlere doğru), beceri ölçeği ve çalışma uzaylarının hacimleri Tablo 2.18’de görülmektedir. Tablo 2.18’de verilen Man. kısaltması “manipülâtörü” temsil etmektedir. Yapısal uzunluk göstergesi temel alınarak robot manipülâtörleri beş alt gruba ayrılabilir. Birinci grupta yer alan NN, RR, RN, NR ve CR robotları en iyi alt grubu oluşturmaktadır. Birinci grupta, iki tane tip 2, iki tane tip 1 ve bir tane tip 3’e ait robot bulunmaktadır. Grup I’de görüldüğü gibi NN, RN ve NR küresel robotlar düşük yapısal uzunluk göstergesine sahiptir.

Grup III'te yer alan tip 4 robot manipülatörleri, yüksek yapısal uzunluk göstergesine sahiptir. Tablo 2.18 incelendiğinde, birinci eklemi prizmatik olan ve birden fazla prizmatik eksen içeren robot manipülatörlerinin daha yüksek yapısal uzunluk göstergesine sahip olduğu görülür. Dolayısıyla, robot manipülatörlerinin geniş çaplı hareket yapma kabiliyeti prizmatik eklem sayısı arttıkça azalmaktadır. Tip I'de yer alan dikgen robotlardan, ilk eklemi dönel olan robotların yapısal uzunluk göstergeleri düşük çıkarken, tam tersine aynı tipte yer alan ve birinci eklemi prizmatik olan SS ve SN robotlarının yapısal uzunluk göstergeleri yüksek çıkmaktadır. Buradan, birinci eklemin prizmatik olmasının geniş çaplı hareket yapmayı doğrudan olumsuz etkilediği söylenebilir. Huang ve Milenkovic CN, NC, RS, ve SR robotlarını kullanışlı ve özel bulmamasına rağmen, NC ve SR robotlarının yapısal uzunluk göstergeleri gayet iyi çıkmıştır. Aynı zamanda, RS robotu 'Scara' robotu temsil etmektedir ve endüstride çok sık kullanılan bir robottur.

**Tablo 2.18.** Robot manipülatörlerinin  $Q_L$ ,  $w$  ve  $V$  değerleri.

Grup	Man.	Eklem türü	Man. tipi	$Q_L$	$w$	$V$
I	NN	RRR	1	0.8201	8.1229	296.830
	RR	RPR	1	0.8499	9.0430	266.740
	RN	RRR	2	0.8538	11.4643	258.920
	NR	RRR	3	0.9053	10.6934	265.430
	CR	RPR	2	0.9610	4.5822	221.893
II	NS	RRP	1	1.0470	14.5785	185.140
	RC	RPR	3	1.1423	6.3110	109.862
	NC	RRP	3	1.2122	6.6416	91.944
III	CC	RPR	4	1.2917	3.6364	91.393
	RS	RRP	4	1.2917	3.6364	91.393
	SR	PRR	4	1.2917	3.6364	91.393
	SN	PRR	1	1.3106	4.9143	87.491
IV	SC	PPR	3	1.7382	2.0000	41.133
	CN	PRR	2	1.8648	2.0000	33.309
	CS	RPP	2	2.0484	2.0000	25.132
V	SS	PPP	1	3.0000	-	8.0000



Robot manipulatörlerinin eniyilenmiş bağ uzunlukları Tablo 2.19’da verilmiştir. Tablo 2.19’da görüldüğü gibi, prizmatik eksenlerin bağ uzunlukları 2 civarında eniyilenirken dönel eklemlerin bağ uzunlukları 2 ile 1.6529 arasında eniyilenmektedir. Ayrıca, robot bağlarının toplam uzunluğu azaldıkça robot manipulatörlerinin geniş çaplı hareket yapma kabiliyeti artmaktadır.

**Tablo 2.19.** Eniyilenmiş bağ uzunlukları.

Man.	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
NN	-	1.8182	1.6529	-	2.0000	-
RR	-	2.0000	1.6529	-	1.8182	-
RN	2.0000	1.8182	1.6529	-	-	-
NR	-	2.0000	1.8182	-	2.0000	-
CR	-	2.0000	1.8182	-	2.0000	-
NS	-	2.0000	-	-	2.0000	1.8182
RC	-	2.0000	1.6529	-	1.8182	-
NC	-	1.8182	-	-	2.0000	1.6529
CC	-	2.0000	1.8182	-	2.0000	-
RS	2.0000	1.8182	-	-	-	2.0000
SR	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	-	-
SN	-	2.0000	1.8182	2.0000	2.0000	-
SC	-	2.0000	-	2.0000	2.0000	-
CN	2.0000	2.0000	-	2.0000	-	-
CS	2.0000	-	-	-	2.0000	2.0000
SS	-	-	-	2.0000	2.0000	2.0000

### 2.5.2. Vaziyet numarası evrensel vaziyet göstergesi

On altı adet endüstriyel robot manipulatörünün evrensel vaziyet göstergesi (büyük değerden küçük değere doğru), vaziyet numarası ve çalışma uzaylarının hacimleri Tablo 2.20’de verilmiştir. Evrensel vaziyet göstergesi temel alınarak, robot manipulatörleri beş alt gruba ayrılabilir. Bu alt gruplardan en iyisi, evrensel vaziyet numaraları en büyük olan NS, SN, NR ve NN robotlarının bulunduğu birinci alt

gruptur. Grup I'de üç adet tip 1 ve bir adet de tip 3 robotu bulunmaktadır. Tablo 2.20'de görüldüğü gibi dikgen olan SN, NN ve NS robotlarının evrensel vaziyet göstergesi diğerlerinden daha büyük çıkmıştır. Bu başarı göstergesine göre dikgen robotların geniş çaplı hareket yapabilme kabiliyeti diğer robotlardan daha iyi olmaktadır. Diğer taraftan Grup III ve IV'te yer alan tip 2 robot manipülatörleri çok düşük evrensel vaziyet göstergesine sahiptir. RS, SR ve CR robotları en iyi vaziyet numarası üretmelerine karşın evrensel vaziyet göstergesi vaziyet numarası değerlerine göre yeterince iyi çıkmamıştır. Buradan, en iyi vaziyet numarasının genellikle en iyi evrensel vaziyet göstergesini üretmediği kolaylıkla söylenebilir.

**Tablo 2.20.** Robot manipülatörlerinin  $\eta$ ,  $\kappa^{-1}$  ve  $V$  değerleri.

Grup	Man.	Eklem türü	Man. tipi	$\eta$	$\kappa^{-1}$	$V$
I	NS	RRP	1	0.2504	0.7367	137.89
	SN	PRR	1	0.2181	0.3714	87.491
	NR	RRR	3	0.2178	0.8767	265.43
	NN	RRR	1	0.2059	0.7132	296.83
II	NC	RRP	3	0.1851	0.1545	91.944
	RN	RRR	2	0.1503	0.6269	258.92
	SC	PPR	3	0.1331	0.8165	41.133
	RR	RPR	1	0.1227	0.9141	265.75
	RS	RRP	4	0.1029	1.0000	73.852
III	CC	RPR	4	0.0816	0.7330	91.391
	SR	PRR	4	0.0766	1.0000	95.961
	CR	RPR	2	0.0477	1.0000	221.89
IV	RC	RPR	3	0.0304	0.7976	15.708
	CS	RPP	2	0.0249	0.4286	6.2800
	CN	PRR	2	0.0244	0.4401	29.503
V	SS	PPP	1	-	-	8

Robot manipülatörlerinin eniyilenmiş bağ uzunlukları Tablo 2.21'de verilmiştir. Tablo 2.21'de görüldüğü gibi prizmatik eklemler 2 civarında eniyilenirken buna karşın dönel eklemler 0.5 ile 2 arasında eniyilenmektedir. Ayrıca, dönel eklem sayısı arttıkça, Kartezyen uzayda robot manipülatörlerinin geniş çaplı hareket yapabilme kabiliyeti iyileşmektedir. SS robotunun Jakobiyen matrisi birim matris olduğundan

çalışma uzayının eniyilenmesine gerek duyulmamıştır. SS robotunun en büyük bağ uzunlukları 2 alınarak çalışma uzayı bu değerlere göre hesaplanmıştır.

**Tablo 2.21.** Eniyilenmiş bağ uzunlukları.

Man.	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
NS	-	1.8182	-	-	2.0000	1.6529
SN	-	2.0000	1.8182	2.0000	-	-
NR	-	1.8182	1.6529	-	2.0000	-
NN	-	1.8182	1.6529	-	2.0000	-
NC	-	1.8182	-	-	2.0000	1.6529
RN	2.0000	1.8182	1.6529	-	-	-
SC	-	2.0000	-	2.0000	2.0000	-
RR	-	2.0000	1.6529	-	1.8182	-
RS	2.0000	1.4700	-	-	-	2.0000
CC	-	2.0000	1.8182	-	2.0000	-
SR	2.0000	2.0000	1.4970	2.0000	-	-
CR	-	2.0000	1.8182	-	2.0000	-
RC	-	2.0000	0.5000	-	1.0000	-
CS	2.0000	-	-	-	2.0000	1.0000
CN	2.0000	1.8182	-	2.0000	-	-
SS	-	-	-	2.0000	2.0000	2.0000

### 2.5.3. Yeni yerel ve evrensel başarı göstergeleri

Robot manipülatörlerinin yeni yerel ve evrensel başarı göstergeleri, çalışma uzaylarının hacimleriyle birlikte Tablo 2.22’de verilmiştir. Evrensel vaziyet göstergesinde olduğu gibi, robotların yeni evrensel başarı göstergeleri de en büyük değerden en küçük değere doğru sıralanmıştır. Yeni evrensel başarı göstergesi temel alınarak, manipülatörler beş alt gruba ayrılmıştır. Grup I’de yalnızca SN robotu vardır. En yüksek evrensel başarı göstergesine sahip olan ilk iki alt grupta dikgen robotlar (SN ve NN) bulunmaktadır. RR ve NS robotlarının yerel başarı göstergeleri yüksek olmasına karşın, bu robotların evrensel başarı göstergeleri yeterince iyi çıkmamıştır. Buradan, yerel başarı göstergesiyle evrensel başarı göstergesi arasında doğrudan bir ilişki olmadığı ortaya çıkmaktadır.

**Tablo 2.22.** Robot manipülatörlerinin  $\rho_G$ ,  $\rho_L$  ve  $V$  değerleri.

Grup	Man.	Eklem türü	Man. tipi	$\rho_G$	$\rho_L$	$V$
I	SN	PRR	1	3.9476	13.742	87.491
II	RN	RRR	2	1.3203	24.083	258.92
	NR	RRR	3	1.3144	25.855	265.43
	NN	RRR	1	1.0130	17.633	296.83
III	CN	PRR	2	0.9717	6.370	29.503
	NC	RRP	3	0.7863	16.009	91.944
	NS	RRP	1	0.5977	22.922	137.89
	CC	RPR	4	0.4230	9.644	91.3918
	CR	RPR	2	0.3737	6.742	221.899
	SC	PPR	4	0.3284	2.449	41.113
IV	SR	PRR	4	0.2516	6.458	95.9614
	RS	RRP	4	0.2477	6.458	91.3918
	CS	RPP	2	0.1939	3.464	22.2759
	RR	RPR	1	0.1745	20.668	266.745
	RC	RPR	3	0.0359	12.284	109.8629
V	SS	PPP	1	-	-	8

Robot manipülatörlerinin eniyilenmiş bağ uzunlukları Tablo 2.23'te verilmiştir. Tablo 2.23'te görüldüğü gibi prizmatik eklemlerin bağ uzunlukları 2 civarında eniyilenirken, dönel eklemlerin bağ uzunlukları 1.6529 ile 2 arasında eniyilenmektedir.

Vijiyakumar ve Waldron (1986), bir robot manipülatörünün optimum çalışma uzayına sahip olması için aşağıdaki üç koşulu sağlaması gerektiğini açıklamıştır.

- i- Bütün eklemler dönel olmalı,
- ii- Birinci ve ikinci eklemler bağ kayması içermeden aynı noktada kesişmeli,
- iii- İkinci ve üçüncü eklemler paralel olmalıdır.

NR robot manipülatörü (articulated robot) bu üç özelliği de sağlamaktadır. Bu çalışmada Vijiyakumar ve Waldron (1986) tarafından açıklanan sonuçlara ulaşılmıştır. NR robotu, her üç başarı göstergesinde de en iyi çalışma uzayına ve geniş çaplı hareket yapabilme özelliğine sahip ilk dört robot içerisinde yer almıştır.

**Tablo 2.23.** Eniyilenmiş bağ uzunlukları.

Man.	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
SN	-	2.0000	1.8182	2.0000	-	-
RN	2.0000	1.8182	1.6529	-	-	-
NR	-	1.8182	1.6529	-	2	-
NN	-	1.8182	1.6529	-	2	-
CN	2	1.8182	-	2	-	-
NC	-	1.8182	-	-	2	1.6529
NS	-	1.8182	-	-	2	1.6529
CC	-	2	1.8182	-	2	-
CR	-	2	1.8182	-	2	-
SC	-	2	-	2	2	-
SR	2	2	1.8182	2	-	-
RS	2	1.8182	-	-	-	2
CS	2	-	-	-	2	1.8182
RR	-	2	1.6529	-	1.8182	-
RC	-	2	1.6529	-	1.8182	-
SS	-	-	-	2	2	2

## 2.6. Endüstriyel Robotların Çalışma Uzaylarının Şeklinin Belirlenmesi

Endüstriyel robotlar, eklem yapısına ve eksenlerin yerleşimine (paralel veya dik) göre kartezyen, silindirik, küresel, dönel veya birkaç geometrik yapıyı birden içeren daha karmaşık çalışma uzayı şekline sahip olabilir. Çalışma uzaylarının şekli belirlenirken robot manipülatörlerinin ilk üç eklemi ve bu ilk üç ekleminin ürettiği dönüşüm matrisi göz önünde bulundurulur. Robotların eklem yapılarına göre çalışma uzaylarının şekli Tablo 2.24'te verilmiştir. Tablo 2.24'te verilen Ek. kısaltması eklemi temsil etmektedir.

**Tablo 2.24.** Eklem yapılarına göre çalışma uzaylarının şekli.

Eklem yapısı			Çalışma uzayının şekli	Eklemlerin yerleşim biçimi
I Ek.	II. Ek.	III Ek.		
P	P	P	Kartezyen	Üç eklem birbirine dik
R	R	P	Silindirik (Scara tip 1)	Üç eklem birbirine paralel
P	R	R	Silindirik (Scara tip 2)	Üç eklem birbirine paralel
R	P	R	Silindirik (Scara tip 2)	Üç eklem birbirine paralel
R	P	P	Silindirik (Scara tip 2)	İlk iki eklem birbirine paralel
R	R	P	Küresel	İlk iki eklem birbirine dik
R	P	R	Küresel	Son iki eklem birbirine dik
P	R	R	Küresel	Üç eklem birbirine dik
R	R	R	Dönel	Son iki eklem birbirine paralel

Robot manipülatörlerinin ilk üç ekleminin ürettiği dönüşüm matrisine göre çalışma uzayı, prizmatik, silindirik ve küresel olarak sınıflandırılabilir. Prizmatik çalışma uzayına sahip bir robot manipülatörünün ürettiği dönüşüm matrisi Denklem 2.197’de, silindirik, Denklem 2.198’de ve küresel ise Denklem 2.199’da verilmiştir.

$$\text{Pr } z(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.197)$$

$$\text{Sld}(\theta, r, z) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & r \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & r \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.198)$$

$$\text{Krs}(\theta, \varphi, r) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi & \sin \theta & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta & -r \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & r \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.199)$$

Robot manipülatörlerinin çalışma uzaylarının, eklem yapısına ve dönüşüm matrisine göre sınıflandırılması Tablo 2.25’te verilmiştir. Tablo 2.25’te verilen S-1 ve S-2

sırasıyla Scara tip-1 ve Scara tip-2 robotlarını,  $\perp$  dik ve  $//$  ise paralelliği göstermektedir. Örneğin  $\perp\perp//$  ilk iki eksenin birbirine dik, üçüncünün ise ikinciye paralel,  $////\perp$  ilk iki eksenin birbirine paralel üçüncünün ise ikinciye dik, veya  $\perp\perp\perp$  üç eklemin de bir birine dik olduğunu göstermektedir.

**Tablo 2.25.** Robot manipülatörlerinin çalışma uzaylarının sınıflandırılması.

Man.	Ekleme yapısına göre	Dönüşüm matrisine göre
SS (PPP $\perp\perp\perp$ )	Prizmatik	Prizmatik
SC (PPR $\perp\perp//$ )	-	Silindirik
SN (PPR $\perp\perp\perp$ )	Küresel	Küresel
CS (RPP $////\perp$ )	Silindirik(S-2)	Silindirik
CC (RPR $//////$ )	Silindirik(S-2)	Silindirik
CR (RPR $////\perp$ )	Küresel	Küresel
NS (RRP $\perp\perp\perp$ )	Küresel	Küresel
NN (RRR $\perp\perp\perp$ )	Küresel	-
NR (RRR $\perp\perp//$ )	Dönel	-
RC (RPR $\perp\perp//$ )	Silindirik(S-2)	Küresel
RN (RRR $\perp\perp//$ )	Küresel	Küresel
RR (RPR $\perp\perp\perp$ )	Küresel	Küresel
RS (RRP $//////$ )	Silindirik(S-1)	Silindirik
SR (PRR $//////$ )	Silindirik(S-2)	Silindirik
CN (PRR $////\perp$ )	Küresel	Küresel
NC (RRP $\perp\perp//$ )	Küresel	Küresel

## 2.7. Bazı Endüstriyel Robotların D-H Değişkenleri

Bu bölümde endüstride kullanılan bazı robotların D-H değişkenleri ve bu robotların Huang ve Milenkovic'in türettiği kod karşılıkları Tablo 2.26'da verilmiştir

(RobotAsist Toolbox, 2002). Tabloda E.Y. eklem yapısını ve DOF robotların serbestlik derecesini göstermektedir. Ayrıca, Tablo 2.26'da verilen değerler birim uzunluktur.

**Tablo 2.26.** Bazı robotların D-H değişkenleri ve kod karşılıkları.

Robot	E.Y.	DOF	Bağ uzunlukları						Kod
			$d_1$	$d_2$	$d_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	
Adept1850	PRR	3	166.8				80		SR
Adept1	RRRP	4			12.4	16.7	14.8		RS
Adept550	RRRP	4	450		224.4	300	250		RS
Ame6240b	RRR	6	46.4	12	20.7	17.3			NR
Amer6240	RRR	6		16.4	16.7	17.3			NR
AseairB	RRR	6	825		900	75	100	143	NR
Cinc363	RPP	3		12	21				CS
Cinmilt3	RRR	6	9	8	8	2	20		NR
Cobra	RRRR	4				13.2	26.4	19.4	NR
Crs-S465	RRR	6					12		NR
Cyboh80	RPR	6		51			39.4	39.4	CC
Fanuc1	PRR	5	1000			834	1150	780	SR
Fanuc155	RRR	6	625			300	800	200	NR
Fanuc700	RRR	6	625			300	800	200	NR
FanucARC	RRR	6				210	600	100	NR
FanucL10	RRP	5	890	230	350				NS
FanucCS12	RRR	6	450	254	254	205	800	73	NR
FanucS70	RRR	6	800				700	162	NR
Grip2	RRR	6	13.8				20.5	10.3	NR



Grippressur	RRR	6	13.8				20.5	10.3	NR
IRB300	RRR	6	656.3			75	1000	143	NR
Kawasjs5	RRR	6				90	450		NR
Kawjs40	RRR	6	800			150	750		NR
MITR501	RRR	5					220	160	NR
MITR501A	RRR	5				5	220	160	NR
PUMA	RRR	6		140			432		NR
PUMA260	RRR	6		4.8			8		NR
San8437	RRP	4			325	400	400		RS
Sankycell	RRRP	4			238	400	400		RS
Sankyo	RRRP	4			325	400	400		RS
Sert3200	RPPR	4		13.2	50				CS
Titan2	RRR	6	7.5			4.2	33.5	19.1	NR
Titan2A	RRR	5				846.1	546.6	149.1	-
TT8030	RRRP	4			67.3	400	400		RS
URS2	RRR	6	13.8	5.9	3	14	37.7		NR
Ursula	RRR	6				14	31		NR
Ursula2	RRR	6	13.8	5.9	3	14	37.7		NR
Yamyk720	RRP	3	547	111	23.1	350	315		RS
Yayc440z	PRR	4	385.9			93	200	200	SR
Yk1000ef	RRRP	4			65.6	500	500		RS
Yk1000na	RRRP	4			65.5	500	500		RS
Yk640A	RRRP	4			350	250			RS

Tablo 2.26'da endüstriyel robotların çoğunlukla ilk üç eklem yapısı, bazı dört serbestlik derecesine sahip robotların eklem yapılarının tamamı verilmiştir. Bu robotların dördüncü eklem kaçıklıklı değişkeni üçüncü gibi tabloya işlenmiştir. Dört eklemlili bu robotların üçüncü ekleminde sadece kendi etrafında dönme, dördüncü ekleminde de bir kayma gerçekleşmektedir. Bu iki eklem bir gibi kabul edilip bağ uzunluğu 3. ekleme aitmiş gibi tabloya işlenmiştir.

Tablo 2.26'dan endüstride en sık kullanılan robotların Huang ve Milenkovic tarafından açıklanan NR, RS, SR, CS, SC, CC ve NS kodlarının temsil ettiği robotlar olduğu görülmektedir. Ayrıca Adept firmasının ürettiği RS kodunun temsil ettiği robotların bağ uzunlukları eniyileme sonuçlarını desteklemektedir. Diğer robotların genellikle birinci ve ikinci eklemleri yere dik olarak yerleştirildiğinden bir ve ikinci kol uzunlukları arasında düzenli bir ilişki bulunmamaktadır.

## 2.7. Sonuçlar

Bu bölümde, on altı adet robot manipülatörü, beceri ölçeği, vaziyet numarası ve yeni yerel başarı göstergesi olmak üzere üç farklı yerel ve yapısal uzunluk göstergesi, evrensel vaziyet göstergesi ve yeni evrensel başarı göstergesi olmak üzere üç farklı evrensel başarı göstergesine göre karşılaştırıldı. Yerel başarı göstergeleri robot manipülatörlerinin birbirleriyle karşılaştırılmasında kullanılamaz, sadece robotların kendi geniş çaplı hareket yapabilme kabiliyetlerinin iyileştirilmesinde kullanılırlar. Evrensel başarı göstergeleri ise, robotlar arasında geniş çaplı hareket yapabilme becerisi açısından bir karşılaştırma yapma imkanı verir.

İlk olarak onaltı adet robot manipülatörü beceri ölçeği ve yapısal uzunluk göstergesine göre karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma NN, RR, RN, NR ve CR robotlarının daha düşük yapısal uzunluk göstergesine sahip olduğunu göstermektedir. Buradan, bu robot manipülatörlerinin daha iyi robot tasarımına ve geniş çaplı hareket yapma kabiliyetine sahip olduğu rahatlıkla söylenebilir. Bu robot manipülatörlerinin yapısal uzunluk göstergeleri küçük çıkmasına karşın, beceri ölçek

değerleri diğer robot manipülatörlerine göre genellikle daha büyük çıkmıştır. Bu durum, beceri ölçeğinin sadece yerel bir başarı göstergesi olduğunu göstermektedir.

İkinci aşamada, onaltı adet robot manipülatörü vaziyet numarası ve evrensel vaziyet göstergesine göre karşılaştırıldı. Karşılaştırma sonucunda, dikgen robot manipülatörlerinin daha büyük evrensel vaziyet göstergesine sahip olduğu görülmüştür. Dolayısıyla, bu robot manipülatörlerinin daha iyi robot tasarımına ve geniş çaplı hareket yapma kabiliyetine sahip olduğu ortaya çıkmaktadır. Vaziyet numarası ise bir yerel başarı göstergesidir.

Üçüncü aşamada ise, robot manipülatörlerinin yeni yerel ve evrensel başarı göstergeleri temel alınarak bir karşılaştırma yapıldı. Bu başarı göstergesinde de genellikle dikgen robot manipülatörlerinin diğerlerine göre daha iyi tasarım ve geniş çaplı hareket yapabilme özelliğine sahip olduğu görülmüştür. Yeni yerel başarı göstergesi, robotların geçmemesi gereken tekil noktaları diğer iki yerel başarı göstergesinde olduğu gibi belirgin bir şekilde göstermemektedir.

Robotların yerel başarı göstergelerine göre eniyilenmesi sonucunda bağ uzunlukları prizmatik eklemlerde her üç başarı göstergesinde de 2 civarında eniyilenirken, dönel eklemlerin bağ uzunlukları yeni yerel başarı göstergesi ve beceri ölçeğinde 2 ile 1.6529, vaziyet numarasında ise 2 ile 0.5 arasında eniyilenmektedir.

Her üç başarı göstergesinde de, dönel eklem sayısı fazla ve küresel çalışma uzayına sahip olan robot manipülatörlerinin daha iyi tasarım kriterlerine ve geniş çaplı hareket yapabilme becerisine sahip olduğu görülmüştür. Prizmatik eklem sayısı fazla olan robot manipülatörlerinin ise geniş çaplı hareket yapabilme becerisinin sınırlı olduğu, üç başarı göstergesinde de alt sıralarda bulunmalarından anlaşılmaktadır.

Tablo 2.26'dan endüstride en sık kullanılan robotlar, NR, RS, SR, CS, SC, CC ve NS kodlarının temsil ettiği robotlar olduğu görülmektedir. Ayrıca Tablo 2.26'da, SR ve RS kodlarının temsil ettiği robotların bağ uzunlukları arasındaki oranlar eniyileme sonucunda elde edilen oranlara yakın çıkmıştır.

## **BÖLÜM 3. ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN TERS KİNEMATİĞİ**

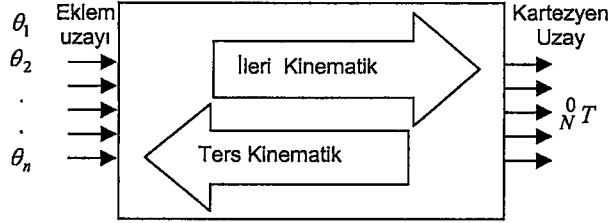
### **3.1. Giriş**

Robot manipülatörlerinin ters kinematığı, robot kontrolünün en önemli aşamalarından birini oluşturmaktadır. Şimdiye kadar, daha çok altı serbestlik derecesine sahip robot manipülatörlerinin ters kinematığı üzerinde durulmuştur. Altı serbestlik derecesine sahip robot manipülatörlerinin eklemlerinin yerleşiminden kaynaklanan farklı geometriler, çok karmaşık ters kinematik denklemler türetmektedir. Altı serbestlik derecesine sahip robot manipülatörlerinin son üç eklemi bir noktada kesiştiğinde, kolaylıkla ters kinematik çözüm gerçekleştirilirken, kesişmediğinde ise ters kinematik problem oldukça zor bir hal almaktadır.

İleri kinematik problem çözümü, eklem açıları verildiğinde, Kartezyen uzayda bir robot manipülatörünün uç işlevcisinin konumunu ve yönelimini bulma işlemine denir (Craig 1989). Ters kinematik probleme göre çok kolay olan ileri kinematik problem için her zaman bir çözüm vardır. Ters kinematik problem ise Kartezyen uzayda, ana çerçeveye göre verilen uç işlevcinin konum ve yönelim verileri yardımıyla eklem değişkenlerinin bulunması şeklinde tanımlanabilir. Başka bir ifadeyle, bir robot manipülatörünün uç işlevcisinin yönelimini ve konumunu Kartezyen koordinat sisteminden eklem koordinat sistemine dönüştürme işlemine ters kinematik problem denir (Wang and Chen 1991). Şekil 3.1'de ileri ve ters kinematik problemin şematik gösterimi verilmiştir. Ters kinematik problem çözümü, gerçek zamanlı kontrol, eyleyicilerin eklem torklarının hesaplanması, kaynak, boyama ve yörünge planlaması gibi bir çok uygulama için son derece önemlidir (Asada and Slotine 1986; Wolovich 1987; Schilling 1990; Kerrow 1991).

Ters kinematik problem, analitik olarak karmaşık, doğrusal olmayan denklemler içermesi, elde edilen denklemlerin iki farklı fiziksel durumu üretmesi, her zaman

matematiksel çözümün fiziksel çözümü temsil etmemesi, düzenleme bağı olması ve aynı uç işlevci düzenleme için birden fazla çözümün var olmasından dolayı çözülmesi oldukça güç olan bir problemdir.



**Şekil 3.1.** İleri ve ters kinematik problemin şematik gösterimi.

Ters kinematik problem, verilen bir robot düzenleme için tamamen analitik (closed form) olarak çözülebileceği gibi, analitik çözümün mümkün olmadığı durumlarda sayısal yöntemler kullanılarak da çözülebilir. Ters kinematik çözüm, bütün eklem değişkenlerinin bilgisayar ortamında özyineli işlemler gerçekleştirilerek Newton-Raphson ve Runga-Kutta (Uicker, Denavit and Hartenberg 1954; Angeles 1985) yöntemlerinde olduğu gibi sayısal olarak çözülebilir. Sayısal çözüm için kinematik eşitliklerin farklarının toplamını alan tahmin edici ve düzeltici tip algoritmalar kullanılır (Goldenberg, Apkarian and Smith 1987; Tsai and Orin 1987). Ters kinematik problemin sayısal yöntemlerle çözümlenmesinde karşılaşılan en büyük sorun, Jakobiyen matrisin tekil olduğu noktalarda yazılan algoritmanın çözüm üretememesidir. Ayrıca, başlangıç çözüm vektörü (eklem değişkenlerini içeren vektör) çözüme yönelik vektör elemanlarından oluşmadığı zaman, sayısal çözüm kararlı bir çözüm üretmekten uzaklaşır. Hem tamamen sayısal hem de tamamen analitik çözümün gerçekleştirilemediği durumlarda ise, eklem değişkenlerinden birkaçı analitik olarak bulunup, geri kalanlar için sayısal olarak çözülebilen yarı analitik çözüm uygulanır.

Robot manipülatörlerinin ters kinematik problem çözümünün zaman içerisindeki gelişimine bakılırsa, uzun yıllardan beri çalışıldığı görülür (Manocha and Canny 1994). Bu konuyla ilgili ilk çalışmalar Pieper ve Roth (1968), Rastegar ve Scheinman (1973) tarafından gerçekleştirildi. İlk önemli ters kinematik problem çözümünü ise, eklem değişkenlerinden birinin yarım açı tanjant ifadesinin üçüncü dereceden polinomlarını içeren 12x12 matris determinantını kullanan Albala ve

Angeles (1979) yaptı. Daha sonraları Duffy ve Crane (1980) ise eklem değişkenlerinden birinin yarım açı tanjant ifadesini otuz ikinci dereceden polinom şeklinde verdiler ve otuz ikinci dereceden olan bu polinomun kalan on altı adet çözümünün tamamen sanal olduğunu ispatladılar. Tsai ve Morgan (1985) ters kinematik problem çözümü için yüksek boyutlu yaklaşım uyguladılar. Ters kinematik problemi sekiz tane ikinci dereceden eşitliğe dönüştürüp polinom sürekliliğini kullanarak sayısal olarak çözdüler. Tsai ve Morgan (1985), gerçekleştirdikleri bu uygulamalardan on altı çözüm elde ettiler. Yapılan bu çalışmaların en önemli ispatı, ilk olarak Primose (1986) tarafından gerçekleştirildi. Sonuç olarak Lee ve Liang (1989), ters kinematik problemi 16. dereceden polinoma dönüştürüp kesin çözümlerini sundular. İzleyen zamanlarda Raghavan ve Roth (1989, 1993), eklem değişkenlerini yarım açı tanjant şeklinde ifade eden on altıncı. dereceden polinom türeten eliminasyon yöntemini kullanarak ters kinematik problem için on altı adet çözüm gerçekleştirdiler.

### 3.2. Ters Kinematik Çözüm Yöntemleri

Bu bölümde, temel onaltı adet endüstriyel robota Euler ve eklem kaçıklıklı bilek eklenerek, bu robotların ters kinematik çözümleri gerçekleştirildi. Analitik olarak robotların ters kinematik çözümlerini bulmak için Craig (1989) tarafından tanımlanan eşitliklerin yanı sıra Raghavan ve Roth (1989) tarafından sunulan sembolik formülasyon da kullanıldı. Ayrıca, analitik olarak çözülemeyen robotların ters kinematiği, Pashkevich (1997) tarafından geliştirilen sayısal yöntemden faydalanılarak elde edilir.

#### 3.2.1. Analitik çözüm yaklaşımı

Craig (1989) tarafından tanımlanan altı serbestlik derecesine sahip bir robotun ileri yön kinematiği Denklem 3.1'deki gibi yazılır.

$${}^0T = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (3.1)$$

${}^6_0T$  ileri yön kinematik matrisi, konum ve yönelim verilerini içeren matris elemanları cinsinden Denklem 3.2'deki gibi yazılıp Denklem 3.3'teki eşitlik sağlanır. Denklem 3.2'deki matrisin 1. kolonu uç işlevcisinin normal vektörünü ( $n = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ ), 2. kolonu kayma (sliding) vektörünü ( $s = [s_x \ s_y \ s_z]^T$ ) ve 3. kolonu ise yaklaşım (approaching) vektörünü ( $a = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ ) göstermektedir.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\left[ {}^0_1T \right]^{-1} {}^0_6T = \left[ {}^0_1T \right]^{-1} {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T \quad (3.3)$$

Denklemde  $\left[ {}^0_1T \right]^{-1} {}^0_1T = I$  olduğundan, Denklem 3.3 aşağıdaki gibi daha basit bir şekilde ifade edilebilir.

$$\left[ {}^0_1T \right]^{-1} {}^0_6T = {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T \quad (3.4)$$

Ters kinematik problem çözümü, Denklem 3.4'teki eşitliğin sağ ve sol tarafında karşılıklı yer alan matris elemanlarının birbirine eşitlenmesiyle gerçekleştirilir. Kullanılan diğer denklemler aşağıda verilmiştir.

$$\left[ {}^0_1T \ {}^1_2T \right]^{-1} {}^0_6T = {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T \quad (3.5)$$

$$\left[ {}^0_1T \ {}^1_2T \ {}^2_3T \right]^{-1} {}^0_6T = {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T \quad (3.6)$$

$$\left[ {}^0_1T \ {}^1_2T \ {}^2_3T \ {}^3_4T \right]^{-1} {}^0_6T = {}^4_5T {}^5_6T \quad (3.7)$$

$$\left[ {}^0_1T \ {}^1_2T \ {}^2_3T \ {}^3_4T \ {}^4_5T \right]^{-1} {}^0_6T = {}^5_6T \quad (3.8)$$

Ters kinematik problem çözümü için başka bir analitik yaklaşım ise Raghavan ve Roth (1989) tarafından geliştirilmiştir. Raghavan ve Roth (1989) çok değişkenli bir sistemi  $\tan(\theta_3/2)$  cinsinden on altıncı dereceden bir polinoma indirgediler. Üçüncü eklem açısı  $\theta_3$ , oluşturulan bu denklemlerden elde edilir. Geri kalan eklem açıları ise diğer ara denklemlerden faydalanarak elde edilir.

Raghavan ve Roth (1989) daha önce robot manipülatörlerinin ters kinematik çözümlerinde kullanılan matris eşitliğini Denklem 3.9'daki gibi değiştirdi.

$${}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T = {}^1_2T^{-1} {}^0_1T^{-1} {}^0_6T {}^5_6T^{-1} \quad (3.9)$$

Eşitliğin sol tarafında  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  ve  $\theta_5$  eklem değişkenleri yer alırken, eşitliğin sağ tarafında ise  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  ve  $\theta_6$  eklem değişkenleri bulunmaktadır. Raghavan ve Roth (1989), Denklem 3.9'daki eşitlik sonucunda üretilen ifadelerin polinom derecelerini düşürüp sembolik kompleksliği azaltarak Denklem 3.10'daki doğrusal formülasyonu elde etti.

$$Q \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\ \sin \theta_4 \cos \theta_5 \\ \cos \theta_4 \sin \theta_5 \\ \cos \theta_4 \cos \theta_5 \\ \sin \theta_4 \\ \cos \theta_4 \\ \sin \theta_5 \\ \cos \theta_5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Denklem 3.10'da,  $Q$  elemanları uç işlevcinin konumuna ait değişkenleri içeren 14x8 boyutlu bir matris,  $P$  ise  $\sin \theta_3$  ve  $\cos \theta_3$ 'e ait doğrusal fonksiyonlar, bu ifadelerin katsayılarını, manipülatör değişkenlerini ve konumlarını içeren 14x9 boyutlu bir matristir.



Raghavan ve Roth (1989), Denklem 3.10'daki  $Q$  matrisinin içerdiği 14 eşitlikten sekizini kullanarak  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  ve  $\theta_5$  fonksiyonları cinsinden ifade edilen denklemin sol tarafındaki  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  eklem değişkenlerini yok ettiler. Ayrıca çözüm için

$$\sin \theta_i = \frac{2x_i}{1+x_i^2} \quad \text{ve} \quad \cos \theta_i = \frac{1-x_i^2}{1+x_i^2} \quad (3.11)$$

denklemin dönüşümünü kullandılar. Denkleminde  $x_i = \tan(\theta_i/2)$ 'dir. Denklem 3.10'daki sisteminin kuvveti alınarak Denklem 3.12 elde edilir.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4^3 x_5^2 \\ x_4^3 x_5 \\ x_4^3 \\ x_4^2 x_5^2 \\ x_4^2 x_5 \\ x_4^2 \\ x_4 x_5^2 \\ x_4 x_5 \\ x_4 \\ x_5^2 \\ x_5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

Denkleminde,  $A_{ij}$ 'ler  $3 \times 3$  boyutlu matris ve  $0$ 'lar ise  $3 \times 3$  boyutlu sıfır matrislerdir.  $A_{ij}$  matrisinin elemanları  $x_3$ 'ün üçüncü dereceden polinomlarıdır. Elemanları  $A_{ij}$  ve  $0$ 'lardan oluşan matris,  $12 \times 12$  boyutlu bir matristir. Bu matrisin determinanı  $(1+x_3^2)^4$  ifadesine bölünebilen  $x_3$ 'ün 24. dereceden bir polinomudur. Bu polinom sıfıra eşitlenerek üçüncü eklem açısı  $\theta_3$ 'ün kökleri bulunur. Bulunan bu kökler aynı zamanda üçüncü eklem açısı  $\theta_3$ 'ün ters kinematik problem çözümüdür.  $\theta_3$  bulunduğundan sonra geri kalan diğer eklem açıları doğrusal denklem sisteminin çözülmesiyle kolaylıkla bulunur.

Ters kinematik çözüm gerçekleştirilirken bazı trigonometrik eşitliklerden yararlanır. Bu eşitlikler aşağıda verilmiştir.

$$\cos \theta = a \text{ ise } \theta = A \tan 2 \left( \mp \sqrt{1-a^2}, a \right) \quad (3.13)$$

$$\sin \theta = a \text{ ise } \theta = A \tan 2 \left( a, \mp \sqrt{1-a^2} \right) \quad (3.14)$$

$$\cos \theta = a \text{ ve } \sin \theta = b \text{ ise } \theta = A \tan 2(b, a) \quad (3.15)$$

$$a \sin \theta_6 + b \cos \theta_6 = 0 \text{ ise} \\ \theta = A \tan 2(-b, a) \text{ veya } \theta = A \tan 2(b, -a) \quad (3.16)$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = c \text{ ise } \theta = A \tan 2(a, b) \mp A \tan 2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c) \quad (3.17)$$

### 3.2.2. Sayısal çözüm yöntemleri

Gerçek zamanlı kontrol uygulamaları gerçekleştirilirken herhangi bir robota ait ters kinematik problemin kesin çözümü tercih edilir. Kesin çözüm, problemin analitik olarak çözülmesiyle elde edilir. Çoğunlukla analitik çözüm, birbirini takip eden üç eksen bir noktada kesiştiğinde (Euler bileği) veya paralel olduğunda gerçekleştirilebilir (Fu, Gonzalez and Lee 1987; Pieper and Roth 1968). Genellikle endüstriyel robotlar analitik çözüm gerçekleştirecek şekilde tasarlanırlar bu da her koşulda Euler bileğinin kullanılmasıyla mümkündür. Fakat bazı durumlarda, endüstriyel robotların daha ağır yükleri kaldırması gerekir (özellikle kaynak robotlarında yük kapasitesi artırılır). Bu robotlarda, Euler bileğinin aksine üç eklem bir noktada kesişmediği, eklem kaçıklıklı bilek kullanılır. Eklem kaçıklıklı bilekli altı serbestlik derecesine sahip endüstriyel robotların bir kısmı analitik olarak çözülebilirken, bir kısmının ise analitik olarak çözümü mümkün değildir. Çünkü, ters kinematik problem iki veya üç bilinmeyen içeren doğrusal olmayan denklem sistemlerinden oluşur. Analitik olarak çözülemeyen bu denklem sistemleri bir takım iteratif yöntemler kullanılarak çözülür. Bu çalışmada analitik olarak çözülemeyen

robotların ters kinematiği, Pashkevich (1997) tarafından geliştirilen sayısal yöntemden faydalanılarak çözüldü. Pashkevich'in gerçekleştirdiği yöntem, bilinen sayısal çözüm yöntemlerinin aksine, Jakobiyen matrisi kullanmadan etkili tek boyutlu iteratif araştırma yaparak ters kinematik problemi çözer.

Euler bilekli robotlarda bilek merkezinin konumunu bulmak Denklem 3.18'de görüldüğü gibi son derece kolaydır.

$$P_4 = P_6 - d_6 a_6 \quad (3.18)$$

Denklemden,  $P_4$  ilk dört dönüşüm matrisinin çarpılmasıyla elde edilen matrisin 4. kolonudur.  $P_6$  ana koordinat sistemine göre uç işlevcinin konumu, yani  ${}^0T_6$  homojen dönüşüm matrisinin 4. kolonudur.  $a_6$  ise yine aynı matrisin 3. kolonudur.  $d_6$  ise robota ait bir D-H değişkenidir. Bu bileğin yerleştirildiği altı serbestlik derecesine sahip bir robotun ilk önce ilk üç eklemi, sonrada geri kalan son üç eklemi analitik olarak kolayca çözülür.

Aynı yaklaşım eklem kaçıklıklı bileğe uygulandığında, oldukça karmaşık bir bilek merkezi konum ifadesiyle karşılaşılır. Eklem kaçıklıklı bileğin düzenlenişine göre iki farklı ifadeyle karşılaşılır. Eğer  $d_5$  ve  $d_6$ , D-H değişkenleri olacak şekilde bir bilek tasarımı gerçekleştirilirse, bu robota ait bilek merkezinin konumu Denklem 3.19'deki gibi ifade edilir.

$$P_4 = P_6 - d_6 a_6 - d_5 a_4 \quad (3.19)$$

Denklemden,  $a_4$ ,  ${}^0T_4$  matrisindeki 3. kolondur. Eğer  $l_4$  ve  $d_6$ , D-H değişkenleri olacak şekilde bir bilek tasarımı gerçekleştirilirse, bu robota ait bilek merkezinin konumu Denklem 3.20'deki gibi ifade edilir.

$$P_4 = P_6 \pm d_6 a_6 \pm d_5 a_4 \quad (3.20)$$

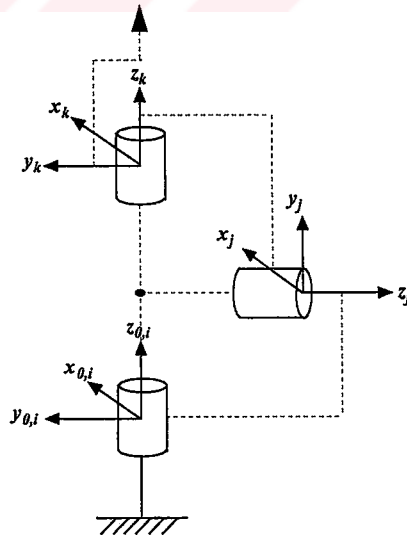
Denklemden,  $n_4$ ,  ${}^0_4T$  matrisindeki 1. kolondur. Bu çalışmada kullanılan eklem kaçıklıklı bilek düzenleşimi, Şekil 3.3'te görülen  $l_4$  ve  $d_6$  D-H değişkenlerini içeren bir yapıya sahiptir. Denklem 3.20'den faydalanarak iki veya üç açı birlikte iteratif olarak çözülür. Bu çözüm Denklem 3.21'deki gibi gösterilebilir.

$$q_4 \rightarrow (q_1 \ q_2 \ q_3) \rightarrow (q_4 \ q_5 \ q_6) \quad (3.21)$$

Denklemden,  $q_i$  eklem değişkenlerini göstermektedir. İki veya üç eklem değişkeni sayısal olarak çözüldükten sonra geri kalan eklem değişkenleri analitik olarak çözülür.

### 3.3. Endüstriyel Robotlarda Kullanılan Bilek Düzenleşimleri

Endüstriyel robotlarda Euler bileği ve eklem kaçıklıklı bilek olmak üzere genel olarak iki farklı bilek düzenleşimi kullanılmaktadır. Euler bilekli düzenleşiminde üç eksen, bir noktada kesişirken eklem kaçıklıklı bilek düzenleşiminde eksenlerin kesişmeleri  $d$  eklem kayması ve  $a$  bağ uzunluğu konularak engellenir. Şekil 3.2'de Euler bileğinin düzenleşimi görülmektedir.



Şekil 3.2. Euler bileğinin düzenleşimi.

Şekil 3.2'de katı gövde yapısı görülen Euler bileğinin D-H değişkenleri, Tablo 3.1'deki gibi çıkarılır.

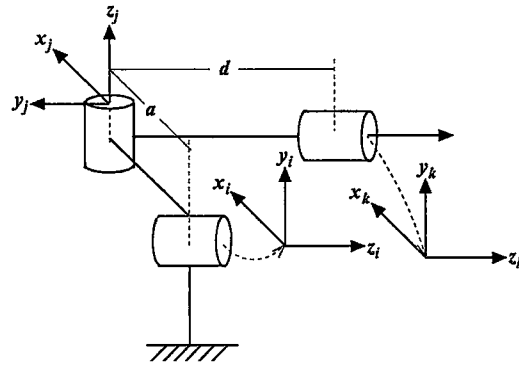
**Tablo 3.1.** Euler bileğinin D-H değişkenleri

	$\theta$	$\alpha$	$a$	$d$
i	$\theta_i$	0	0	0
j	$\theta_j$	90	0	0
k	$\theta_k$	-90	0	0

Tablo 3.1'deki D-H değişkenlerden yararlanarak Euler bileğinin ileri yön kinematik matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_k T &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_k & -\cos \theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i c\theta_j c\theta_k - s\theta_i s\theta_k & -c\theta_i c\theta_j s\theta_k - s\theta_i c\theta_k & -c\theta_i s\theta_j & 0 \\ s\theta_i c\theta_j c\theta_k + c\theta_i s\theta_k & -s\theta_i c\theta_j s\theta_k + c\theta_i c\theta_k & -s\theta_i s\theta_j & 0 \\ s\theta_j c\theta_k & -s\theta_j s\theta_k & c\theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

şekil 3.3'de eklem kaçıklıklı bileğın düzenleşimi görölmektedir.



**şekil 3.3.** Eklem kaçıklıklı bileğın düzenleşimi.

şekil 3.3'de katı gövde yapısı görölen eklem kaçıklıklı bileğın D-H değişkenleri Tablo 3.2'deki gibi çıkarılır.

**Tablo 3.2.** Eklem kaçıklıklı bileğin D-H değişkenleri.

	$\theta$	$\alpha$	$a$	$d$
i	$\theta_i$	0	0	0
j	$\theta_j$	90	$a$	0
k	$\theta_k$	-90	0	$d$

Tablo 3.2'deki D-H değişkenlerden yararlanarak eklem kaçıklıklı bileğin ileri yön kinematik matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

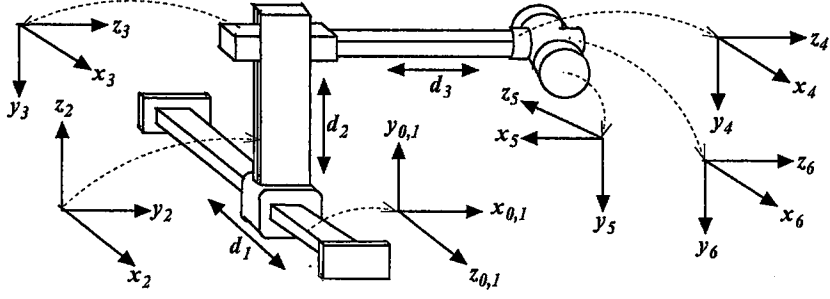
$$\begin{aligned}
 {}^0_k T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ -\sin\theta_k & -\cos\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i c\theta_j c\theta_k - s\theta_i s\theta_k & -c\theta_i c\theta_j s\theta_k - s\theta_i c\theta_k & -c\theta_i s\theta_j & \cdot \\ s\theta_i c\theta_j c\theta_k + c\theta_i s\theta_k & -s\theta_i c\theta_j s\theta_k + c\theta_i c\theta_k & -s\theta_i s\theta_j & \cdot \\ s\theta_j c\theta_k & -s\theta_j s\theta_k & c\theta_j & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -d(c\theta_i s\theta_j) + a(c\theta_i) \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d(s\theta_i s\theta_j) + a(s\theta_i) \\ \cdot & \cdot & \cdot & d(c\theta_j) \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

### 3.4. Euler Bilekli Endüstriyel Robotların Ters Kinematığı

Bu bölümde, temel onaltı adet endüstriyel robota Euler bileği eklenerek ters kinematik çözümleri gerçekleştirilmiştir.

#### 3.4.1. Euler bilekli SS robotunun ters kinematığı

SS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.4'te ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.3'te verilmiştir. Tablo 3.3'teki D-H değişkenleri kullanılarak elde edilen matrisler ve ters kinematik problemin çözümünde kullanılan Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler EK-D'de verilmiştir.



Şekil 3.4. SS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.3. Euler bilekli SS robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	90	-90	0	$d_2$
3	0	90	0	$d_3$
4	$\theta_4$	0	0	$d_4$
5	$\theta_5$	-90	0	0
6	$\theta_6$	90	0	0

Prizmatik eklem değişkeni  $d_3$ , Denklem 3.4'teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_3 = p_x - d_4 \quad (3.24)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.4'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = p_y \quad (3.25)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_1$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_1 = p_z \quad (3.26)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.4'teki (1,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2(\pm\sqrt{1-r_{13}^2}, r_{13}) \quad (3.27)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.4'teki (1,1) ve (1,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

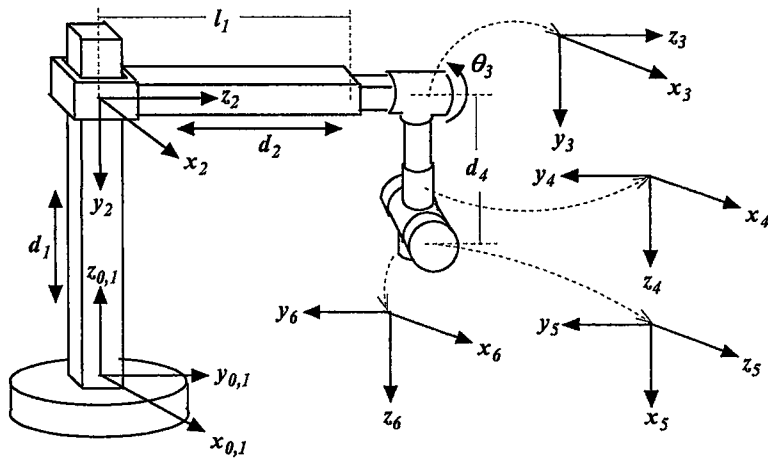
$$\theta_6 = A \tan 2\left(\frac{r_{12}}{\sin \theta_5}, -\frac{r_{11}}{\sin \theta_5}\right) \quad (3.28)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.4'teki (2,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{r_{23}}{\sin \theta_5}, -\frac{r_{33}}{\sin \theta_5}\right) \quad (3.29)$$

### 3.4.2. Euler bilekli SC robotunun ters kinematiği

SC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.5'de ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.4'de verilmiştir.



Şekil 3.5. SC robotunun Euler bilekli düzenleşimi.



**Tablo 3.4.** Euler bilekli SC robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	0	90	0	$-d_2$
3	$\theta_3$	0	0	$-l_1$
4	$\theta_4$	90	0	$d_4$
5	$\theta_5$	90	0	0
6	$\theta_6$	-90	0	0

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.4'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = p_y - l_1 \quad (3.30)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.4'teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\frac{p_x}{d_4}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{p_x}{d_4}\right)^2}\right) \quad (3.31)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_1$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_1 = p_z + d_4 \cos \theta_3 \quad (3.32)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.7'deki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2(-r_{23}, c\theta_3 r_{13} + s\theta_3 r_{33}) \quad (3.33)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.7'deki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

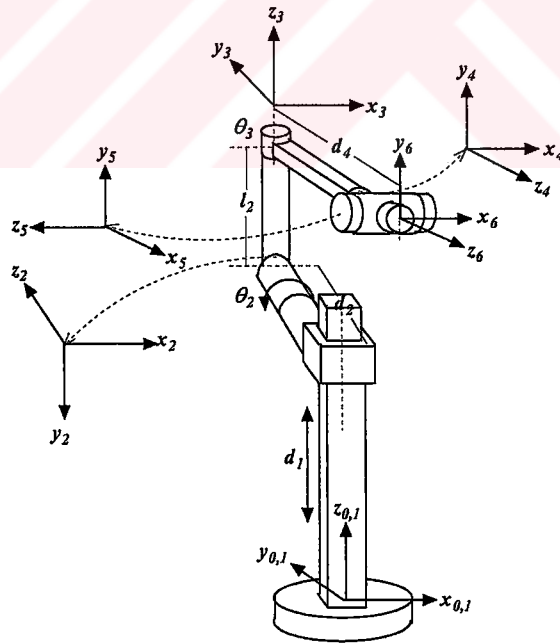
$$\theta_5 = A \tan 2(-c\theta_3 c\theta_4 r_{13} + s\theta_4 r_{23} - s\theta_3 c\theta_4 r_{33}, s\theta_3 r_{13} - c\theta_3 r_{33}) \quad (3.34)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.7'deki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2(c\theta_3 s\theta_4 r_{11} + c\theta_4 r_{21} + s\theta_3 s\theta_4 r_{31}, c\theta_3 s\theta_4 r_{12} + c\theta_4 r_{22} + s\theta_3 s\theta_4 r_{32}) \quad (3.35)$$

### 3.4.3. Euler bilekli SN robotunun ters kinematiği

SN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.6'da ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.5'te verilmiştir.



Şekil 3.6. SN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

**Tablo 3.5.** Euler bilekli SN Robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	$\theta_2$	90	0	$-d_2$
3	$\theta_3$	-90	0	$l_2$
4	$\theta_4$	90	0	$d_4$
5	$\theta_5$	90	0	0
6	$\theta_6$	-90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.4'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{d_2 - p_y}{d_4}\right)^2}, \frac{d_2 - p_y}{d_4}\right) \quad (3.36)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.4'teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2(-l_2, d_4 s \theta_3) \pm A \tan 2(\sqrt{l_2^2 + d_4^2 s^2 \theta_3 - p_x^2}, p_x) \quad (3.37)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_1$ , Denklem 3.4'deki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_1 = p_z - d_4 s \theta_2 s \theta_3 - l_2 c \theta_2 \quad (3.38)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.6'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - (c\theta_2 s\theta_3 r_{13} - c\theta_3 r_{23} + s\theta_2 s\theta_3 r_{33})^2}, c\theta_2 s\theta_3 r_{13} - c\theta_3 r_{23} + s\theta_2 s\theta_3 r_{33}\right) \quad (3.39)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.6'daki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

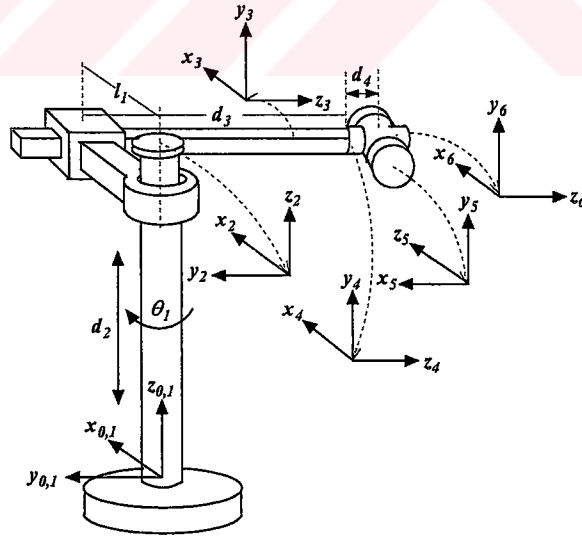
$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{s\theta_2 r_{13} - c\theta_2 r_{33}}{\sin \theta_5}, -\frac{c\theta_2 c\theta_3 r_{13} + s\theta_3 r_{23} + s\theta_2 c\theta_3 r_{33}}{\sin \theta_5}\right) \quad (3.40)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.6'daki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2\left(\frac{-c\theta_2 s\theta_3 r_{12} + c\theta_3 r_{22} - s\theta_2 s\theta_3 r_{32}}{s\theta_5}, \frac{c\theta_2 s\theta_3 r_{11} - c\theta_3 r_{21} + s\theta_2 s\theta_3 r_{31}}{s\theta_5}\right) \quad (3.41)$$

#### 3.4.4. Euler bilekli CS robotunun ters kinematığı

CS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.7'de ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.6'da verilmiştir.



Şekil 3.7. CS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

**Tablo 3.6.** Euler bilekli CS robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	0	0	0	$d_2$
3	0	90	$l_1$	$d_3$
4	$\theta_4$	0	0	$d_4$
5	$\theta_5$	-90	0	0
6	$\theta_6$	90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.4'teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) \pm A \tan 2(\sqrt{p_x^2 + p_y^2} - l_1^2, l_1) \quad (3.42)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = p_z \quad (3.43)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_3$ , Denklem 3.4'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_3 = s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y - d_4 \quad (3.44)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.7'deki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = \pm A \tan 2(r_{33}, c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23}) \quad (3.45)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.7'deki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

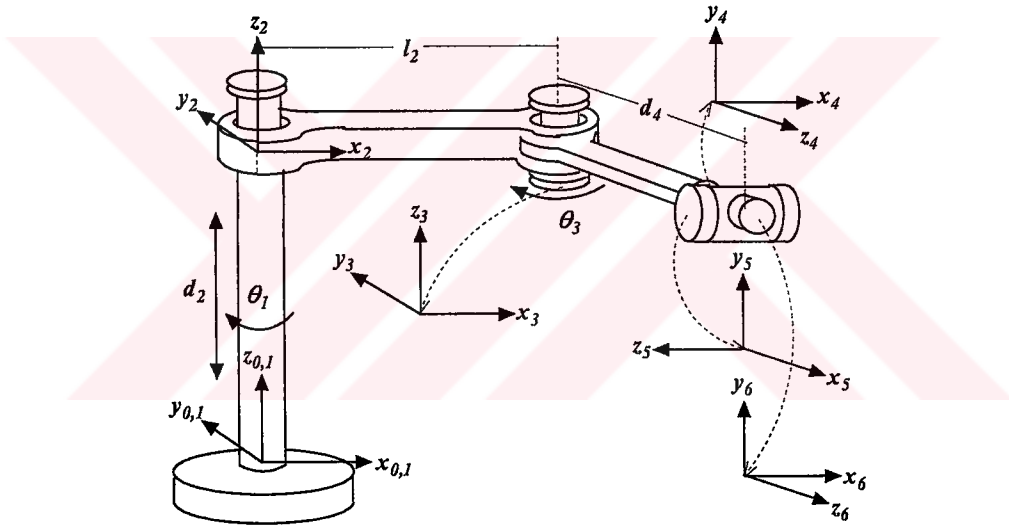
$$\theta_5 = A \tan 2(c\theta_1 c\theta_4 r_{13} + s\theta_1 c\theta_4 r_{23} + s\theta_4 r_{33}, s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23}) \quad (3.46)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.7'deki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2(-c\theta_1 s\theta_4 r_{11} - s\theta_1 s\theta_4 r_{21} + c\theta_4 r_{31}, -c\theta_1 s\theta_4 r_{12} - s\theta_1 s\theta_4 r_{22} + c\theta_4 r_{32}) \quad (3.47)$$

### 3.4.5. Euler bilekli CC robotunun ters kinematiği

CC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimini Şekil 3.8'de ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.7'de verilmiştir.



Şekil 3.8. CC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.7. Euler bilekli CC robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	0	0	0	$d_2$
3	$\theta_3$	0	$l_2$	0
4	$\theta_4$	90	0	$d_4$
5	$\theta_5$	90	0	0
6	$\theta_6$	-90	0	0

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = p_z \quad (3.48)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.4'teki (1,3) ve (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenerek karelerinin alınıp alt alta toplanmasıyla bulunur (Üçüncü dönel eklem açısının bulunması için gerçekleştirilen ara işlemler Ek-D'de verilmiştir).

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 - d_4^2 - l_2^2}{2l_2 d_4}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 - d_4^2 - l_2^2}{2l_2 d_4}\right)^2}\right) \quad (3.49)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.4'teki (1,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) \pm A \tan 2\left(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - (d_4 s \theta_3 + l_2)^2}, d_4 s \theta_3 + l_2\right) \quad (3.50)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.7'deki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = \pm A \tan 2(-r_{33}, -c\theta_{13}r_{13} - s\theta_{13}r_{23}) \quad (3.51)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.7'teki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

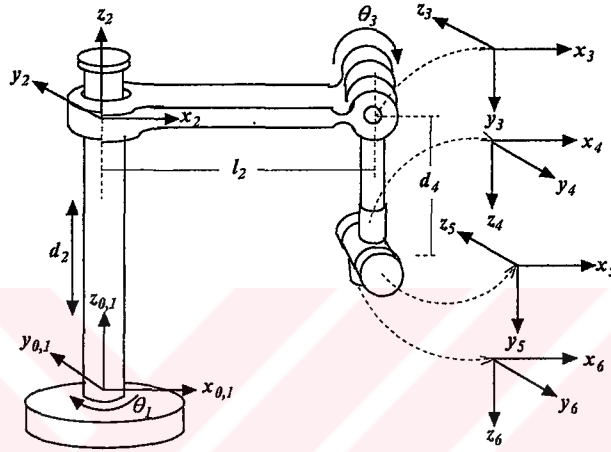
$$\theta_5 = A \tan 2(-c\theta_4 c\theta_{13}r_{13} - s\theta_{13}c\theta_4 r_{23} - s\theta_4 r_{33}, s\theta_{13}r_{13} - c\theta_{13}r_{23}) \quad (3.52)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.7'teki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2(-c\theta_{13}s\theta_4r_{11} - s\theta_{13}s\theta_4r_{21} + c\theta_4r_{31}, -c\theta_{13}s\theta_4r_{12} - s\theta_{13}s\theta_4r_{22} + c\theta_4r_{32}) \quad (3.53)$$

### 3.4.6. Euler bilekli CR robotunun ters kinematığı

CR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.9'da ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.8'de verilmiştir.



Şekil 3.9. CR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.8. Euler bilekli CR robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	0	0	0	$d_2$
3	$\theta_3$	90	$l_2$	0
4	$\theta_4$	90	0	$d_4$
5	$\theta_5$	-90	0	0
6	$\theta_6$	90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.4'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = \pm A \tan 2(p_y, p_x) \quad (3.54)$$



Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.4'teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\frac{c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - l_2}{d_4}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - l_2}{d_4}\right)^2}\right) \quad (3.55)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = p_z + d_4 c\theta_3 \quad (3.56)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.7'deki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = \pm A \tan 2(s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23}, c\theta_1 c\theta_3 r_{13} + s\theta_1 c\theta_3 r_{23} + s\theta_3 r_{33}) \quad (3.57)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.7'deki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2(i_{CR} r_{13} + j_{CR} r_{23} + s\theta_3 c\theta_4 r_{33}, c\theta_1 s\theta_3 r_{13} - s\theta_1 s\theta_3 r_{32} - c\theta_3 r_{33}) \quad (3.58)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.7'deki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2(k_{RC} r_{11} - l_{RC} r_{21} - s\theta_3 s\theta_4 r_{31}, k_{RC} r_{12} - l_{RC} r_{22} - s\theta_3 s\theta_4 r_{32}) \quad (3.59)$$

Denklemdaki kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$i_{CR} = c\theta_1 c\theta_3 c\theta_4 + s\theta_1 s\theta_4 \quad (3.60)$$

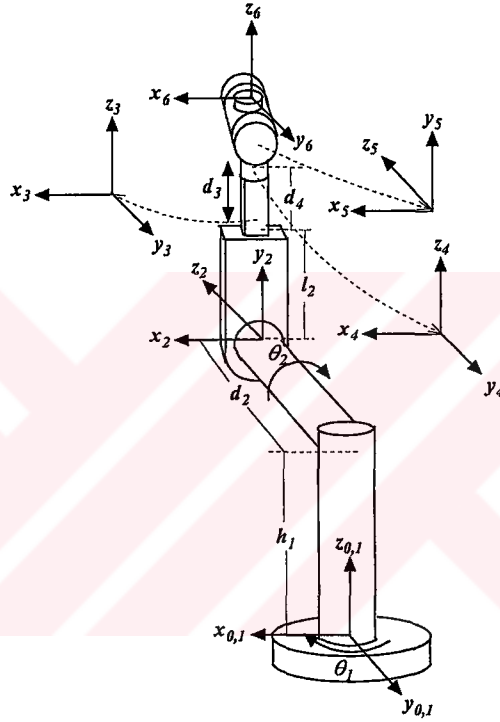
$$j_{CR} = s\theta_1 c\theta_3 c\theta_4 - s\theta_1 s\theta_4 \quad (3.61)$$

$$k_{CR} = -c\theta_1 c\theta_3 s\theta_4 + s\theta_1 c\theta_4 \quad (3.62)$$

$$l_{CR} = s\theta_1 c\theta_3 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_4 \quad (3.63)$$

### 3.4.7. Euler bilekli NS robotunun ters kinematığı

NS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.10'da ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.9'da verilmiştir.



Şekil 3.10. NS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.9. Euler bilekli NS robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	90	0	$d_2$
3	0	-90	0	$d_3 + l_2$
4	$\theta_4$	0	0	$d_4$
5	$\theta_5$	90	0	0
6	$\theta_6$	-90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.5'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(p_x, -p_y) \pm A \tan 2(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}, d_2) \quad (3.64)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.5'teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_2 = \pm A \tan 2(c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y, -p_z + h_1) \quad (3.65)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_3$ , Denklem 3.5'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_3 = -s\theta_2 (c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y) + c\theta_2 (p_z - h_1) - l_2 - d_4 \quad (3.66)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.6'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - (-c\theta_1 s\theta_2 r_{13} - s\theta_1 s\theta_2 r_{23} + c\theta_2 r_{33})^2}, -c\theta_1 s\theta_2 r_{13} - s\theta_1 s\theta_2 r_{23} + c\theta_2 r_{33}) \quad (3.67)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.6'daki (1,3) ve (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

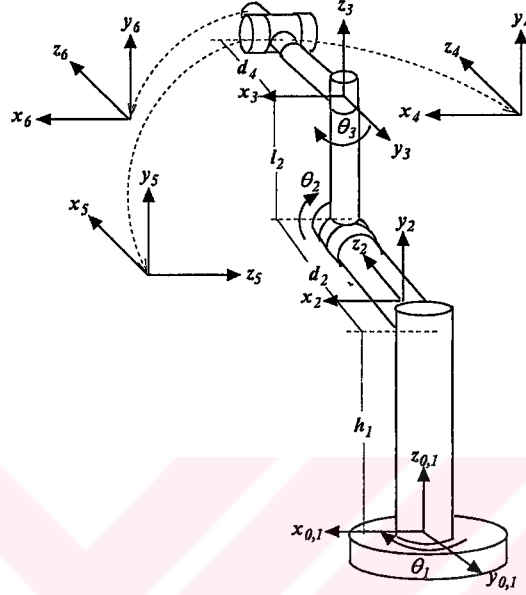
$$\theta_4 = A \tan 2(-s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23}, c\theta_1 c\theta_2 r_{13} + s\theta_1 c\theta_2 r_{23} + s\theta_2 r_{33}) \quad (3.68)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.6'daki (3,1) ve (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2(-c\theta_1 s\theta_2 r_{12} - s\theta_1 s\theta_2 r_{22} + c\theta_2 r_{32}, -c\theta_1 s\theta_2 r_{11} - s\theta_1 s\theta_2 r_{21} + c\theta_2 r_{31}) \quad (3.69)$$

### 3.4.8. Euler bilekli NN robotunun ters kinematığı

NN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.11’de ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.10’da verilmiştir.



Şekil 3.11. NN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.10. Euler bilekli NN robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	90	0	$d_2$
3	$\theta_3$	-90	0	$l_2$
4	$\theta_4$	90	0	$d_4$
5	$\theta_5$	90	0	0
6	$\theta_6$	-90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.4’teki (1,4), (2,4) ve (3,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alınıp alt alta toplanmasıyla bulunur.

$$\theta_3 = \text{Atan} 2\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_4d_2}\right)^2}\right),$$

$$\frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_4d_2} \quad (3.70)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2(d_4 s \theta_3, l_2) \pm A \tan 2(\sqrt{d_4^2 s^2 \theta_3 + l_2^2 - (p_z - h_1)^2}, p_z - h_1) \quad (3.71)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.4'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(p_x, -p_y) \pm A \tan 2(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - (d_4 c \theta_3 + d_2)^2}, d_4 c \theta_3 + d_2) \quad (3.72)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.6'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = \pm A \tan 2\left(\sqrt{1 - (-l_{NN} r_{13} - m_{NN} r_{23} + s \theta_2 s \theta_3 r_{33})^2}, -l_{NN} r_{13} - m_{NN} r_{23} + s \theta_2 s \theta_3 r_{33}\right) \quad (3.73)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.6'daki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{-c \theta_1 s \theta_2 r_{13} - s \theta_1 s \theta_2 r_{23} + c \theta_2 r_{33}}{s \theta_5}, \frac{j_{NN} r_{13} + k_{NN} r_{23} + s \theta_2 c \theta_3 r_{33}}{s \theta_5}\right) \quad (3.74)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.6'daki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2\left(\frac{l_{NN} r_{12} + m_{NN} r_{22} - s \theta_2 s \theta_3 r_{32}}{s \theta_5}, \frac{-l_{NN} r_{11} - m_{NN} r_{21} + s \theta_2 s \theta_3 r_{31}}{s \theta_5}\right) \quad (3.75)$$

Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$j_{NN} = c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3 \quad (3.76)$$

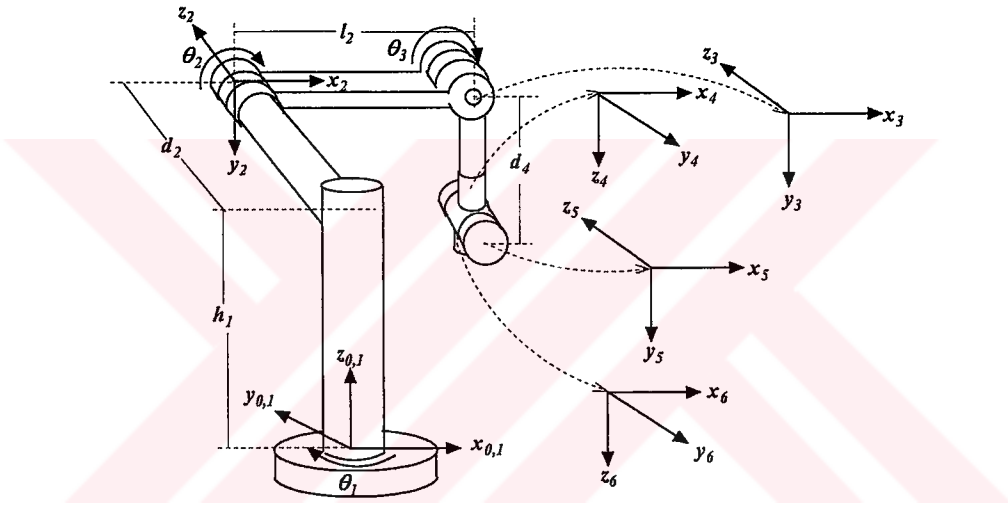
$$k_{NN} = s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3 \quad (3.77)$$

$$l_{NN} = -c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3 \quad (3.78)$$

$$m_{NN} = -s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3 \quad (3.79)$$

### 3.4.9. Euler bilekli NR robotunun ters kinematiği

NR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.12'de ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.11'de verilmiştir.



Şekil 3.12. NR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.11. Euler bilekli NR robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	-90	0	$d_2$
3	$\theta_3$	0	$l_2$	0
4	$\theta_4$	-90	0	$d_4$
5	$\theta_5$	-90	0	0
6	$\theta_6$	90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.4'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(-p_x, p_y) \pm A \tan 2(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}, d_2) \quad (3.80)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.4'teki (1,4), (2,4) ve (3,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alınıp alt alta toplanmasıyla bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_4l_2}, \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_4l_2}\right)^2}\right) \quad (3.81)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2(d_4s\theta_3 - l_2, -d_4c\theta_3) \pm A \tan 2(\sqrt{d_4^2 + l_2^2 - 2l_2d_4s\theta_3 - (p_z - h_1)^2}, p_z - h_1) \quad (3.82)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.6'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = \pm A \tan 2(\sqrt{1 - (-c\theta_1s\theta_{23}r_{13} - s\theta_1s\theta_{23}r_{23} - c\theta_{23}r_{33})^2}, -c\theta_1s\theta_{23}r_{13} - s\theta_1s\theta_{23}r_{23} - c\theta_{23}r_{33}) \quad (3.83)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.6'daki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

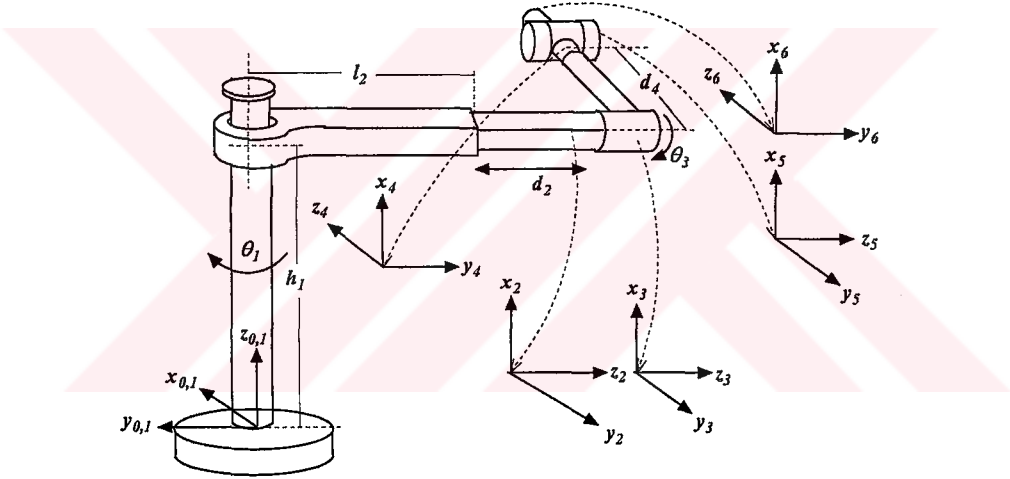
$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{s\theta_1r_{13} - c\theta_1r_{23}}{s\theta_5}, \frac{c\theta_1c\theta_{23}r_{13} + s\theta_1c\theta_{23}r_{23} - s\theta_{23}r_{33}}{s\theta_5}\right) \quad (3.84)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.6'daki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2 \left( -\frac{c\theta_1 s\theta_{23} r_{12} + s\theta_1 s\theta_{23} r_{22} + c\theta_{23} r_{32}}{\sin \theta_5}, \frac{c\theta_1 s\theta_{23} r_{11} + s\theta_1 s\theta_{23} r_{21} + c\theta_{23} r_{31}}{\sin \theta_5} \right) \quad (3.85)$$

### 3.4.10. Euler bilekli RC robotunun ters kinematiği

RC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.13'de ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.12'de verilmiştir.



Şekil 3.13. RC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.12. Euler bilekli RC robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	90	90	0	$d_2$
3	$\theta_3$	0	0	$l_2$
4	$\theta_4$	-90	0	$d_4$
5	$\theta_5$	90	0	0
6	$\theta_6$	-90	0	0



Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\frac{h_1 - p_z}{d_4}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{h_1 - p_z}{d_4}\right)^2}, \right) \quad (3.86)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.4'teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) \pm A \tan 2(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_4^2 c^2 \theta_3}, -d_4 c \theta_3) \quad (3.87)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.4'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y - l_2 \quad (3.88)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.6'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = \pm A \tan 2\left(\sqrt{1 - (-c\theta_1 c\theta_3 r_{13} - s\theta_1 c\theta_3 r_{23} - s\theta_3 r_{33})^2}, -c\theta_1 c\theta_3 r_{13} - s\theta_1 c\theta_3 r_{23} - s\theta_3 r_{33}\right) \quad (3.89)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.6'daki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

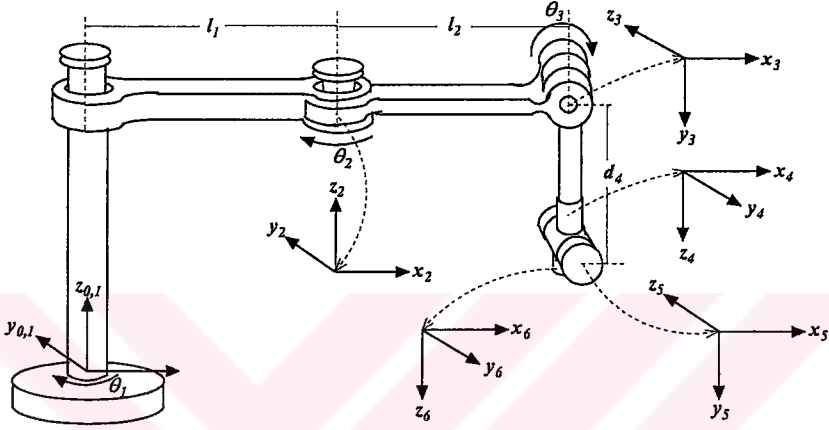
$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23}}{\sin \theta_5}, \frac{c\theta_1 s\theta_3 r_{13} + s\theta_1 s\theta_3 r_{23} - c\theta_3 r_{33}}{\sin \theta_5}\right) \quad (3.90)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.6'daki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2\left(\frac{c\theta_1 c\theta_3 r_{12} + s\theta_1 c\theta_3 r_{22} + s\theta_3 r_{32}}{\sin \theta_5}, \frac{-c\theta_1 c\theta_3 r_{11} - s\theta_1 c\theta_3 r_{21} - s\theta_3 r_{31}}{\sin \theta_5}\right) \quad (3.91)$$

### 3.4.11. Euler bilekli RN robotunun ters kinematiği

RN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.14'de ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.13'de verilmiştir.



Şekil 3.14. RN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.13. Euler bilekli RN robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	0	$l_1$	0
3	$\theta_3$	90	$l_2$	0
4	$\theta_4$	90	0	$d_4$
5	$\theta_5$	-90	0	0
6	$\theta_6$	90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{-p_z + h_1}{d_4}\right)^2}, \frac{-p_z + h_1}{d_4}\right) \quad (3.92)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.4'teki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(2p_y l_1, 2l_1 p_x) \pm A \tan 2(\sqrt{4p_y^2 l_1^2 + 4p_x^2 l_1^2 - (p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - (d_4 s \theta_3 + l_2)^2)^2}, p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - (d_4 s \theta_3 + l_2)) \quad (3.93)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.4'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2\left(\frac{-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y}{d_4 s \theta_3 + l_2}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y}{d_4 s \theta_3 + l_2}\right)^2}\right) \quad (3.94)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.6'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = \pm A \tan 2\left(\sqrt{1 - (s\theta_3 c\theta_{12} r_{13} + s\theta_3 s\theta_{12} r_{23} - c\theta_3 r_{33})^2}, s\theta_3 c\theta_{12} r_{13} + s\theta_3 s\theta_{12} r_{23} - c\theta_3 r_{33}\right) \quad (3.95)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.6'daki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

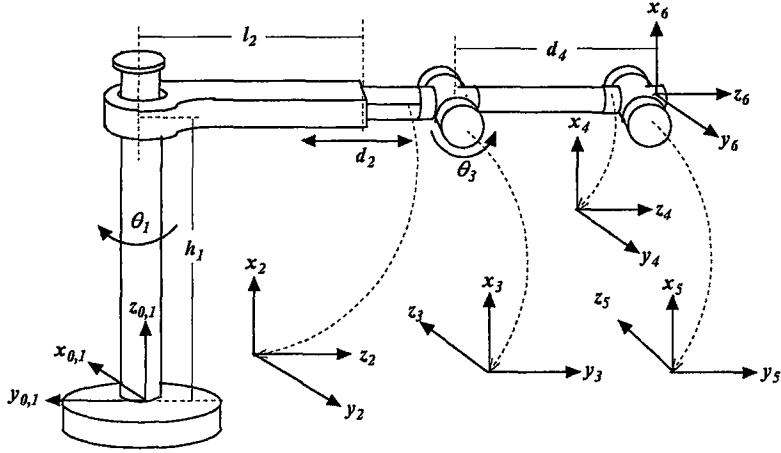
$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{s\theta_{12} r_{13} - c\theta_{12} r_{23}}{s\theta_5}, \frac{c\theta_3 c\theta_{12} r_{13} + c\theta_3 s\theta_{12} r_{23} + s\theta_3 r_{33}}{s\theta_5}\right) \quad (3.96)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.6'daki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2\left(\frac{s\theta_3 (c\theta_{12} r_{12} + s\theta_{12} r_{22}) - c\theta_3 r_{32}}{s\theta_5}, \frac{-s\theta_3 (c\theta_{12} r_{11} + s\theta_{12} r_{21}) + c\theta_3 r_{31}}{s\theta_5}\right) \quad (3.97)$$

### 3.4.12. Euler bilekli RR robotunun ters kinematığı

RR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.15’de ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.14’de verilmiştir.



Şekil 3.15. RR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.14. Euler bilekli RR robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	90	90	0	$l_2 + d_2$
3	$\theta_3$	-90	0	0
4	$\theta_4$	90	0	$d_4$
5	$\theta_5$	90	0	0
6	$\theta_6$	-90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.4’deki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\frac{p_z - h_1}{d_4}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{p_z - h_1}{d_4}\right)^2}\right) \quad (3.98)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.4’teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının

eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = \pm A \tan 2(-p_x, p_y) \quad (3.99)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.4'deki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y - d_4 c\theta_3 - l_2 \quad (3.100)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.6'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = \pm A \tan 2\left(\frac{\sqrt{1 - (s\theta_1 c\theta_3 r_{13} - c\theta_1 c\theta_3 r_{23} + s\theta_3 r_{33})^2}}{s\theta_1 c\theta_3 r_{13} - c\theta_1 c\theta_3 r_{23} + s\theta_3 r_{33}}\right) \quad (3.101)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.6'daki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

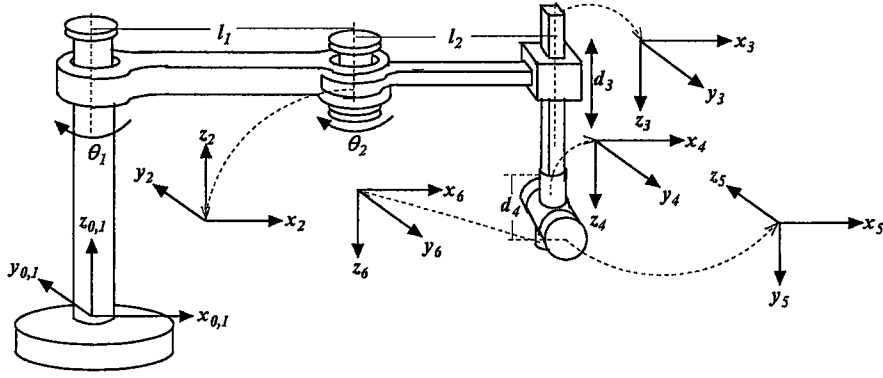
$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23}}{s\theta_5}, \frac{s\theta_1 s\theta_3 r_{13} - c\theta_1 s\theta_3 r_{23} - c\theta_3 r_{33}}{s\theta_5}\right) \quad (3.102)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.6'daki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2\left(\frac{-s\theta_1 c\theta_3 r_{12} + c\theta_1 c\theta_3 r_{22} - s\theta_3 r_{32}}{s\theta_5}, \frac{s\theta_1 c\theta_3 r_{11} - c\theta_1 c\theta_3 r_{21} + s\theta_3 r_{31}}{s\theta_5}\right) \quad (3.103)$$

### 3.4.13. Euler bilekli RS robotunun ters kinematığı

RS robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.16'da ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.15'te verilmiştir.



Şekil 3.16. RS Robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

Tablo 3.15. Euler bilekli RS robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	0	$l_1$	0
3	0	180	$l_2$	$d_3$
4	$\theta_4$	0	0	$d_4$
5	$\theta_5$	-90	0	0
6	$\theta_6$	90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.4'teki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) \pm A \tan 2(\sqrt{4l_1^2(p_x^2 + p_y^2) - (p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2)^2}, p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2), \quad (3.104)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.4'teki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_2 = \pm A \tan 2(-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y, c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - l_1) \quad (3.105)$$

Dönel eklem değişkeni  $d_3$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının

eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_3 = h_1 - p_z - d_4 \quad (3.106)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.5'teki (1,3) ve (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2(-s\theta_{12}r_{13} + c\theta_{12}r_{23}, -c\theta_{12}r_{13} - s\theta_{12}r_{23}) \quad (3.107)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.5'teki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

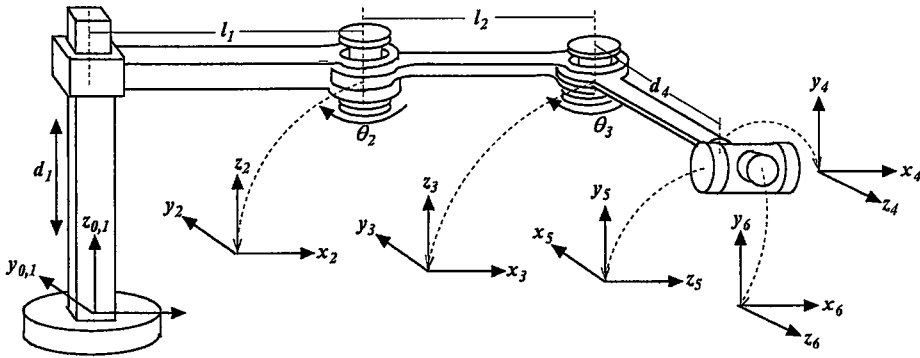
$$\theta_5 = A \tan 2(\pm\sqrt{1-r_{33}^2}, -r_{33}) \quad (3.108)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.5'teki (3,1) ve (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2(-r_{32}, r_{31}) \quad (3.109)$$

### 3.4.14. Euler bilekli SR robotunun ters kinematiği

SR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.17'de ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.16'da verilmiştir.



Şekil 3.17. SR robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

**Tablo 3.16.** Euler bilekli SR robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	$\theta_2$	0	$l_1$	0
3	$\theta_3$	0	$l_2$	0
4	$\theta_4$	90	0	$d_4$
5	$\theta_5$	90	0	0
6	$\theta_6$	-90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.5'teki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2(-p_y, l_1 - p_x) \pm A \tan 2(\sqrt{(-2l_2 p_y)^2 + (2l_1 l_2 - 2l_2 p_x)^2 - k^2}, k) \quad (3.110)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$k = d_4^2 + 2l_1 p_x - p_x^2 - p_y^2 - l_1^2 - l_2^2 \quad (3.111)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_1$ , Denklem 3.5'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_1 = p_z \quad (3.112)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.5'teki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2(c\theta_2(p_x - l_1) + s\theta_2 p_y - l_2, s\theta_2(p_x - l_1) - c\theta_2 p_y) \quad (3.113)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.7'teki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.



$$\theta_4 = \pm A \tan 2(r_{33}, c\theta_{23}r_{13} + s\theta_{23}r_{23}) \quad (3.114)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.7'deki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

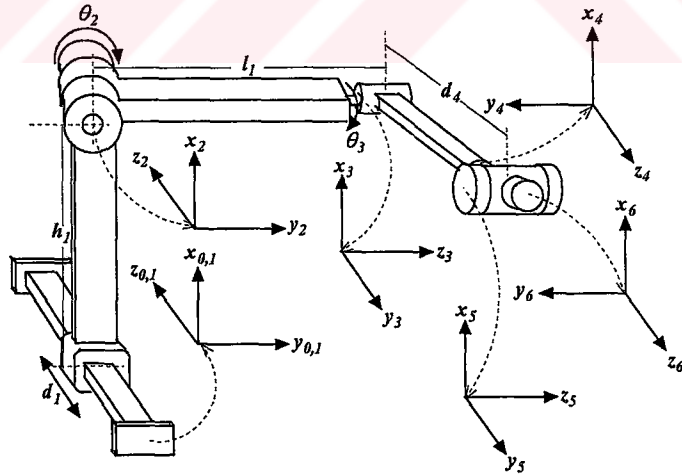
$$\theta_5 = A \tan 2(c\theta_4 c\theta_{23}r_{13} + c\theta_4 s\theta_{23}r_{23} + s\theta_4 r_{33}, s\theta_{23}r_{13} - c\theta_{23}r_{23}) \quad (3.115)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.7'deki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2(-s\theta_4 c\theta_{23}r_{11} - s\theta_4 s\theta_{23}r_{21} + c\theta_4 r_{31}, -s\theta_4 c\theta_{23}r_{12} - s\theta_4 s\theta_{23}r_{22} + c\theta_4 r_{32}) \quad (3.116)$$

### 3.4.15. Euler bilekli CN robotunun ters kinematiği

CN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.18'de ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.17'de verilmiştir.



Şekil 3.18. CN robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

**Tablo 3.17.** Euler bilekli CN robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	$\theta_2$	0	$h_1$	0
3	$\theta_3$	90	0	$-l_1$
4	$\theta_4$	90	0	$d_4$
5	$\theta_5$	-90	0	0
6	$\theta_6$	90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.5'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2(-p_x + h_1, p_y) \pm A \tan 2(\sqrt{p_x^2 + h_1^2 - 2p_x h_1 + p_y^2 - l_1^2}, l_1) \quad (3.117)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$  Denklem 3.5'teki, (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\frac{c\theta_2(p_x - h_1) + s\theta_2 p_y}{d_4}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{c\theta_2(p_x - h_1) + s\theta_2 p_y}{d_4}\right)^2}\right) \quad (3.118)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_1$ , Denklem 3.5'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_1 = d_4 c\theta_3 + p_z \quad (3.119)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.6'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - (c\theta_2 s\theta_3 r_{13} + s\theta_2 s\theta_3 r_{23} - c\theta_3 r_{33})^2}, c\theta_2 s\theta_3 r_{13} + s\theta_2 s\theta_3 r_{23} - c\theta_3 r_{33}\right) \quad (3.120)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.6'daki (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

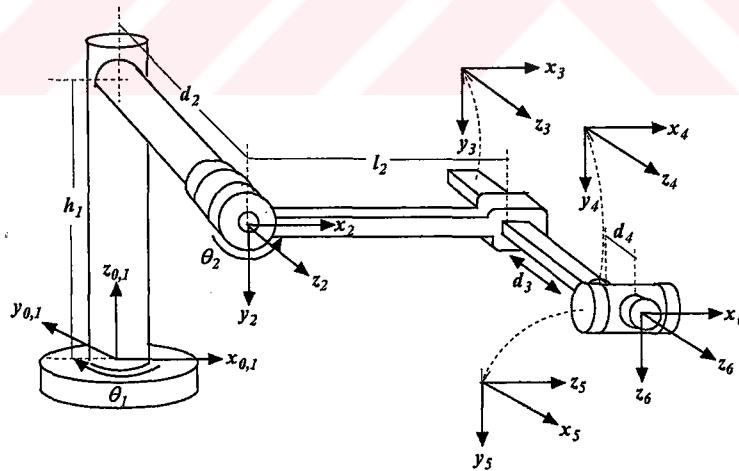
$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{s\theta_2 r_{13} - c\theta_2 r_{23}}{\sin \theta_5}, \frac{c\theta_2 c\theta_3 r_{13} + s\theta_2 c\theta_3 r_{23} + s\theta_3 r_{33}}{\sin \theta_5}\right) \quad (3.121)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.6'daki (2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2\left(\frac{c\theta_2 s\theta_3 r_{12} + s\theta_2 s\theta_3 r_{22} - c\theta_3 r_{32}}{\sin \theta_5}, \frac{-c\theta_2 s\theta_3 r_{11} - s\theta_2 s\theta_3 r_{21} + c\theta_3 r_{31}}{\sin \theta_5}\right) \quad (3.122)$$

### 3.4.16. Euler bilekli NC robotunun ters kinematiği

NC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi Şekil 3.19'da ve bu düzenleşime göre çıkarılmış D-H değişkenleri Tablo 3.18'de verilmiştir.



Şekil 3.19. NC robotunun Euler bileği eklenmiş düzenleşimi.

**Tablo 3.18.** Euler bilekli NC robotu için çıkarılmış D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	90	0	$d_2$
3	0	0	$l_2$	$d_3$
4	$\theta_4$	0	0	$d_4$
5	$\theta_5$	90	0	0
6	$\theta_6$	-90	0	0

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2\left(\frac{p_z - h_1}{l_2}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{p_z - h_1}{l_2}\right)^2}\right) \quad (3.123)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.4'teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) \pm A \tan 2\left(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - l_2^2 c^2 \theta_2}, l_2 c \theta_2\right) \quad (3.124)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_3$ , Denklem 3.4'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_3 = s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y - d_2 - d_4 \quad (3.125)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.6'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - (s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23})^2}, s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23}\right) \quad (3.126)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.6'daki (1,3) ve (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{c\theta_1 s\theta_2 r_{13} + s\theta_1 s\theta_2 r_{23} - c\theta_2 r_{33}}{\sin\theta_5}, \frac{-c\theta_1 c\theta_2 r_{13} - s\theta_1 c\theta_2 r_{23} - s\theta_2 r_{33}}{\sin\theta_5}\right) \quad (3.127)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.6'daki (3,1) ve (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2\left(\frac{-s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22}}{\sin\theta_5}, \frac{s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21}}{\sin\theta_5}\right) \quad (3.128)$$

On altı adet endüstriyel robotun için gerçekleştirilen ters kinematik problem çözümlerinde her bir robot için elde edilen çözüm sayısı Tablo 3.19'da verilmiştir. Tabloda, M, manipülatörü, Ç.S. ise çözüm sayısını göstermektedir.

**Tablo 3.19.** Robotların Euler bilekli ters kinematik çözüm sayısı.

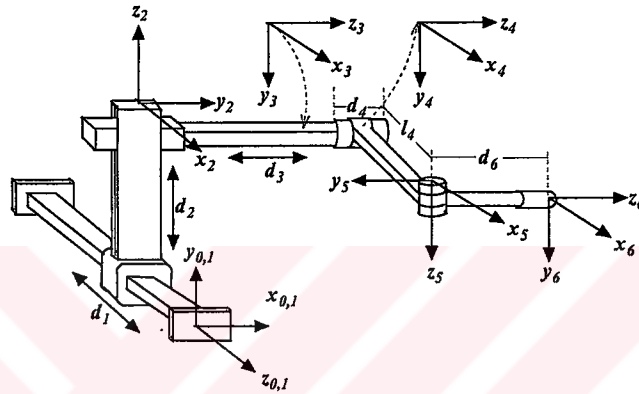
M	S	S	S	C	C	C	N	N	N	R	R	R	R	S	C	N
	S	C	N	S	C	R	S	N	R	C	N	R	S	R	N	C
Ç.S.	2	4	8	4	8	8	8	16	16	8	16	8	4	4	8	8

### 3.5. Eklem Kaçıklıklı Bilekli Endüstriyel Robotların Ters Kinematığı

Bu bölümde temel onaltı adet endüstriyel robota eklem kaçıklıklı bilek eklenerek ters kinematik çözümleri gerçekleştirilmiştir.

#### 3.5.1. Eklem kaçıklıklı bilekli SS robotunun ters kinematığı

SS robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi Şekil 3.20’de görülmektedir.



Şekil 3.20. SS robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

Eklem kaçıklıklı SS robotunun D-H değişkenleri Tablo 3.20’deki gibi çıkarılır.

Tablo 3.20. Eklem kaçıklıklı bilekli SS robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	90	-90	0	$d_2$
3	0	90	0	$d_3$
4	$\theta_4$	0	0	0
5	$\theta_5$	90	$-l_4$	0
6	$\theta_6$	-90	0	$d_6$

Tablo 3.20’deki D-H değişkenlerinden yararlanarak ileri yön kinematik matrisleri bulunur. D-H değişkenleri kullanılarak elde edilen matrisler ve ters kinematik

problemin çözümünde kullanılan Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler EK-E'de verilmiştir.

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.4'teki (1,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2 \left( \mp \sqrt{1 - r_{13}^2}, r_{13} \right) \quad (3.129)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_3$ , Denklem 3.4'teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_3 = p_x - d_6 c \theta_5 - d_4 \quad (3.130)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.4'teki (3,3) ve (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2 \left( -\frac{r_{23}}{s \theta_5}, \frac{r_{33}}{s \theta_5} \right) \quad (3.131)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_1$ , Denklem 3.4'teki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_1 = p_z - d_6 c \theta_4 s \theta_5 - l_4 c \theta_4 \quad (3.132)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.4'teki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = p_y + d_6 s \theta_4 s \theta_5 + l_4 s \theta_4 \quad (3.133)$$

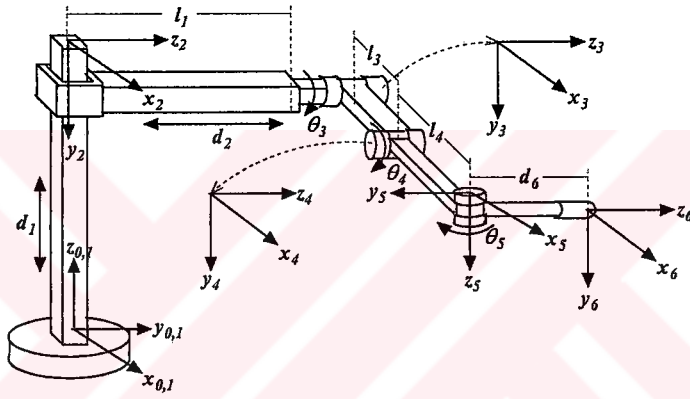
Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.4'teki (1,1) ve (1,2) karşılıklı matris

elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2 \left( -\frac{r_{12}}{s\theta_5}, \frac{r_{11}}{s\theta_5} \right) \quad (3.134)$$

### 3.5.2. Eklem kaçıklıklı bilekli SC robotunun ters kinematığı

Eklem kaçıklıklı bilekli SC robotunun düzenleşimi Şekil 3.21’de, D-H değişkenleri ise Tablo 3.21’de görülmektedir.



Şekil 3.21. SC robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

Tablo 3.21. Eklem kaçıklıklı bilekli SC Robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	0	90	0	$-d_2$
3	$\theta_3$	0	0	$-l_1$
4	$\theta_4$	0	$l_3$	0
5	$\theta_5$	90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	-90	0	$-d_6$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9’daki (1,2) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alınıp alt alta toplanması ve (3,2) matris elemanlarının



eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2(\mp \sqrt{r_{13}^2 + r_{33}^2}, -r_{23}) \quad (3.135)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.9'daki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = p_y + r_{23}d_6 - l_1 \quad (3.136)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = \pm A \tan 2(-r_{22}, r_{21}) \quad (3.137)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.9'daki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle oluşan  $c\theta_{34}$  değişkenlerini Denklem 3.5'in uygulanmasıyla elde edilen (1,4) karşılıklı matris elemanlarında yerine konmasıyla bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2(\mp \sqrt{1 - \left( \frac{r_{13}d_6^2 s\theta_5 + p_x d_6 s\theta_5 + r_{13}d_6 l_4}{l_3 d_6 s\theta_5} \right)^2}, \frac{r_{13}d_6^2 s\theta_5 + p_x d_6 s\theta_5 + r_{13}d_6 l_4}{l_3 d_6 s\theta_5}) \quad (3.138)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.9'daki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

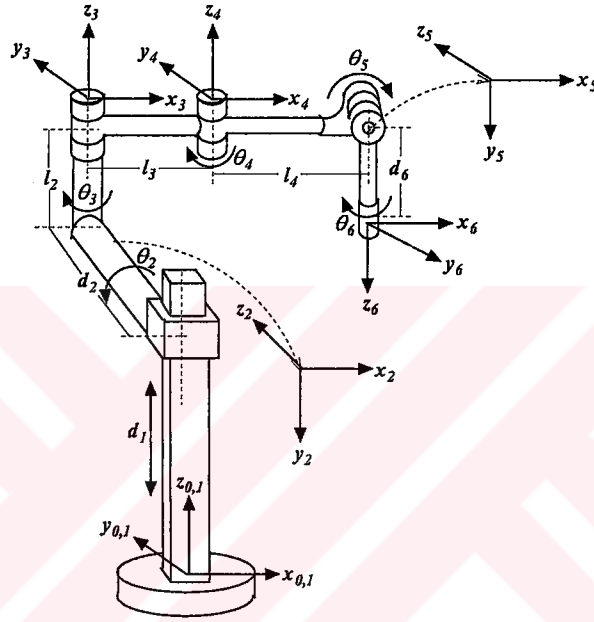
$$\theta_4 = A \tan 2(-l_4 s\theta_3, l_4 c\theta_3) \mp A \tan 2(\sqrt{l_4^2 - (r_{13}d_6 + p_x - l_3 c\theta_3)^2}, r_{13}d_6 + p_x - l_3 c\theta_3) \quad (3.139)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_1$ , Denklem 3.9'daki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_1 = -l_4 s\theta_{34} - l_3 s\theta_3 + r_{33} d_6 + p_z \quad (3.140)$$

### 3.5.3. Eklem kaçıklıklı bilekli SN robotunun ters kinematığı

Eklem kaçıklıklı bilekli SN robotunun düzenleşimi Şekil 3.22’de, D-H değişkenleri ise Tablo 3.22’de görülmektedir.



Şekil 3.22. SN robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

Tablo 3.22. Eklem kaçıklıklı bilekli SN Robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	$\theta_2$	90	0	$-d_2$
3	$\theta_3$	-90	0	$l_2$
4	$\theta_4$	0	$l_3$	0
5	$\theta_5$	90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	90	0	$d_6$

Denklem 3.141, Denklem 3.20'nin uygulanmasıyla aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\begin{bmatrix} l_3 c\theta_2 c\theta_3 - l_2 s\theta_2 \\ l_3 s\theta_3 + d_2 \\ l_3 s\theta_2 c\theta_3 + l_2 c\theta_2 + d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - d_6 \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} - l_4 \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_{34} \\ s\theta_{34} \\ s\theta_2 c\theta_{34} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

Denklem 3.141'de ikinci satırda oluşan eşitlikte  $\theta_4$ 'de başlangıç değeri verilerek üçüncü eklem değişkeni  $\theta_3$  bulunur. Daha sonra sırasıyla birinci satırda oluşan eşitlikten faydalanarak  $\theta_2$  ve üçüncü satırdaki eşitlikten de  $d_1$  bulunur. Sayısal çözüm gerçekleştirilirken Denklem 3.11'deki dönüşümden faydalanılır. Denklem 3.141'ait dönüşümü gerçekleştirilmiş denklem sistemleri EK-E'de verilmiştir.

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.6'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

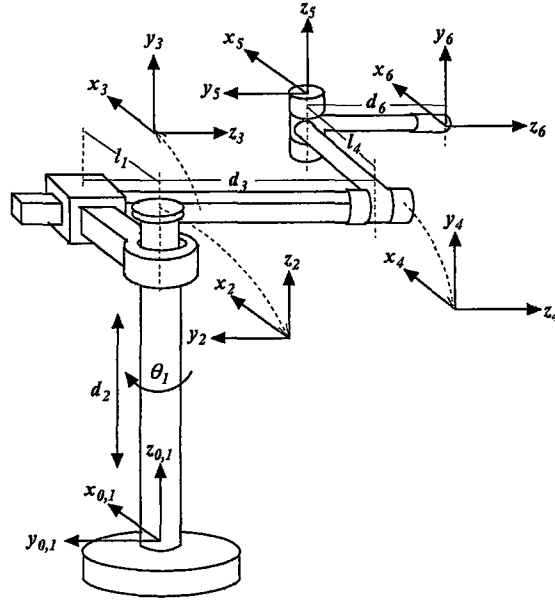
$$\theta_5 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - (s\theta_2 r_{13} - c\theta_2 r_{33})^2}, (s\theta_2 r_{13} - c\theta_2 r_{33})) \quad (3.142)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.6'daki (3,1) ve (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2\left(\frac{-s\theta_2 r_{11} + c\theta_2 r_{31}}{s\theta_5}, \frac{s\theta_2 r_{12} - c\theta_2 r_{32}}{s\theta_5}\right) \quad (3.143)$$

#### 3.5.4. Eklem kaçıklıklı bilekli CS robotunun ters kinematiği

Eklem kaçıklıklı bilekli CS robotunun düzenleşimi Şekil 3.23'te, D-H değişkenleri ise Tablo 3.23'te görülmektedir.



Şekil 3.23. CS robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

Tablo 3.23. Eklem kaçıklıklı bilekli CS Robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	0	0	0	$d_2$
3	0	90	$l_1$	$d_3$
4	$\theta_4$	0	0	0
5	$\theta_5$	-90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	90	0	$d_6$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (1,4), (2,2) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarını kullanıp Raghavan ve Roth çözümünün uygulanmasıyla bulunur.

$$\theta_5 = 0 \quad (3.144)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.9'daki (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(r_{13}, -r_{23}) \pm A \tan 2(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2 - c^2\theta_5}, c\theta_5) \quad (3.145)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.9'daki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{-(c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23})d_6 + c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - l_1}{l_4}\right)^2}, \frac{-(c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23})d_6 + c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - l_1}{l_4}\right) \quad (3.146)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.9'daki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = p_z - r_{33}d_6 - s\theta_4 l_4 \quad (3.147)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_3$ , Denklem 3.9'daki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

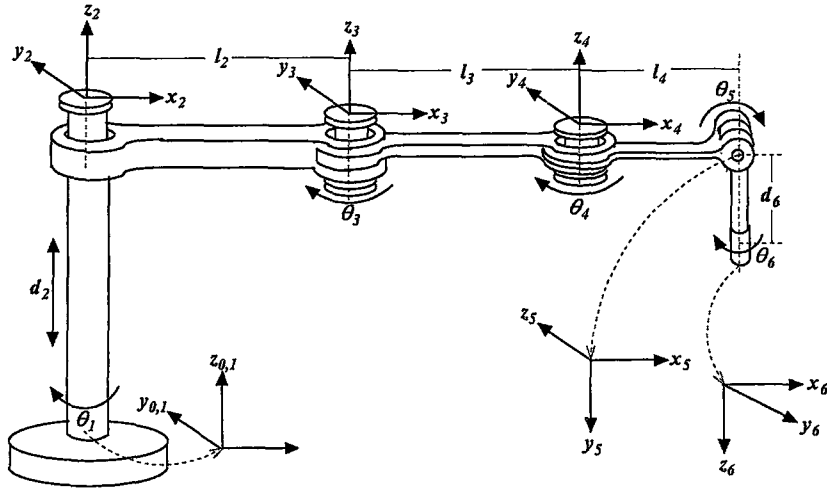
$$d_3 = -s\theta_1 r_{13}d_6 + c\theta_1 r_{23}d_6 + s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y \quad (3.148)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = \pm A \tan 2(s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22}, -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21}) \quad (3.149)$$

### 3.5.5. Eklem kaçıklıklı bilekli CC robotunun ters kinematiği

Eklem kaçıklıklı bilekli SC robotunun düzenleşimi Şekil 3.24'te, D-H değişkenleri ise Tablo 3.24'te görülmektedir.



Şekil 3.24. CC robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

Tablo 3.24. Eklem kaçıklıklı bilekli CC robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	0	0	0	$d_2$
3	$\theta_3$	0	$l_2$	0
4	$\theta_4$	0	$l_3$	0
5	$\theta_5$	90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	90	0	$l_2$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = \pm A \tan 2(-r_{32}, r_{31}) \quad (3.150)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - r_{33}^2}, -r_{33}) \quad (3.151)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.9'daki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = p_z - r_{33}d_6 \quad (3.152)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.4 ve Denklem 3.9'daki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alınıp alt alta toplanmasıyla elde edilen iki adet  $c\theta_4$  ifadesinin eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(p, q) \mp A \tan 2\sqrt{p^2 + q^2 - y^2}, -y) \quad (3.153)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$y = l_4(p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - (d_6s\theta_5 + l_4)^2 - l_3^2) - (d_6s\theta_5 + l_4)[(p_x - r_{13}d_6)^2 + (p_y - r_{23}d_6)^2 + l_2^2 - l_4^2 - l_3^2] \quad (3.154)$$

$$q = 2l_2(d_6s\theta_5 + l_4)(p_x - r_{13}d_6) - 2l_2l_4p_x \quad (3.155)$$

$$p = 2l_2(d_6s\theta_5 + l_4)(p_y - r_{23}d_6) - 2l_2l_4p_y \quad (3.156)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.9'dan elde edilen  $c\theta_4$  ifadesinden bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2\left( \pm \sqrt{1 - \left( \frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2p_xc\theta_1 - 2l_2p_ys\theta_1 - (d_6s\theta_5 + l_4)^2 - l_3^2}{2l_3(d_6s\theta_5 + l_4)} \right)^2}, \right. \\ \left. \frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2p_xc\theta_1 - 2l_2p_ys\theta_1 - (d_6s\theta_5 + l_4)^2 - l_3^2}{2l_3(d_6s\theta_5 + l_4)} \right) \quad (3.157)$$

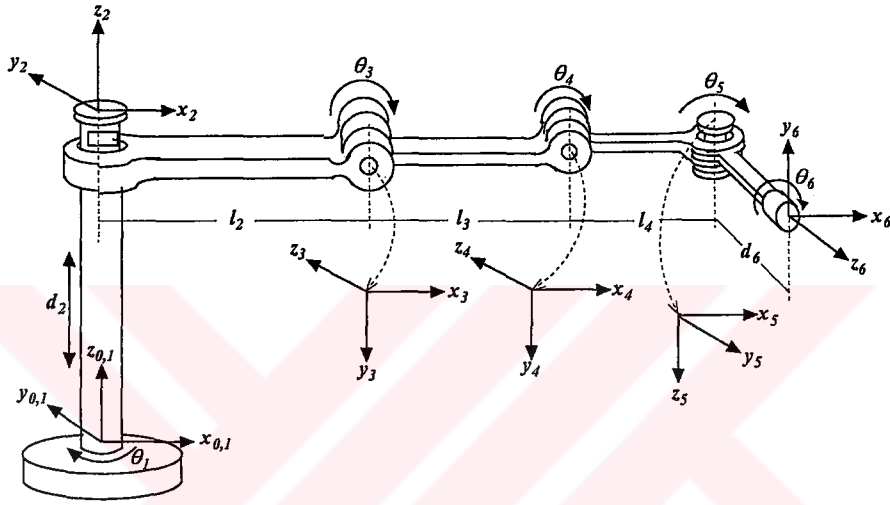
Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_3 = \text{Atan} 2(c\theta_4 s\theta_5, s\theta_4 s\theta_5) \mp \text{Atan} 2\sqrt{s^2\theta_5 - (-s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23})^2}, \quad (3.158)$$

$$-s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23})$$

### 3.5.6. Eklem kaçıklıklı bilekli CR robotunun ters kinematığı

Eklem kaçıklıklı bilekli CR robotunun düzenleşimi Şekil 3.25'te, D-H değişkenleri ise Tablo 3.25'te görülmektedir.



Şekil 3.25. CR robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

Tablo 3.25. Eklem kaçıklıklı bilekli CR robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	0	0	0	$d_2$
3	$\theta_3$	90	$l_2$	0
4	$\theta_4$	0	$l_3$	0
5	$\theta_5$	90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	90	0	$d_6$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.9'daki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.



$$\theta_1 = \pm A \tan 2(-p_x + r_{13}d_6, p_y - r_{23}d_6) \quad (3.159)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - (-s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23})^2}, -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23}) \quad (3.160)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = \pm A \tan 2(s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22}, -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21}) \quad (3.161)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle elde edilen  $c\theta_{34}$  değişkeninin Denklem 3.4'deki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle elde edilen denklemde yerine konmasıyla bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - (d_6 s\theta_5 + l_4)(-r_{31} s\theta_6 - r_{32} c\theta_6) - l_2}{l_3}\right)^2}, \frac{c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - (d_6 s\theta_5 + l_4)(-r_{31} s\theta_6 - r_{32} c\theta_6) - l_2}{l_3}\right) \quad (3.162)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

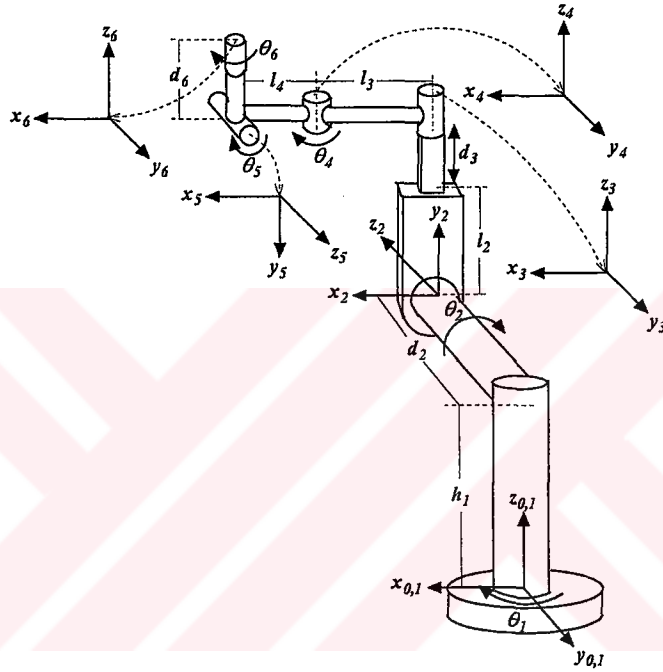
$$\theta_4 = A \tan 2(-s\theta_3, c\theta_3) \mp A \tan 2\left(\sqrt{1 - (-r_{31} s\theta_6 - r_{32} c\theta_6)^2}, -r_{31} s\theta_6 - r_{32} c\theta_6\right) \quad (3.163)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.9'daki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = p_z - r_{33}d_6 - l_4 s\theta_3 - l_3 s\theta_3 \quad (3.164)$$

### 3.5.7. Eklem kaçıklıklı bilekli NS robotunun ters kinematığı

Eklem kaçıklıklı bilekli NS robotunun düzenleşimi Şekil 3.26'da, D-H değişkenleri ise Tablo 3.26'da görülmektedir.



Şekil 3.26. NS robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

Tablo 3.26. Eklem kaçıklıklı bilekli NS robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	90	0	$d_2$
3	0	-90	0	$d_3 + l_2$
4	$\theta_4$	0	0	$l_3$
5	$\theta_5$	-90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	90	0	$d_6$

Denklem 3.9'dan elde edilen (1,4), (2,4) ve (3,4) karşılıklı matris elemanları eşdeğer iki vektör şeklinde Denklem 3.165'de verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} l_4 c \theta_4 + l_3 \\ d_3 + l_2 \\ -l_4 s \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \theta_2 (c \theta_1 p_x + s \theta_1 p_y - c \theta_1 r_{13} d_6 - s \theta_1 r_{23} d_6) + s \theta_2 (p_z - h_1 - r_{33} d_6) \\ -s \theta_2 (c \theta_1 p_x + s \theta_1 p_y - c \theta_1 r_{13} d_6 - s \theta_1 r_{23} d_6) + c \theta_2 (p_z - h_1 - r_{33} d_6) \\ -(s \theta_1 r_{13} - c \theta_1 r_{23}) d_6 + s \theta_1 p_x - c \theta_1 p_y - d_2 \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

Denklem 3.165'de üçüncü satırdaki eşitlikte  $\theta_4$ 'de başlangıç değeri verilerek birinci eklem değişkeni  $\theta_1$  bulunur. Daha sonra sırasıyla birinci satırdaki eşitlikten faydalanarak  $\theta_2$  ve ikinci satırdaki eşitlikten de  $d_3$  bulunur.

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

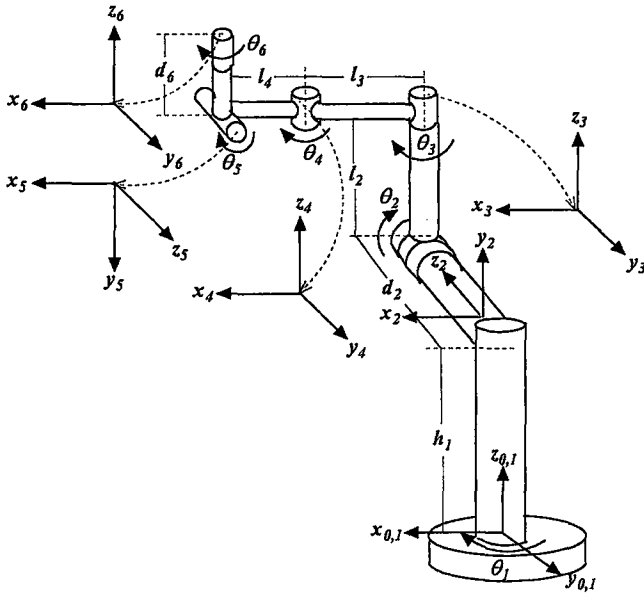
$$\theta_6 = A \tan 2(s \theta_1 r_{11} - c \theta_1 r_{21}, s \theta_1 r_{12} - c \theta_1 r_{22}) \pm A \tan 2(\sqrt{(s \theta_1 r_{11} - c \theta_1 r_{21})^2 + (s \theta_1 r_{12} - c \theta_1 r_{22})^2 - c^2 \theta_4}, -c \theta_4) \quad (3.166)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2\left(\frac{-s \theta_1 r_{13} + c \theta_1 r_{23}}{s \theta_4}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{-s \theta_1 r_{13} + c \theta_1 r_{23}}{s \theta_4}\right)^2}\right) \quad (3.167)$$

### 3.4.8. Eklem kaçıklıklı bilekli NN robotunun ters kinematığı

Eklem kaçıklıklı bilekli NN robotunun düzenleşimi Şekil 3.27'de, D-H değişkenleri ise Tablo 3.27'de görülmektedir.



Şekil 3.27. NN robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

Tablo 3.27. Eklem kaçıklıklı bilekli NN Robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	90	0	$d_2$
3	$\theta_3$	-90	0	$l_2$
4	$\theta_4$	0	$l_3$	0
5	$\theta_5$	-90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	90	0	$d_6$

Denklem 3.9'dan elde edilen (1,4), (2,4) ve (3,4) karşılıklı matris elemanları eşdeğer iki vektör şeklinde Denklem 3.168'de verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} l_4 c \theta_{34} + l_3 c \theta_3 \\ l_2 \\ -l_4 s \theta_{34} - l_3 s \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \theta_2 (c \theta_1 p_x + s \theta_1 p_y - c \theta_1 r_{13} d_6 - s \theta_1 r_{23} d_6) + s \theta_2 (p_z - h_1 - r_{33} d_6) \\ -s \theta_2 (c \theta_1 p_x + s \theta_1 p_y - c \theta_1 r_{13} d_6 - s \theta_1 r_{23} d_6) + c \theta_2 (p_z - h_1 - r_{33} d_6) \\ -(s \theta_1 r_{13} - c \theta_1 r_{23}) d_6 + s \theta_1 p_x - c \theta_1 p_y - d_2 \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

Denklem 3.168'de ikinci satırdaki eşitlikte  $\theta_2$ 'ye başlangıç değeri verilerek birinci eklem değişkeni  $\theta_1$  bulunur. Daha sonra sırasıyla birinci ve üçüncü satırlardaki denklemler düzenlenip  $\theta_3$  ve  $\theta_4$  birlikte çözülür.

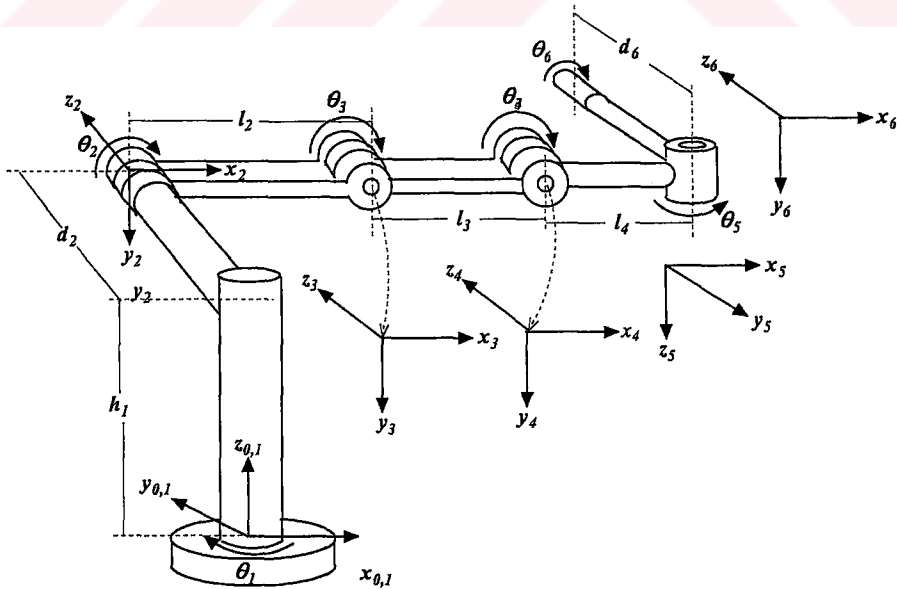
$$\theta_5 = A \tan 2 \left( \pm \sqrt{1 - (-c\theta_1 s\theta_2 r_{13} - s\theta_1 s\theta_2 r_{23} + c\theta_2 r_{33})^2} \right. \\ \left. - c\theta_1 s\theta_2 r_{13} - s\theta_1 s\theta_2 r_{23} + c\theta_2 r_{33} \right) \quad (3.169)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (3,1) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2(-s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22}, s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21}) \\ \pm A \tan 2(\sqrt{(-s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22})^2 + (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})^2} - (-s\theta_3 c\theta_5), -s\theta_3 c\theta_5) \quad (3.170)$$

### 3.5.9. Eklem kaçıklıklı bilekli NR robotunun ters kinematığı

Eklem kaçıklıklı bilekli NR robotunun düzenleşimi Şekil 3.28'de, D-H değişkenleri ise Tablo 3.28'de görülmektedir.



Şekil 3.28. NR robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

**Tablo 3.28.** Eklem kaçıklıklı bilekli NR robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	-90	0	$d_2$
3	$\theta_3$	0	$l_2$	0
4	$\theta_4$	0	$l_3$	0
5	$\theta_5$	-90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	90	0	$d_6$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.9'daki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(r_{13}d_6 - p_x, p_y - r_{23}d_6) \pm A \tan 2(\sqrt{(r_{13}d_6 - p_x)^2 + (p_y - r_{23}d_6)^2} - d_2^2, d_2) \quad (3.171)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = \pm A \tan 2(-c\theta_1 r_{22} + s\theta_1 r_{12}, c\theta_1 r_{21} - s\theta_1 r_{11}) \quad (3.172)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - (c\theta_1 r_{23} - s\theta_1 r_{13})^2}, c\theta_1 r_{23} - s\theta_1 r_{13}\right) \quad (3.173)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.9'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle elde edilen  $c\theta_{34}$ 'ün eşdeğeri yine aynı matristeki (1,1) karşılıklı matris elemanlarında yerine konarak bulunur.

$$\theta_2 = \pm A \tan 2(-nc\theta_5 - k, mc\theta_5 - l) \quad (3.174)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$k = c\theta_1 c\theta_6 r_{11} + s\theta_1 c\theta_6 r_{21} - c\theta_1 s\theta_6 r_{12} - s\theta_1 s\theta_6 r_{22} \quad (3.175)$$

$$l = r_{31} c\theta_6 + r_{32} s\theta_6 \quad (3.176)$$

$$m = c\theta_1 s\theta_6 r_{11} + s\theta_1 s\theta_6 r_{21} + c\theta_1 c\theta_6 r_{12} + s\theta_1 c\theta_6 r_{22} \quad (3.177)$$

$$n = r_{31} s\theta_6 + r_{32} c\theta_6 \quad (3.178)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.9'daki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2 \left( \pm \sqrt{1 - \left( \frac{p^2 + q^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3 l_4} \right)^2}, \frac{p^2 + q^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3 l_4} \right) \quad (3.179)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$p = -c\theta_2 (c\theta_1 r_{13} d_6 + s\theta_1 r_{23} d_6 - c\theta_1 p_x - s\theta_1 p_y) + s\theta_2 (r_{33} d_6 - p_z + h_1) - l_2 \quad (3.180)$$

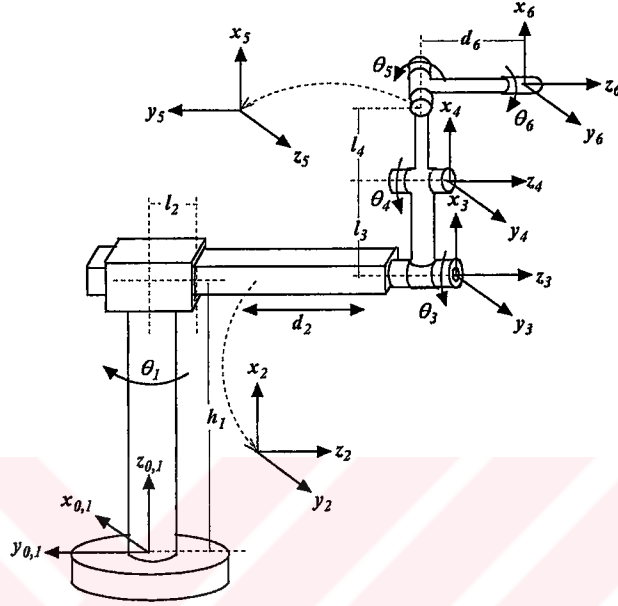
$$q = s\theta_2 (c\theta_1 r_{13} d_6 + s\theta_1 r_{23} d_6 - c\theta_1 p_x - s\theta_1 p_y) + c\theta_2 (r_{33} d_6 - p_z + h_1) \quad (3.181)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.9'daki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2(l_4 c\theta_4 + l_3, l_4 s\theta_4) \pm A \tan 2(\sqrt{(l_4 c\theta_4 + l_3)^2 + (l_4 s\theta_4)^2 - q^2}, q) \quad (3.182)$$

### 3.4.10. Eklem kaçıklıklı bilekli RC robotunun ters kinematiği

Eklem kaçıklıklı bilekli RC robotunun düzenleşimi Şekil 3.29'da, D-H değişkenleri ise Tablo 3.29'da görülmektedir.



Şekil 3.29. RC robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

Tablo 3.29. Eklem kaçıklıklı bilekli RC robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	90	90	0	$d_2$
3	$\theta_3$	0	0	$l_2$
4	$\theta_4$	0	$l_3$	0
5	$\theta_5$	-90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	+90	0	$d_6$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (3,1), (3,2) ve Denklem 3.5'teki (3,1) karşılıklı matris elemanlarını kullanıp Raghavan ve Roth çözümünün uygulanmasıyla bulunur.

$$\theta_5 = 0 \quad (3.183)$$



Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.9'daki (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2 \left( r_{13}, -r_{23} \right) \mp A \tan 2 \sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2 - c^2 \theta_5, c \theta_5} \quad (3.184)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.9'daki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = -s\theta_1(r_{13}d_6 - p_x) + c\theta_1(r_{23}d_6 - p_y) - l_2 \quad (3.185)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = \pm A \tan 2 \left( -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22}, s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21} \right) \quad (3.186)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.9'daki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla bulunur.

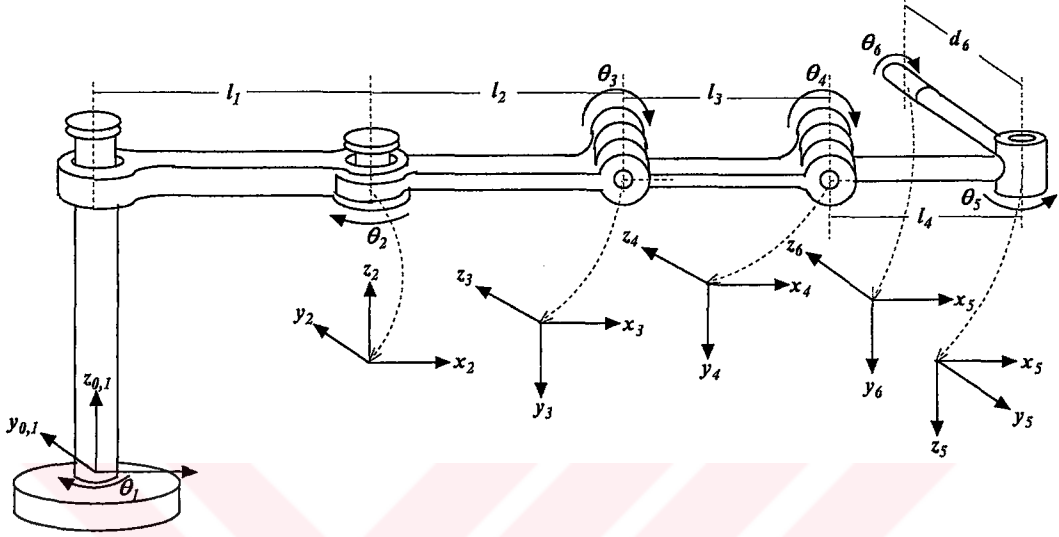
$$\theta_4 = A \tan 2 \left( \pm \sqrt{1 - \left( \frac{(-r_{33}d_6 + p_z - h_1)^2 + [c\theta_1(r_{13}d_6 - p_x) + s\theta_1(r_{23}d_6 - p_y)]^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3l_4} \right)^2}, \right. \\ \left. \frac{(-r_{33}d_6 + p_z - h_1)^2 + [c\theta_1(r_{13}d_6 - p_x) + s\theta_1(r_{23}d_6 - p_y)]^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3l_4} \right) \quad (3.187)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.9'daki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2 \left( -l_4 s\theta_4, l_4 c\theta_4 + l_3 \right) \\ \mp A \tan 2 \left( \sqrt{(-l_4 s\theta_4)^2 + (l_4 c\theta_4 + l_3)^2 - (-r_{33}d_6 + p_z - h_1)^2}, -r_{33}d_6 + p_z - h_1 \right) \quad (3.188)$$

### 3.4.11. Eklem kaçıklıklı bilekli RN robotunun ters kinematığı

Eklem kaçıklıklı bilekli RN robotunun düzenleşimi Şekil 3.30'da, D-H değişkenleri ise Tablo 3.30'da görülmektedir.



Şekil 3.30. RN robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

Tablo 3.30. Eklem kaçıklıklı bilekli RN robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	0	$l_1$	0
3	$\theta_3$	90	$l_2$	0
4	$\theta_4$	0	$l_3$	0
5	$\theta_5$	90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	-90	0	$-d_6$

Denklem 3.189, Denklem 3.20'nin uygulanmasıyla aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\begin{bmatrix} c\theta_{12}(l_3c\theta_3 + l_2) + l_1c\theta_1 \\ s\theta_{12}(l_3c\theta_3 + l_2) + l_1s\theta_1 \\ l_3s\theta_3 + h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + d_6 \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} - l_4 \begin{bmatrix} c\theta_{12}c\theta_{34} \\ s\theta_{12}c\theta_{34} \\ s\theta_{34} \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

Denklem 3.189'da üçüncü satırda oluşan eşitlikte  $\theta_4$ 'de başlangıç değeri verilerek üçüncü eklem değişkeni  $\theta_3$  bulunur. Daha sonra sırasıyla birinci ve ikinci satırlardaki denklemler düzenlenip  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  birlikte çözülür.

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

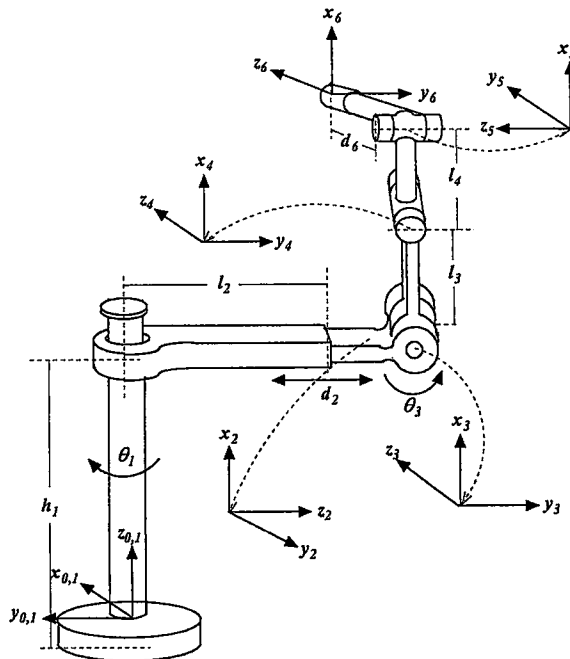
$$\theta_6 = A \tan 2(r_{31}, r_{32}) \pm A \tan 2(\sqrt{(r_{31})^2 + (r_{32})^2 - (c\theta_{34})^2}, c\theta_{34}) \quad (3.190)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (3,1) ve (3,2) karşılıklı matris elemanlarında yer alan  $s\theta_{34}$ 'lerin eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = \pm A \tan 2(-r_{33}, r_{31}c\theta_6 - r_{32}s\theta_6) \quad (3.191)$$

### 3.5.12. Eklem kaçıklıklı bilekli RR robotunun ters kinematiği

Eklem kaçıklıklı bilekli RR robotunun düzenleşimi Şekil 3.31'de, D-H değişkenleri ise Tablo 3.31'de görülmektedir.



Şekil 3.31. RR robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

**Tablo 3.31.** Eklem kaçıklıklı bilekli RR robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	90	90	0	$l_2 + d_2$
3	$\theta_3$	-90	0	0
4	$\theta_4$	0	$l_3$	0
5	$\theta_5$	-90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	90	0	$-d_6$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.9'daki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = \pm A \tan 2(r_{13}d_6 + p_x, -r_{23}d_6 - p_y) \quad (3.192)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - (-c\theta_1 r_{13} - s\theta_1 r_{23})^2}, -c\theta_1 r_{13} - s\theta_1 r_{23}\right) \quad (3.193)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = \pm A \tan 2(c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22}, -c\theta_1 r_{11} - s\theta_1 r_{21}) \quad (3.194)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle elde edilen  $c\theta_{34}$ 'ün yine aynı matriste bulunan (3,3) karşılıklı matris elemanlarında yerine konmasıyla bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2 \left( \pm \sqrt{1 - \left( \frac{r_{33}d_6 + p_z - h_1 + l_4 s\theta_6 (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21}) + l_4 c\theta_6 (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})}{l_3} \right)^2}, \right. \quad (3.195)$$

$$\left. \frac{r_{33}d_6 + p_z - h_1 + l_4 s\theta_6 (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21}) + l_4 c\theta_6 (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})}{l_3} \right)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.9'daki (1,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

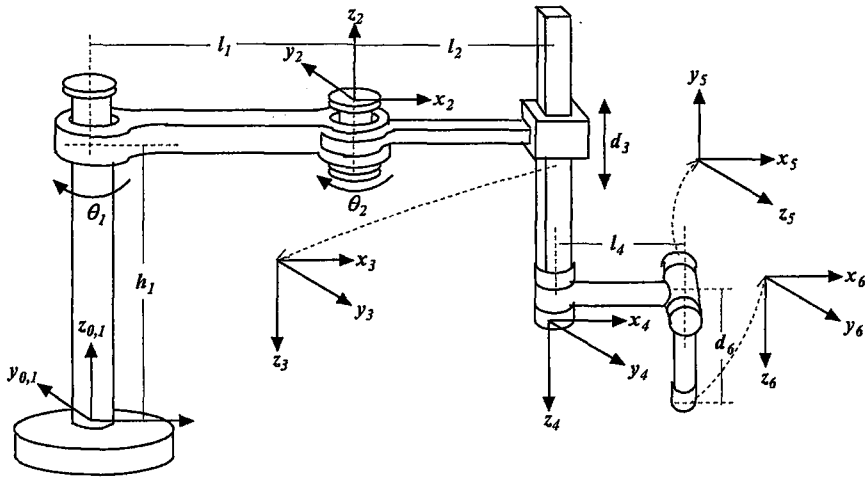
$$\theta_4 = A \tan 2(c\theta_3, s\theta_3) \pm A \tan 2(\sqrt{1 - (-s\theta_6 r_{31} - c\theta_6 r_{32})^2}, -s\theta_6 r_{31} - c\theta_6 r_{32}) \quad (3.196)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_2$ , Denklem 3.9'daki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = l_4 s\theta_3 + l_3 s\theta_3 + s\theta_1 (r_{13}d_6 + p_x) - c\theta_1 (r_{23}d_6 + p_y) - l_2 \quad (3.197)$$

### 3.5.13. Eklem kaçıklıklı bilekli RS robotunun ters kinematiği

Eklem kaçıklıklı bilekli RS robotunun düzenleşimi Şekil 3.32'de, D-H değişkenleri ise Tablo 3.32'de görülmektedir.



Şekil 3.32. RS robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

**Tablo 3.32.** Eklem kaçıklıklı bilekli RS robotunun D-H değışkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	0	$l_1$	0
3	0	180	$l_2$	$d_3$
4	$\theta_4$	0	0	0
5	$\theta_5$	90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	-90	0	$d_6$

Dönel eklem değışkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = \pm A \tan 2 = (-r_{32}, r_{31}) \quad (3.198)$$

Dönel eklem değışkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2 \left( \pm \sqrt{1 - r_{33}^2}, -r_{33} \right) \quad (3.199)$$

Prizmatik eklem değışkeni  $d_3$ , Denklem 3.9'daki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_3 = r_{33}d_6 - p_z + h_1 \quad (3.200)$$

Dönel eklem değışkeni  $\theta_1$ , Denklem 3.9'daki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla elde edilen  $c\theta_4$  ile Denklem 3.5'teki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla elde edilen  $c\theta_4$ , birbirine eşitlenerek bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(q, p) \pm A \tan 2(\sqrt{p^2 + q^2 - s^2}, s) \quad (3.201)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$s = l_4(p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - k^2 - l_2^2) - k(a^2 + b^2 + l_1^2 - l_2^2 - l_4^2) \quad (3.202)$$

$$p = (2l_2l_4p_x - 2l_1ka) \quad (3.203)$$

$$q = (2l_2l_4p_y - 2l_1kb) \quad (3.204)$$

$$a = (-r_{13}d_6 + p_x) \quad (3.205)$$

$$b = (-r_{23}d_6 + p_y) \quad (3.206)$$

$$k = (-d_6s\theta_5 + l_4) \quad (3.207)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.5'teki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alta alta toplanmasıyla bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 + l_1^2 - l_2^2 - l_4^2 - 2l_1(ac\theta_1 + bs\theta_1)}{2l_2l_4}\right)^2}, \frac{a^2 + b^2 + l_1^2 - l_2^2 - l_4^2 - 2l_1(ac\theta_1 + bs\theta_1)}{2l_2l_4}\right) \quad (3.208)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.5'teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

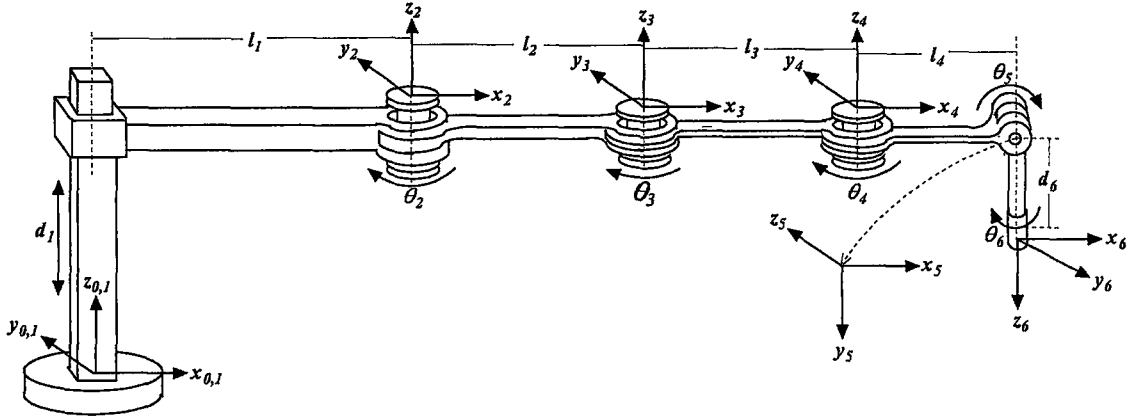
$$\theta_2 = A \tan 2(c\theta_1p_y - s\theta_1p_x, c\theta_1p_x + s\theta_1p_y - l_1) \pm A \tan 2(\sqrt{(c\theta_1p_y - s\theta_1p_x)^2 + (c\theta_1p_x + s\theta_1p_y - l_1)^2 - x^2}, x) \quad (3.209)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıdaki gibi bulunur.

$$x = -d_6c\theta_4s\theta_5 + l_4c\theta_4 + l_2 \quad (3.210)$$

### 3.5.14. Eklem kaçıklıklı bilekli SR robotunun ters kinematiği

Eklem kaçıklıklı bilekli SR robotunun düzenleşimi Şekil 3.33'te, D-H değişkenleri ise Tablo 3.33'te görülmektedir.



Şekil 3.33. SR robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

Tablo 3.33. Eklem kaçıklıklı bilekli SR robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	$\theta_2$	0	$l_1$	0
3	$\theta_3$	0	$l_2$	0
4	$\theta_4$	0	$l_3$	0
5	$\theta_5$	90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	90	0	$d_6$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2 \left( \pm \sqrt{1 - r_{33}^2}, -r_{33} \right) \quad (3.211)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.



$$\theta_6 = \pm A \tan 2(-r_{32}, r_{31}) \quad (3.212)$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_1$ , Denklem 3.9'daki (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_1 = -r_{33}d_6 + p_z \quad (3.213)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.9'daki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla elde edilen  $c\theta_4$  ile Denklem 3.6'daki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasından elde edilen  $c\theta_4$  birbirine eşitlenerek bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2(2l_2(p_y l_4 - bk), 2l_2(ml_4 - ak)) \pm A \tan 2(\sqrt{(2l_2(p_y l_4 - bk))^2 + (2l_2(ml_4 - ak))^2 - z^2}, z) \quad (3.214)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$z = l_4(m^2 + l_2^2 + p_y^2 - k^2 - l_3^2) - k(a^2 + b^2 + l_2^2 - l_3^2 - l_4^2) \quad (3.215)$$

$$a = (-r_{13}d_6 + p_x - l_1) \quad (3.216)$$

$$b = (-r_{23}d_6 + p_y) \quad (3.217)$$

$$k = (d_6 s\theta_5 + l_4) \quad (3.218)$$

$$m = (p_x - l_1) \quad (3.219)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.5'deki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - \left( \frac{m^2 + l_2^2 + p_y^2 - k^2 - l_3^2 - 2l_2 m c\theta_2 - 2l_2 p_y s\theta_2}{2l_3 k} \right)^2}, \frac{m^2 + l_2^2 + p_y^2 - k^2 - l_3^2 - 2l_2 m c\theta_2 - 2l_2 p_y s\theta_2}{2l_3 k}) \quad (3.220)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.9'daki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

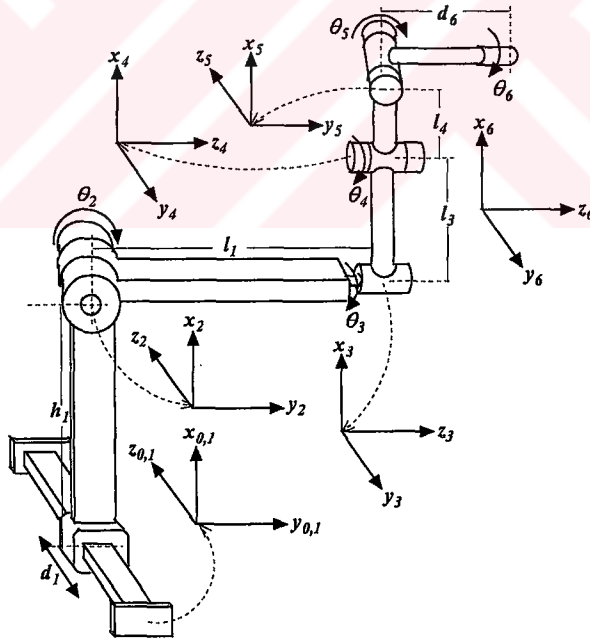
$$\theta_3 = A \tan 2(l_4 c \theta_4 + l_3, l_4 s \theta_4) \pm A \tan 2(\sqrt{l_3^2 + l_4^2 + 2l_3 l_4 c \theta_4 - v^2}, v) \quad (3.221)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$v = -s \theta_2 (-r_{13} d_6 + p_x - l_1) + c \theta_2 (-r_{23} d_6 + p_y) \quad (3.222)$$

### 3.5.15. Eklem kaçıklıklı bilekli CN robotunun ters kinematığı

Eklem kaçıklıklı bilekli CN robotunun düzenleşimi Şekil 3.34'te, D-H değişkenleri ise Tablo 3.34'te görülmektedir.



Şekil 3.34. CN robotunun eklem kaçıklıklı bilekli düzenleşimi.

**Tablo 3.34.** Eklem kaçıklıklı bilekli CN robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	0	0	0	$d_1$
2	$\theta_2$	90	$h_1$	0
3	$\theta_3$	90	0	$-l_1$
4	$\theta_4$	0	$l_3$	0
5	$\theta_5$	-90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	90	0	$-d_6$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_2$ , Denklem 3.9'daki (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2(h_1 - p_x - d_6 r_{13}, p_y + r_{23} d_6) \pm A \tan 2(\sqrt{(h_1 - p_x - d_6 r_{13})^2 + (p_y + r_{23} d_6)^2} - l_1^2, l_1) \quad (3.223)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = \pm A \tan 2(s\theta_2 r_{12} - c\theta_2 r_{22}, -s\theta_2 r_{11} + c\theta_2 r_{21}) \quad (3.224)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - (s\theta_2 r_{13} - c\theta_2 r_{23})^2}, s\theta_2 r_{13} - c\theta_2 r_{23}) \quad (3.225)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , Denklem 3.5'teki (1,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle elde edilen  $c\theta_{34}$ 'ün eşdeğerinin yine aynı denklemdeki (1,4) karşılıklı matris elemanlarında yerine konarak bulunur.

$$\theta_3 = A \tan 2\left( \pm \sqrt{1 - \left( \frac{s\theta_5 [c\theta_2(p_x - h_1) + s\theta_2 p_y] + (c\theta_2 r_{13} + s\theta_2 r_{23})(d_6 s\theta_5 - l_4)}{l_3 s\theta_5} \right)^2}, \right. \quad (3.226)$$

$$\left. \frac{s\theta_5 [c\theta_2(p_x - h_1) + s\theta_2 p_y] + (c\theta_2 r_{13} + s\theta_2 r_{23})(d_6 s\theta_5 - l_4)}{l_3 s\theta_5} \right)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_4$ , Denklem 3.5'teki (1,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2(-s\theta_3 s\theta_5, c\theta_3 s\theta_5) \quad (3.227)$$

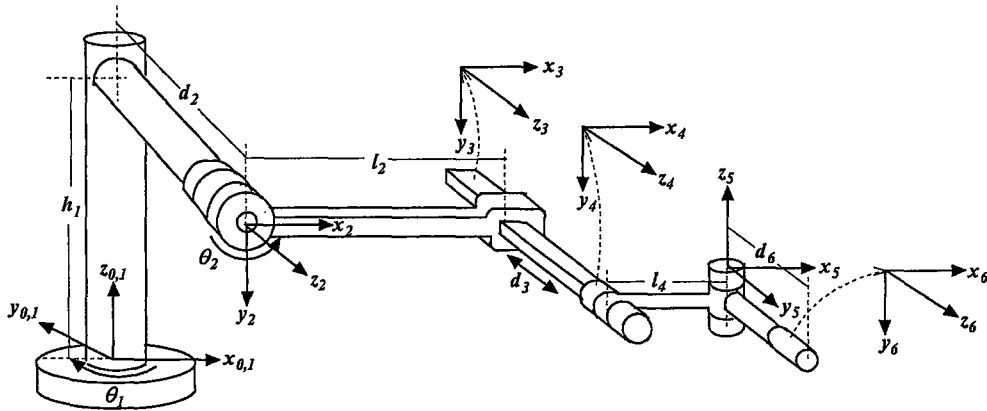
$$\pm A \tan 2(\sqrt{s^2\theta_5 - (c\theta_2 r_{13} + s\theta_2 r_{23})^2}, c\theta_2 r_{13} + s\theta_2 r_{23})$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_1$ , Denklem 3.5'teki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_1 = s\theta_{34}(d_6 s\theta_5 - l_4) - l_3 s\theta_3 + p_z \quad (3.228)$$

### 3.5.16. Eklem kaçıklıklı bilekli NC robotunun ters kinematığı

Eklem kaçıklıklı bilekli NC robotunun düzenleşimi Şekil 3.35'te, D-H değişkenleri ise Tablo 3.35'te görülmektedir.



Şekil 3.35. NC Robotunun eklem kaçıklıklı eklenmiş düzenleşimi.

**Tablo 3.35.** Eklem kaçıklıklı bilekli NC robotunun D-H değişkenleri.

$i$	$\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$
1	$\theta_1$	0	0	$h_1$
2	$\theta_2$	90	0	$d_2$
3	0	0	$l_2$	$d_3$
4	$\theta_4$	0	0	0
5	$\theta_5$	-90	$l_4$	0
6	$\theta_6$	90	0	$d_6$

Denklem 3.229, Denklem 3.20'nin uygulanmasıyla aşağıdaki gibi dzenlenir.

$$\begin{bmatrix} l_2 c \theta_1 c \theta_2 + s \theta_1 (d_2 + d_3) \\ l_2 s \theta_1 c \theta_2 - c \theta_1 (d_2 + d_3) \\ l_2 s \theta_2 + h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - d_6 \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} - l_4 \begin{bmatrix} c \theta_1 c \theta_{24} \\ s \theta_1 c \theta_{24} \\ s \theta_{24} \end{bmatrix} \quad (3.229)$$

Denklem 3.229'da üçüncü satırda oluşan eşitlikte  $\theta_4$ 'de başlangıç değeri verilerek ikinci eklem değişkeni  $\theta_2$  bulunur. Daha sonra sırasıyla birinci ve ikinci satırlardaki denklemler dzenlenip  $\theta_1$  ve  $d_3$  birlikte çözüldür.

Dönel eklem değişkeni  $\theta_5$ , Denklem 3.9'daki (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - (s \theta_1 r_{13} - c \theta_1 r_{23})^2}, s \theta_1 r_{13} - c \theta_1 r_{23}) \quad (3.230)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_6$ , Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = \pm A \tan 2(-s \theta_1 r_{12} + c \theta_1 r_{22}, s \theta_1 r_{11} - c \theta_1 r_{21}) \quad (3.231)$$

On altı adet endüstriyel robot için gerçekleştirilen ters kinematik problem çözümlerinde her bir robot için elde edilen çözüm sayısı Tablo 3.36’da verilmiştir. Bu tabloda “-” ifade edilen çözüm sayısı sonsuz çözümlü göstermektedir.

**Tablo 3.36.** Robotların eklem kaçıklıklı bilekli ters kinematik çözüm sayısı.

M	S	S	S	C	C	C	N	N	N	R	R	R	R	S	C	N
	S	C	N	S	C	R	S	N	R	C	N	R	S	R	N	C
Ç. S.	2	16	-	8	32	32	-	-	64	16	-	32	32	32	32	-

### 3.6. Sonuçlar

Bu bölümde, temel on altı adet robot manipülatörüne Euler ve eklem kaçıklıklı bilek eklenerek ters kinematikleri çözüldü. Üç ekleminde bir noktada kesiştiği Euler bileğinin eklendiği robot manipülatörleri sınırlı miktarda yük kaldırma kapasitesine sahiptir. Daha fazla yük kapasitesi gerektiren, kaynak işlemleri gibi endüstriyel uygulamalarda ise, eklem kaçıklıklı bilekli robotlar kullanılır.

Euler bileğinin üç eklemi de bir noktada kesiştiğinden, bu bileğinin eklendiği on altı adet robot manipülatörünün ters kinematiği tamamen analitik olarak çözülmüştür. Eklem kaçıklıklı bilekli endüstriyel robotların son üç ekleminde  $a$  ve  $d$  değişkenleri bulunduğundan, bu robot manipülatörlerinin bir kısmı tamamen analitik bir kısmı da sayısal olarak çözülmüştür.

Tamamen kesin sonuç üreten analitik çözüme ait denklemler bilgisayar ortamında çok hızlı çalışır. Eklem açılarının iteratif olarak çözüldüğü sayısal çözüm ise bilgisayar ortamında analitik çözüme göre daha yavaş çalışır. Ayrıca, sayısal olarak eklem açılarını bulmak için yazılan algoritmanın yapısı da (çözüm zamanı ve başlangıç koşulları) son derece önemlidir.

Euler bilekli endüstriyel robotlarda en fazla on altı farklı ters kinematik çözüm bulunurken, eklem kaçıklıklı bileklerde ise en fazla altmış dört farklı ters kinematik çözüm bulunmuştur. Son üç eklemin bir noktada kesişmemesi, eklem

kaçıklıklı bileklerde ters kinematik çözüm sayısının artmasına neden olur. Ayrıca, eklem kaçıklıklı bilekli robotlardan elde edilen ters kinematik çözümlerin tamamı gerçek çözüm değildir. Sadece ters kinematik çözümlerin bir kısmı, robotu üç boyutlu uzayda herhangi bir noktaya ulaştıran fiziksel çözümler, diğerleri ise ters kinematik denklemini sağlamasına karşın robotu belirlenen noktaya ulaştıramayan sanal çözümlerdir.

Ters kinematik çözüm sayısına robotların eklem yapısının da önemli etkisi vardır. Prizmatik eklemler çözüm sayısının azalmasına, dönel eklemlerse artmasına neden olmaktadır. Ayrıca, dönel eklemlerden oluşan robotlarda fiziksel çözüm sayısının fazla olması, üç boyutlu uzayda bir noktaya pek çok farklı şekilde ulaşma imkanı sağlar.

Euler bilekli robotların ters kinematik denklemlerinde konum ile yönelim bir birinden ayrı gerçekleştiğinden, bu robotlar için her zaman analitik bir çözüm vardır. Buna rağmen, eklem kaçıklıklı bilekli robotların ters kinematik denklemlerinde konum ile yönelim iç içe olduğundan her zaman analitik çözüm gerçekleşmez.

Euler bilekli robotların ters kinematiğinde en fazla üç bilinmeyenli üç denklem olduğundan analitik olarak çözülürken, eklem kaçıklıklı bilekli robotların ters kinematiğinde ise üç denkleme karşılık üçten fazla bilinmeyen olduğundan analitik çözümleri oldukça güç veya yoktur. Bu açıdan bu robotların ters kinematiği sayısal olarak çözülür.

Euler veya eklem kaçıklıklı bilekli robotlarda arka arkaya gelen üç eklem bir birine paralel ise, bu robotların ters kinematiğinin analitik çözümü vardır.

Euler bilekli robotlarda ilk üç eklem uç işlevcinin konumunu, son üç eklem ise yönelimini belirlerken, eklem kaçıklıklı bilekli robotlarda konumla yönelim iç içe gerçekleşmektedir. Bu açıdan Euler bilekli robotlarda, çalışma uzayında hemen hemen bütün noktalara ulaşılırken, eklem kaçıklıklı bileklerde çalışma uzayı genişlemesine karşın bütün noktalara ulaşamaz.

## BÖLÜM 4. ROBOTLARIN DİNAMİK MODELLERİ

### 4.1. Giriş

Bir robot kolunun dinamiği, robot kolunun kendi hareketinden dolayı oluşan eşitliklerin matematiksel formülasyonu olarak ifade edilebilir. Başka bir deyişle, bir robot kolunun hareketinden üretilen dinamik eşitlikler, robot kolunun dinamik davranışını tanımlayan bir dizi matematiksel ifadeden oluşmaktadır. Robot kolunun dinamik analizi ise, eklemlere tahrik elemanları tarafından uygulanan moment veya kuvvet büyüklükleri ile robot kolunun zamana göre konumu, hızı ve ivmesi arasındaki ilişkilerin incelenmesi olarak tanımlanabilir. Elde edilen matematiksel denklemler, robot kolunun bilgisayar ortamında simülasyonu, eklem uzayında en uygun tasarım parametreleriyle hareket edebilmesi, kararlı ve kontrollü bir davranış sergilemesi açısından son derece önemlidir. Genel olarak bir robot kolunun dinamik performansı, etkili kontrol algoritmasının ve uygun dinamik modelinin elde edilmesine bağlıdır. Kontrol probleminin önemi, çıkarılan dinamik modelin, robot kolunun arzu edilen sistem cevabını ve performansını üretmesinden kaynaklanmaktadır.

Bir robot kolunun dinamik modelinin çıkarılabilmesi için, robot kolunun dinamik davranışını açıklayan doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin elde edilip çözülmesi gerekir. Bir robot kolunun dinamik modelinin çıkarılması konusunda Lagrange-Euler (L-E) ve Newton-Euler (N-E) formülasyonu temel alınarak şimdiye kadar bir çok çalışma yapılmış ve bu iki formülasyon kullanılarak birçok yöntem geliştirilmiştir (Richard P.Paul-1981; C. S. George Lee 1982; Thomas R.Kane and David A.Levinson-1983; Chang Jin Li-1988). Bu yöntemlerden en önemlileri, önce Uicker'in (1965) geliştirip daha sonra Bejczy'nin (1974) uyguladığı Lagrange-Euler (L-E), Hollerbach (1980) tarafından geliştirilen Rekürsif Lagrange (R-L), Luh, Walker ve Paul'nun (1980) geliştirdiği Newton-Euler (N-E) ve Lee, Lee ve Nigam



(1983) tarafından geliştirilen genelleştirilmiş d'Alembert (G-D) yöntemleridir. Bu yöntemlerin tamamı aynı robot düzenleşimi için eşdeğer çözümler üretmektedir. Buna rağmen bu yöntemlerin yapıları birçok nedenden dolayı farklılık göstermektedir. Bu yöntemlerden bir kısmı bilgisayar simülasyonu için, bir kısmı robot kontrolü için, bir kısmı ise robot eyleyicilerinin daha hızlı sürülmesi için uygundur.

Bejczy (1974), ardışıl robot bağları için  $4 \times 4$  homojen dönüşüm matris gösteriminden faydalanarak altı serbestlik derecesine sahip bir Stanford robotunun dinamik modelini, genelleştirilmiş koordinatları kullanıp iş ve enerji ifadelerinden yararlanan L-E formülasyonunu kullanarak çıkardı. Matlab simulink benzeşim programı için uygun bir yapıya sahip olan L-E yöntemi yoğun matematiksel ifadeler içermesine karşın, geçmiştekinin aksine günümüz bilgisayarlarında gerçek zamanlı ileri ve ters dinamik problem çözümünde oldukça hızlı işlediğinden, çok sık tercih edilen bir yöntem olmuştur.

L-E yöntemine alternatif olarak bilgisayarda daha hızlı işleyen denklemlerin türetilmesi için uygun bir yapıya sahip olan N-E yöntemi Armstrong (1979), Orin, Ghee, Vukobratovic ve Hartoçh (1979) ve Luh (1980) tarafından robot kolunun dinamik modelini çıkarmak için kullanıldı. N-E yöntemiyle dinamik model çıkarılırken ana koordinat çerçevesinden başlayarak uç işlevcinin koordinat çerçevesine kadar özyineli işlemler basitçe gerçekleştirilir. Buna karşın N-E yöntemi, elde edilen dinamik denklemlerin vektörel çarpım terimlerini içermesinden dolayı oldukça zahmetli bir yöntemdir.

Özyineli yapıya sahip ve etkili bir şekilde dinamik modeli çıkaran N-E yöntemine karşın önceleri dinamik modeli çıkarmada verimsiz olan L-E formülasyonu Hollerbach (1980) tarafından bilgisayarda daha hızlı işleyen özyineli yapıya (R-L) dönüştürüldü. Fakat özyineli eşitliklerin, durum uzayında gerçekleştirilen kontrolör tasarımı, robotun dinamik model yapısını bozduğu bilinmektedir.

Bir robot kolunun dinamik modelini çıkarmada kullanılan bir başka yaklaşımsa genelleştirilmiş d'Alembert yöntemidir (G-D). Bilgisayar ortamında hızlı işlemesine

karşın bu yöntem pek tercih edilmemiştir. Genel olarak robot dinamik modelinin çıkarılmasında kullanılan yöntemlerin hesap yükleri, N-E yöntemi için  $n$  olurken, d'Alembert yöntemi için  $n^3$ , L-E yöntemi içinse  $n^4$  (eğer eniyilenirse  $n^3$ ) olmaktadır. Burada  $n$  bir robot kolunun eklem sayısını göstermektedir. Her şeye rağmen bilgisayar teknolojisinin hızlı ilerlemesinden dolayı kontrolör tasarımında etkili olan L-E yönteminin hesap yükünün daha ağır olması önemini yitirmektedir. L-E yönteminin hem bu özelliği, hem de dinamik modelin çıkarılmasında kullanılan matris işlemlerinin özellikle N-E yöntemine göre daha kolay gerçekleştirilmesi açısından temel onaltı adet endüstriyel robotun dinamik modelinin çıkarılmasında tercih nedeni olmuştur. L-E yöntemi aşağıda detaylı bir şekilde anlatılmıştır (Schilling 1990).

#### 4.2. Lagrange-Euler Formülasyonu

Karmaşık dinamik sistemler, genelleştirilmiş koordinatlar, enerji ve kuvvet tabanlı işlem yapan Lagrange formülasyonu kullanılarak gayet basit bir şekilde modellenenabilir.  $n$  serbestlik derecesine sahip bir robot kolu için en uygun genelleştirilmiş koordinatlar seti,  $n$  tane eksen değişkeninden ( $q$ ) oluşan bir vektördür. Burada ( $q$ ) dönel eklemler için eksen açısını, prizmatik eklemler için ise bağ uzunluğunu temsil etmektedir.  $T$  ve  $U$  sırasıyla bir robot kolunun kinetik ve potansiyel enerjisini temsil etsin. Bu durumda Lagrange fonksiyonu kinetik enerjiyle potansiyel enerji arasındaki fark olarak tanımlanır.

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q, \dot{q}) \quad (4.1)$$

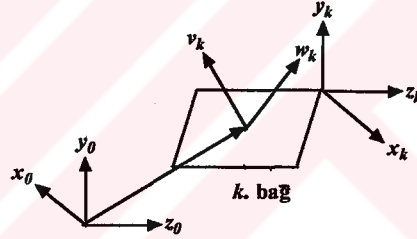
Denklemden,  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$  eklem hızlarını gösteren bir vektördür. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, kinetik enerjinin ( $T$ ) robot kolunun hızına ve pozisyonuna, potansiyel enerjinin ( $U$ ) ise sadece robot kolunun pozisyona bağlı olduğudur. Yukarıda verilen bilgiler ışığında bir robot kolunun Lagrange fonksiyonu cinsinden genel dinamik eşitliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Torby 1984).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(q, \dot{q}) = F_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.2)$$

Denklemden  $F_i$ ,  $i$ . ekleme etki eden genelleştirilmiş kuvveti göstermektedir. Denklem 4.2'deki Lagrange formülasyonu ikinci dereceden doğrusal olmayan diferansiyel denklemler içermektedir. Bu eşitlikleri daha detaylı bir şekilde elde etmek için, kinetik enerji  $T$ , potansiyel enerji  $U$  ve genelleştirilmiş kuvvet  $F$  ifadelerini açıkça tanımlamak gerekmektedir.

#### 4.2.1. Kinetik enerji ve potansiyel enerji kavramaları

Lagrange fonksiyonunun en karmaşık terimi robot kolunun toplam kinetik enerjisini veren  $T(q, \dot{q})$  ifadesidir. Robot kolunun toplam kinetik enerjisini elde etmek için Şekil 4.1'de de gösterildiği gibi  $k$ . bağı kinetik enerjisinin incelenmesi gerekir.



Şekil 4.1.  $k$ . bağı hareketi.

$k$ . bağı üç boyutlu uzayda hem doğrusal hem de açısal hızla hareket etmektedir. Burada  $v_k \in R^3$   $k$ . bağı kütle merkezinin ana koordinat sistemine göre doğrusal hızla,  $\omega_k \in R^3$  ise  $k$ . bağı kütle merkezinin ana koordinat sistemine göre açısal hızla hareketini göstermektedir. Genel olarak toplam kinetik enerji her bir eklem kinetik enerjilerinin toplamına eşittir ve Denklem 4.3'teki gibi ifade edilir.

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (v_k)^T m_k v_k + (\omega_k)^T D_k \omega_k \quad (4.3)$$

Denklemden  $m_k$ ,  $k$ . bağı kütle kümesini,  $D_k$  ise  $k$ . bağı kütle merkezinin ana koordinat sistemine göre 3x3 atalet tensörünü göstermektedir.

#### 4.2.2. Bir bağıın atalet tensörü

Bir bağıın atalet tensörü katı bir nesnenin kütle dağılımını gösteren bir 3x3 matristir. Katı bir nesnenin atalet tensörünü ana koordinat sistemine göre tanımlamak için ilk önce aynı nesnenin kütle merkezine göre atalet tensörünün tanımlanması gerekir.  $\rho$  katı nesnenin kütle yoğunluğu ve  $V$  hacim olsun. Bu durumda katı nesnenin kütle merkezine göre atalet tensörü,  $L_c = (x_c, y_c, z_c)$  şeklinde kütle merkezine yerleştirilen bir koordinat sistemiyle tanımlanır.

$$D_c = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) \rho dv & - \int xy \rho dv & - \int xz \rho dv \\ - \int xy \rho dv & \int (x^2 + z^2) \rho dv & - \int yz \rho dv \\ - \int xz \rho dv & - \int yz \rho dv & \int (x^2 + y^2) \rho dv \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$D_c$  matrisi altı adet birbirinden bağımsız eleman içeren simetrik bir matristir. Köşegende yer alan elemanlar atalet momenti, geri kalan diğeri simetrik elemanlar ise atalet çarpanları olarak ifade edilir. Atalet momenti pozitif büyüklük olmasına karşın atalet çarpanları hem pozitif hem de negatif büyüklük olabilir.  $L_c$  koordinat sistemi kütle merkezinde yerleştirilirse, prensip eksenler kuralına göre atalet çarpanları sıfır olur. Bu durumda atalet tensörü köşegen matris olur ve köşegende yer alan üç elemanda prensip atalet tensörü olarak isimlendirilir. Basit geometrik şekillerin atalet tensörü EK-H'de verilmiştir. Düzenli basit geometrik şekillerin atalet tensörünün hesaplanması gayet kolay olmasına karşın düzensiz şekle sahip bir nesnenin atalet tensörünün hesaplanması oldukça zahmetlidir. Düzensiz geometrik şekle sahip bir nesnenin atalet tensörü deneysel olarak hesaplanabilir (Klayter 1989).

Bir robot bağıının atalet tensörü  $D_k$ ,  $k$  bağıın kütle merkezinin, robotun ana koordinat çerçevesi  $L_0$ 'a göre tanımlanmasıyla bulunur. Atalet tensörü  $D_k$ , ana koordinat çerçevesini  $k$  bağıın kütle merkezine doğru öteleyip Denklem 4.4'ü uygulayarak elde edilir. Bir robotun dinamik analizinin gerçekleştirilmesinde kullanılan dönüşüm matrisi Denklem 4.5'te verilmiştir.

$${}^0_k T(q) = \begin{bmatrix} {}^0_k R(q) & P_k(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.5)$$

Dönüşüm matrisindeki  ${}^0_k R(q)$ ,  $L_k$  koordinat sisteminin  $L_0$  koordinat sistemine göre yönelimini gösterirken,  $P_k(q)$  vektörü ise  $L_k$  koordinat sisteminin  $L_0$  koordinat sistemine göre konumunu gösterir. Denklem 4.3'teki  $k$ . bağıın kütle merkezinin açılal hızından kaynaklanan kinetik enerji,  $L_0$  koordinat sistemi cinsinden tanımlanmıştır. Bu kinetik enerjiyi  $L_k$  koordinat sistemi cinsinden tanımlamak için  ${}^0_k R = ({}^k_0 R)^{-1} = ({}^k_0 R)^T$  eşitliğini kullanarak,  $\omega_k$  açılal hızını  $L_0$  koordinat sisteminden  $L_k$  koordinat sistemine dönüştürmek gerekir. Bu dönüşüm Denklem 4.6'da görüldüğü gibi  $k$ . bağıın kütle merkezinin açılal hızından dolayı oluşan  $k$ . bağıın kinetik enerji eşitliğini verir.

$$\begin{aligned} \frac{(\omega_k)^T D_k \omega_k}{2} &= \frac{({}^k_0 R \omega_k)^T \bar{D}_k ({}^k_0 R \omega_k)}{2} = \frac{(\omega_k)^T ({}^k_0 R)^T \bar{D}_k {}^k_0 R \omega_k}{2} \\ &= \frac{(\omega_k)^T {}^0_k R \bar{D}_k ({}^0_k R)^T \omega_k}{2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Denklemdede  $\bar{D}_k$ , kütle merkezinin  $L_k$  koordinat sistemine göre tanımlanan atalet tensörüdür. Yani  $\bar{D}_k$ ,  $L_k$  koordinat sisteminin  $k$ . bağıın kütle merkezine ötelenip Denklem 4.4'ün uygulanmasıyla elde edilen atalet tensörüdür.  $L_k$  koordinat sistemi  $k$ . bağıa yerleştirilip birlikte döndürülerek  $\bar{D}_k$  atalet tensörü sabitlenir. Denklem 4.6'nın sol tarafı ana koordinat sistemi cinsinden açılal hızdan dolayı oluşan kinetik enerjiyi göstermektedir. Denklem 4.6 sadeleştirilirse bir robot bağıının atalet tensörü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D_k(q) = {}^0_k R(q) \bar{D}_k [{}^0_k R(q)]^T \quad (4.7)$$

Böylece  $D_k$  atalet tensörü dönme matrisi cinsinden ifade edilmiş olur.

### 4.2.3. Bağ Jacobian matrisi

Bir robot kolunun toplam kinetik enerjisini bulmak için eklem değişkenleri  $q$  ve  $\dot{q}$  cinsinden doğrusal hız  $v$  ve açısal hız  $\omega$  terimlerinin tanımlanması gereklidir.  $v_k$  ve  $\omega_k$  hızlarını  $q$  ve  $\dot{q}$  cinsinden ifade etmek için, bağ Jakobiyen matris  $J_k(q)$ 'nin bulunması gerekir.  $J(q)$  matrisini  $J_k(q)$  cinsinden ifade etmek için  $k$  bağının kütle merkezi sanki uç işlevciymiş gibi kabul edilir.

$$J_k(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} v_k \\ \omega_k \end{bmatrix} \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.8)$$

$\bar{c}_k$  Şekil 4.1'de olduğu gibi ana koordinat sistemine göre  $k$ . bağın kütle merkezini gösterebilir. Aynı şekilde  $\Delta c_k$ ,  $L_k$  koordinat sistemine göre  $k$ . bağın kütle merkezinin koordinatlarını gösterebilir.

$$\Delta c_k = [\bar{c}_k]_k \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.9)$$

Bu durumda  $\Delta c_k$ ,  $L_k$  koordinat sistemi ile  $k$  bağının kütle merkezi arasındaki sabit uzunluk vektörüdür ve  $k$  bağının fiziki şekline ve uzunluğuna bağlıdır.  $k$  bağının kütle merkezinin konumunu ana koordinat sistemine göre tanımlamak için,  $L_k$  koordinat sistemini  $L_0$  koordinat sistemine göre tanımlamak gerekir. Bunun için birleşik homojen dönüşüm matrisi kullanılır.

$$\bar{c}_k(q) = H_1 {}^0 T(q) \Delta c_k \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.10)$$

Denklemden  $3 \times 4$  homojen koordinat dönüşüm matrisi  $H_1$  tanımlanmıştır.  $H_1$  matrisi 4 boyutlu homojen koordinatları üç boyutlu fiziksel koordinatlara çevirir. Bilindiği gibi sadece dönme gerçekleştirmek için  $3 \times 3$ 'lük bir matris kullanmak yeterlidir. Fakat aynı zamanda öteleme gerçekleştiriliyorsa bu durumda  $3 \times 4$ 'lük bir matrise ihtiyaç duyulur. Bunun için homojen koordinat sisteminin kullanılması gerekir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$H_1 = \frac{1}{\delta} [I, 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Denklemden kullanılan  $I$  birim matrisi,  $\delta$  ölçüm faktörünü göstermektedir ve robot uygulamalarında  $\delta = 1$  alınır.  $k$  bağına kütle merkezinin konumu belirlendikten sonra Jakobiyen matrisi Denklem 4.12'deki gibi tanımlanır.

$$J_k(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{c}_k}{\partial q_1} \dots \frac{\partial \bar{c}_k}{\partial q_k} & 0 \\ \xi_1 z^0 \dots \xi_k z^{k-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k(q) \\ B_k(q) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Denklemden  $\xi_k$  eklem tip değişkenidir. Bu değişken, dönel eklemler için 1, prizmatik eklemler için 0 alınır. Aynı denklemden  $z^i$ ,  $L_i$  koordinat sisteminin üçüncü kolon birim vektörünü temsil etmektedir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$z^i(q) = {}^0R_i(q) i^3 \quad 0 \leq i \leq n \quad (4.13)$$

$$\text{Denklemden, } {}^0R_i(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } i^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

#### 4.2.4. Manipulator atalet tensörü

Bir robot kolunun toplam kinetik enerjisini Denklem 4.12'deki verileri kullanarak  $q$  ve  $\dot{q}$  cinsinden ifade etmek bu durumda daha basit olmaktadır.

$$v_k(q, \dot{q}) = A_k(q) \dot{q} \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.14)$$

$$\omega_k(q, \dot{q}) = B_k(q)\dot{q} \quad 1 \leq k(n) \quad (4.15)$$

Denklem 4.14,  $k$  bağıının kütle merkezinin doğrusal hızını, Denklem 4.15 ise kütle merkezinin açısal hızını ifade etmektedir. Denklem 4.14 ve 4.15 temel kinetik enerji eşitliğini veren Denklem 4.3'te yerine konsun.

$$\begin{aligned} T(q, \dot{q}) &= \sum_{k=1}^n \frac{(v_k)^T m_k v_k + (\omega_k)^T D_k \omega_k}{2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(A_k \dot{q})^T m_k A_k \dot{q} + (B_k \dot{q})^T D_k B_k \dot{q}}{2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\dot{q}^T (A_k)^T m_k A_k \dot{q} + \dot{q}^T (B_k)^T D_k B_k \dot{q}}{2} \\ &= \sum_{k=1}^n \dot{q}^T [(A_k)^T m_k A_k + (B_k)^T D_k B_k] \dot{q} \\ &= \dot{q}^T \frac{\sum_{k=1}^n [(A_k)^T m_k A_k + (B_k)^T D_k B_k]}{2} \dot{q} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Görüldüğü gibi  $3 \times n$  Jakobiyen alt matrisler  $A_k$ ,  $B_k$  ve  $3 \times 3$  bağ atalet tensörü  $D_k$   $q$ 'ya bağlıdır. Denklem 4.16 sadeleştirildiğinde bir robot kolunun toplam kinetik enerjisi aşağıdaki gibi olur.

$$D(q) = \sum_{k=1}^n \{ [A_k(q)]^T m_k A_k(q) + [B_k(q)]^T D_k(q) B_k(q) \} \quad (4.17)$$

Denklem 4.17, Denklem 4.16'da yerine konursa toplam kinetik enerji, eklem hızları ve manipülatör atalet tensörü cinsinden aşağıdaki gibi daha basit bir şekilde ifade edilebilir.

$$T(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^T D(q) \dot{q}}{2} \quad (4.18)$$

Denklemden  $D(q)$  manipülatör atalet tensörüdür ve herhangi bir  $k$  bağıının atalet tensörü gibi simetrik pozitif tanımlı bir matrisidir.



#### 4.2.5. Yerçekimi

Robot kolunun Lagrange fonksiyonunu tamamen ifade etmek için, robot kolunun toplam potansiyel enerjisi  $U(q)$ 'nin tanımlanması gerekir. Bir robot kolunun  $k$  bağıının depoladığı potansiyel enerji, yerçekimi ivmesinin var olduğu ortamda  $k$  bağla kütle merkezinin yer değiştirmesini sağlayan iş miktarı kadardır.  $g \in R^3$  ana koordinat çerçevesine göre yerçekimi ivme vektörü olsun.  $k$  bağıının  $\bar{c}_k(q)$  konumuna yer değiştirmesi için gerekli iş  $-m_k g^T \bar{c}_k(q)$  kadardır. Bu arada bir robot kolunda depolanan toplam potansiyel enerji,

$$U(q) = -\sum_{k=1}^n m_k g^T \bar{c}_k(q) \quad (4.19)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem 4.19, Denklem 4.20'deki gibi ifade edilebilir.

$$U(q) = -g^T \bar{c}(q) \quad (4.20)$$

Denklemde  $\bar{c}(q) = \sum_{k=1}^n m_k \bar{c}_k(q)$ 'dir.  $\bar{c}(q)$   $n$  tane bağıın kütle merkezinin toplam ağırlığıdır.  $U(q)$ , robot kolunun bütün bağlarının  $g$  yerçekimi ivmesine tam zıt yönlü olduğu zaman en büyük olur. Bütün bağlar  $g$  yerçekimi ivmesine dik olduğu zaman ise  $U(q)$  minimumdur.  $U(q)$  potansiyel enerjisini minimum yapmak için küçük bir sabit potansiyel enerji ifadesi eklenebilir. Fakat  $U(q)$  ifadesinin sadece türevi alındığından herhangi bir sabit eklemek pek de gerekli değildir. Denklem 4.1, 4.19 ve 4.20 birleştirildiğinde bir robot kolunun Lagrange fonksiyonu Denklem 4.21'deki gibi olur.

$$L(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^T D(q) \dot{q}}{2} + g^T \bar{c}(q) \quad (4.21)$$

#### 4.2.6. Kuvvet

Genelleştirilmiş kuvvet, eklemlerin sanal(virtual) yer değiştirmesinden doğan iş olarak tanımlanabilir. Bir gerçek yer değiştirme, anlık çok küçük  $\delta q$  yer değiştirmesidir ve robot kol bağları tarafından oluşturulan geometrik sınırlamaları sağlamalıdır. Gerçek yer değiştirme tarafından üretilen iş gerçek iştir ve  $\delta W$  şeklinde ifade edilir. Gerçek yer değiştirme ve gerçek iş ile ilişkilendirilen kuvvet, genelleştirilmiş kuvveti verir. Bu durumda genelleştirilmiş kuvvet,  $F$  nxn vektör olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\delta W = F^T \delta q \quad (4.22)$$

Genelleştirilmiş kuvvet vektörünün elemanları eklem tipine göre eğer prizmatikse kuvvet, dönele ise tork olur.

#### 4.3.8. Lagrange-Euler dinamik modeli

Şu ana kadar açıklanan kinetik enerji, potansiyel enerji ve genelleştirilmiş kuvvet ifadesi Denklem 4.2'deki Lagrange eşitliğine uygulanarak bir robot kolunun genel dinamik modeli çıkarılabilir. Gerekli türev işlemleri gerçekleştirilerek Denklem 4.18'deki kinetik enerji ve Denklem 4.20'deki potansiyel enerji eşitlikleri, skaler büyüklüklerin toplamı şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$T(q, \dot{q}) = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n D_{kj}(q) \dot{q}_k \dot{q}_j}{2} \quad (4.23)$$

$$U(q) = -\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j \bar{c}_k^j(q) \quad (4.24)$$

Denklem 4.1'deki Lagrange eşitliği  $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$  idi.  $D(q)$  simetrik olduğundan Lagrange eşitliğinin  $\dot{q}_i$ 'ye göre türevi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_i} L(q, \dot{q}) &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T(q, \dot{q}) = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n D_{kj}(q) \dot{q}_k \dot{q}_j}{2} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{D_{ii}(q) \dot{q}_i^2 + \dot{q}_i \left[ \sum_{j \neq i} D_{ij}(q) \dot{q}_j \right] + \dot{q}_i \left[ \sum_{k \neq i} D_{ki}(q) \dot{q}_k \right]}{2} \\
&= \frac{2D_{ii}(q) \dot{q}_i + \sum_{j \neq i} D_{ij}(q) \dot{q}_j + \sum_{k \neq i} D_{ki}(q) \dot{q}_k}{2} \\
&= D_{ii}(q) \dot{q}_i + \frac{\sum_{j \neq i} D_{ij}(q) \dot{q}_j + \sum_{k \neq i} D_{ik}(q) \dot{q}_k}{2} = \sum_{j=1}^n D_{ij}(q) \dot{q}_j \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Bir robot kolu için Denklem 4.2'de verilen Lagrange eşitliğindeki ilk terim aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}) &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n D_{ij}(q) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n D_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \left( \frac{dD_{ij}(q)}{dt} \right) \dot{q}_j \\
&= \sum_{j=1}^n D_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial D_{ij}(q)}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k \right\} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n D_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial D_{ij}(q)}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Aynı şekilde Denklem 4.2'de verilen Lagrange eşitliğindeki ikinci terim, Lagrange fonksiyonunun  $q_i$ 'ye göre türevidir. Denklem 4.14 kullanıldığında aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_i} L(q, \dot{q}) &= \frac{\partial}{\partial q_i} T(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_i} U(q) = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n D_{kj}(q) \dot{q}_k \dot{q}_j}{2} + \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_k \bar{c}_k^j(q) \\
&= \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial D_{kj}(q)}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j}{2} + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j \left[ \frac{\partial \bar{c}_k^j(q)}{\partial q_i} \right] \\
&= \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial D_{kj}(q)}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j}{2} + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j A_{ki}^j(q)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial D_{kj}(q)}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j}{2} + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j A_{ki}^j(q) \quad (4.27)$$

Son toplamdaki indeks  $j=1$ 'den ziyade  $j=i$ 'den başlar. Çünkü Denklem 4.12'den anlaşılacağı üzere  $A_j$  matrisinin  $n-j$  kolonları sıfırdır. Denklem 4.27'deki son ifade sadeleştirilirse yeni iki büyüklüğe ulaşılır.

$$c_{kj}^i(q) = \frac{\partial}{\partial q_k} D_{ij}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} D_{kj}(q) \quad 1 \leq i, j, k \leq n \quad (4.28)$$

$$h_i(q) = - \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j A_{ki}^j(q) \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.29)$$

Denklem 4.28'deki  $c^i$  nxn matrisi,  $i$ . ekleme ait hız bağlaşım (coupling) matrisi, Denklem 4.29'daki  $h_i$  nx1 vektörü ise yerçekimi vektörüdür. Bulunan bu yeni iki ifadeyi de kullanarak bir robot kolunun dinamik modelini daha açık bir şekilde ifade etmek mümkün olur.

$q_n$ ,  $n$  eklemlili bir robotun eklem değişkenlerini,  $\tau$ , eyleyicilerin tork ifadelerini gösterebilir. Eğer robot kolu çalışma uzayında serbest bir şekilde hareket ediyorsa, bu hareketin dinamik eşitliği aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sum_{j=1}^n D_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj}^i(q) \dot{q}_k \dot{q}_j + h_i(q) + b_i(\dot{q}) = \tau_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.30)$$

Denklemde ilk terim, robot bağlarının hareketlerinden üretilen içsel kuvvet ve tork ifadelerini temsil eden ivme terimidir. İkinci terim, robot hızlarıyla ilişkilendirilen Coriolis ve Merkezkaç kuvvetlerdir. Üçüncü terim, yerçekimi ivmesini temsil eden konum ifadesidir. Son terim ise robot kolunun hareketine zıt sürtünmeyi temsil eden hız terimidir. Sonuç olarak bir robotun eklem uzayındaki dinamik eşitliği Denklem 4.31'deki gibi olur.

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau_i \quad (4.31)$$

Denklemdede, birinci terim manipölatörün genel atalet tensörü veya kütle matrisini, ikinci terim Coriolis ve merkezkaç (centrifugal) kuvvetleri ve üçüncü terim yerçekimi ivmesini temsil etmektedir. Robot kolunun hareketine zıt sürtünmeyi temsil eden dördüncü terimse bu denklemdede ihmal edilmiştir.

Robotun dinamiğini kartezyen değişkenler cinsinden ifade etmek için denklem 4.32 kullanılır.

$$D(q)\ddot{\chi} + C(q, \dot{q}) + G(q) = F \quad (4.32)$$

Denklemdede,  $F$  robotun uç işlevcisine etki eden kuvvet-tork vektörünü,  $\chi$  uç işlevcinin konum ve yönelimini gösteren kartezyen vektörü göstermektedir. Diğer terimler eklem uzayında olduğu gibi,  $D(q)$  kartezyen kütle matrisi,  $C(q, \dot{q})$  Kartezyen Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü ve  $G(q)$  yerçekimi vektörünü göstermektedir. Kartezyen uzaydan eklem uzayına geçmek için aşağıdaki denklem kullanılır.

$$\tau = J^T(q)F \quad (4.33)$$

Denklemdede  $J(q)$ ,  $\ddot{\chi}$  ve  $F$ 'de olduğu gibi uç işlevcisi cinsinden tanımlanan robotun Jakobiyen matrisini göstermektedir.

Bir robot kolunun dinamik modelini Lagrange-Euler denklemlerini kullanarak çıkarmak için aşağıdaki adımlar sırayla gerçekleştirilir.

- 1- DH yöntemini kullanarak  $L_i$  koordinat sisteminin  $i$ . bağ için prensip eksenler kuralına göre yönelimi alınıp  $L_0, L_1, L_2, .. L_n$  bağ koordinat sistemleri belirlenir.
- 2-  $L_i$  koordinat sistemine göre  $i$ . bağın kütle merkezi  $\Delta c_i$ 'nin koordinatları bulunur.
- 3-  $i$ . bağın kütle merkezine ötelenen  $L_i$  koordinat çerçevesini  $L_c$  olarak isimlendirip,  $L_c$  koordinat çerçevesine göre  $i$ . bağın kütle merkezinin atalet tensörü

$\bar{D}_i$  bulunur. Bu işlemler yapıldıktan sonra aşağıdaki adımlar sırayla gerçekleştirilir.

$$4- z^{i-1}(q) = {}^0R(q) i^3$$

$${}^i T(q) = {}^0 T(q) {}^{i-1} T(q),$$

$$\bar{c}_i(q) = H_1 {}^0 T(q) \Delta c_i,$$

$$D_i(q) = {}^0 R(q) \bar{D}_i [{}^0 R(q)]^T$$

5-  $J_i(q)$  Jakobiyen matrisi Denklem 4.12'ye göre hesaplanır.

6- Denklem 4.12 yardımıyla hesaplanan  $J_i(q)$  Jakobiyen matrisi kullanılarak

$$D(q) = D(q) + [A_k(q)]^T m_k A_k(q) + [B_k(q)]^T D_k(q) B_k(q)$$

manipülator atalet tensörü bulunur.

7- Manipülator atalet tensörünü kullanıp Denklem 4.28'i uygulayarak  $c_i(q)$  Coriolis

ve merkezkaç kuvvetleri ve Denklem 4.29'u uygulayarak da  $h_i(q)$  yerçekimi

ivmesi hesaplanır.

Üç eklemlilik bir robot kolu için Coriolis ve merkezkaç kuvvetleri temsil eden hız bağlaşımlar matrisinin elemanları Denklem 4.28 uygulanmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

Birinci ekleme ait hız bağlaşımlar matrisinin elemanları:

$$c_{11}^1 = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{11}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{11}(q) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{11}(q)$$

$$c_{12}^1 = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{12}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{12}(q) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{12}(q)$$

$$c_{13}^1 = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{13}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{13}(q) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{31}(q)$$

$$c_{21}^1 = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{11}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{21}(q)$$

$$c_{22}^1 = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{12}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{22}(q)$$

$$c_{23}^1 = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{13}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{23}(q)$$

$$c_{31}^1 = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{11}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{31}(q)$$

$$c_{32}^1 = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{12}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{32}(q)$$

$$c_{33}^1 = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{13}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} D_{33}(q)$$

İkinci ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanları.

$$c_{11}^2 = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{21}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{11}(q)$$

$$c_{12}^2 = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{22}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{12}(q)$$

$$c_{13}^2 = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{23}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{13}(q)$$

$$c_{21}^2 = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{21}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{21}(q) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{21}(q)$$

$$c_{22}^2 = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{22}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{22}(q) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{22}(q)$$

$$c_{23}^2 = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{23}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{23}(q) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{23}(q)$$

$$c_{31}^2 = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{21}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{31}(q)$$

$$c_{32}^2 = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{22}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{32}(q)$$

$$c_{33}^2 = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{23}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} D_{33}(q)$$

Üçüncü ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanları.

$$c_{11}^3 = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{31}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{11}(q)$$

$$c_{12}^3 = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{32}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{12}(q)$$

$$c_{13}^3 = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{33}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{13}(q)$$

$$c_{21}^3 = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{31}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{21}(q)$$

$$c_{22}^3 = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{32}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{22}(q)$$

$$c_{23}^3 = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{33}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{23}(q)$$

$$c_{31}^3 = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{31}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{31}(q) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{31}(q)$$

$$c_{32}^3 = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{32}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{32}(q) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{32}(q)$$

$$c_{33}^3 = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{33}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{33}(q) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{33}(q)$$

Aynı şekilde üç eklemlilik bir robot kolu için yerçekimi vektörü Denklem 4.29'un uygulanmasıyla bulunur. Bu durumda birinci eklem için yerçekimi vektörü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} & -g_1(m_1 A_{11}^1 + m_2 A_{11}^2 + m_3 A_{11}^3), \quad -g_2(m_1 A_{12}^1 + m_2 A_{21}^2 + m_3 A_{21}^3), \\ & -g_3(m_1 A_{31}^1 + m_2 A_{31}^2 + m_3 A_{31}^3) \end{aligned}$$

İkinci eklem için yerçekimi vektörü aşağıdaki gibi bulunur.

$$-g_1(m_2 A_{12}^2 + m_3 A_{12}^3), \quad -g_2(m_2 A_{22}^2 + m_3 A_{22}^3), \quad -g_3(m_2 A_{32}^2 + m_3 A_{32}^3)$$

Üçüncü eklem için yerçekimi vektörü aşağıdaki gibi bulunur.

$$-g_1(m_3 A_{13}^3), \quad -g_2(m_3 A_{23}^3), \quad -g_3(m_3 A_{33}^3)$$



Denklem 4.30'daki robot kolunun hareketine zıt sürtünmeyi ifade eden  $b_i(\dot{q})$  ifadesinin robot kolu dinamiğine etkisi vardır ve  $k$ . ekleme ait sürtünme kuvveti aşağıdaki denklemle ifade edilir.

$$b_k(\dot{q}) = b_k^v \dot{q}_k + \text{sgn}(\dot{q}_k) \left[ b_k^d + (b_k^s - b_k^d) \exp\left(-\frac{|\dot{q}_k|}{\varepsilon}\right) \right] \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.34)$$

Denklemde  $\text{sgn}$ , signum fonksiyonudur. Sürtünme kuvveti ifadesindeki ilk terim  $b_k^v \dot{q}_k$  viskos sürtünmesidir ve  $b_k^d$  ise  $k$ . ekleme ait viskos sürtünme katsayısıdır. İkinci terim dinamik sürtünme kuvvetidir ve  $b_k^d$   $k$ . ekleme ait dinamik sürtünme katsayısıdır. Üçüncü terimse durağan (static) sürtünme veya Coulomb sürtünmesidir ve  $b_k^s$   $k$ . ekleme ait durağan sürtünme kuvveti katsayısıdır.  $\varepsilon$  değeri küçük olan pozitif bir değişkendir.

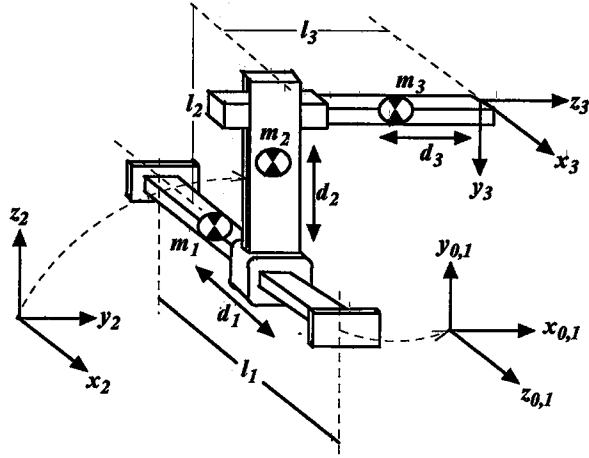
Yukarıda açıklanan adımlar robot kolunun serbestlik derecesi kadar tekrarlanarak robot kolunun dinamik modeli çıkarılır.

### 4.3. Temel Onaltı Adet Endüstriyel Robotun Dinamik Analizi

Bu bölümde L-E yöntemi kullanılarak temel onaltı adet endüstriyel robotun dinamik modeli çıkarılmıştır. Her robotun düzenleştiriminde, koordinat çerçevelerinin gösteriminde ve sembolik kütle yerleştiriminde faydalanarak dinamik model çıkarılmıştır.

#### 4.3.1. SS robotunun dinamik modeli

SS robotunun düzenleştirimi, koordinat çerçevelerinin gösterimi ve sembolik kütle yerleştirimi Şekil 4.2'de görülmektedir.



Şekil 4.2. SS robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

$L_1$  koordinat sistemine göre birinci bağı kütlesinin konumu aşağıdaki vektörle ifade edilir.

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_1}{2} & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.35)$$

$L_c$  koordinat sistemi,  $L_1$  koordinat sisteminde yer alan  $z_1$  eksenini boyunca  $\frac{l_1}{2}$  kadar ötelenerek elde edilsin. Bu durumda,  $L_c$  birinci ekseninin merkezinde yer alır.  $\bar{D}_1$ ,  $L_c$  koordinat sistemine göre birinci bağı kütlesinin atalet tensörüdür ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Birinci ekleme ait  ${}^0T_1$  homojen dönüşüm matrisi aşağıda verilmiştir.

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Ana koordinat sistemine göre birinci bağı kütle merkezinin koordinatları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}l_1 + q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Sonuç olarak birinci bağı ana koordinat sistemine göre atalet tensorü aşağıdaki gibi bulunur.

$$D_1 = {}^0_1R \bar{D}_1 {}^0_1R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Birinci bağına ait  $6 \times 6$  Jakobiyen matrisi,  $\bar{c}_1$  vektörünün  $d_1$ ,  $d_2$  ve  $d_3$ 'e göre türevinin alınıp  $z^0$  ve  $\xi_1$  değişkenlerinin kullanılmasıyla bulunur.

$z^0 = {}^0_0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem prizmatik olduğundan  $\xi = 0$ 'dir.

Dolayısıyla,  $b_1 = \xi z^0 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ 'dir.

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$J_1$  Jakobiyen matrisi  $A_1$  ve  $B_1$  gibi iki adet alt matris şeklinde yazılarak, birinci bağı manipülâtörün genel atalet tensorüne katkısı elde edilir.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 D(q_1) &= m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 \\
 &= m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

$L_2$  koordinat sistemine göre ikinci bağı kütle merkezinin konumu aşağıdaki vektörle ifade edilir.

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_2}{2} & 1 \end{bmatrix}^T \tag{4.42}$$

$L_c$  koordinat sistemi,  $L_2$  koordinat sisteminde yer alan  $z_2$  eksenini boyunca  $\frac{l_2}{2}$  kadar ötelenerek elde edilsin. Bu durumda,  $L_c$  ikinci eksenin merkezinde yer alır.  $\bar{D}_2$ ,  $L_c$  koordinat sistemine göre ikinci bağı kütle merkezinin atalet tensörüdür ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

İlk iki eksene ait  ${}^0_2T$  homojen dönüşüm matrisi aşağıda verilmiştir.

$${}^2_0T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ -1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Sonuçta, ikinci bağı ana koordinat sistemine göre atalet tensorü aşağıdaki gibi bulunur.

$$D_2 = {}^0_2R \overline{D_2} {}^0_2R^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{yy_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx_2} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Ana koordinat sistemine göre ikinci bağı kütle merkezinin koordinatları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ -1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}l_2 + q_2 \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

İkinci bağına ait  $6 \times 6$  Jakobiyen matrisi,  $\bar{c}_2$  vektörünün  $d_1$ ,  $d_2$  ve  $d_3$ 'e göre türevinin alınıp  $z^1$  ve  $\xi_1$  değişkenlerinin kullanılmasıyla bulunur.

$z^1 = {}^0_1R i^3 = [0 \ 0 \ 1]$  ve ikinci eklem prizmatik olduğundan  $\xi_2 = 0$ ' dir.

Dolayısıyla,  $b_2 = \xi z^0 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ ' dir.

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$J_2$  Jakobiyen matrisi  $A_2$  ve  $B_2$  gibi iki adet alt matris şeklinde yazılarak, manipulatörün genel atalet tensorüne ikinci bağıın katkısı elde edilir.

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 D(q_2) &= m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2 \\
 &= m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{yy_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

$L_3$  koordinat sistemine göre üçüncü bağıın kütle merkezinin konumu aşağıdaki vektörle ifade edilir.

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_3}{2} & 1 \end{bmatrix}^T \tag{4.49}$$

$L_c$  koordinat sistemi,  $L_3$  koordinat sisteminde yer alan  $z_3$  eksenini boyunca  $\frac{l_3}{2}$  kadar ötelenerek elde edilsin. Bu durumda,  $L_c$  ikinci eksenin merkezinde yer alır.  $\bar{D}_3$ ,  $L_c$  koordinat sistemine göre ikinci bağıın kütle merkezinin atalet tensörüdür ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

İlk üç eksene ait  ${}^0_3T$  homojen dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ -1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Sonuçta üçüncü bağı ana koordinat sistemine göre atalet tensorü aşağıdaki gibi bulunur.

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{zz_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx_3} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Ana koordinat sistemine göre üçüncü bağı kütle merkezinin koordinatları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\bar{c}_3 = H_1 {}^0T_3 \Delta c_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ -1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_3 + q_3 \\ q_2 \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Üçüncü bağına ait  $6 \times 6$  Jakobiyen matrisi,  $\bar{c}_3$  vektörünün  $d_1$ ,  $d_2$  ve  $d_3$ 'e göre türevinin alınıp  $z^2$  ve  $\xi_3$  değişkenleri kullanılarak bulunur.  $y^2 = {}^0R^3 = [0 \ 1 \ 0]^T$  ve üçüncü eklem prizmatik olduğundan  $\xi_3 = 0$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_3 = \xi y^2 = 0 \cdot [0 \ 1 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ ' dir.

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$J_3$  Jakobiyen matrisi  $A_3$  ve  $B_3$  gibi iki adet matris şeklinde yazılarak, ikinci bağıın manipülâtörün genel atalet tensörüne katkısı elde edilir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$D(q_3) = m_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{zz_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Sonuç olarak SS robotunun kütle matrisi, üç eklemin kütle matrislerinin toplanmasıyla bulunur.

$$D(q) = D(q_1) + D(q_2) + D(q_3) \quad (4.56)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Birinci eklemin hız bağlaşım matrisi Denklem 4.58'deki gibi bulunur.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde, y eksenine yerçekimine zıt yönde olduğundan yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \quad -g_0 \quad 0]^T$  şeklinde ifade edilir. Vektörde



$g_0$  yerçekimi ivmesini temsil etmektedir ve  $g_0 = 9.8062 \text{ m/sn}^2$ 'dir. Birinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0(m_1 A^1_{21} + m_2 A^2_{21} + m_3 A^3_{21}) = g_0(m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 + m_3 \cdot 0) = 0 \quad (4.59)$$

İkinci ekleme ait hız bağlaşım matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde, z eksenine yerçekimine zıt yönde olduğundan yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir ve ikinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = g_0(m_2 A^2_{32} + m_3 A^3_{32}) = 0 \quad (4.61)$$

Üçüncü ekleme ait hız bağlaşım matrisi Denklem 4.62'deki gibi bulunur.

$$c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde, y eksenine yerçekimiyle aynı yönde olduğundan yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ g_0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir ve üçüncü ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = -g_0 m_3 A^3_{23} = 0 \quad (4.63)$$

Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, Denklem 4.58, 4.60 ve 4.62'den faydalanarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Yerçekiminden dolayı oluşan ivme vektörü, Denklem 4.59, 4.61 ve 4.63'ten faydalanarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Sonuç olarak SS robotunun her bir eyleyicisine etki eden tork ifadesi aşağıdaki gibi olur.

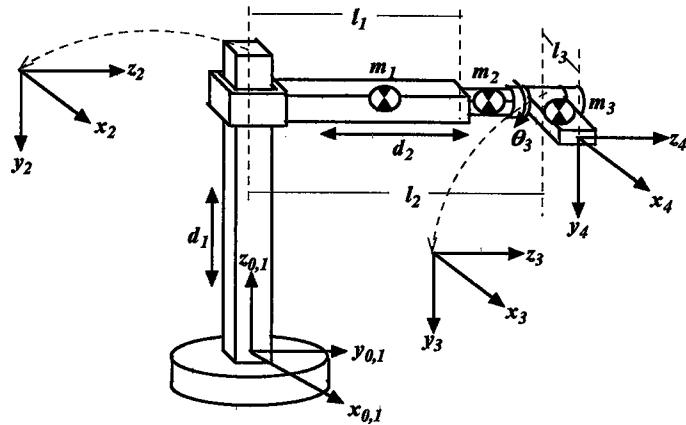
$$\tau_1 = [m_1 + m_2 + m_3] \ddot{q}_1 \quad (4.66)$$

$$\tau_2 = [m_2 + m_3] \ddot{q}_2 \quad (4.67)$$

$$\tau_3 = m_3 \ddot{q}_3 \quad (4.68)$$

#### 4.3.2. SC robotunun dinamik modeli

SC robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.3'te görülmektedir.



Şekil 4.3. SC robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

SC robotunun dinamik modeli, giriş bölümünde özetlenen adımlar kullanılarak çıkarılmıştır. Fakat, dinamik model çıkarmak için uygulanan ara adımlar ek F'de verilmiştir. Burada sadece manipülatörün 3x3 kütle matrisi, 3x1 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, 3x1 yerçekimi ivme vektörü ve sonuçta her bir ekleme etkileyen tork ifadesi verilmiştir. Buna göre Denklem 4.69 SC robotunun kütle matrisini, Denklem 4.70 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.71 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.72, 4.73 ve 4.74'de her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q)\ddot{q} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & \frac{1}{2}l_2m_3c\theta_3 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ \frac{1}{2}l_2m_3c\theta_3 & 0 & \frac{1}{4}l_2^2m_3 + I_{zz3} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_2m_3s\theta_3\dot{q}_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} g_0(m_1 + m_2 + m_3) \\ -g_0(m_2 + m_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

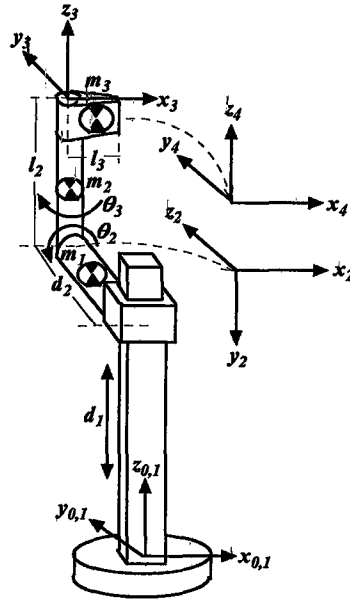
$$\tau_1 = [m_1 + m_2 + m_3]\ddot{q}_1 + [\frac{1}{2}l_2m_3c\theta_3]\ddot{q}_3 - [\frac{1}{2}l_2m_3s\theta_3]\dot{q}_3^2 + g_0(m_1 + m_2 + m_3) \quad (4.72)$$

$$\tau_2 = [m_2 + m_3]\ddot{q}_2 - g_0(m_2 + m_3) \quad (4.73)$$

$$\tau_3 = [\frac{1}{2}l_2m_3c\theta_3]\ddot{q}_1 + [\frac{1}{4}l_2^2m_3 + I_{zz3}]\ddot{q}_3 \quad (4.74)$$

#### 4.3.3. SN robotunun dinamik modeli

SN robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.4'de görülmektedir.



Şekil 4.4. SN robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.75 SN robotunun kütle matrisini, Denklem 4.76 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.77 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.78, 4.79 ve 4.80 ise bir eyleyici etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$\begin{aligned}
 D(q) = & \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_2 c \theta_3 - l_2 m_3 s \theta_2 - \frac{1}{2} l_2 m_2 s \theta_2 & \cdot \\ \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_2 c \theta_3 - l_2 m_3 s \theta_2 - \frac{1}{2} l_2 m_2 s \theta_2 & a_{SN} & \cdot \\ -\frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_2 s \theta_3 & \frac{1}{2} I_2 l_3 m_3 s \theta_3 - s \theta_3 s \theta_2 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -\frac{1}{2} I_3 m_3 s \theta_2 s \theta_3 \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2} I_3 l_2 m_3 s \theta_3 - s \theta_3 s \theta_2 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{4} I_3^2 m_3 + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (4.75)
 \end{aligned}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} b_{SN} \\ c_{SN} \\ d_{SN} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} g_0(m_1 + m_2 + m_3) \\ 0 \\ -g_0 l_3 m_3 s \theta_2 s \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & [m_1 + m_2 + m_3] \ddot{q}_1 + \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_2 c \theta_3 - l_2 m_3 s \theta_2 - \frac{1}{2} l_2 m_2 s \theta_2 \right] \ddot{q}_2 - \left[ \frac{1}{2} I_3 m_3 s \theta_2 s \theta_3 \right] \ddot{q}_3 \\ & - \left[ \frac{1}{2} l_2 m_2 c \theta_2 + \frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 + l_2 m_3 c \theta_2 \right] \dot{q}_2^2 - [l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3] \dot{q}_2 \dot{q}_3 - \left[ \frac{1}{2} I_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 \right] \dot{q}_3^2 \\ & + g_0(m_1 + m_2 + m_3) \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_2 c \theta_3 - l_2 m_3 s \theta_2 - \frac{1}{2} l_2 m_2 s \theta_2 \right] \ddot{q}_1 + \left[ \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + s^2 \theta_2 I_{xx2} + c^2 \theta_2 I_{yy2} \right. \\ & + \left. \frac{1}{4} l_3^2 m_3 c^2 \theta_3 + l_2^2 m_3 + s^2 \theta_2 (c^2 \theta_3 I_{xx3} + s^2 \theta_3 I_{yy3}) + c^2 \theta_2 I_{zz3} \right] \ddot{q}_2 + \left[ \frac{1}{2} I_3 l_2 m_3 s \theta_3 \right. \\ & - \left. s \theta_3 s \theta_2 c \theta_3 (I_{xx3} - I_{yy3}) \right] \ddot{q}_3 + \left[ s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx2} - I_{yy2} + c^2 \theta_3 I_{xx3} + s^2 \theta_3 I_{yy3} - I_{zz3}) \right] \dot{q}_2^2 \\ & + \left[ s \theta_3 c \theta_3 \left( \frac{1}{2} c \theta_2 (I_{yy3} - I_{xx3}) + \frac{1}{2} l_3^2 m_3 + 2s^2 \theta_2 [I_{yy3} - I_{xx3}] \right) - (s \theta_2 c^2 \theta_3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} s \theta_2) (I_{yy3} - I_{xx3}) \right] \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \left[ \frac{1}{2} I_2 I_3 m_3 c \theta_3 + (2s \theta_2 c^2 \theta_3 - s \theta_2) (I_{yy3} - I_{xx3}) \right] \dot{q}_3^2 \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \tau_3 = & - \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_2 s \theta_3 \right] \ddot{q}_1 + \left[ \frac{1}{2} I_2 l_3 m_3 s \theta_3 - s \theta_3 s \theta_2 c \theta_3 (I_{xx3} - I_{yy3}) \right] \ddot{q}_2 \\ & + \left[ \frac{1}{4} I_3^2 m_3 + s^2 \theta_3 I_{xx3} + c^2 \theta_3 I_{yy3} \right] \ddot{q}_3 + \left[ s \theta_3 c \theta_3 (c \theta_2 I_{yy3} - c \theta_2 I_{xx3} + \frac{1}{4} l_3^2 m_3 \right. \\ & \left. + s^2 \theta_2 I_{xx3} - I_{yy3}) \right] \dot{q}_2^2 - \left[ s \theta_3 c \theta_3 (I_{yy3} - I_{xx3}) \right] \dot{q}_3^2 - g_0 l_3 m_3 s \theta_2 s \theta_3 \end{aligned} \quad (4.80)$$

Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} a_{SN} = & \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + s^2 \theta_2 I_{xx2} + c^2 \theta_2 I_{yy2} + \frac{1}{4} l_3^2 m_3 c^2 \theta_3 + l_2^2 m_3 \\ & + s^2 \theta_2 (c^2 \theta_3 I_{xx3} + s^2 \theta_3 I_{yy3}) + c^2 \theta_2 I_{zz3} \end{aligned} \quad (4.81)$$

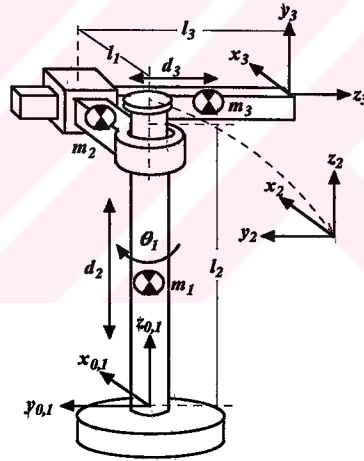
$$\begin{aligned} b_{SN} = & - \left[ \frac{1}{2} l_2 m_2 c \theta_2 + \frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 + l_2 m_3 c \theta_2 \right] \dot{q}_2^2 - [l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\ & - \left[ \frac{1}{2} I_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 \right] \dot{q}_3^2 \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned}
c_{SN} = & [s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2} + c^2\theta_3 I_{xx_3} + s^2\theta_3 I_{yy_3} - I_{zz_3}) \dot{q}_2^2 + [s\theta_3 c\theta_3 (\frac{1}{2} c\theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \\
& + \frac{1}{2} l_3^2 m_3 + 2s^2\theta_2 [I_{yy_3} - I_{xx_3}]) - (s\theta_2 c^2\theta_3 - \frac{1}{2} s\theta_2) (I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
& + [\frac{1}{2} I_2 I_3 m_3 c\theta_3 + (2s\theta_2 c^2\theta_3 - s\theta_2) (I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_3^2
\end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned}
d_{SN} = & [s\theta_3 c\theta_3 (c\theta_2 I_{yy_3} - c\theta_2 I_{xx_3} + \frac{1}{4} l_3^2 m_3 + s^2\theta_2 I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_2^2 \\
& - [s\theta_3 c\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_3^2
\end{aligned} \quad (4.84)$$

#### 4.3.4. CS robotunun dinamik modeli

CS robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.5'te görülmektedir.



Şekil 4.5. CS robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.85 CS robotunun kütle matrisini, Denklem 4.86 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.87 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.88, 4.89 ve 4.90 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} l_1^2 m_2 + I_{z_1} + I_{z_2} + m_3 (l_1^2 + \frac{1}{4} l_3^2 + l_3 q_3 + q_3^2) + I_{yy_3} & 0 & -l_1 m_3 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ -m_3 l_1 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} [l_3 m_3 + 2m_3 q_3] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ 0 \\ -[\frac{1}{2} l_3 m_3 + m_3 q_3] \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_0 (m_2 + m_3) \\ -g_0 m_3 c \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

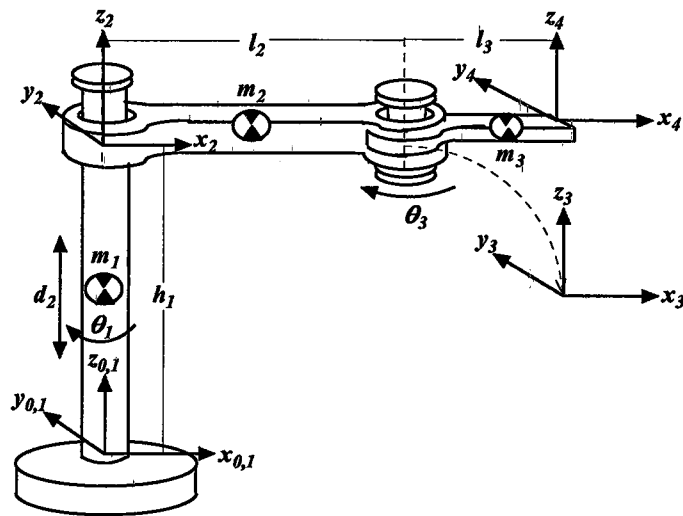
$$\tau_1 = [\frac{1}{4} l_1^2 m_2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_3 (l_1^2 + \frac{1}{4} l_3^2 + l_3 q_3 + q_3^2) + I_{yy_3}] \ddot{q}_1 - [l_1 m_3] \ddot{q}_3 + [l_3 m_3 + 2m_3 q_3] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \quad (4.88)$$

$$\tau_2 = [m_2 + m_3] \ddot{q}_2 + g_0 (m_2 + m_3) \quad (4.89)$$

$$\tau_3 = -[m_3 l_3] \ddot{q}_1 + m_3 \ddot{q}_3 - [\frac{1}{2} l_3 m_3 + m_3 q_3] \dot{q}_1^2 - g_0 m_3 c \theta_1 \quad (4.90)$$

#### 4.3.5. CC robotunun dinamik modeli

CC robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.6'da görülmektedir.



Şekil 4.6. CC robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.91 CC robotunun kütle matrisini, Denklem 4.92 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.93 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.94, 4.95 ve 4.96 ise her bir eyleyiçiye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} a_{CC} & 0 & m_3(\frac{1}{2}l_2l_3c\theta_3 + \frac{1}{4}l_3^2) + I_{zz_3} \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ m_3(\frac{1}{2}l_2l_3c\theta_3 + \frac{1}{4}l_3^2) + I_{zz_3} & 0 & \frac{1}{4}m_3l_3^2 + I_{zz_3} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -[l_2l_3m_3s\theta_3]\dot{q}_1\dot{q}_3 - [\frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3]\dot{q}_3^2 \\ 0 \\ [\frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3]\dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ +g_0(m_2 + m_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & [\frac{1}{4}m_2l_2^2 + m_3(l_2l_3c\theta_3 + l_2^2 + \frac{1}{4}l_3^2) + I_{zz_1} + I_{zz_2} + I_{zz_3}]\ddot{q}_1 \\ & + [m_3(\frac{1}{2}l_2l_3c\theta_3 + \frac{1}{4}l_3^2) + I_{zz_3}]\ddot{q}_3 - [l_2l_3m_3s\theta_3]\dot{q}_1\dot{q}_3 - [\frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3]\dot{q}_3^2 \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\tau_2 = [m_2 + m_3]\ddot{q}_2 + g_0(m_2 + m_3) \quad (4.95)$$

$$\tau_3 = [\frac{1}{2}l_2l_3m_3c\theta_3 + \frac{1}{4}l_3^2m_3 + I_{zz_3}]\ddot{q}_1 + [\frac{1}{4}m_3l_3^2 + I_{zz_3}]\ddot{q}_3 + [\frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3]\dot{q}_1^2 \quad (4.96)$$

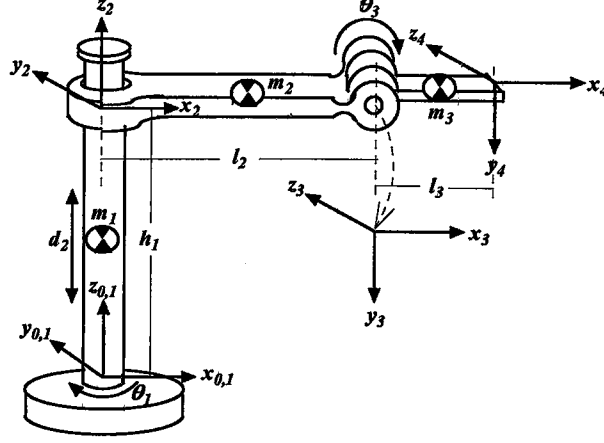
Denklem 4.91'de kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$a_{CC} = \frac{1}{4}m_2l_2^2 + m_3(l_2l_3c\theta_3 + l_2^2 + \frac{1}{4}l_3^2) + I_{zz_1} + I_{zz_2} + I_{zz_3} \quad (4.97)$$



#### 4.3.6. CR robotunun dinamik modeli

CR robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.7’de görülmektedir.



Şekil 4.7. CR robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.98 CR robotunun kütle matrisini, Denklem 4.99 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.100 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.101, 4.102 ve 4.103 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} k_{CR} & 0 & s^2\theta_3 I_{xx_3} + c^2\theta_3 I_{yy_3} \\ 0 & m_2 + m_3 & \frac{1}{2} l_3 m_3 c\theta_3 \\ s^2\theta_3 I_{xx_3} + c^2\theta_3 I_{yy_3} & \frac{1}{2} l_3 m_3 c\theta_3 & \frac{1}{4} l_3^2 m_3 + s^2\theta_3 I_{xx_3} + c^2\theta_3 I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} I_{CR} \\ -[\frac{1}{2} l_3 m_3 s\theta_3] \dot{q}_3^2 \\ m_{CR} \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_0 (m_2 + m_3) \\ \frac{1}{2} g_0 m_3 l_3 s\theta_1 s\theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & \left[ \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \right] \ddot{q}_1 \\
& + [s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3}] \ddot{q}_3 - [m_3 \left( \frac{1}{2} l_3^2 c \theta_3 s \theta_3 + l_2 l_3 s \theta_3 \right) - 2s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
& + [2s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_3^2
\end{aligned} \tag{4.101}$$

$$\tau_2 = [m_2 + m_3] \ddot{q}_2 + \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_3 \right] \ddot{q}_2 - \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_3 \right] \dot{q}_3^2 + g_0 (m_2 + m_3) \tag{4.102}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & [s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3}] \ddot{q}_1 + \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_3 \right] \ddot{q}_2 + \left[ \frac{1}{4} l_3^2 m_3 + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \right] \ddot{q}_3 \\
& + [m_3 \left( \frac{1}{2} l_3^2 c \theta_3 s \theta_3 + l_2 l_3 s \theta_3 \right) - 2s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_1^2 \\
& + [s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} g_0 m_3 l_3 s \theta_1 s \theta_3
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

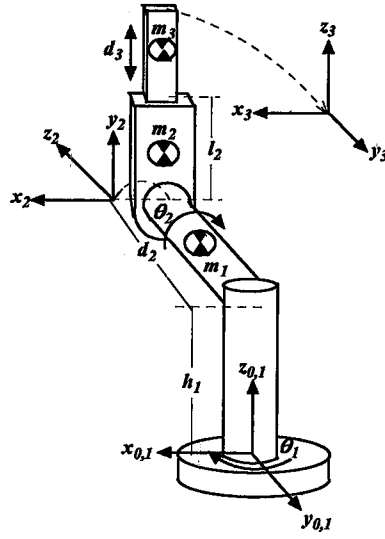
$$k_{CR} = \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \tag{4.104}$$

$$\begin{aligned}
l_{CR} = & -[m_3 \left( \frac{1}{2} l_3^2 c \theta_3 s \theta_3 + l_2 l_3 s \theta_3 \right) - 2s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
& + [2s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_3^2
\end{aligned} \tag{4.105}$$

$$\begin{aligned}
m_{CR} = & [m_3 \left( \frac{1}{2} l_3^2 c \theta_3 s \theta_3 + l_2 l_3 s \theta_3 \right) - 2s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_1^2 \\
& + [s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_3^2
\end{aligned} \tag{4.106}$$

#### 4.3.7. NS robotunun dinamik modeli

NS robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.8'de görülmektedir. Ayrıca, Denklem 4.107, NS robotunun kütle matrisini, Denklem 4.108 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.109 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.110, 4.111 ve 4.112 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.



Şekil 4.8. NS robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

$$D(q) = \begin{bmatrix} v_{NS} & z_{NS} & -m_3 d_2 s \theta_2 \\ y_{NS} & w_{NS} & 0 \\ -m_3 d_2 s \theta_2 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} aa_{NS} \\ bb_{NS} \\ cc_{NS} \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ +g_0 s \theta_1 c \theta_2 \left( \frac{1}{2} l_2 m_2 - \frac{1}{2} l_3 m_3 - l_2 m_3 - q_3 m_3 \right) \\ g_0 m_3 c \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left[ m_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 - \frac{1}{4} l_2^2 c^2 \theta_2 + d_2^2 \right) + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} \right. \\ & + s^2 \theta_2 m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + l_2 l_3 + l_3 q_3 + q_3^2 + 2l_2 q_3 + l_2^2 \right) + m_3 d_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{zz_3} \left. \right] \ddot{q}_1 \\ & - [m_3 d_2 s \theta_2] \ddot{q}_3 - \left[ \frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 c \theta_2 + c \theta_2 m_3 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3 \right) - s^2 \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3}) \right. \\ & \left. - c^2 \theta_2 (I_{yy_2} + I_{zz_3}) \right] \ddot{q}_2 + [c \theta_2 s \theta_2 \left[ \frac{1}{2} l_2^2 m_2 + 2(I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3}) \right] + 2m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 \right. \\ & \left. + l_2 l_3 + l_3 q_3 + q_3^2 + 2l_2 q_3 + l_2^2 \right)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \left[ \frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 s \theta_2 + 2s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_3 s \theta_2 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3 \right) \dot{q}_2^2 + [m_3 s^2 \theta_2 (l_3 + 2q_3 + 2l_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
& - [2d_2 m_3 c \theta_2] \dot{q}_2 \dot{q}_3
\end{aligned} \tag{4.110}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & \left[ -\frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 c \theta_2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} - c \theta_2 m_3 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3 \right) + s^2 \theta_2 I_{xx_3} \right. \\
& + c^2 \theta_2 I_{zz_3} \left. \right] \dot{q}_1 + \left[ \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + l_2 l_3 + l_3 q_3 + l_2^2 + 2l_2 q_3 + q_3^2 \right) + s^2 \theta_2 I_{xx_2} \right. \\
& + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{zz_3} \left. \right] \ddot{q}_2 + \left[ c \theta_2 s \theta_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 m_2 - I_{xx_2} - I_{xx_3} + I_{yy_2} + I_{zz_3} - m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + l_2 l_3 + l_3 q_3 + q_3^2 + 2l_2 q_3 + l_2^2 \right) \right) \right] \dot{q}_1^2 + \left[ s \theta_2 \left( \frac{1}{2} d_2 l_2 m_2 + m_3 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3 \right) \right) \right] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& + \left[ s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3}) \right] \dot{q}_2^2 + \left[ \frac{1}{2} d_2 c \theta_2 (1 - m_3) \right] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \left[ m_3 (l_3 + 2l_2 + 2q_3) \right] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
& + g_0 s \theta_1 c \theta_2 \left( \frac{1}{2} l_2 m_2 - \frac{1}{2} l_3 m_3 - l_2 m_3 - q_3 m_3 \right)
\end{aligned} \tag{4.111}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & -[m_3 d_2 s \theta_2] \ddot{q}_1 + m_3 \ddot{q}_3 + \left[ m_3 s^2 \theta_2 \left( \frac{1}{2} l_3 + q_3 + l_2 q_3 \right) \right] \dot{q}_1^2 - [d_2 c \theta_2 (1 - m_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& - \left[ m_3 \left( \frac{1}{2} l_3 + l_2 + q_3 \right) \right] \dot{q}_2^2 + g_0 m_3 c \theta_2
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
v_{NS} = & m_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 - \frac{1}{4} l_2^2 c^2 \theta_2 + d_2^2 \right) + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} + s^2 \theta_2 m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 \right. \\
& \left. + l_2 l_3 + l_3 q_3 + q_3^2 + 2l_2 q_3 + l_2^2 \right) + m_3 d_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{zz_3}
\end{aligned} \tag{4.113}$$

$$\begin{aligned}
y_{NS} = & -\frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 c \theta_2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} \\
& - c \theta_2 m_3 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3 \right) + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{zz_3}
\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}
z_{NS} = & -\frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 c \theta_2 - c \theta_2 m_3 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3 \right) \\
& + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{zz_3}
\end{aligned} \tag{4.115}$$

$$w_{NS} = \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + l_2 l_3 + l_3 q_3 + l_2^2 + 2l_2 q_3 + q_3^2 \right)$$

$$+ s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{zz_3} \quad (4.116)$$

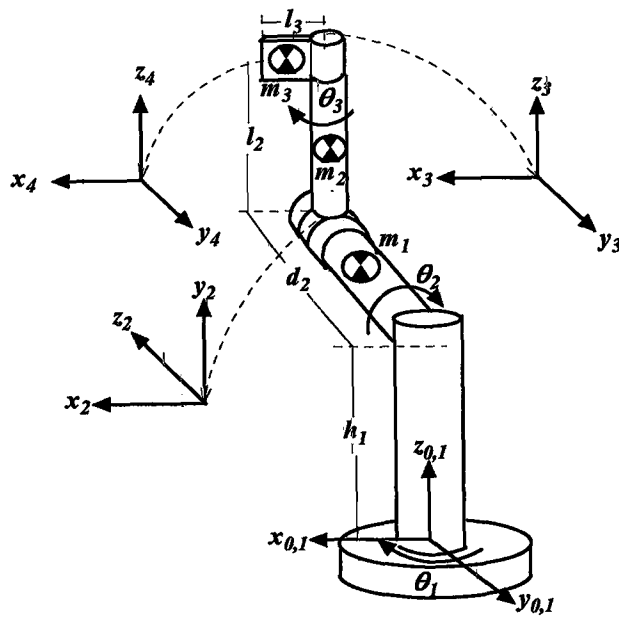
$$\begin{aligned} aa_{NS} = & [c\theta_2 s\theta_2 [\frac{1}{2} l_2^2 m_2 + 2(I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3})] + 2m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 + l_2 l_3 + l_3 q_3 + q_3^2 \\ & + 2l_2 q_3 + l_2^2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [\frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 s\theta_2 + 2s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3}) + m_3 s\theta_2 (\frac{1}{2} d_2 l_3 \\ & + d_2 l_2 + d_2 q_3)] \dot{q}_2^2 + [m_3 s^2 \theta_2 (l_3 + 2q_3 + 2l_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 - [2d_2 m_3 c\theta_2] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \quad (4.117) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bb_{NS} = & [c\theta_2 s\theta_2 (\frac{1}{4} l_3^2 m_2 - I_{xx_2} - I_{xx_3} + I_{yy_2} + I_{zz_3} - m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 + l_2 l_3 + l_3 q_3 + q_3^2 + \\ & 2l_2 q_3 + l_2^2))] \dot{q}_1^2 + [s\theta_2 (\frac{1}{2} d_2 l_2 m_2 + m_3 (\frac{1}{2} d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3))] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} \\ & + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3})] \dot{q}_2^2 + [\frac{1}{2} d_2 c\theta_2 (1 - m_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + [m_3 (l_3 + 2l_2 + 2q_3)] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \quad (4.118) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cc_{NS} = & [m_3 s^2 \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 + q_3 + l_2 q_3)] \dot{q}_1^2 - [d_2 c\theta_2 (1 - m_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - [m_3 (\frac{1}{2} l_3 + l_2 + q_3)] \dot{q}_2^2 \quad (4.119) \end{aligned}$$

#### 4.3.8. NN robotunun dinamik modeli

NN robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.9'da görülmektedir.



Şekil 4.9. NN robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.120 NN robotunun kütle matrisini, Denklem 4.121 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.122 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.123, 4.124 ve 4.125 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} r_{NN} + z_{NN} + p_{NN} & & \cdot & \cdot \\ s_{NN} + w_{NN} + p_{NN} & & \cdot & \cdot \\ m_3(-\frac{1}{2}l_2l_3s\theta_2c\theta_3 + \frac{1}{4}l_3^2c\theta_2 - \frac{1}{2}l_3d_2s\theta_3c\theta_2) + o_{NN} & & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & t_{NN} + n_{NN} + p_{NN} & x_{NN} + o_{NN} \\ \cdot & v_{NN} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2c^2\theta_3 + l_2^2) + p_{NN} & \frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3 + o_{NN} \\ \cdot & \frac{1}{2}l_3l_2m_3s\theta_3 + o_{NN} & \frac{1}{4}l_3^2m_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} aa_{NN} \\ bb_{NN} \\ cc_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g_0(\frac{1}{2}l_2m_2s\theta_1c\theta_2 + m_3s\theta_1s\theta_2(\frac{1}{2}l_3c\theta_3 + l_2)) \\ -\frac{1}{2}g_0m_3l_3s\theta_2s\theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

$$\tau_1 = [m_1\frac{1}{4}d_2^2 + m_2(\frac{1}{4}l_2^2 + d_2^2 - \frac{1}{4}l_2^2m_2c^2\theta_2) + I_{zz_1} + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2}$$

$$+ m_3(\frac{1}{4}l_3^2c^2\theta_2c^2\theta_3 + l_2l_3c\theta_2c\theta_3s\theta_2$$

$$+ l_2^2s^2\theta_2 + \frac{1}{4}l_3^2s^2\theta_3 - l_3d_2s\theta_3 + d_2^2) + s^2\theta_2(c^2\theta_3I_{xx_3} + s^2\theta_3I_{yy_3}) + c^2\theta_2I_{zz_3}] \ddot{q}_1$$

$$+ [\frac{1}{2}m_2l_2c\theta_2d_2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2s\theta_2s\theta_3c\theta_3 + \frac{1}{2}l_3l_2c\theta_2s\theta_3$$

$$- \frac{1}{2}d_2l_3s\theta_2c\theta_3 - d_2l_2c\theta_2) + s^2\theta_2(c^2\theta_3I_{xx_3} + s^2\theta_3I_{yy_3}) + c^2\theta_2I_{zz_3}] \ddot{q}_2$$

$$+ [m_3(-\frac{1}{2}l_2l_3s\theta_2c\theta_3 + \frac{1}{4}l_3^2c\theta_2 - \frac{1}{2}l_3d_2c\theta_2s\theta_3) - s\theta_2c\theta_3s\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3})] \ddot{q}_3$$

$$\begin{aligned}
& + [2l_2l_3m_3c^2\theta_2c\theta_3 - l_2l_3m_3c\theta_3 + 2s\theta_2c\theta_2(\frac{1}{4}l_2^2m_2 + 1 + I_{xx_2} - I_{yy_2} \\
& - \frac{1}{4}m_3l_3^2c^2\theta_3 + l_2^2m_3 + (c^2\theta_3I_{xx_3} + s^2\theta_3I_{yy_3}) - I_{zz_3}] \dot{q}_1\dot{q}_2 \\
& + [2s\theta_2c\theta_2(I_{xx_2} - I_{yy_2} + (c^2\theta_3I_{xx_3} + s^2\theta_3I_{yy_3}) - I_{zz_3}) + d_2s\theta_2(\frac{1}{2}l_2m_2 + l_2m_3) \\
& + m_3c\theta_2c\theta_3(\frac{1}{4}l_3^2s\theta_3 - \frac{1}{2}d_2l_3) - \frac{1}{2}l_2l_3m_3s^2\theta_3] \dot{q}_2^2 + [c\theta_2c\theta_3s\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \\
& - m_3s\theta_2(\frac{1}{4}l_3^2 - \frac{1}{2}l_3d_2s\theta_3) + l_3^2m_3s\theta_2(\frac{1}{2}l_3^2m_3s\theta_2c^2\theta_3 - \frac{1}{4}) \\
& + \frac{1}{2}d_2l_3m_3s\theta_2s\theta_3] \dot{q}_2\dot{q}_3 - [\frac{1}{2}l_3^2m_3c^2\theta_2s\theta_3c\theta_3 + l_3m_3c\theta_2(l_2s\theta_2s\theta_3 - l_3d_2) \\
& - 2s^2\theta_2s\theta_3c\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_1\dot{q}_3 + [\frac{1}{2}l_3m_3(l_2s\theta_2s\theta_3 - d_2c\theta_2c\theta_3) \\
& + s\theta_2(2c^2\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3}) + I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_3^2
\end{aligned} \tag{4.123}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & [-\frac{1}{2}m_2l_2d_2c\theta_2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2s\theta_2s\theta_3c\theta_3 + \frac{1}{2}l_3l_2c\theta_2s\theta_3 \\
& - \frac{1}{2}d_2l_3s\theta_2c\theta_3 - d_2l_2c\theta_2s\theta_3 + s^2\theta_2(c^2\theta_3I_{xx_3} + s^2\theta_3I_{yy_3}) + c^2\theta_2I_{zz_3}] \ddot{q}_1 \\
& + [\frac{1}{4}m_2l_2^2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2c^2\theta_3 + l_2^2) \\
& + s^2\theta_2(c^2\theta_3I_{xx_3} + s^2\theta_3I_{yy_3}) + c^2\theta_2I_{zz_3}] \ddot{q}_2 + [\frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3 \\
& - s\theta_2c\theta_3s\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3})] \ddot{q}_3 + [s\theta_2c\theta_2(-\frac{1}{4}l_2^2m_2 - I_{xx_2} + I_{yy_2} + \frac{1}{4}l_3^2m_2c^2\theta_3 \\
& - l_2^2m_3 - (c^2\theta_3I_{xx_3} + s^2\theta_3I_{yy_3}) + I_{zz_3}) - l_2l_3m_3c\theta_3(c\theta_2^2 + \frac{1}{2})] \dot{q}_1^2 \\
& + [d_2m_3s\theta_2\frac{1}{2}(l_3s\theta_3 - l_2)] \dot{q}_1\dot{q}_2 + [c\theta_2c\theta_3(\frac{3}{4}l_2l_3m_3 - s\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3})) \\
& - d_2l_2m_3 + \frac{1}{4}l_2l_3m_3] + \frac{1}{2}l_3^2m_3s\theta_2c^2\theta_3 + 2s\theta_3c\theta_3s^2\theta_2(I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_1\dot{q}_3 \\
& + [s\theta_2c\theta_2(I_{xx_2} - I_{yy_2} + c^2\theta_3I_{xx_3} + s^2\theta_3I_{yy_3} - I_{zz_3})] \dot{q}_2^2 \\
& + [c\theta_3s\theta_3(\frac{1}{2}c\theta_2(I_{yy_3} - I_{xx_3}) - \frac{1}{2}l_3^2m_3 + 2s^2\theta_2(I_{yy_3} - I_{xx_3})) \dot{q}_2\dot{q}_3 + [\frac{1}{2}l_2l_3m_3c\theta_3
\end{aligned}$$

$$+ s\theta_2(I_{yy_3} - I_{xx_3})(2c^2\theta_3 - 1)]\dot{q}_3^2 - g_0\left(\frac{1}{2}l_2m_2s\theta_1c\theta_2 + m_3s\theta_1s\theta_2\left(\frac{1}{2}l_3c\theta_3 + l_2\right)\right) \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned} \tau_3 = & \left[ m_3\left(-\frac{1}{2}l_2l_3s\theta_2c\theta_3 + \frac{1}{4}l_3^2c\theta_2 - \frac{1}{2}l_3d_2s\theta_3c\theta_2\right) - s\theta_2c\theta_3s\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \right] \ddot{q}_1 \\ & + \left[ \frac{1}{2}l_3l_2m_3s\theta_3 - s\theta_2c\theta_3s\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \right] \ddot{q}_2 + \left[ \frac{1}{4}l_3^2m_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \right] \ddot{q}_3 \\ & + \left[ s\theta_3c\theta_3\left(\frac{1}{4}l_3^2m_3c^2\theta_2 - \frac{1}{4}l_3^2m_3 - s^2\theta_2(I_{yy_3} - I_{xx_3})\right) \right. \\ & + \frac{1}{2}l_3m_3(l_2s\theta_2c\theta_2s\theta_3 + d_2c\theta_3) \left. \right] \dot{q}_1^2 + \left[ \frac{1}{2}d_2l_2m_3c\theta_2c\theta_3 - \frac{1}{2}l_3^2m_3s\theta_2c^2\theta_3 \right. \\ & - l_2l_3m_3c\theta_2c\theta_3 + s\theta_3c\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3})(c\theta_2 - 2s^2\theta_3) \left. \right] \dot{q}_1\dot{q}_2 \\ & + \left[ c\theta_3s\theta_3(c\theta_2(I_{yy_3} - I_{xx_3}) + \frac{1}{4}l_3^2m_3 - s^2\theta_2(I_{yy_3} - I_{xx_3})) \right] \dot{q}_2^2 \\ & + \left[ c\theta_3s\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \right] \dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}g_0m_3l_3s\theta_2s\theta_3 \end{aligned} \quad (4.125)$$

Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$r_{NN} = m_1\frac{1}{4}d_2^2 + m_2\left(\frac{1}{4}l_2^2 + d_2^2 - \frac{1}{4}l_2^2m_2c^2\theta_2\right) + I_{zz_1} + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} \quad (4.126)$$

$$s_{NN} = -\frac{1}{2}m_2l_2d_2c\theta_2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} \quad (4.127)$$

$$t_{NN} = \frac{1}{2}m_2l_2c\theta_2d_2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} \quad (4.128)$$

$$v_{NN} = \frac{1}{4}m_2l_2^2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} \quad (4.129)$$

$$n_{NN} = m_3\left(\frac{1}{4}l_3^2s\theta_2s\theta_3c\theta_3 + \frac{1}{2}l_3l_2c\theta_2s\theta_3 - \frac{1}{2}d_2l_3s\theta_2c\theta_3 - d_2l_2c\theta_2\right) \quad (4.130)$$

$$o_{NN} = -s\theta_2c\theta_3s\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (4.131)$$

$$p_{NN} = s^2\theta_2(c^2\theta_3I_{xx_3} + s^2\theta_3I_{yy_3}) + c^2\theta_2I_{zz_3} \quad (4.132)$$

$$z_{NN} = m_3\left(\frac{1}{4}l_3^2c^2\theta_2c^2\theta_3 + l_2l_3c\theta_2c\theta_3s\theta_2 + l_2^2s^2\theta_2 + \frac{1}{4}l_3^2s^2\theta_3 - l_3d_2s\theta_3 + d_2^2\right) \quad (4.133)$$

$$w_{NN} = m_3\left(\frac{1}{4}l_3^2s\theta_2s\theta_3c\theta_3 + \frac{1}{2}l_3l_2c\theta_2s\theta_3 - \frac{1}{2}d_2l_3s\theta_2c\theta_3 - d_2l_2c\theta_2s\theta_3 + p_{NN}\right) \quad (4.134)$$



$$x_{NN} = m_3 \left( -\frac{1}{2} l_2 l_3 s \theta_2 c \theta_3 + \frac{1}{4} l_3^2 c \theta_2 - \frac{1}{2} l_3 d_2 c \theta_2 s \theta_3 \right) \quad (4.135)$$

$$\begin{aligned} aa_{NN} = & [2l_2 l_3 m_3 c^2 \theta_2 c \theta_3 - l_2 l_3 m_3 c \theta_3 + 2s \theta_2 c \theta_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + 1 + I_{xx_2} - I_{yy_2} \right. \\ & - \frac{1}{4} m_3 l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2^2 m_3 + (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) - I_{zz_3} )] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + [2s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2} + (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) - I_{zz_3}) + d_2 s \theta_2 \left( \frac{1}{2} l_2 m_2 + l_2 m_3 \right) \\ & + m_3 c \theta_2 c \theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 s \theta_3 - \frac{1}{2} d_2 l_3 \right) - \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s^2 \theta_3] \dot{q}_2^2 + [c \theta_2 c \theta_3 s \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \\ & - m_3 s \theta_2 \left( \frac{1}{4} l_3^2 - \frac{1}{2} l_3 d_2 s \theta_3 \right) + l_3^2 m_3 s \theta_2 \left( \frac{1}{2} l_3^2 m_3 s \theta_2 c^2 \theta_3 - \frac{1}{4} \right) \\ & + \frac{1}{2} d_2 l_3 m_3 s \theta_2 s \theta_3] \dot{q}_2 \dot{q}_3 - \left[ \frac{1}{2} l_3^2 m_3 c^2 \theta_2 s \theta_3 c \theta_3 + l_3 m_3 c \theta_2 (l_2 s \theta_2 s \theta_3 - l_3 d_2) \right. \\ & - 2s^2 \theta_2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 (l_2 s \theta_2 s \theta_3 - d_2 c \theta_2 c \theta_3) \right. \\ & \left. + s \theta_2 (2c^2 \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) + I_{xx_3} - I_{yy_3}) \right] \dot{q}_3^2 \end{aligned} \quad (4.136)$$

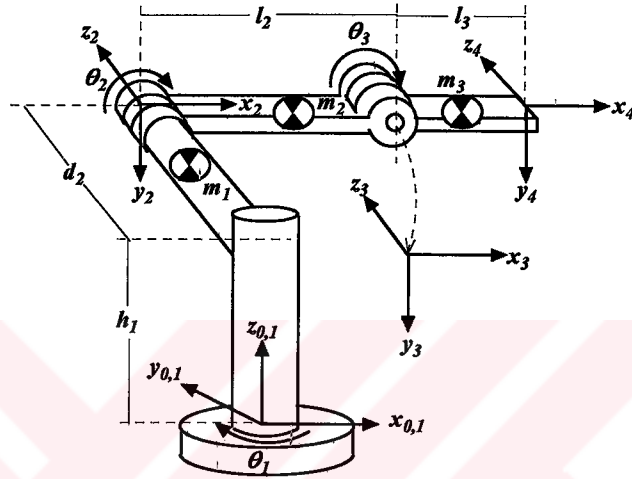
$$\begin{aligned} bb_{NN} = & [s \theta_2 c \theta_2 \left( -\frac{1}{4} l_2^2 m_2 - I_{xx_2} + I_{yy_2} + \frac{1}{4} l_3^2 m_2 c^2 \theta_3 - l_2^2 m_3 \right. \\ & - (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) + I_{zz_3} ) - l_2 l_3 m_3 c \theta_3 \left( c \theta_2^2 + \frac{1}{2} \right)] \dot{q}_1^2 + [d_2 m_3 s \theta_2 \frac{1}{2} (l_3 s \theta_3 - l_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & [c \theta_2 c \theta_3 \left( \frac{3}{4} l_2 l_3 m_3 - s \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) - d_2 l_2 m_3 + \frac{1}{4} l_2 l_3 m_3 \right) + \frac{1}{2} l_3^2 m_3 s \theta_2 c^2 \theta_3 \\ & + 2s \theta_3 c \theta_3 s^2 \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + [s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2} + c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3} - I_{zz_3})] \dot{q}_2^2 \\ & [c \theta_3 s \theta_3 \left( \frac{1}{2} c \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) - \frac{1}{2} l_3^2 m_3 + 2s^2 \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \right] \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \left[ \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 c \theta_3 + \right. \\ & \left. s \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) (2c^2 \theta_3 - 1) \right] \dot{q}_3^2 \end{aligned} \quad (4.137)$$

$$\begin{aligned} cc_{NN} = & [s \theta_3 c \theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 m_3 c^2 \theta_2 - \frac{1}{4} l_3^2 m_3 - s^2 \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \right) \\ & + \frac{1}{2} l_3 m_3 (l_2 s \theta_2 c \theta_2 s \theta_3 + d_2 c \theta_3)] \dot{q}_1^2 + \left[ \frac{1}{2} d_2 l_2 m_3 c \theta_2 c \theta_3 - \frac{1}{2} l_3^2 m_3 s \theta_2 c^2 \theta_3 \right. \\ & \left. - l_2 l_3 m_3 c \theta_2 c \theta_3 + s \theta_3 c \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) (c \theta_2 - 2s^2 \theta_3) \right] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [c \theta_3 s \theta_3 (c \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3})) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}l_3^2 m_3 - s^2\theta_2(I_{yy_3} - I_{xx_3}))]\dot{q}_2^2 + [c\theta_3 s\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3})]\dot{q}_3^2 \quad (4.138)$$

#### 4.2.9. NR robotunun dinamik modeli

NR robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.10'da görülmektedir.



Şekil 4.10. NR robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.139 NR robotunun kütle matrisini, Denklem 4.140 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.141 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.142, 4.143 ve 4.144 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} s_{NR} & u_{NR} & m_3(\frac{1}{2}d_2 l_3 s\theta_{23}) \\ t_{NR} & v_{NR} & m_3(\frac{1}{4}l_3^2 + \frac{1}{2}l_2 l_3 c\theta_3) \\ \frac{1}{2}d_2 l_3 m_3 s\theta_{23} & m_3(\frac{1}{4}l_3^2 + \frac{1}{2}l_2 l_3 c\theta_3) & \frac{1}{4}l_3^2 m_3 + 3I_{zz_3} \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} w_{NR} \\ x_{NR} \\ aa_{NR} \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_0 s \theta_1 \left( \frac{1}{2} l_2 m_2 s \theta_2 + \frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_{23} + l_2 m_3 s \theta_2 \right) \\ + \frac{1}{2} g_0 m_3 l_3 s \theta_1 s \theta_{23} \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left[ \frac{1}{4} m_1 d_2^2 + I_{z_1} + m_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 c^2 \theta_2 + d_2^2 \right) + s^2 \theta_2 I_{x_2} + c^2 \theta_2 I_{y_2} + s^2 \theta_{23} I_{x_3} + c^2 \theta_{23} I_{y_3} \right. \\ & + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_{23} + l_2 l_3 c \theta_2 c \theta_{23} + l_2^2 c^2 \theta_2 + d_2^2 \right) \ddot{q}_1 + \left[ \frac{1}{2} m_2 l_2 d_2 s \theta_2 + s^2 \theta_2 I_{x_2} + c^2 \theta_2 I_{y_2} \right. \\ & + m_3 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 s \theta_{23} + d_2 l_2 s \theta_2 \right) + s^2 \theta_{23} I_{x_3} + c^2 \theta_{23} I_{y_3} \left. \right] \ddot{q}_2 + \left[ m_3 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 s \theta_{23} \right) \right] \ddot{q}_3 \\ & + \left[ -\frac{1}{2} l_2^2 m_2 s \theta_2 c \theta_2 + 2 s \theta_2 c \theta_2 (I_{x_2} - I_{y_2}) + \frac{1}{2} l_3^2 m_3 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 \right. \\ & + \left. \left[ \frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 c \theta_2 + 2 s \theta_2 c \theta_2 (I_{x_2} - I_{y_2}) + 2 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 + \left[ \frac{1}{2} d_2 m_3 l_3 c \theta_{23} \right] \dot{q}_3^2 \right. \right. \\ & - \left. \left. 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23} \right) (I_{y_3} - I_{x_3}) + \frac{1}{2} d_2 m_3 (l_3 c \theta_{23} + l_2 c \theta_2) \right] \dot{q}_2^2 + \left[ 2 (s \theta_2 c \theta_2 \right. \\ & + \left. s \theta_3 c \theta_3 - 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (l_3^2 m_3 + I_{y_3} - I_{x_3}) - l_2 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_{23} \right] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ & + \left. \left[ d_2 l_3 m_3 c \theta_{23} + 2 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 - 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{y_3} - I_{x_3}) \right] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right] \quad (4.142) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \left[ \frac{1}{2} m_2 l_2 d_2 s \theta_2 + s^2 \theta_2 I_{x_2} + c^2 \theta_2 I_{y_2} + m_3 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 s \theta_{23} + d_2 l_2 s \theta_2 \right) \right. \\ & + \left. s^2 \theta_{23} I_{x_3} + c^2 \theta_{23} I_{y_3} \right] \ddot{q}_2 + \left[ m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + \frac{1}{2} l_2 l_3 c \theta_3 \right) \right] \ddot{q}_3 + \left[ \frac{1}{4} l_2^2 m_2 s \theta_2 c \theta_2 \right. \\ & + \left. s \theta_2 c \theta_2 (I_{y_2} - I_{x_2}) - \frac{1}{4} l_3^2 m_3 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 - 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 (2 c \theta_2 s \theta_{23} - s \theta_3) + l_2^2 m_3 s \theta_2 c \theta_2 + (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 \right. \\ & - \left. 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{x_3} - I_{y_3}) \right] \dot{q}_1^2 + \left[ \frac{1}{4} l_2 d_2 m_2 c \theta_2 + s \theta_2 c \theta_2 (I_{x_2} - I_{y_2}) \right. \\ & + \left. (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 - 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{y_3} - I_{x_3}) + \frac{1}{4} d_2 l_3 m_3 c \theta_{23} \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} d_2 l_2 m_3 c \theta_2 \right] \dot{q}_2^2 + \left[ \frac{1}{2} d_2 l_3 m_3 c \theta_{23} + 2 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2c\theta_2c\theta_3s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) - \frac{1}{2}d_2l_3m_3c\theta_{23}]\dot{q}_1\dot{q}_3 + [-l_2l_3m_3s\theta_3 \\
& + 2(s\theta_2c\theta_2 + s\theta_3c\theta_3 - 2c\theta_2c\theta_3s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3})]\dot{q}_2\dot{q}_3 - [\frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3]\dot{q}_3^2 \\
& + g_0s\theta_1(\frac{1}{2}l_2m_2s\theta_2 + \frac{1}{2}l_3m_3s\theta_{23} + l_2m_3s\theta_2)
\end{aligned} \tag{4.143}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & [\frac{1}{2}d_2l_3m_3s\theta_{23}]\ddot{q}_1 + [m_3(\frac{1}{4}l_3^2 + \frac{1}{2}l_2l_3c\theta_3)]\ddot{q}_2 + [\frac{1}{4}l_3^2m_3 + 3I_{zz_3}]\ddot{q}_3 \\
& [-\frac{1}{4}l_3^2m_3(s\theta_2c\theta_2 + s\theta_3c\theta_3 - 2c\theta_2c\theta_3s\theta_{23}) - (s\theta_2c\theta_2 + s\theta_3c\theta_3 \\
& - 2c\theta_2c\theta_3s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) + \frac{1}{2}l_2l_3m_3c\theta_2s\theta_{23}]\dot{q}_1^2 - [2(s\theta_2c\theta_2 + s\theta_3c\theta_3 \\
& - 2c\theta_2c\theta_3s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3})]\dot{q}_1\dot{q}_2 + [\frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3 - (s\theta_2c\theta_2 + s\theta_3c\theta_3 \\
& - 2c\theta_2c\theta_3s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3})]\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}g_0m_3l_3s\theta_1s\theta_{23}
\end{aligned} \tag{4.144}$$

Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
s_{NR} = & \frac{1}{4}m_1d_2^2 + I_{zz_1} + m_2(\frac{1}{4}l_2^2c^2\theta_2 + d_2^2) + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} \\
& + m_3(\frac{1}{4}l_3^2c^2\theta_{23} + l_2l_3c\theta_2c\theta_{23} + l_2^2c^2\theta_2 + d_2^2) + s^2\theta_{23}I_{xx_3} + c^2\theta_{23}I_{yy_3}
\end{aligned} \tag{4.145}$$

$$\begin{aligned}
t_{NR} = & \frac{1}{2}m_2l_2d_2s\theta_2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} \\
& + m_3(\frac{1}{2}d_2l_3s\theta_{23} + d_2l_2s\theta_2) + s^2\theta_{23}I_{xx_3} + c^2\theta_{23}I_{yy_3}
\end{aligned} \tag{4.146}$$

$$\begin{aligned}
u_{NR} = & \frac{1}{2}m_2l_2d_2s\theta_2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} \\
& + m_3(\frac{1}{2}d_2l_3s\theta_{23} + d_2l_2s\theta_2) + s^2\theta_{23}I_{xx_3} + c^2\theta_{23}I_{yy_3}
\end{aligned} \tag{4.147}$$

$$v_{NR} = \frac{1}{4}m_2l_2^2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2}$$

$$+ m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 \right) + s^2 \theta_{23} I_{xx_3} + c^2 \theta_{23} I_{yy_3} \quad (4.148)$$

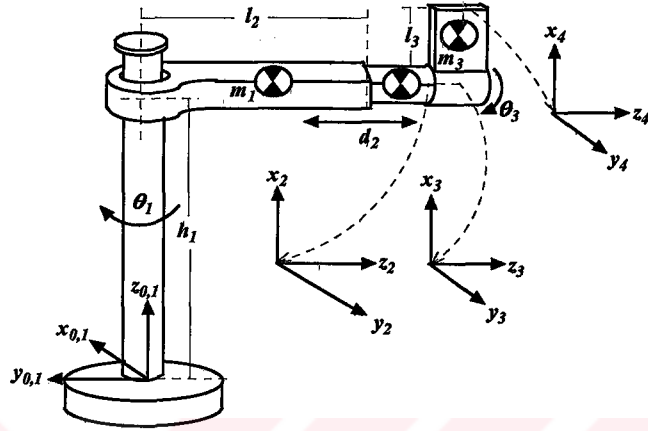
$$\begin{aligned} w_{NR} = & \left[ -\frac{1}{2} l_2^2 m_2 s \theta_2 c \theta_2 + 2 s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) + \frac{1}{2} l_3^2 m_3 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 \right. \\ & + \left. \left[ \frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 c \theta_2 + 2 s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) + 2 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 \right. \right. \\ & - \left. \left. 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{yy_3} - I_{xx_3}) + \frac{1}{2} d_2 m_3 (l_3 c \theta_{23} + l_2 c \theta_2) \right] \dot{q}_2^2 + [2 (s \theta_2 c \theta_2 \right. \\ & + \left. s \theta_3 c \theta_3 - 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (l_3^2 m_3 + I_{yy_3} - I_{xx_3}) - l_2 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_{23}] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ & + \left. [d_2 l_3 m_3 c \theta_{23} + 2 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 - 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{2} d_2 m_3 l_3 c \theta_{23} \right] \dot{q}_3^2 \right] \quad (4.149) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{NR} = & \left[ \frac{1}{4} l_2^2 m_2 s \theta_2 c \theta_2 \right. \\ & + \left. s \theta_2 c \theta_2 (I_{yy_2} - I_{xx_2}) - \frac{1}{4} l_3^2 m_3 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 - 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) \right. \\ & + \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 (2 c \theta_2 s \theta_{23} - s \theta_3) + l_2^2 m_3 s \theta_2 c \theta_2 + (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 \\ & - \left. 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \right] \dot{q}_1^2 + \left[ \frac{1}{4} l_2 d_2 m_2 c \theta_2 + s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) \right. \\ & + \left. (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 - 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{yy_3} - I_{xx_3}) + \frac{1}{4} d_2 l_3 m_3 c \theta_{23} \right. \\ & + \frac{1}{2} d_2 l_2 m_3 c \theta_2 \left] \dot{q}_2^2 + \left[ \frac{1}{2} d_2 l_3 m_3 c \theta_{23} + 2 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 \right. \right. \\ & - \left. \left. 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{yy_3} - I_{xx_3}) - \frac{1}{2} d_2 l_3 m_3 c \theta_{23} \right] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + [-l_2 l_3 m_3 s \theta_3 \\ & + \left. 2 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 - 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{yy_3} - I_{xx_3}) - \left[ \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s \theta_3 \right] \dot{q}_3^2 \right] \quad (4.150) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} aa_{NR} = & \left[ -\frac{1}{4} l_3^2 m_3 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 - 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) - (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 \right. \\ & - \left. 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{yy_3} - I_{xx_3}) + \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_{23} \right] \dot{q}_1^2 - [2 (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 \\ & - \left. 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \left[ \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s \theta_3 - (s \theta_2 c \theta_2 + s \theta_3 c \theta_3 \right. \\ & - \left. 2 c \theta_2 c \theta_3 s \theta_{23}) (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \right] \dot{q}_2^2 \quad (4.151) \end{aligned}$$

#### 4.3.10. RC robotunun dinamik modeli

RC robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.11’de görülmektedir.



Şekil 4.11. RC robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.152 RC robotunun kütle matrisini, Denklem 4.153 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.154 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.155, 4.156 ve 4.157 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} f_{RC} & \frac{1}{2}l_3m_3s\theta_3 & -\frac{1}{2}l_3m_3c\theta_3(l_2 + q_2) \\ \frac{1}{2}l_3m_3s\theta_3 & m_2 + m_3 & 0 \\ -\frac{1}{2}l_3m_3c\theta_3(l_2 + q_2) & 0 & \frac{1}{4}l_3^2m_3 + I_{zz_3} \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} g_{RC} \\ (m_2 + m_3)(l_2 + q_2)\dot{q}_1^2 + [l_3m_3c\theta_3]\dot{q}_1\dot{q}_3 \\ -[c\theta_3s\theta_3(\frac{1}{4}l_3^2m_3 - I_{xx_3} + I_{yy_3})]\dot{q}_1^2 - [l_3m_3c\theta_3]\dot{q}_1\dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g_0 c \theta_1 (m_2 + m_3) \\ -\frac{1}{2} g_0 m_3 l_3 c \theta_1 c \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left[ \frac{1}{4} l_2^2 m_1 + I_{z_1} + m_2 \left( \frac{1}{4} l_4^2 + l_2 l_4 + l_4 q_2 + (l_2 + q_2)^2 \right) + I_{x_2} + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 s^2 \theta_3 \right. \right. \\ & \left. \left. + (l_2 + q_2)^2 \right) + I_{x_3} c^2 \theta_3 + I_{y_3} s^2 \theta_3 \right] \ddot{q}_1 + \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_3 \right] \ddot{q}_2 - \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_3 (l_2 + q_2) \right] \ddot{q}_3 \\ & + [m_2 l_4 + 2(m_2 + m_3)(l_2 + q_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [2c \theta_3 s \theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{x_3} + I_{y_3} \right)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ & + \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_3 (l_2 + q_2) \right] \dot{q}_3^2 \end{aligned} \quad (4.155)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_3 \right] \ddot{q}_1 + [m_2 + m_3] \ddot{q}_3 - \left[ \frac{1}{2} m_2 l_4 + (m_2 + m_3)(l_2 + q_2) \right] \dot{q}_1^2 \\ & + [l_3 m_3 c \theta_3] \dot{q}_1 \dot{q}_3 - g_0 c \theta_1 (m_2 + m_3) \end{aligned} \quad (4.156)$$

$$\begin{aligned} \tau_3 = & - \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_3 (l_2 + q_2) \right] \ddot{q}_1 + \left[ \frac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{z_3} \right] \ddot{q}_3 - [c \theta_3 s \theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{x_3} + I_{y_3} \right)] \dot{q}_1^2 \\ & - [l_3 m_3 c \theta_3] \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{1}{2} g_0 m_3 l_3 c \theta_1 c \theta_3 \end{aligned} \quad (4.157)$$

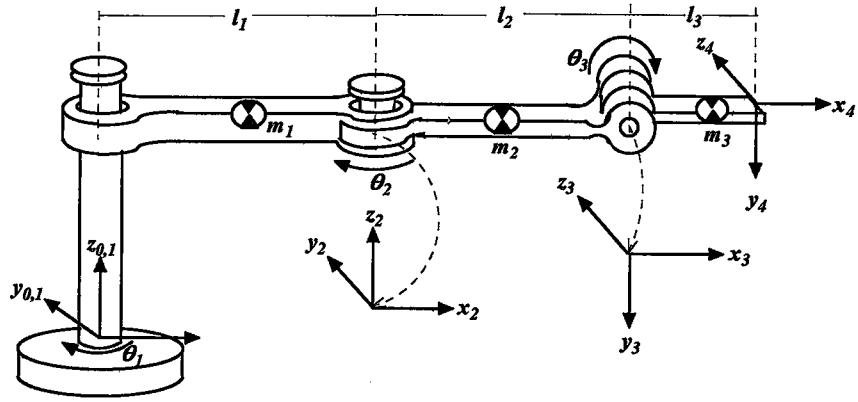
Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} f_{RC} = & \frac{1}{4} l_2^2 m_1 + I_{z_1} + m_2 \left( \frac{1}{4} l_4^2 + l_2 l_4 + l_4 q_2 + (l_2 + q_2)^2 \right) + I_{x_2} \\ & + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 s^2 \theta_3 + (l_2 + q_2)^2 \right) + I_{x_3} c^2 \theta_3 + I_{y_3} s^2 \theta_3 \end{aligned} \quad (4.158)$$

$$\begin{aligned} g_{RC} = & [m_2 l_4 + 2(m_2 + m_3)(l_2 + q_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [2c \theta_3 s \theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{x_3} + I_{y_3} \right)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ & + \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_3 (l_2 + q_2) \right] \dot{q}_3^2 \end{aligned} \quad (4.159)$$

#### 4.3.11. RN robotunun dinamik modeli

RN robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.12’de görülmektedir.



Şekil 4.12. RN robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.160 RN robotunun kütle matrisini, Denklem 4.161 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.162 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.163, 4.164 ve 4.165 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} k_{RN} & p_{RN} & -m_3 \left( \frac{1}{2} l_1 l_3 s \theta_2 s \theta_3 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \\ l_{RN} & r_{RN} & s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \\ m_{RN} & s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} & m_3 \frac{1}{4} l_3^2 + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (4.160)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} s_{RN} \\ t_{RN} \\ v_{RN} \end{bmatrix} \quad (4.161)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g_0 m_3 l_3 s \theta_{12} s \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.162)$$



$$\begin{aligned}
\tau_1 = & \left[ \frac{1}{4} l_1^2 m_1 + I_{z_1} + m_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 + l_1 l_2 c \theta_2 + l_1^2 \right) + I_{z_2} + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 + l_1^2 \right. \right. \\
& + 2 l_1 l_2 c \theta_2 + l_1 l_3 c \theta_3 c \theta_3 \left. \left. \right) + s^2 \theta_3 I_{x_3} + c^2 \theta_3 I_{y_3} \right] \ddot{q}_1 + \left[ m_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 c \theta_2 \right) + I_{z_2} \right. \\
& + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_3 c \theta_2 c \theta_3 + l_1 l_2 c \theta_2 \right) + s^2 \theta_3 I_{x_3} + c^2 \theta_3 I_{y_3} \left. \right] \ddot{q}_2 \\
& + \left[ -m_3 \left( \frac{1}{2} l_1 l_3 s \theta_2 s \theta_3 \right) + s^2 \theta_3 I_{x_3} + c^2 \theta_3 I_{y_3} \right] \ddot{q}_3 - \left[ l_1 s \theta_2 (l_2 m_2 + 2 l_2 m_3 + l_3 m_3 c \theta_3) \right] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& - \left[ l_1 s \theta_2 \left( \frac{1}{2} l_2 m_2 + \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_3 + l_2 m_3 \right) \right] \dot{q}_2^2 - \left[ \frac{1}{2} l_1 l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 - 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{x_3} - I_{y_3}) \right] \dot{q}_3^2 \\
& - \left[ l_3 m_3 s \theta_3 \left( \frac{1}{2} l_3 c \theta_3 + 2 l_2 \right) + l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 - 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{x_3} - I_{y_3}) \right] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
& - \left[ l_3 m_3 s \theta_3 \left( \frac{1}{2} l_3 c \theta_3 + l_2 \right) + l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 - 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{x_3} - I_{y_3}) \right] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \quad (4.163)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & \left[ m_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 c \theta_2 \right) + I_{z_2} + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_3 c \theta_2 c \theta_3 + l_1 l_2 c \theta_2 \right) \right. \\
& + s^2 \theta_3 I_{x_3} + c^2 \theta_3 I_{y_3} \left. \right] \ddot{q}_1 + \left[ \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{z_2} + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 \right) + s^2 \theta_3 I_{x_3} \right. \\
& + c^2 \theta_3 I_{y_3} \left. \right] \ddot{q}_2 + \left[ s^2 \theta_3 I_{x_3} + c^2 \theta_3 I_{y_3} \right] \ddot{q}_3 + \left[ \frac{1}{2} l_1 l_2 m_2 s \theta_2 + l_1 l_2 m_3 s \theta_2 + \frac{1}{2} l_1 l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 \right] \dot{q}_1^2 \\
& - \left[ l_2 l_3 m_3 s \theta_3 + \frac{1}{4} l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 + 2 s \theta_3 c \theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{x_3} + I_{y_3} \right) \right. \\
& - \frac{1}{4} l_1 l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 \left. \right] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \left[ -\frac{1}{2} l_3^2 m_3 s \theta_3 c \theta_3 - l_2 l_3 m_3 s \theta_3 \right. \\
& + 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{x_3} - I_{y_3}) \left. \right] \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \left[ 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{x_3} - I_{y_3}) \right] \dot{q}_3^2 \quad (4.164)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & \left[ -\frac{1}{2} m_3 l_1 l_3 s \theta_2 s \theta_3 + s^2 \theta_3 I_{x_3} + c^2 \theta_3 I_{y_3} \right] \ddot{q}_1 + \left[ s^2 \theta_3 I_{x_3} + c^2 \theta_3 I_{y_3} \right] \ddot{q}_2 + \left[ m_3 \frac{1}{4} l_3^2 \right. \\
& + s^2 \theta_3 I_{x_3} + c^2 \theta_3 I_{y_3} \left. \right] \ddot{q}_3 + \left[ \frac{1}{4} m_3 l_3^2 s \theta_3 c \theta_3 + \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s \theta_3 + \frac{1}{2} l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 \right. \\
& - s \theta_3 c \theta_3 (I_{x_3} - I_{y_3}) \left. \right] \dot{q}_1^2 + \left[ \frac{1}{2} l_3^2 m_3 s \theta_3 c \theta_3 + l_2 l_3 m_3 s \theta_3 - 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{x_3} - I_{y_3}) \right] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& + \left[ \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s \theta_3 + s \theta_3 c \theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{x_3} + I_{y_3} \right) \right] \dot{q}_2^2 + \left[ s \theta_3 c \theta_3 (I_{x_3} - I_{y_3}) \right] \dot{q}_3^2
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}g_0 m_3 l_3 s \theta_{12} s \theta_3 \quad (4.165)$$

Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$k_{RN} = \frac{1}{4}l_1^2 m_1 + I_{zz_1} + m_2 \left( \frac{1}{4}l_2^2 + l_1 l_2 c \theta_2 + l_1^2 \right) + I_{zz_2} + m_3 \left( \frac{1}{4}l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 c \theta_2 + l_1 l_3 c \theta_3 c \theta_3 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \quad (4.166)$$

$$l_{RN} = m_2 \left( \frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1 l_2 c \theta_2 \right) + I_{zz_2} + m_3 \left( \frac{1}{4}l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 + \frac{1}{2}l_1 l_3 c \theta_2 c \theta_3 + l_1 l_2 c \theta_2 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \quad (4.167)$$

$$m_{RN} = -\frac{1}{2}m_3 l_1 l_3 s \theta_2 s \theta_3 + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \quad (4.168)$$

$$p_{RN} = m_2 \left( \frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1 l_2 c \theta_2 \right) + I_{zz_2} + m_3 \left( \frac{1}{4}l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 + \frac{1}{2}l_1 l_2 c \theta_2 c \theta_3 + l_1 l_2 c \theta_2 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \quad (4.169)$$

$$r_{RN} = \frac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{zz_2} + m_3 \left( \frac{1}{4}l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \quad (4.170)$$

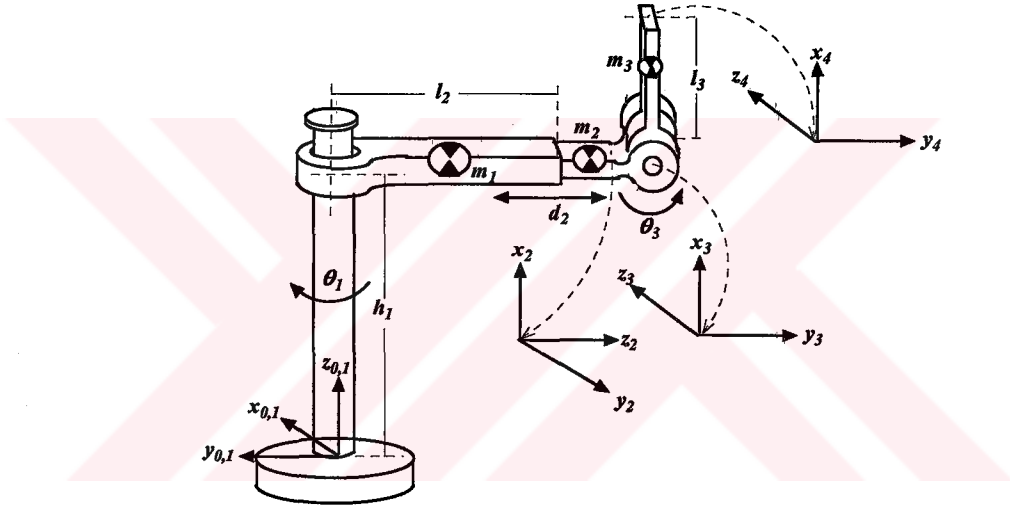
$$s_{RN} = -[l_1 s \theta_2 (l_2 m_2 + 2l_2 m_3 + l_3 m_3 c \theta_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 - [l_1 s \theta_2 \left( \frac{1}{2}l_2 m_2 + \frac{1}{2}l_3 m_3 c \theta_3 + l_2 m_3 \right)] \dot{q}_2^2 - \left[ \frac{1}{2}l_1 l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 - 2s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \right] \dot{q}_3^2 - [l_3 m_3 s \theta_3 \left( \frac{1}{2}l_3 c \theta_3 + 2l_2 \right) + l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 - 2s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_1 \dot{q}_3 - [l_3 m_3 s \theta_3 \left( \frac{1}{2}l_3 c \theta_3 + l_2 \right) + l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 - 2s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \quad (4.171)$$

$$t_{RN} = \left[ \frac{1}{2}l_1 l_2 m_2 s \theta_2 + l_1 l_2 m_3 s \theta_2 + \frac{1}{2}l_1 l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 \right] \dot{q}_1^2 - [l_2 l_3 m_3 s \theta_3 + \frac{1}{4}l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 + 2s \theta_3 c \theta_3 \left( \frac{1}{4}l_3^2 m_3 - I_{xx_3} + I_{yy_3} \right)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \left[ -\frac{1}{2}l_3^2 m_3 s \theta_3 c \theta_3 - l_2 l_3 m_3 s \theta_3 + 2s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \right] \dot{q}_2 \dot{q}_3 + [2s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_3^2 \quad (4.172)$$

$$\begin{aligned}
v_{RN} = & \left[ \frac{1}{4} m_3 l_3^2 s \theta_3 c \theta_3 + \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s \theta_3 + \frac{1}{2} l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 \right. \\
& - s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \dot{q}_1^2 + \left[ \frac{1}{2} l_3^2 m_3 s \theta_3 c \theta_3 + l_2 l_3 m_3 s \theta_3 - 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \right] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& \left. + \left[ \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s \theta_3 + s \theta_3 c \theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx_3} + I_{yy_3} \right) \right] \dot{q}_2^2 + [s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_3^2 \right] \quad (4.173)
\end{aligned}$$

#### 4.3.12. RR robotunun dinamik modeli

RR robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.13'te görülmektedir.



Şekil 4.13. RR robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.174 RR robotunun kütle matrisini, Denklem 4.175 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.176 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.177, 4.178 ve 4.179 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} i_{RR} & 0 & s \theta_3 c \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \\ 0 & m_2 + m_3 & -\frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_3 \\ s \theta_3 c \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) & -\frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_3 & \frac{1}{4} l_3^2 m_3 + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (4.174)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} k_{RR} \\ l_{RR} \\ m_{RR} \end{bmatrix} \quad (4.175)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g_0 s \theta_1 (m_2 + m_3) \\ \frac{1}{2} g_0 m_3 l_3 s \theta_1 c \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.176)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left[ \frac{1}{4} l_2^2 m_1 + I_{zz_1} + m_2 \left( \frac{1}{4} l_4^2 + q_2 l_4 + l_2 l_4 + (l_2 + q_2)^2 \right) + I_{xx_2} + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 s^2 \theta_3 \right. \right. \\ & \left. \left. - l_3 s \theta_3 (l_2 + q_2) + (l_2 + q_2)^2 \right) + c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3} \right] \ddot{q}_1 + [s \theta_3 c \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3})] \ddot{q}_3 \\ & + [m_2 (l_4 + 2l_2 + 2q_2) + m_3 (2l_2 + 2q_2 - l_3 s \theta_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [m_3 \left( \frac{1}{2} l_3^2 s \theta_3 c \theta_3 \right. \\ & \left. - l_3 c \theta_3 (l_2 + q_2) \right) + 2s \theta_3 c \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + [(2c^2 \theta_3 - 1)(I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_3^2 \end{aligned} \quad (4.177)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & [m_2 + m_3] \ddot{q}_2 - \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_3 \right] \ddot{q}_3 - \left[ \frac{1}{2} m_2 (l_4 + 2l_2 + 2q_2) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} m_3 (2l_2 + 2q_2 - l_3 s \theta_3) \right] \dot{q}_1^2 + \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 s \theta_3 \right] \dot{q}_3^2 - g_0 s \theta_1 (m_2 + m_3) \end{aligned} \quad (4.178)$$

$$\begin{aligned} \tau_3 = & [s \theta_3 c \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3})] \ddot{q}_1 - \left[ \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_3 \right] \ddot{q}_2 + \left[ \frac{1}{4} l_3^2 m_3 + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \right] \ddot{q}_3 \\ & + \left[ \frac{1}{2} m_3 c \theta_3 (l_2 + q_2) + s \theta_3 c \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) - \frac{1}{4} l_3^2 m_3 \right] \dot{q}_1^2 \\ & + [s \theta_3 c \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3})] \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} g_0 m_3 l_3 s \theta_1 c \theta_3 \end{aligned} \quad (4.179)$$

Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} i_{RR} = & \frac{1}{4} l_2^2 m_1 + I_{zz_1} + m_2 \left( \frac{1}{4} l_4^2 + q_2 l_4 + l_2 l_4 + (l_2 + q_2)^2 \right) + I_{xx_2} + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 s^2 \theta_3 \right. \\ & \left. - l_3 s \theta_3 (l_2 + q_2) + (l_2 + q_2)^2 \right) + c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3} \end{aligned} \quad (4.180)$$

$$k_{RR} = [m_2 (l_4 + 2l_2 + 2q_2) + m_3 (2l_2 + 2q_2 - l_3 s \theta_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [m_3 \left( \frac{1}{2} l_3^2 s \theta_3 c \theta_3 \right.$$

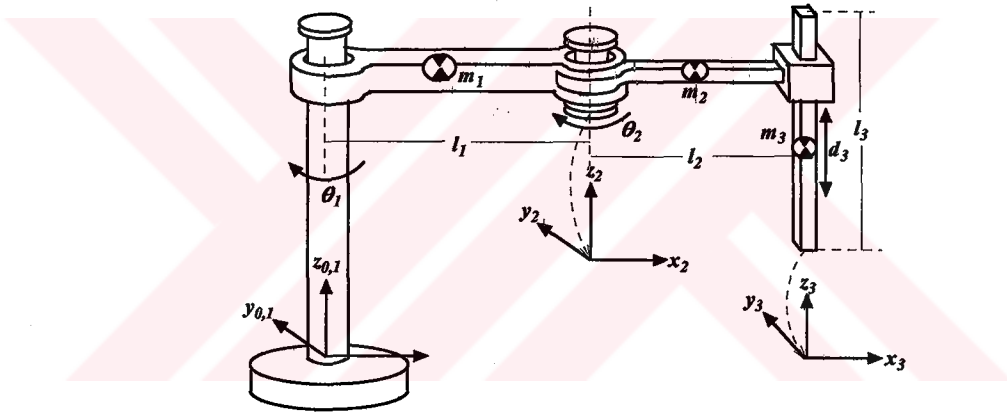
$$-l_3 c\theta_3(l_2 + q_2)) + 2s\theta_3 c\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3})\dot{q}_1\dot{q}_3 + [(2c^2\theta_3 - 1)(I_{yy_3} - I_{xx_3})]\dot{q}_3^2 \quad (4.181)$$

$$l_{RR} = -\left[\frac{1}{2}m_2(l_4 + 2l_2 + 2q_2) + \frac{1}{2}m_3(2l_2 + 2q_2 - l_3 s\theta_3)\right]\dot{q}_1^2 + \left[\frac{1}{2}l_3 m_3 s\theta_3\right]\dot{q}_3^2 \quad (4.182)$$

$$m_{RR} = \left[\frac{1}{2}m_3 c\theta_3(l_2 + q_2) + s\theta_3 c\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3} - \frac{1}{4}l_3^2 m_3)\right]\dot{q}_1^2 + [s\theta_3 c\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3})]\dot{q}_3^2 \quad (4.183)$$

#### 4.3.13. RS robotunun dinamik modeli

RS robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.14'te görülmektedir.



Şekil 4.14. RS robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.184 RR robotunun kütle matrisini, Denklem 4.185 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.186 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.187, 4.188 ve 4.189 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} a_{RS} & (m_2 + m_3)\left(\frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1 l_2 \cos\theta_2\right) + I_{zz_2} + I_{zz_3} & 0 \\ b_{RS} & (m_2 + m_3)\frac{1}{4}l_2^2 + I_{zz_2} + I_{zz_3} & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (4.184)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -[(m_2 + m_3)l_1l_2s\theta_2]\dot{q}_1\dot{q}_2 - [\frac{1}{2}(m_2 + m_3)l_1l_2s\theta_2]\dot{q}_2^2 \\ + [\frac{1}{2}(m_2 + m_3)l_1l_2s\theta_2]\dot{q}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.185)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0m_3 \end{bmatrix} \quad (4.186)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & [\frac{1}{4}m_1l_1^2 + I_{zz_1} + (m_2 + m_3)(\frac{1}{4}l_2^2 + l_1l_2 \cos\theta_2 + l_1^2) + I_{zz_2} + I_{zz_3}]\ddot{q}_1 \\ & + [(m_2 + m_3)(\frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1l_2 \cos\theta_2) + I_{zz_2} + I_{zz_3}]\ddot{q}_2 - [(m_2 + m_3)l_1l_2s\theta_2]\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ & - [\frac{1}{2}(m_2 + m_3)l_1l_2s\theta_2]\dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (4.187)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & [(m_2 + m_3)(\frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1l_2 \cos\theta_2) + I_{zz_2} + I_{zz_3}]\ddot{q}_1 + [(m_2 + m_3)\frac{1}{4}l_2^2 + I_{zz_2} + I_{zz_3}]\ddot{q}_2 \\ & + [\frac{1}{2}(m_2 + m_3)l_1l_2s\theta_2]\dot{q}_1^2 \end{aligned} \quad (4.188)$$

$$\tau_3 = m_3\ddot{q}_3 + g_0m_3 \quad (4.189)$$

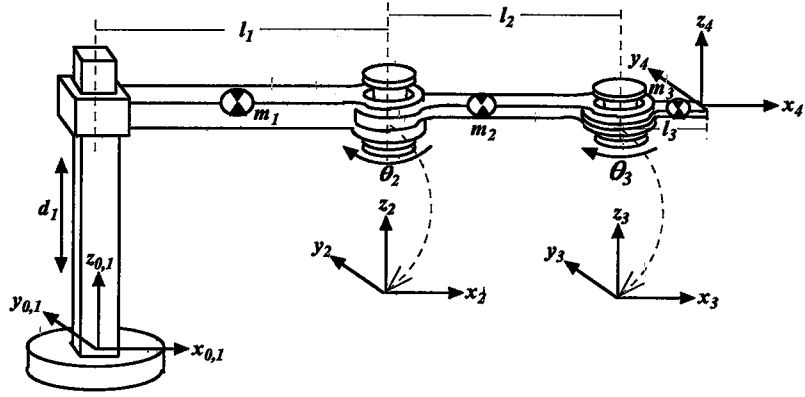
Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{RS} = \frac{1}{4}m_1l_1^2 + I_{zz_1} + (m_2 + m_3)(\frac{1}{4}l_2^2 + l_1l_2 \cos\theta_2 + l_1^2) + I_{zz_2} + I_{zz_3} \quad (4.190)$$

$$b_{RS} = (m_2 + m_3)(\frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1l_2 \cos\theta_2) + I_{zz_2} + I_{zz_3} \quad (4.191)$$

#### 4.3.14. SR robotunun dinamik modeli

SR robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.15'te görülmektedir.



Şekil 4.15. SR robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.192 SR robotunun kütle matrisini, Denklem 4.193 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.194 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.195, 4.196 ve 4.197 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_{SR} & m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + \frac{1}{2} l_2 l_3 c \theta_3 \right) + I_{zz_3} \\ 0 & m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + \frac{1}{2} l_2 l_3 c \theta_3 \right) + I_{zz_3} & \frac{1}{4} l_3^2 m_3 + I_{zz_3} \end{bmatrix} \quad (4.192)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -[l_2 l_3 m_3 s \theta_3] \dot{q}_2 \dot{q}_3 - \left[ \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s \theta_3 \right] \dot{q}_3^2 \\ + \left[ \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_3 \right] \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.193)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} + g_0 (m_1 + m_2 + m_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.194)$$

$$\tau_1 = [m_1 + m_2 + m_3] \ddot{q}_1 + g_0 (m_1 + m_2 + m_3) \quad (4.195)$$

$$\tau_2 = \left[ \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + I_{zz_2} + m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 \right) + I_{zz_3} \right] \ddot{q}_2 \\ + \left[ m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + \frac{1}{2} l_2 l_3 c \theta_3 \right) + I_{zz_3} \right] \ddot{q}_3 - [l_2 l_3 m_3 s \theta_3] \dot{q}_2 \dot{q}_3 - \left[ \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s \theta_3 \right] \dot{q}_3^2 \quad (4.196)$$

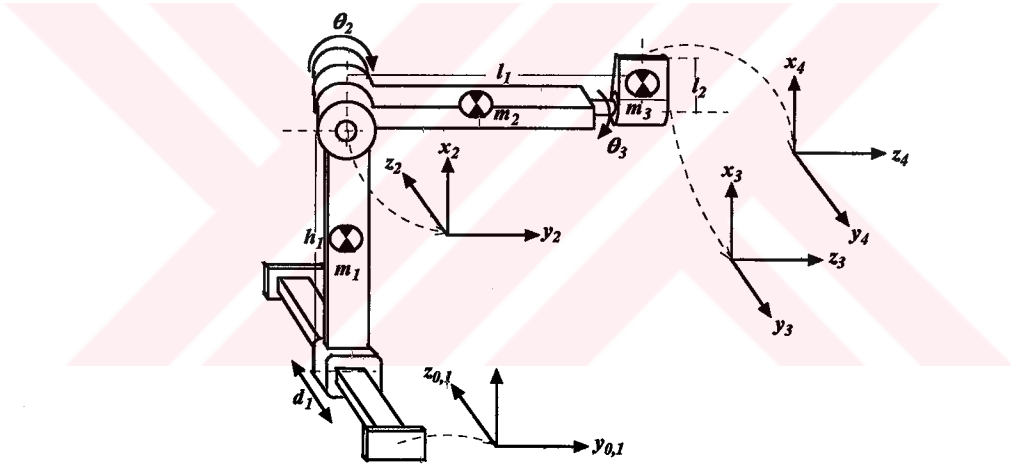
$$\tau_3 = [m_3(\frac{1}{4}l_3^2 + \frac{1}{2}l_2l_3c\theta_3) + I_{zz_3}] \ddot{q}_2 + [\frac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz_3}] \ddot{q}_3 + [\frac{1}{2}m_3l_2l_3s\theta_3] \dot{q}_2^2 \quad (4.197)$$

Denklem 4.192'de kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$a_{SR} = \frac{1}{4}m_2l_2^2 + I_{zz_2} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2 + l_2l_3c\theta_3 + l_2^2) + I_{zz_3} \quad (4.198)$$

#### 4.3.15. CN robotunun dinamik modeli

CN robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.16'da görülmektedir.



Şekil 4.16. CN robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.199 RR robotunun kütle matrisini, Denklem 4.200 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.201 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.202, 4.203 ve 4.204 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & \frac{1}{2}l_2m_3c\theta_3 \\ 0 & h_{CN} & \frac{1}{2}l_1l_2m_3s\theta_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \\ \frac{1}{2}l_2m_3c\theta_3 & i_{CN} & \frac{1}{4}l_2^2m_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (4.199)$$



$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -[\frac{1}{2}l_2m_3s\theta_3]\dot{q}_3^2 \\ k_{NC} \\ [s\theta_3c\theta_3(\frac{1}{4}l_2^2m_3 - I_{xx_3} + I_{yy_3})]\dot{q}_2^2 + [s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3})]\dot{q}_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.200)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}g_0l_2m_3c\theta_2s\theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

$$\tau_1 = [m_1 + m_2 + m_3]\ddot{q}_1 + [\frac{1}{2}l_2m_3c\theta_3]\ddot{q}_3 - [\frac{1}{2}l_2m_3s\theta_3]\dot{q}_3^2 \quad (4.202)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & [\frac{1}{4}m_2l_1^2 + I_{zz_2} + m_3(\frac{1}{4}l_2^2c^2\theta_3 + l_1^2) + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3}]\ddot{q}_2 \\ & + [\frac{1}{2}l_1l_2m_3s\theta_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3}]\ddot{q}_3 + [2s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3} - \frac{1}{4}m_3l_2^2)]\dot{q}_2\dot{q}_3 \\ & + [\frac{1}{2}l_1l_2m_3c\theta_3 + 2s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3})]\dot{q}_3^2 \end{aligned} \quad (4.203)$$

$$\begin{aligned} \tau_3 = & [\frac{1}{2}l_2m_3c\theta_3]\ddot{q}_1 + [\frac{1}{2}l_1l_2m_3s\theta_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3}]\ddot{q}_2 \\ & + [\frac{1}{4}l_2^2m_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3}]\ddot{q}_3 + [s\theta_3c\theta_3(\frac{1}{4}l_2^2m_3 - I_{xx_3} + I_{yy_3})]\dot{q}_2^2 \\ & + [s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3})]\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}g_0l_2m_3c\theta_2s\theta_3 \end{aligned} \quad (4.204)$$

Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$h_{CN} = \frac{1}{4}m_2l_1^2 + I_{zz_2} + m_3(\frac{1}{4}l_2^2c^2\theta_3 + l_1^2) + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \quad (4.205)$$

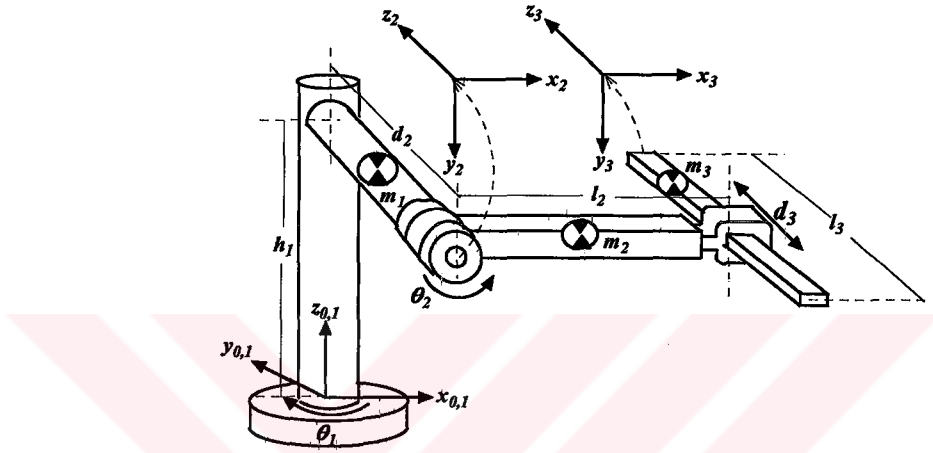
$$i_{CN} = \frac{1}{2}l_1l_2m_3s\theta_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \quad (4.206)$$

$$k_{NC} = [2s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3} - \frac{1}{4}m_3l_2^2)]\dot{q}_2\dot{q}_3$$

$$+ \left[ \frac{1}{2} l_1 l_2 m_3 c \theta_3 + 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \right] \dot{q}_3^2 \quad (4.207)$$

#### 4.3.16. NC robotunun dinamik modeli

NC robotunun düzenleşimi, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 4.17’de görülmektedir.



Şekil 4.17. NC robotunun dinamik analiz düzenleşimi.

Denklem 4.208 NC robotunun kütle matrisini, Denklem 4.209 Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü, Denklem 4.210 yerçekimi kuvvet vektörünü, Denklem 4.211, 4.212 ve 4.213 ise her bir eyleyiciye etki eden tork ifadesini göstermektedir.

$$D(q) = \begin{bmatrix} k_{NC} & m_{NC} & -l_2 m_3 c \theta_2 \\ l_{NC} & n_{NC} & 0 \\ -l_2 m_3 c \theta_2 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (4.208)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} p_{NC} \\ r_{NC} \\ + [m_3 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2} l_3)] \dot{q}_1^2 + [2 l_2 m_3 s \theta_2] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (4.209)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_0 l_2 s \theta_1 s \theta_2 (\frac{1}{2} m_2 + m_3) \\ + g_0 m_3 c \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.210)$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & \left[ \frac{1}{2} d_2^2 m_1 + I_{z_1} + \frac{1}{4} l_2^2 m_2 c^2 \theta_2 + d_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{yy_3} \right. \\
& + m_3 (l_2^2 c^2 \theta_2 + q_3^2 + 2d_2 q_3 - l_3 q_3 + d_2^2 - d_2 l_3 + \frac{1}{4} l_3^2) ] \ddot{q}_1 + \left[ -\frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 s \theta_2 \right. \\
& + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} - l_2 m_3 s \theta_2 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2} l_3) + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{yy_3} ] \ddot{q}_2 \\
& - [l_2 m_3 c \theta_2] \ddot{q}_3 + [2s \theta_2 c \theta_2 (-\frac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{xx_2} - I_{yy_2} - l_2^2 m_3 + I_{xx_3} - I_{yy_3})] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& + [-l_2 m_3 c \theta_2 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2} l_3) - \frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 c \theta_2 + 2s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} \\
& - I_{yy_2} - I_{yy_3})] \dot{q}_2^2 + [m_3 (l_2 s \theta_2 + 2d_2 - l_3 + 2q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \quad (4.211)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & \left[ -\frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 s \theta_2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} - l_2 m_3 s \theta_2 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2} l_3) \right. \\
& + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{yy_3} ] \ddot{q}_1 + \left[ \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} + l_2^2 m_3 (1 - \frac{3}{4} c^2 \theta_2) \right. \\
& + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{yy_3} ] \ddot{q}_2 + [-s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{yy_3} - \frac{1}{4} l_2^2 m_2 - l_2^2 m_3)] \dot{q}_1^2 \\
& + [s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{yy_3} + \frac{3}{4} l_2^2 m_3)] \dot{q}_2^2 \\
& - [\frac{1}{2} l_2 m_3 s \theta_2] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + g_0 l_2 s \theta_1 s \theta_2 (\frac{1}{2} m_2 + m_3) \quad (4.212)
\end{aligned}$$

$$\tau_3 = [-l_2 m_3 c \theta_2] \ddot{q}_1 + m_3 \ddot{q}_3 + [m_3 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2} l_3)] \dot{q}_1^2 + [2l_2 m_3 s \theta_2] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + g_0 m_3 c \theta_1 \quad (4.213)$$

Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
k_{NC} = & \frac{1}{2} d_2^2 m_1 + I_{z_1} + \frac{1}{4} l_2^2 m_2 c^2 \theta_2 + d_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} \\
& + m_3 (l_2^2 c^2 \theta_2 + q_3^2 + 2d_2 q_3 - l_3 q_3 + d_2^2 - d_2 l_3 + \frac{1}{4} l_3^2) + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{yy_3} \quad (4.214)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{NC} = & -\frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 s \theta_2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} - l_2 m_3 s \theta_2 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2} l_3) \\
& + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{yy_3} \quad (4.215)
\end{aligned}$$

$$m_{NC} = -\frac{1}{2}l_2d_2m_2s\theta_2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} - l_2m_3s\theta_2(q_3 + d_2 - \frac{1}{2}l_3) + s^2\theta_2I_{xx_3} + c^2\theta_2I_{yy_3} \quad (4.216)$$

$$n_{NC} = \frac{1}{4}l_2^2m_2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} + l_2^2m_3(1 - \frac{3}{4}c^2\theta_2) + s^2\theta_2I_{xx_3} + c^2\theta_2I_{yy_3} \quad (4.217)$$

$$p_{NC} = [2s\theta_2c\theta_2(-\frac{1}{4}l_2^2m_2 + I_{xx_2} - I_{yy_2} - l_2^2m_3 + I_{xx_3} - I_{yy_3})]\dot{q}_1\dot{q}_2 + [-l_2m_3c\theta_2(q_3 + d_2 - \frac{1}{2}l_3) - \frac{1}{2}l_2d_2m_2c\theta_2 + 2s\theta_2c\theta_2(I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{yy_3})]\dot{q}_2^2 + [m_3(l_2s\theta_2 + 2d_2 - l_3 + 2q_3)]\dot{q}_1\dot{q}_3 \quad (4.218)$$

$$r_{NC} = [-s\theta_2c\theta_2(I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{yy_3} - \frac{1}{4}l_2^2m_2 - l_2^2m_3)]\dot{q}_1^2 + [s\theta_2c\theta_2(I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{yy_3} + \frac{3}{4}l_2^2m_3)]\dot{q}_2^2 - [\frac{1}{2}l_2m_3s\theta_2]\dot{q}_1\dot{q}_3 \quad (4.219)$$

#### 4.4. Sonuçlar

Bu bölümde üç eklemlilik onaltı adet endüstriyel robotun dinamik modeli Lagrange-Euler yöntemi kullanılarak çıkarılmıştır. Enerji ilişkilerinden faydalanarak bir robotun dinamik modelini çıkaran Lagrange-Euler yöntemi durum uzayı değişkenlerini kullanan kontrol algoritmaları için uygundur. Ayrıca, dinamik modelin çıkarılmasında kullanılan matris işlemlerinin daha kolay anlaşılmasından dolayı Lagrange-Euler yöntemi tercih edilmiştir.

Bir robotta prizmatik eklem sayısının artması dinamik modeli oluşturan denklemlerin daha basit olmasına neden olur. Tam tersine dönel eklemlerin fazla olduğu robotlardan elde edilen dinamik denklemler ise oldukça karmaşıktır.

## **BÖLÜM 5. BENZETİM PROGRAMI**

### **5.1. Giriş**

Programlama alanındaki gelişmeler, renksiz ve tekdüze olan bilgisayar görüntüsünü son derece renkli ve hareketli bir ortama taşıdı. Başlangıçta sadece klavyeden kontrol edilen veriler, çalıştırılan sistemin kontrol edilmesinde yetersiz kalınca, zamanla verilerin tümünün tek elden işlendiği bir arayüz yapma ihtiyacı doğdu. Bir arayüz, sistem hakkında daha ayrıntılı analiz ve karşılaştırma yapmayı sağlayan bir çok farklı veriyi ekrana taşır ve bu verilerin bir bütünlük içerisinde canlandırılmasını (animation) gerçekleştirir. Canlandırma, iki veya üç boyutlu nesnelere oluşturan verilerin hareketlendirilerek görselleştirilmesi olarak tanımlanabilir. Sonuç olarak verilerin ve nesnelere canlandırılmasının bir arada gerçekleşmesini sağlayan ortama Grafik Kullanıcı Arayüz (Graphical User Interface- GUI) denir. GUI'lerin en önemli avantajı, kullanıcıya program komutları olmadan bilgisayarla iletişim kurmayı sağlamasıdır.

Kullanıcı arayüz kontrolleri (uicontroller) ve kullanıcı arayüz menülerini (uimenuler) bünyesinde barındıran MATLAB gelişmiş GUI'lerin tasarlanmasına imkan verir. Uicontroller ve uimehuler, uyumlu ve kullanışlı GUI'lerin tasarlanmasını kolaylaştırır. İyi bir GUI tasarımı için ilk önce tasarlanacak arayüzün kime hitap edeceği ve kullanımının anlaşılabilirliği üzerinde durulması gerekir. Daha sonra tasarım aşamasında GUI üzerindeki canlandırılacak nesnelere konumları, verilerin büyüklüğü ve yerleşimi göz önünde bulundurulmalıdır. Tasarlanan arayüz, verilerin işlenmesindeki ve uygulamaların canlandırılmasındaki ileri ve geri dönüşleri hızlı bir şekilde gerçekleştirmelidir. Ayrıca arayüz ile kullanıcı arasındaki iletişim, kullanıcı beklentilerine uygun bir şekilde gerçekleşmelidir.

## 5.2. Uicontrol Elemanları

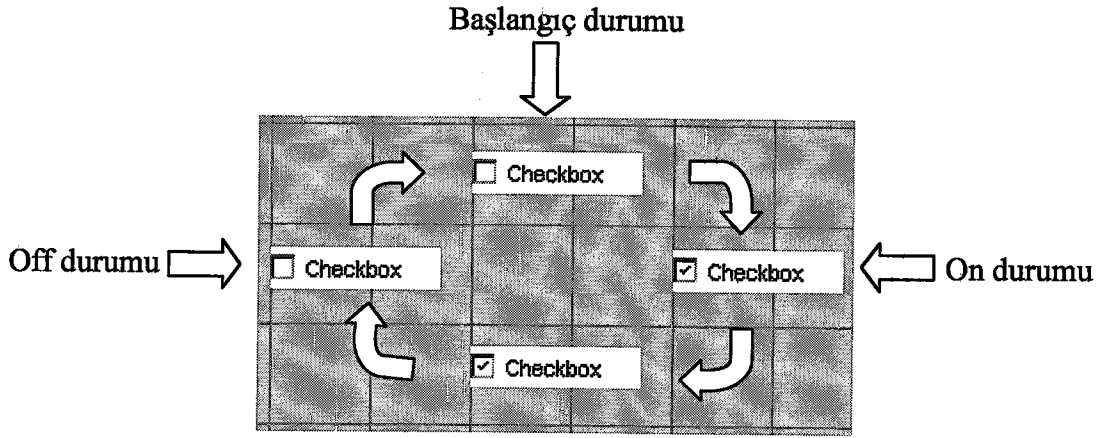
Bir arayüz tasarlamak için gerekli olan uicontrol elemanları, bu elemanların tip değerleri ve açıklaması Tablo 5.1’de verilmiştir.

**Tablo 5.1.** Bir arayüz tasarlamak için gerekli olan elemanlar.

Uicontrol	Tip değeri	Açıklaması
Check Box	‘checkbox’	İki koşullu durum gösteren kutu
Editable Text	‘edit’	Veri girişinin gerçekleştirildiği metin kutusu
Frame	‘frame’	Nesneleri bir arada gruplandıran çerçeve
Pop-up Menu	‘popup’	Dışa dönük bir dizi durum listesi
List Box	‘listbox’	İçe dönük bir dizi durum listesi
Push Button	‘pushbutton’	Herhangi bir durumun gerçekleşmesini sağlayan tuş
Radio Button	‘radio’	Bir çok durumdan birini seçen tuş
Toggle Button	‘toggle’	İki durumlu anahtar
Slider	‘slider’	Bir aralıktaki değerleri gösteren çubuk
Static Text	‘text’	Veri görüntülenmesini gerçekleştiren metin kutusu

### 5.2.1. Check box

Tip değeri ‘checkbox’ olan bu uicontrol, kullanıcı arayüzünde oluşturulmuş iki durumlu bir denetleme kutusudur. Check box ekrana, başlangıçta on veya off şeklinde gelebilir. Bu kutu üzerine tıklanmasıyla, on ise off veya off ise on olmak üzere durum değiştirir. Bir check boxın genişliğini, zemin rengini ve arayüz üzerindeki konumu gibi bir çok özelliğini değiştirmek mümkündür. Şekil 5.1 check boxın başlangıç , on ve off durumlarını göstermektedir.



Şekil 5.1. Check boxın arayüzdeki görünümü.

### 5.2.2. Editable Text

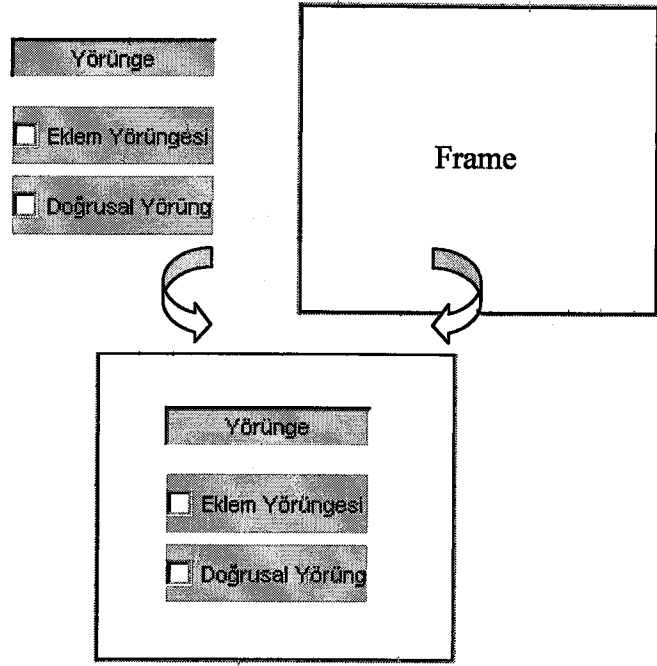
Program yazarken tip değeri 'edit' olan bu uicontrol, arayüze kullanıcının metin veya rakam girmesini sağlar. Bir editable text'in genişliğini, zemin rengini, konumunu, yazı rengini, büyüklüğünü ve daha bir çok özelliğini değiştirmek mümkündür. Şekil 5.2 editable text kutusuna kullanıcı tarafından girilmiş rakam ve metinleri göstermektedir.



Şekil 5.2. Editable text kutusuna kullanıcı tarafından girilmiş rakam ve metinler .

### 5.2.3. Frame

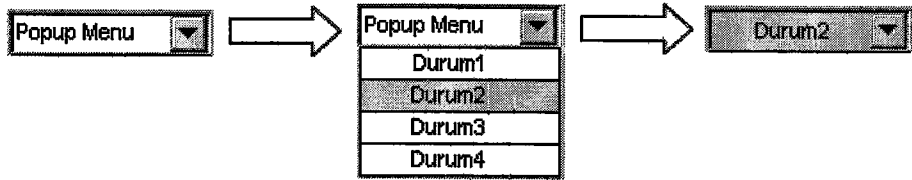
Tip değeri 'frame' olan bu uicontrol, diğer uicontrolleri veya oluşturulmuş nesnelere bir grup içerisinde toplar. Şekil 5.3'te editable text ve checkbox uicontrollerinin bir frame üzerinde gruplandırılması görülmektedir. Bir framein diğer uicontrollerde olduğu gibi genişliğini, rengini, konumunu ve daha bir çok özelliğini değiştirmek mümkündür.



**Şekil 5.3.** Bir Frame kullanılarak gerçekleştirilen gruplama.

#### 5.2.4. Pop-up menu

Tip değeri 'popup' olan bu uicontrol, kullanıcıya bir koşulun meydana getirdiği çok sayıda durumdan birini seçme olanağı sağlar. Durumlardan biri tıkladığında, tekrar bir veya birden fazla durum alt alta sıralanır. Sıralanan bu durumlardan biri tıklanarak seçilir. Şekil 5.4'te, Pop-up menu kullanarak Durum2'nin seçimi görülmektedir. Bir Pop-up menu'nün bir çok özelliğini değiştirmek mümkündür.



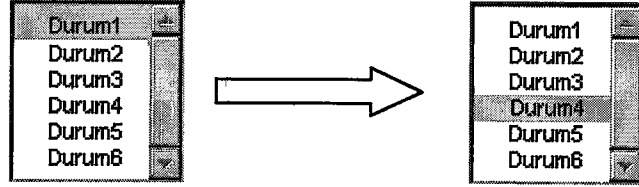
**Şekil 5.4.** Pop-up Menu'de herhangi bir durumun seçimi.

#### 5.2.5. List box

Tip değeri 'listbox' olan bu uicontrol, kullanıcıya bir koşulun meydana getirdiği çok sayıda durumdan sadece birini seçme olanağı sağlar. Seçilen durum yeni



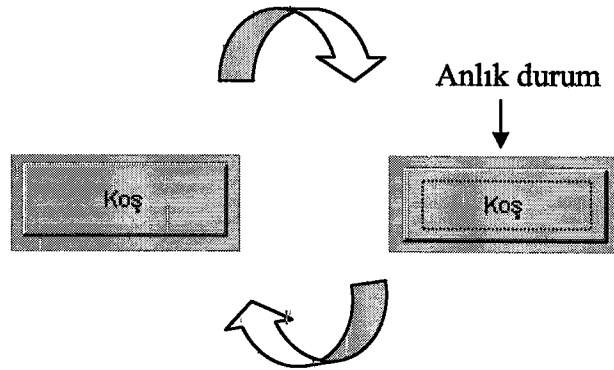
durumlar üretmez. Bir bakıma Pop-up menüye çok benzemesine rağmen aralarındaki en belirgin ayırım, pop-up menüde seçilen durumlardan yeni durumlar oluşurken, listboxda seçilen durumun nihai durum olmasıdır. Ayrıca listbox tıklandığında her zaman varsayılan olarak birinci durum koyu renkte görüntülenir. Şekil 5.5’de Listbox kullanarak Durum4’ün seçimi görülmektedir.



Şekil 5.5. Durum4’ün seçimi.

#### 5.2.6. Push button

Tip değeri ‘pushbutton’ olan bu uicontrol’ün tıklanmasıyla amaçlanan uygulama anında gerçekleşir ve basılı olan push button eski konumuna hemen geri gelir. Uicontrol’ler arasında en çok kullanılma özelliğine sahip olan push buttonlar, sürekli bir olayı gerçekleştirdiklerinden dolayı üzerlerine genellikle “Oku”, “Koş” gibi fiiller yazılır. Şekil 5.6’da bir push button üzerinde örnek olarak “Koş” fiilinin çalıştırılması görülmektedir.

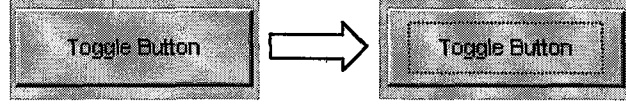


Şekil 5.6. Koş fiilinin çalıştırılması.

#### 5.2.7. Toggle button

Tip değeri ‘toggle’ olan bu uicontrol’ün tıklanmasıyla iki durumdan biri seçilir. Push buttona çok benzemesine rağmen toggle buttonda ani durum yoktur. Yani, hangi

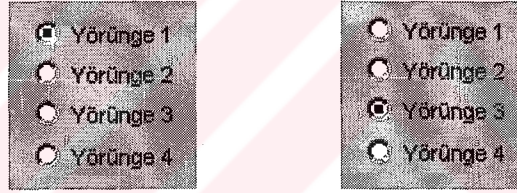
durum seçildiyse tekrar toggle button tıklanmadığı sürece o durum değişmez. Şekil 5.7’de bir toggle button uygulaması görülmektedir.



Şekil 5.7. Bir toggle buttondaki durum değişikliği.

### 5.2.8. Radio button

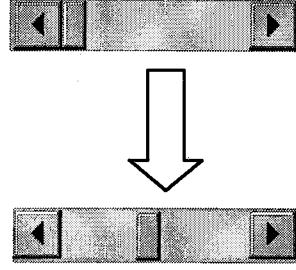
Tip değeri ‘radio’ olan bu uicontrol’ün seçilmesiyle iki durumdan biri seçilir. Check boxa çok benzemesine karşın aralarında oldukça önemli bir fark vardır. Check box tek başına kullanılırken radio button’ları ise en az iki veya daha fazlasıyla birlikte kullanılmaktadır. Ancak radio buttonlarından biri on iken, diğer radio butonlarının off olması gerekir. Şekil 5.8’de bir radio button uygulaması görülmektedir.



Şekil 5.8. Radi button uygulaması.

### 5.2.9. Slider

Tip değeri ‘slider’ olan bu uicontrol, belli bir aralıktaki değerleri seçmek için kullanılır. Seçilen değer, hareket eden bir çubuk tarafından belirlenir. Sliderın başlangıç ve bitiş değerleri belirlenebileceği gibi her bir çubuk hareketinin kaç birime denk geleceği de ayarlanabilir. Şekil 5.9’da slider kullanarak herhangi bir değer seçilmesi görülmektedir.



**Şekil 5.9.** Slider kullanarak değer seçilmesi.

### 5.2.10. Statik text

Tip değeri 'text' olan bu uicontrol, arayüzde metin veya rakamın görüntülenmesini sağlar. Bir statik text'in konumu, yazı türü gibi bir çok özelliğini değiştirmek mümkündür.

### 5.3. Uicontrol Özellikleri

Her bir uicontrol nesnesi bir takım özelliklere sahiptir. Bu özellikler, arayüzün istenilen doğrultuda şekillendirilmesi için çok önemlidir. Bir uicontrol nesnesinin gerekli özellikleriyle birlikte arayüzde görüntülenmesi için Örnek 5.1'de verilen program syntaxı kullanılır. Örnekte, bir uicontrol nesnesiyle ilgili olarak 'Uicontrol tipi', 'konumu' ve 'callback' gibi birkaç özellik verilmiştir. Bir uicontrol nesnesine eğer gerekliyse aynı syntax yapısına uymak koşuluyla daha birçok özellik eklenebilir.

#### Örnek 5.1.

```
Nesne ismi=uicontrol('Uicontrol tipi','slider, pushbutton ....',  
    'Konum',[0.142 0.34 0.033 0.32], 'Callback',sr2, .....);
```

Çoğunlukla, bir arayüz programını oluştururken uicontrol nesnesini meydana getiren özelliklerin tümü kullanılmaz. Her bir uicontrol nesnesinin kullandığı belli başlı özellikler vardır (Marchands and Holland 2003). Genel olarak kullanılan özelliklere aşağıda kısaca değinilmiştir.

### 5.3.1. Uicontrol position özelliği

Bu özellik, arayüz üzerindeki uicontrol nesnesinin konumunu belirler. Bir uicontrol nesnesinin arayüz üzerindeki konumu belirlenirken, 'Position',[0.68 0.87 0.09 0.05] komutu yazılır. [0.68 0.87 0.09 0.05] konum vektöründeki ilk iki eleman, uicontrol nesnesinin arayüz üzerindeki x, y koordinatlarını verirken, son iki eleman ise sırasıyla uicontrolün uzunluğunu ve genişliğini belirler. Örnek 5.2, Position özelliğinin program içerisindeki kullanımını göstermektedir.

#### Örnek 5.2.

```
PushBut1=uicontrol(fig,'Style','pushbutton',...  
    Position',[0.68 .87 0.09 0.05],'string','RESET', ...  
    'Callback',P17,'visible','off','BackgroundColor',[0.8 0.8 0.8]);
```

### 5.3.2. Uicontrol callback özelliği

Callback, uicontrol özelliklerinin en önemlilerindedir. Kullanıcı, arayüz üzerine konumlandırılmış herhangi bir uicontrol nesnesi tıkladığında, callback özelliği ona ait program parçasını çalıştırır. Callback özelliği ile ilgili uygulama Örnek 5.3'te verilmiştir. Örnekte, kullanıcı arayüz üzerinden Slider2'yi tıkladığında 'Callback' özelliği sr2 program parçasını çalıştırır. Bu program parçasındaki 'r2 = get(gcf,"Value");' komutu slider2'nin o anki değerini r2 değişkenine atar. Daha sonra r2 değişkeni bir alt satırda yer alan 'animas\_NR\_RPY;' m dosyasında işletilir. sr2 satırına daha bir çok komut veya m dosyası yazılabilir.

#### Örnek 5.3.

```
sr2 = ['r2 = get(gcf,"Value");' ...  
    'animas_NR_RPY;'];  
slider2=uicontrol(fig,'Style','slider','Units','normalized', ...  
    'Position',[0.142 0.34 0.033 0.32],'min',5,'max',rmax2, ...  
    'Value',0,'Callback',sr2,'visible','off','BackgroundColor',[.19 .51 1]);
```

### 5.3.3. Uicontrol Style Özelliği

Style özelliği kullanıcının hangi uicontrolü (push button, pop-up menu, frame... vs.) kullandığını belirler. Örneğin Slider2 diye isimlendirilen uicontrol bir sliderdir. Burada, uicontrolün slider2 diye isimlendirilmesi tamamen programın anlaşılabilirliğini kolaylaştırmak içindir. Slider2 yerine hız1, ivme2 gibi anlamlı veya xrt gibi anlamsız isimler de verilebilir.

### 5.3.4. Uicontrol min, max ve value özelliği

Bu özellikler, her uicontrol nesnesi için farklılık göstermesine karşın genellikle skalerdir. Örnek 5.3'teki Slider2 olarak isimlendirilen slider uicontrol nesnesinin değişim aralığı minimum 5, maximum rmax2'dir ('min',5,'max',rmax2,). Burada rmax2, içerisinde skaler değer saklayan bir değişkendir. Value özelliği ise daha çok radio button veya check box uicontrol nesnelerinde kullanılır. Bu özellik iki uicontrol nesnesinin seçili olup olmadığını gösterir. Örnek 5.4'te radiobutton1 nesnesinin, arayüzdeki konumuna seçili olarak gelmesi için, 'value' özelliği 1 yapılmaktadır. Ayrıca value özelliği sorgulama için de kullanılır. Örnek 3.5'te v1 değişkenine radiobutton1'in o anki değeri atanmaktadır (Eğer seçilmişse 'Value = 1', seçilmemişse Value=0'dır.). Eğer radiobutton1 seçilmişse, kendisini seçilmemiş konuma, radiobutton2'yi ise seçilmiş konuma getir.

### Örnek 5.4.

```
RB1 = ['option(5,23)'];  
radiobutton1=uicontrol(fig,'Style','radio','Units','normalized', ...  
    'Position',[0.025 0.896 0.11 0.03],'string','Ekl.Yö.', ...  
    'Value',1,'Callback',RB1,'visible','off','BackgroundColor',[0.95,.95,.95]);
```

### Örnek 5.5.

```
v1=get(radiobutton1,'value')
```

```
if v1==1;
    set(radiobutton1,'value',0);
    set(radiobutton2,'value',1);
end
```

### 5.3.5. Uicontrol foreground color özelliği

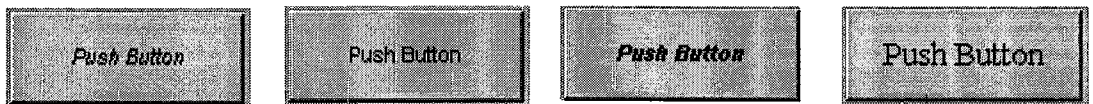
Foreground color özelliği seçilen uicontrol nesnesinin üzerine eklenen daire veya kutu gibi cisimlerin rengini belirler. Örneğin, frame uicontrol nesnesinin üzerine çizilen bir dairenin rengi 'ForegroundColor',[0.95,.95,.95], komutuyla değiştirilebilir. Komuttaki [0.95,.95,.95] RGB (kırmızı,yeşil, mavi) renk karışımından yeni bir rengin oluşmasını sağlar.

### 5.3.6. Uicontrol background color özelliği

Background color özelliği, seçilen uicontrol nesnesinin zemin rengini belirler. Örnek 5.3'teki slider uicontrol nesnesinde olduğu gibi, zemin rengi 'BackgroundColor', [.19 .51 1] komutuyla değiştirilebilir. Matris içerisindeki üç eleman 0 ile 1 arasında değiştirilerek farklı renkler üretilebilir.

### 5.3.7. Uicontrol font angle, name, size ve weight özelliği

Bu özellikler uicontrol nesnesinin üzerindeki metnin görünüşünü değiştirir. Font angle, metnin yatık, düz veya kesik-yatık olmasını sağlar. Font name, Arial, Times New Roman gibi yazı tipini, font size ise metnin büyüklüğünü belirler. Font weight özelliği metnin kalın veya açık renkte olmasını sağlar. Bütün bu değişiklikler program satırında yapıldığında Şekil 5.10'daki görünüm elde edilir.



Şekil 5.10 Font angle, font weight ve font size özellikleri.

### 5.3.8. Uicontrol horizontal alignment özelliği

Bu özellik metnin uicontrol nesnesi üzerinde sağa, sola veya ortaya yerleşik olarak yazılmasını sağlar.



Şekil 5.11. Horizontal alignment özelliği

### 5.3.9. Uicontrol string özelliği

Bu özellikten faydalanarak uicontrol nesnesi üzerine metin yazılır. Örnek 5.6, işlemin komut satırıyla gerçekleştirilmesini, Şekil 5.12 ise programın çalışmasıyla arayüzdeki uicontrol nesnesinin görünümünü göstermektedir.

#### Örnek 5.6.

```
P7 = ['option(6,23);'];  
PushBut7=uicontrol(fig,'Style','pushbutton','Units','normalized', ...  
    'Position',[0.326 .02 0.07 0.05],'string','Ters Kinematik.', ...  
    'Callback',P7,'visible','on','BackgroundColor',[0.8 0.8 0.8]);
```



Şekil 5.12. Arayüz üzerindeki uicontrol nesnesinin görünümü.

### 5.3.10. Uicontrol visible özelliği

Visible özelliği, uicontrol nesnesinin arayüz üzerinde görüntülenip görüntülenmeyeceğini belirler. Visible özelliği 'on' yapıldığında uicontrol nesnesi arayüz üzerinde görüntülenirken, 'off' yapıldığında ise görüntülenmez. Örnek 5.6'da



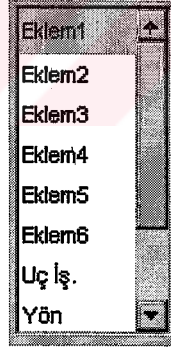
bu özellik 'visible','on' yapıldığından program çalıştırıldığında PushBut7 nesnesi arayüz üzerinde anında görüntülenmektedir.

### 5.3.11 Uicontrol List Box Top Özelliği

Bu özellik tamamen listbox uicontrol nesnesine özgüdür. String özelliğiyle birlikte kullanılır ve listbox uicontrol nesnesindeki durumların sırasını belirler. Örnek 5.7 bu işlemin komut satırıyla gerçekleştirilmesini, Şekil 5.13 ise programın çalışmasıyla arayüzdeki uicontrol nesnesinin görünümünü göstermektedir.

#### Örnek 5.7.

```
LB1 = ['option(2,23);'];  
Listbox1=uicontrol(fig,'Style','listbox','Units','normalized', ...  
'Position',[0.63 .02 0.11 0.07], 'Callback',LB1,...  
'string','Eklem1|Eklem2|Eklem3|Eklem4|Eklem5|Eklem6|Uç İş.|Yön.', ...  
'visible','off','BackgroundColor',[0.8 0.8 0.8]);
```



Şekil 5.13. List box uicontrol nesnesindeki durumların görünümü.

### 5.3.12. Uicontrol units özelliği

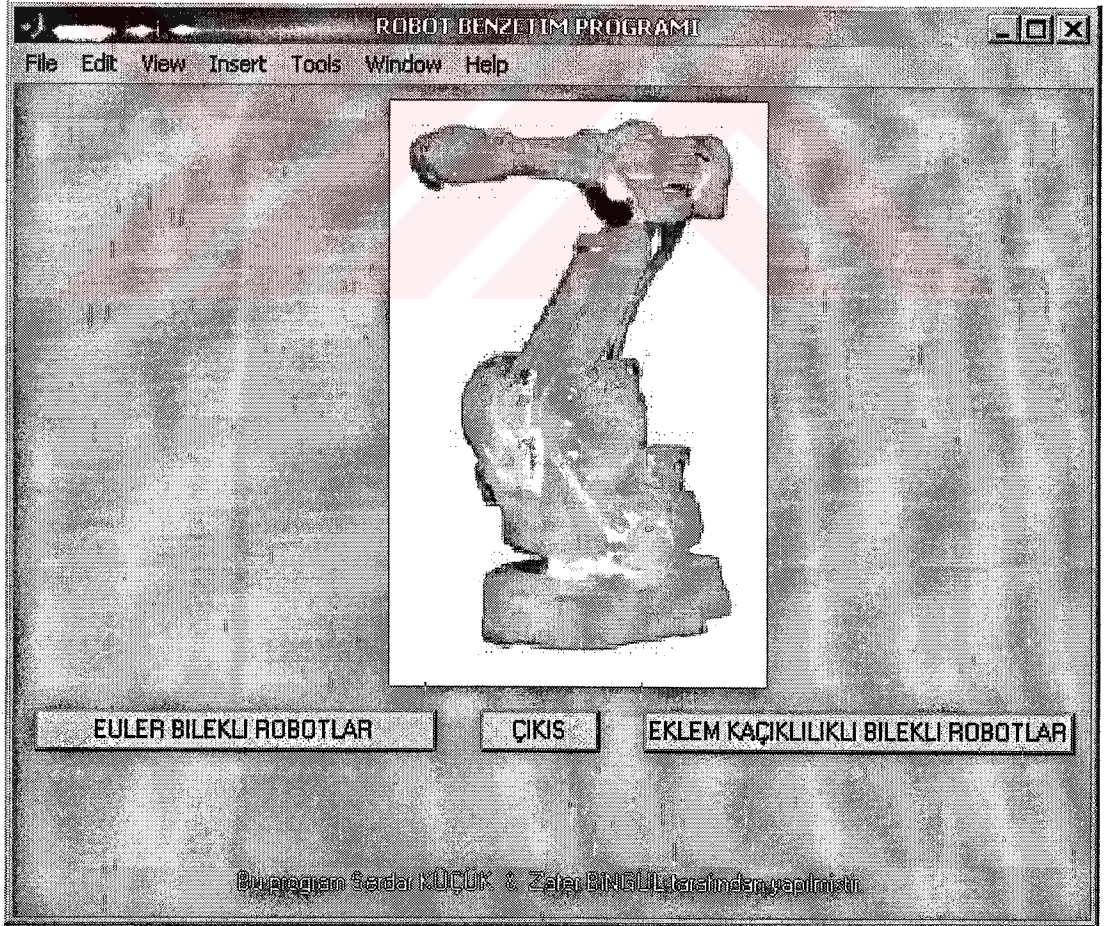
Uicontrol nesnelerinin konumları position özelliğiyle belirlenir. Fakat konumun hangi ölçüğe göre belirleneceğini unit özelliği belirler. Unit özelliği, pixel, inch, centimeter ve normalized olmak üzere dört farklı ölçekten oluşur. Pixel, inch ve centimeter mutlak ölçeklerdir. Bu ölçeklerin boyutları, arayüzü oluşturan figürün boyutlarından tamamen bağımsızdır. Dolayısıyla, bu ölçeklerle belirlenen uicontrol



nesneleri bazen arayüzün olduğu figürden daha büyük olabilir. Fakat unit özelliği normalized olarak seçilirse uicontrol nesnesinin boyutları arayüzü oluşturan figüre göre ölçeklendirilir. Örnek-7, unit özelliğinin bir program rutininde kullanımını açık bir şekilde göstermektedir.

#### 5.4. Robot Benzetim Programı

Bu tezde on altısı Euler ve diğer on altısı eklem kaçıklıklı bilekli olmak üzere 32 robottan oluşan bir benzetim programı gerçekleştirildi. Kullanıcı, bu programla ileri kinematik, ters kinematik ve yörünge planlaması gibi bir çok robot uygulamasını etkileşimli olarak çalıştırıp sonuçları bütünlük içerisinde gözlemleyebilir. Programın çalıştırılmasıyla bilgisayar ekranına gelen benzetim programının genel görünümü Şekil 5.14'te verilmiştir. Şekil 5.14'te Euler bilekli ve eklem kaçıklıklı robotlar



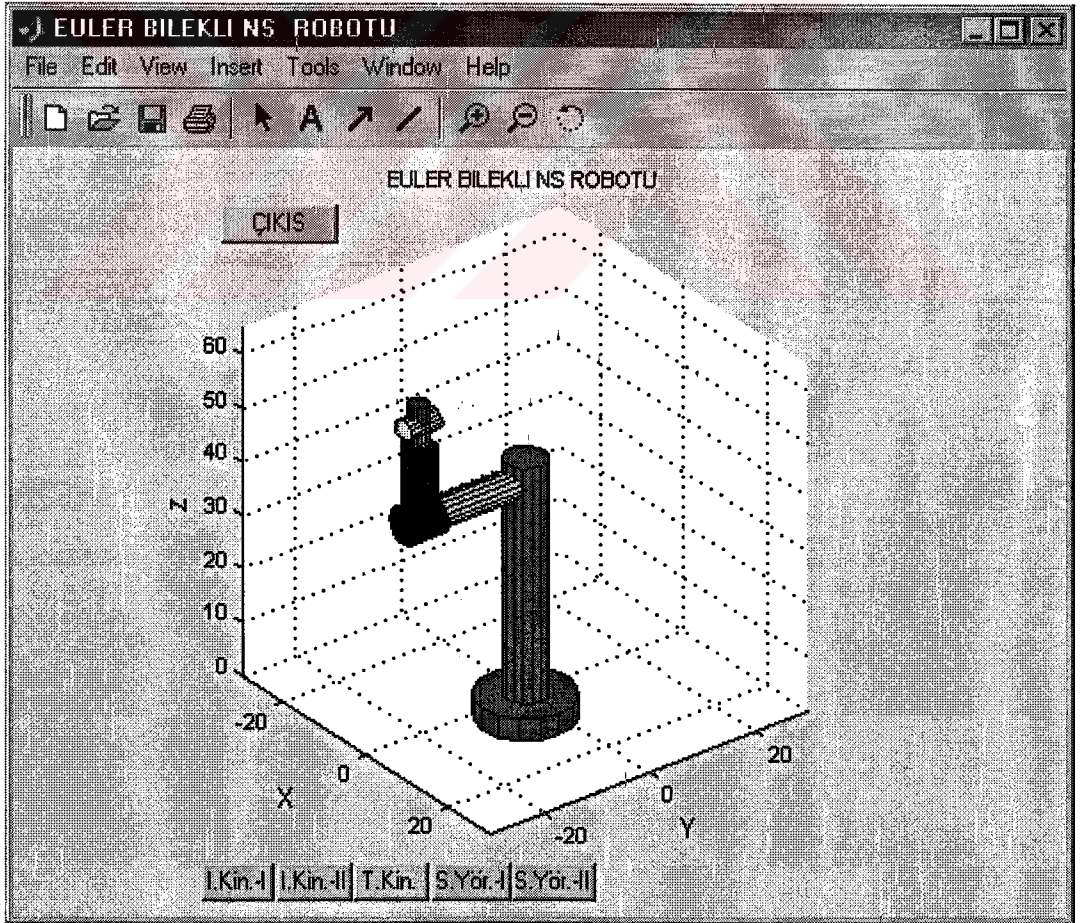
Şekil 5.14. Benzetim programının genel görünümü.



olmak üzere iki ana menü bulunmaktadır. Kullanıcı bu iki menüyü kullanarak 32 robottan istediğini list boxtan seçip çalıştırabilir. Ayrıca programdan tamamen çıkmak için Şekil 5.14'teki ÇIKIŞ seçeneğinin tıklanması yeterlidir. Bu benzetim program yardımıyla;

1. İleri kinematik-I (I.-Kin.-I), ileri kinematik-II (I.-Kin.-II) ve sürekli yörünge-I (S.Yör.-I) olmak üzere üç farklı ileri kinematik,
- 2- Ters kinematik (T.-Kin.) ve sürekli yörünge-II (S.Yör.-II) olmak üzere iki farklı ters kinematik uygulaması gerçekleştirilebilir.

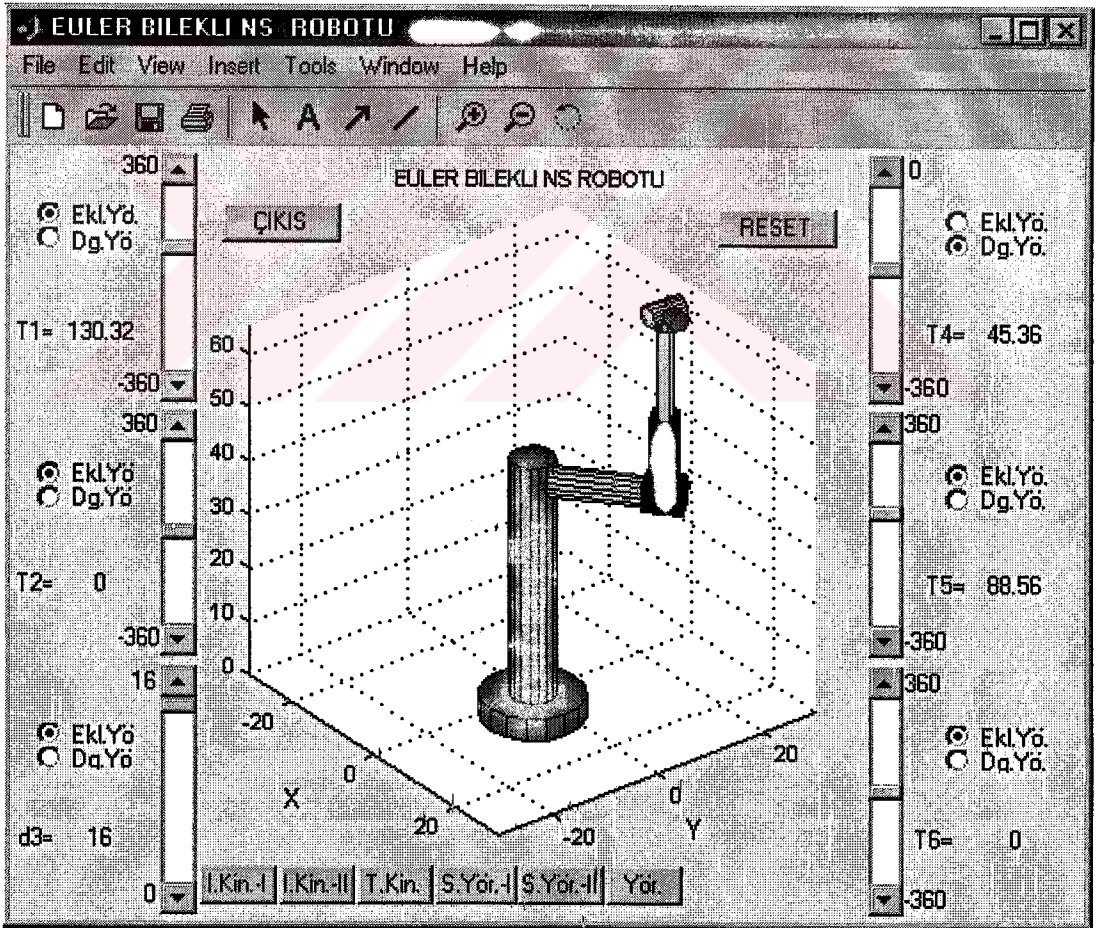
Bu benzetim programıyla gerçekleştirilebilecek uygulamalar, Şekil 5.15'te ana menüden seçilen Euler bilekli NS robotu çalıştırılarak sırayla aşağıda anlatılmıştır.



Şekil 5.15. NS Robotunu genel görünümü.

### 5.4.1. İleri kinematik-I

Kullanıcının ileri kinematik-I'i seçtiği, arayüzdeki bu duruma ait düğmenin kırmızı rengi almasıyla anlaşılır. Bu konumda, altı serbestlik derecesine sahip robotların her bir eklemi bir sliderla kontrol edilir. Sliderların alt ve üst yanlarına konan rakamlar, her eklem için sınır değerlerini göstermektedir. Arayüzde hangi eklem için slider çubuğu değiştirilirse ona ait robot eklemi hareket eder. Bu hareketin, dönel eklem ise  $T_1$ ,  $T_2$  veya  $T_4$  gibi açı değeri, prizmatik eklem ise  $d_3$  gibi birim uzunluğu arayüz üzerinde görüntülenir. Şekil 5.16'da sliderlarla NS robotuna ait birinci eklem için  $T_1=130.32$  derece, üçüncü eklem için  $d_3=16$  birim, dördüncü eklem için  $T_4 = 45.36$  derece ve beşinci eklem için  $T_5=88.56$  derece hareket ettirildiği görülmektedir.



Şekil 5.16. Sliderlarla NS robotuna ait eklemlerin hareket ettirilmesi.

Uç işlevcisini bulunduğu konumdan arzu edilen konuma götürmek, bir robot manipülâtörünün en temel sorunudur. Bu hareket gerçekleşirken uç işlevcisinin



yönelimi ve konumu ana çerçeveye göre değişir. Uç işlevci, bu hareketi gerçekleştirirken bir takım ara noktalardan geçer. Aslında, uç işlevcinin başlangıç ve bitiş noktaları da birer ara nokta sayılır. Uç işlevci bu noktalardan geçerken, zamana bağlı olarak değişen belli bir hıza ve ivmeye sahiptir. Bu değişken ivmeli hareket titreşime neden olabilir. Robotun bu problemden uzak, çalışma uzayındaki herhangi bir cisme çarpmadan ve eyleyicilerin sınırlarını zorlamadan kontrollü bir şekilde hareket edebilmesi için yörünge planlaması yapılır. Genellikle, robotlar iki nokta arasını doğrusal, dairesel, sinüzoidal veya değişik şekillerde takip eder. Bu yörünge şekilleri zamana bağlı olarak eklem açılarının veya kartezyen çerçevenin birer fonksiyonudur. Her ara nokta, ilk önce ana çerçeveye göre uç işlevcinin konumu ve yönelimi cinsinden tanımlanır. Daha sonra, her bir ara nokta, ters kinematik işleminin uygulanmasıyla eklem açılarına dönüştürülür. Bu iki nokta arası da seçilen bir yörünge planlama yöntemiyle  $n$  tane noktaya bölünür. Ara noktalar bütün eklemler tarafından aynı zamanda geçilmesine karşın her bir eklem kat edeceği mesafe aynı olmayacağından, hız ve ivmeleri farklılık gösterir. Dolayısıyla bir eklem hızı ve ivmesi bir başkasından bağımsızdır. Sonuç olarak robottaki eyleyiciler bu açılarla çalıştığı zaman arzu edilen yönelim ve konuma ulaşılır.

Robot manipülatörleri için Kartezyen ve eklem uzayı olmak üzere iki farklı yörünge planlaması yapılır. Eklem uzayında yörünge planlaması yapılırken üç veya daha yüksek dereceli polinomlar kullanılır. Örneğin, uç işlevci, başlangıç noktasından arzu edilen noktaya belli bir zaman aralığında gitsin. İlk olarak uç işlevcinin başlangıç ve hedef noktalarının konumu ve yönelimi eklem açıları cinsinden ters kinematik uygulanarak hesaplanır. Uç işlevcinin  $t_0$  anındaki başlangıç konumu  $\theta(0) = \theta_0$  ve  $t_f$  anındaki hedef konumu  $\theta(t_f) = \theta_f$  olsun. Bu durumda,  $t_0$  ile  $t_f$  arası üçüncü dereceden bir polinom vasıtasıyla  $n$  tane noktaya bölünür. Bu iki koşula ek olarak başlangıç ve bitiş hızları  $\dot{\theta}(0) = 0$  ve  $\dot{\theta}(t_f) = 0$  eklenir.

$$\theta(0) = \theta_0 \quad (5.1)$$

$$\theta(t_f) = \theta_f \quad (5.2)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (5.3)$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 0 \quad (5.4)$$

Yukarıdaki dört koşul, üçüncü dereceden bir polinomun katsayılarını bulmak için yeterlidir. Bu koşullar, zamana bağlı kübik bir yörünge oluşturan üçüncü dereceden polinom olarak Denklem 5.5'teki gibi ifade edilir.

$$\theta(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + s_3 t^3 \quad (5.5)$$

Bu yörüngedeki eklem hızları ve ivmeleri Denklem 5.5'in birinci ve ikinci dereceden türevleri alınarak bulunur.

$$\dot{\theta}(t) = s_1 + 2s_2 t + 3s_3 t^2 \quad (5.6)$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2s_2 + 6s_3 t \quad (5.7)$$

Denklem 5.1, Denklem 5.5'te yerine konursa, aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$s_0 = \theta(0), \quad (\theta(0) = s_0 + s_1 \cdot 0 + s_2 \cdot 0^2 + s_3 \cdot 0^3) \quad (5.8)$$

$$\theta(f) = \theta_f = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + s_3 t^3 \quad (5.9)$$

Denklem 5.3 ve Denklem 5.4, Denklem 5.6'da yerine konursa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

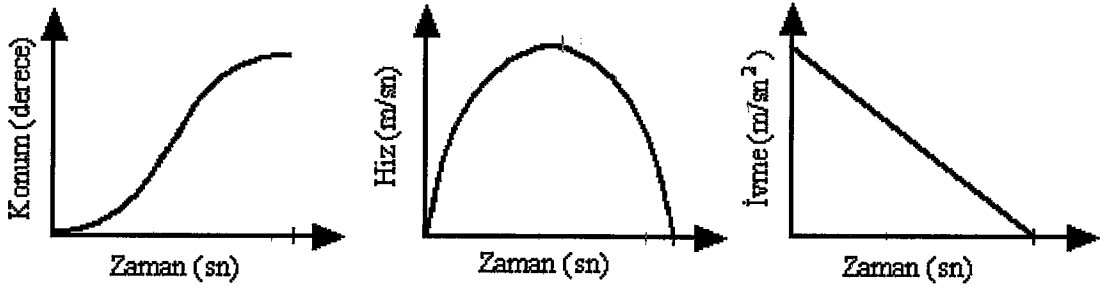
$$s_1 = 0, \quad (\dot{\theta}(0) = s_1 + 2s_2 \cdot 0 + 3s_3 \cdot 0^2 = 0) \quad (5.10)$$

$$\dot{\theta}(f) = s_1 + 2s_2 t + 3s_3 t^2 = 0 \quad (5.11)$$

Çıkarılan bu dört denklemden faydalanarak polinomun katsayıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$s_0 = \theta(0), \quad s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) \quad \text{ve} \quad s_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) \quad (5.12)$$

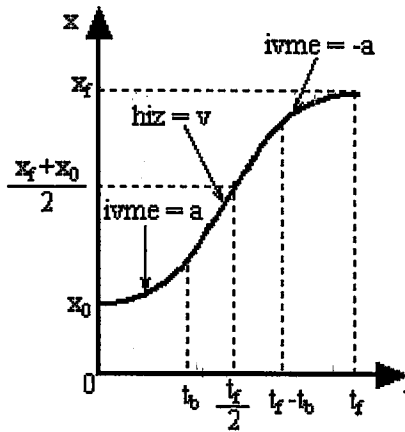
Bu katsayılardan faydalanarak, başlangıç ve bitiş hızları sıfır olan üçüncü dereceden kübik bir yörüngeye ait konum hız ve ivme grafiği şekil 5.17'deki gibi olur.



Şekil 5.17. Üçüncü dereceden kübik bir yörüngeye ait konum, hız ve ivme grafiği.

Bu çalışmadaki benzetim programında başlangıç ve bitiş hızları sıfır olan yedinci dereceden bir polinom kullanılarak yörünge planlaması gerçekleştirilmiştir.

Uç işlevcisinin izlediği başka bir yörünge yöntemi de parabolik kısımların yerleştirildiği doğrusal yörüngedir. Bu yörünge yönteminde,  $n$  serbestlik derecesine sahip robot eklemlerinin tamamı doğrusal bir yörünge takip etse dahi, uç işlevci iki nokta arasında doğrusal geçmez. Doğrusal yörüngede, hareketin başlangıcında ve bitişinde sürekli olmayan hız problemleriyle karşılaşılır. Bunu engellemek için yörünge başlangıç ve bitişine parabolik kısımlar eklenir. Parabolik bir yörüngede sabit ivmeli bir hareket kullanılarak, hızın sürekli ve pürüzsüz olması sağlanır. Şekil 5.18'de parabolik kısımlar eklenmiş doğrusal yörünge görülmektedir.



Şekil 5.18. Parabolik kısımlar eklenmiş doğrusal yörünge.

Şekil 5.18'de  $0-t_0$  ve  $t_f-t_0$  ile  $t_f$  arası doğrusal yörünge başlangıcına ve bitişine eklenmiş parabolik kısımlar,  $t_0$  ile  $t_f-t_0$  arası ise doğrusal bölgedir. Yeni oluşan bu

yörüngeye ait zamana bağlı konum hız ve ivme denklemleri Tablo 5.2'de verilmiştir.

**Tablo 5.2.** Doğrusal yörüngeye ait konum, hız ve ivme denklemleri.

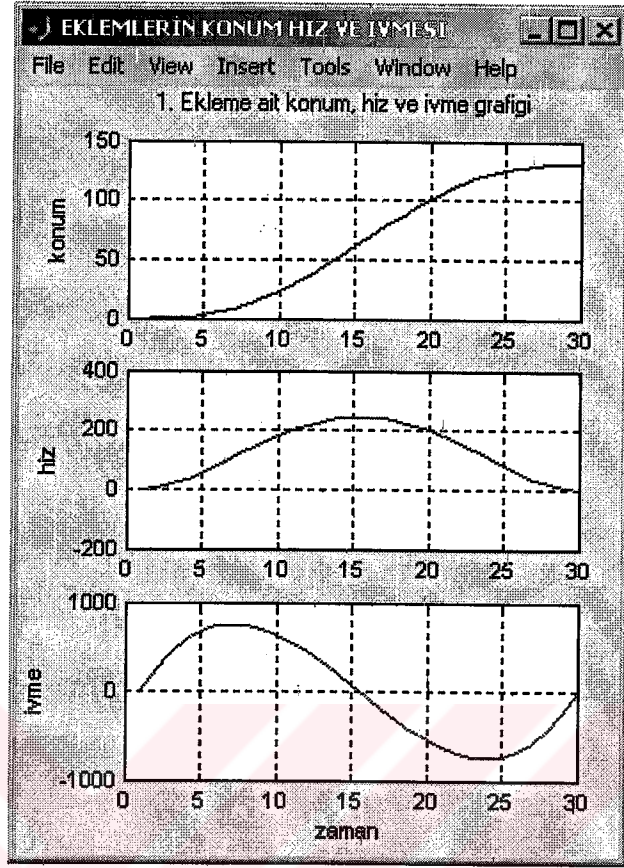
Zaman ( $t$ )	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$
$0 \leq t \leq t_b$	$x_0 + \frac{a}{2}t^2$	$At$	$a$
$t_b \leq t \leq t_f - t_b$	$vt + \frac{x_f + x_0 - vx_f}{2}$	$v$	$0$
$t_f - t_b \leq t \leq t_f$	$x_f - \frac{at_f^2}{2} + at_f t - \frac{a}{2}t^2$	$at_f - at$	$-a$

Tablo 5.2'de denklemlere ek olarak  $t_0 = 0$ ,  $t_f > 0$  ve  $t_b > 0$  kabulleriyle

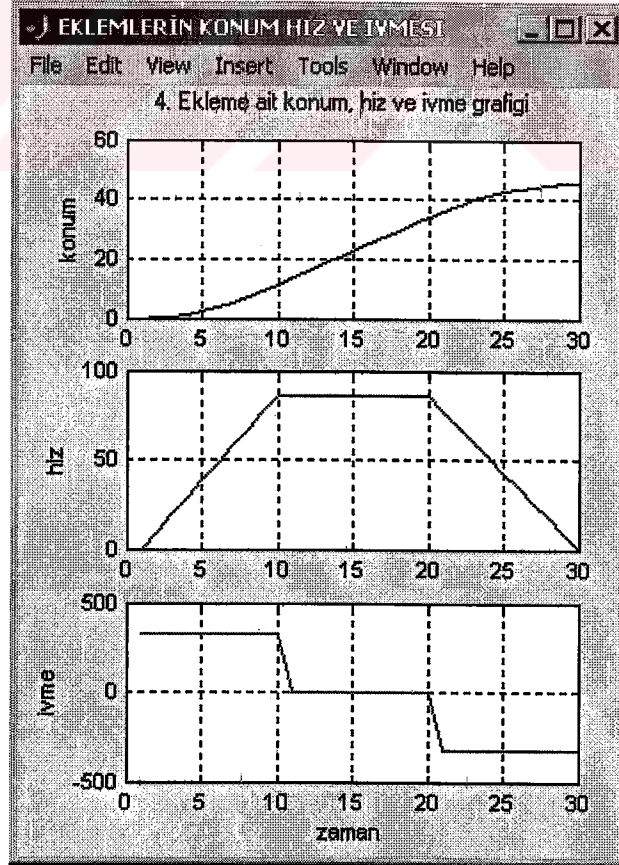
$$\frac{x_f - x_0}{v} < t_f \leq \frac{2(x_f - x_0)}{v} \text{ ve } v^2 \leq a(x_f - x_0) \text{ sınırlamalarının sağlanması gerekir.}$$

Şekil 5.16'da en sağdaki Yör. tuşu tıklandığında her bir ekleme ait konum, hız ve zaman grafikleri ekrana gelir. Şekil 5.19'da birinci ve dördüncü ekleme ait konum, hız ve ivme grafikleri görülmektedir. Dikkat edileceği gibi, Şekil 5.19.a'da birinci eklem eklem yörüngesinde, Şekil 5.18.9'de ise dördüncü eklem doğrusal yörüngede çalıştırılmıştır. Yör. menüsünden ayrıca, aşağıdaki özellikler de gerçekleştirilebilir.

1. Uç işlevcisinin konum, hız ve ivme grafiği,
2. Uç işlevcisinin yönelim ve konum bilgisini içeren  ${}^0T$  dönüşüm matrisi,
3. Ters kinematik uygulamasında kullanılan RKT, Euler ve sabit açı sistemleri.



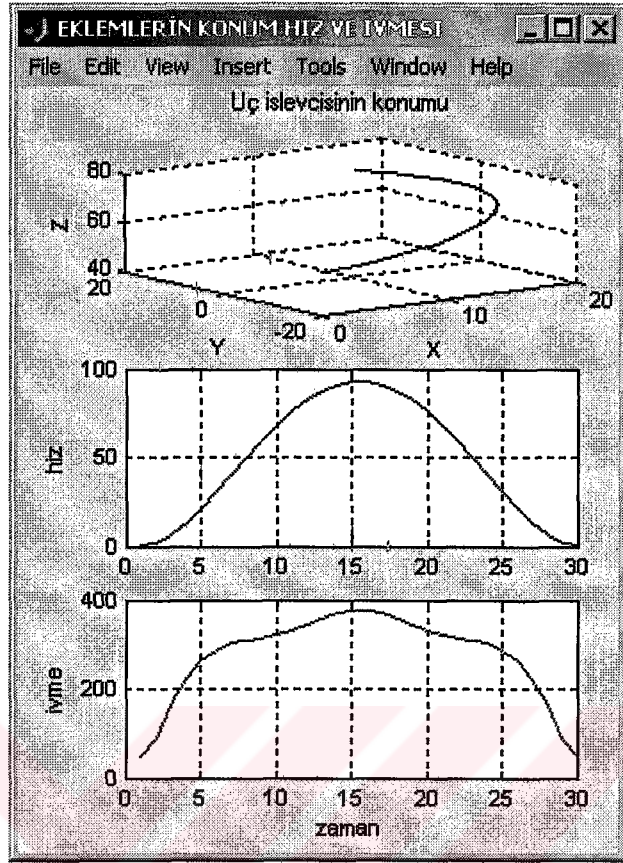
(a)



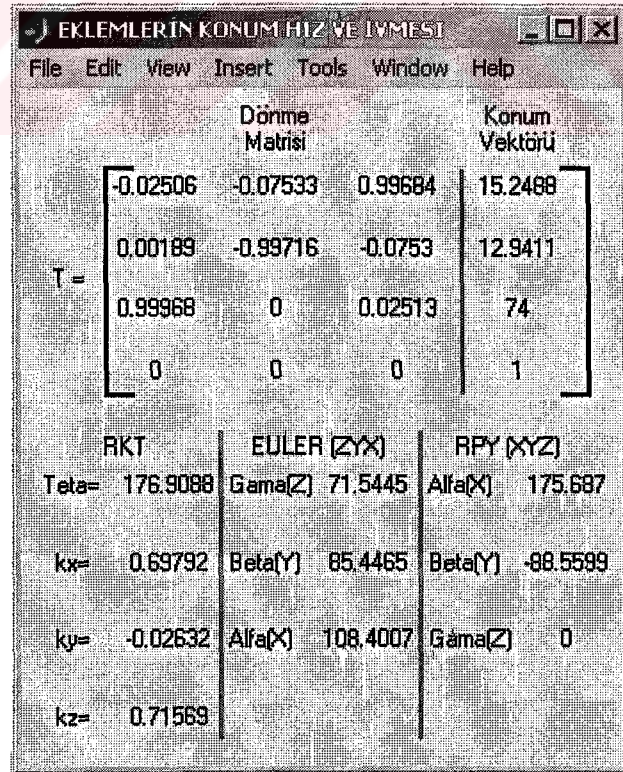
(b)

Şekil 5.19.a. Birinci eklem, b) dördüncü eklem için konum, hız ve ivme grafikleri.





(a)



(b)

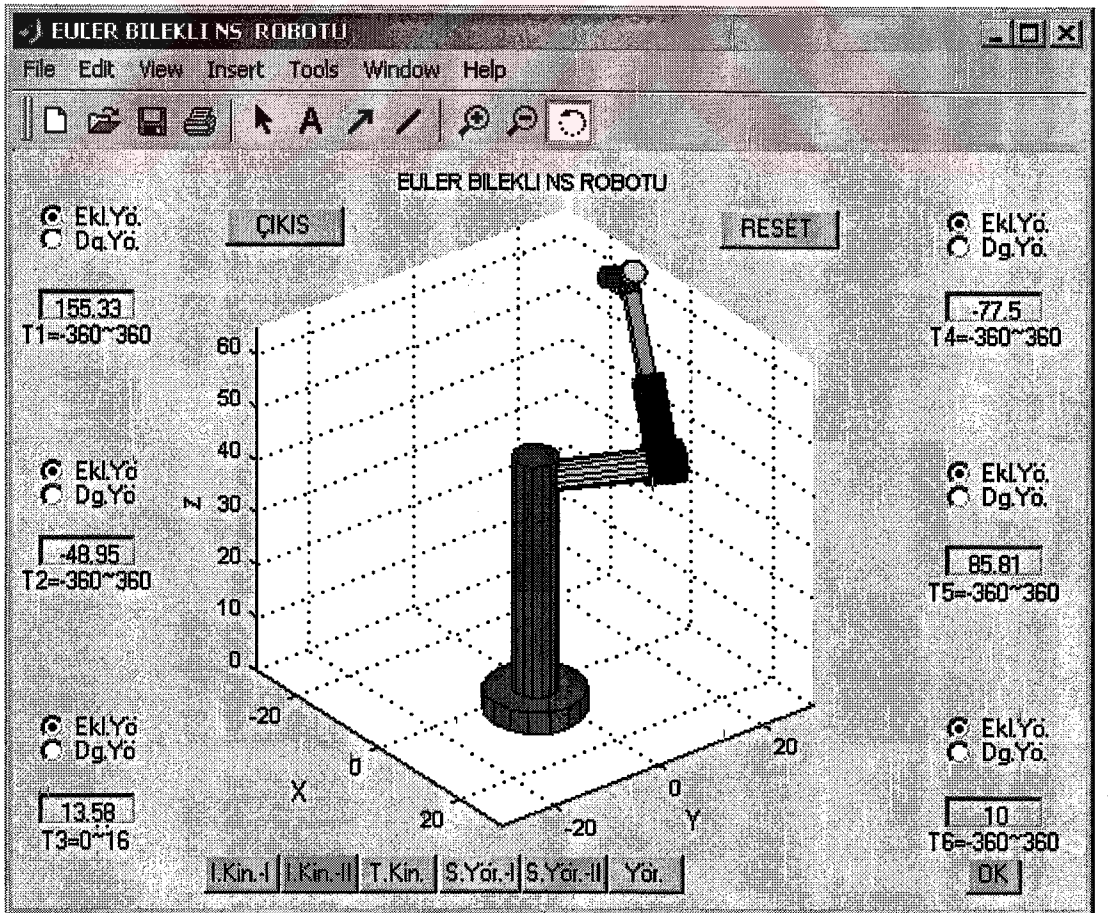
Şekil 5.20.a) Uç işlevcisinin konum, hız ve ivme grafiği. b) Uç işlevcisinin dönüşüm matrisi, RKT, Euler ve sabit açı sistemi.

Şekil 5.20'a da görüldüğü gibi eklemlerin bir kısmı doğrusal, bir kısmı ise eklemler yörüngesinde çalıştırılmasına karşın, uç işlevcisinin izlediği yörünge tamamen farklıdır. Şekil 5.20.b'de de uç işlevcisinin yönelim ve konum bilgisini içeren  ${}^0T$  dönüşüm matrisi ve ters kinematik uygulamasında kullanılan RKT, Euler ve sabit açı sistemi verileri görülmektedir.

Şekil 5.16'daki RESET tuşu tıklandığında robot çalıştırılan en son konumdan Şekil 5.15'de görüldüğü gibi başlangıç konumuna gelir. ÇIKIŞ tuşu tıklandığında ise ana menüye dönülür.

#### 5.4.2 İleri kinematik-II

Benzetim programı bu modda çalıştırıldığında ileri kinematik-I'in aksine bütün eklemler aynı anda hareket eder. Kullanıcı arayüzüne her eklem için klavyeden veri girmek amacıyla bir yazım kutusu konmuştur. Bu kutulara arzu edilen açılar



Şekil 5.21. NS robotunun farklı açı ve uzunluk değerleriyle çalıştırılması.



girildikten sonra OK tuşu tıklanır. Eklemlerin hareketi bitinceye kadar OK tuşu farklı bir renk alır. Kullanıcı bu moda istediği eklem açılarını arayüzden girip robot manipülatörünün hareketlerini daha detaylı inceleme fırsatı bulur. Bu farklılığın dışında, ileri Kinematik-I' de gerçekleştirilen bütün işlemler İleri Kinematik-II' de de gerçekleştirilebilir. Şekil 5.21'de görüldüğü gibi, NS robotunun eklemleri farklı açı ve uzunluk değerleri girilerek çalıştırılmıştır.

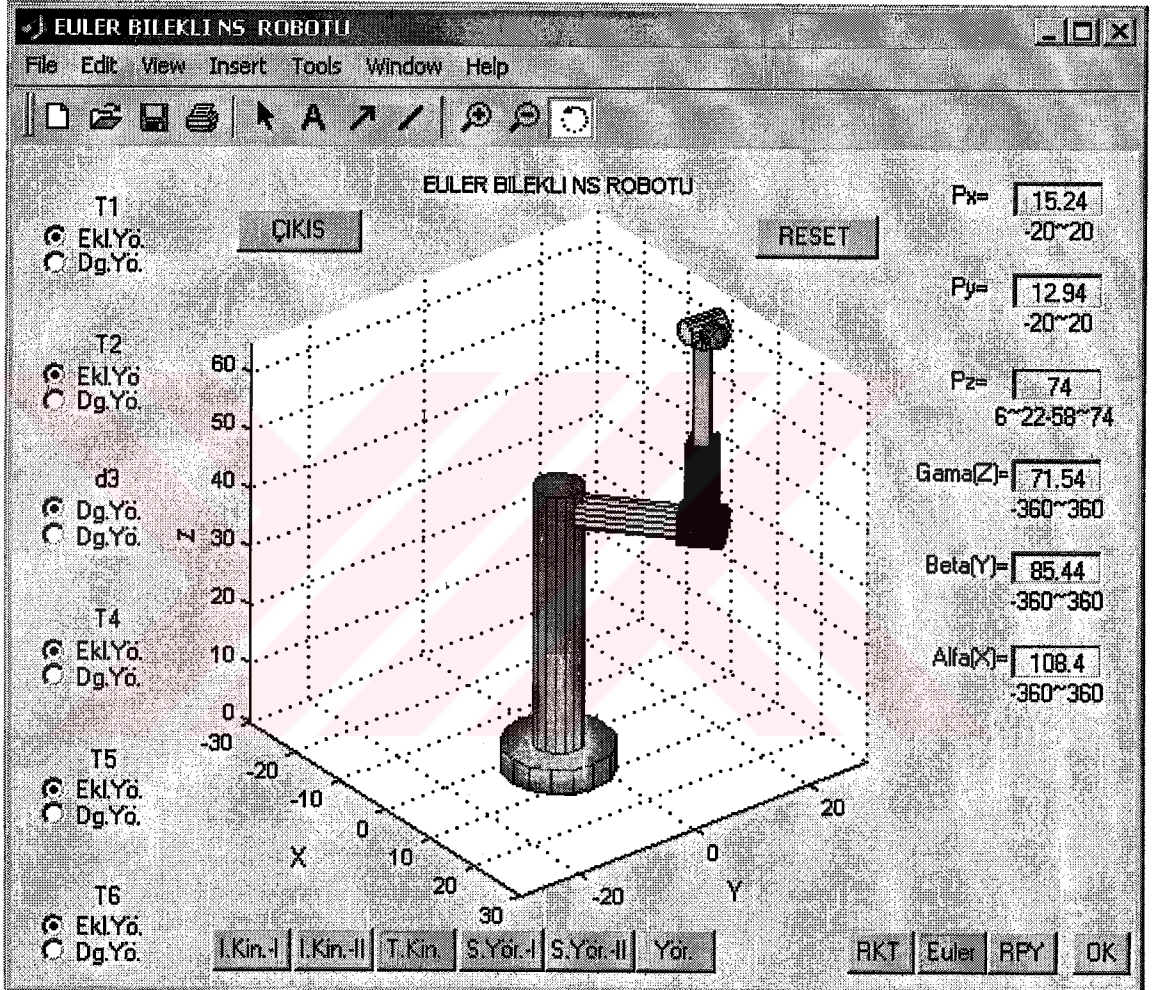
### 5.4.3. Ters kinematik

Benzetim programı, ters kinematik modunda çalıştırılırken uç işlevcisinin ana çerçeveye göre yönelim ve konum verilerini kullanarak, robotun bu yönelim ve konuma ulaşabilmesi için gerekli olan açı setlerini hesaplar. Benzetim programı daha sonra bu açı setlerini işleyerek robotun arzu edilen konum ve yönelime gitmesini sağlar. Uç işlevcisinin konumu üç boyutlu uzayda  $p_x$ ,  $p_y$  ve  $p_z$  koordinatlarıyla, yönelimi ise sabit, Euler ve RKT açı sistemlerinden birinin kullanılmasıyla bulunur.

Benzetim programıyla ters kinematik işlemi gerçekleştirmek için arayüz üzerinden T.Kin tuşu tıklanır. Bu durumda, ekranın sağ alt köşesinde RKT, Euler ve RPY tuşları belirir. Ters kinematik işlemi, her biri açı sistemini temsil eden bu üç tuşun sırayla tıklanmasıyla ayrı ayrı gerçekleştirilebilir. Euler açı sistemini kullanarak ters kinematik işlemi gerçekleştirmek için ileri kinematikten dört, beş ve altıncı eklemlere açı değerleri verilerek uç işlevcinin üç boyutlu uzayda arzu edilen yönelimi bulunur. Örneğin Şekil 5.16'daki konum ve yönelime ulaşmak için şekilde verilen açılarla robot çalıştırılır. Yör. menüsünden Yön. Seçeneği tıklanır. Bu durumda Şekil 5.20.b'deki tablo ekranda gözükür. Bu tabloda yer alan uygun yazım kutularına ileri kinematikten elde edilen veya arzu edilen açı seti girilir. İstenilen konumda ekranın sağ üst köşesinde  $p_x$ ,  $p_y$  ve  $p_z$  yazım kutularına girilip OK tuşu tıklanır. Bu durum Şekil 5.22'de görülmektedir.

Şekil 5.22'deki robotla Şekil 5.16'daki robotun konum ve yönelimlerinin aynı olduğu görülür. Dikgen robotların (SS-kartezyen, NN ve SN küresel robotlar gibi) dışında, ters kinematik işlem gerçekleştirilirken çalışma uzayında ileri kinematikle

ulaşılan her noktaya ulaşılamayabilir. Çalışma uzayındaki noktalara ters kinematik denklemlerin izin verdiği ölçüde ulaşılır. Arayüz üzerindeki sınırların dışında kartezyen koordinat değeri girilmemelidir. Girildiği takdirde robot varsayılan konum değerlerini veya son girilen değerleri çalıştırır. NS robotu için kartezyen koordinat aralığı  $p_x=p_y=-20\sim20$  ve  $p_z=6\sim22\sim58\sim74$  olduğu Şekil 5.22’de görölmektedir.



Şekil 5.22. Euler açı sistemiyle ters kinematik uygulaması.

#### 5.4.4. Sürekli yörünge-I

Benzetim programında, sürekli yörünge-I modunda çalışmak için S.Yör.-I tuşu tıklanır. Benzetim programı bu modda birden fazla ileri kinematik açı setini ardına çalıştırır. Bu işlem arayüzden girilen 10 adet açı seti olabileceği gibi harici bir ortamdan gönderilen formatlı bilgi de olabilir. Arayüzde, S.Yör.-I tuşu tıklanığında ‘Tablodan oku’ ve ‘Dosyadan oku’ Şeklinde ekranın sol alt köşesinde

iki seçenek belirir. Araç kutusu, bu seçeneklerden ilkinde en fazla 10 adet açı seti girilerek çalıştırılmasına izin verir. Şekil 5.23'de 'Tablodan oku' seçeneğinin tıklanması sonucu ekrana gelen figür görülmektedir. 1, 2, 3 ... Şeklinde sıralanan satırların her birinde altı eklemli robotun eklem açılarının girileceği yazım kutuları bulunur. Yazım kutularına veri girerken onuncu satırın altında yer alan her bir eklem açısı veya uzunluk sınırlarına dikkat edilmesi gerekir. Benzetim programı bu

	1.Eklem	2.Eklem	3.Eklem	4.Eklem	5.Eklem	6.Eklem
1	350	10	15	30	100	80
2	0	75	11	80	225	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0

-360~360 -360~360 0~16 -360~360 -360~360 -360~360

Adım Sayısı

Döngü Sayısı

DK

Tablodan oku

Dosyadan oku

Şekil 5.23. Araç kutusunun sürekli yörünge-I modunda çalıştırılması.

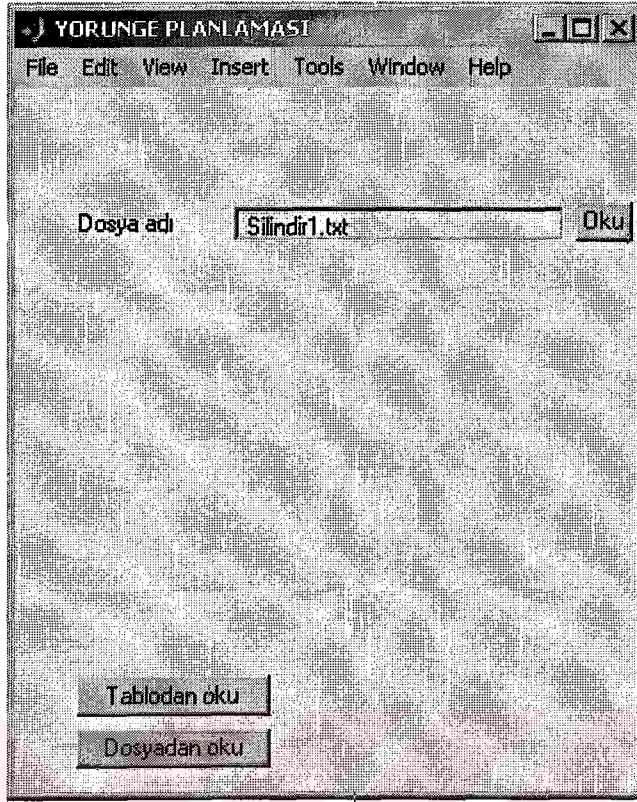
modda çalıştırılırken bütün satırlara veri girilmek zorunda değildir. Eğer ilk iki satır çalıştırılacaksa 'Adım Sayısı' kutusuna 2 rakamının girilmesi yeterlidir. Bu kutu 10 rakamından büyük bir değer girilmesine izin vermemektedir. Kutulara girilen bu veriler bir çok kez ardına çalıştırılabilir. Bunun için 'Döngü Sayısı' kutusuna döngü sayısının girilmesi gereklidir. Şekil 5.23'de ilk iki satırdaki yazım kutularına girilen açı değerlerinin 5 kez çalıştırılacağı görülmektedir.



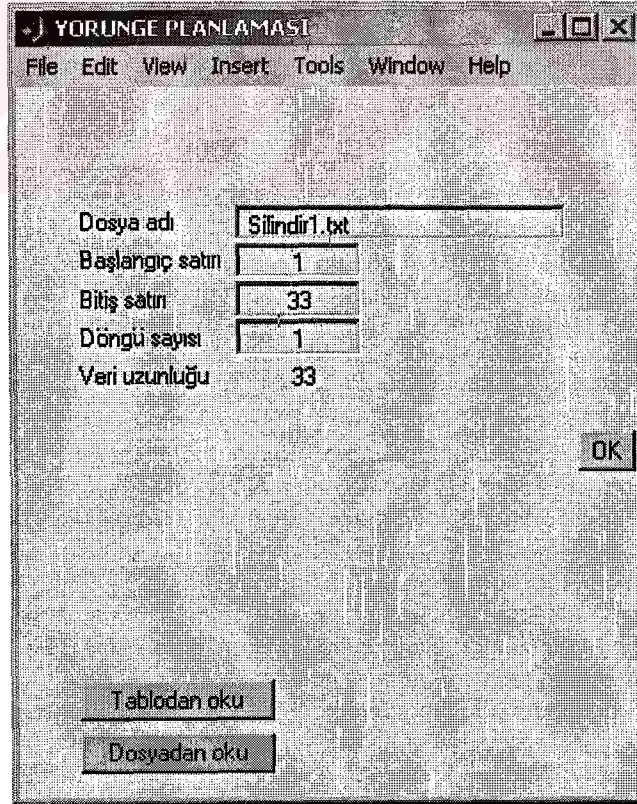
İkinci seçenek olan 'Dosyadan oku' tıkladığı zaman harici ortamdan gönderilen formatlı bilgi araç kutusunda çalıştırılır. İnternet veya sabit disk üzerinden diğer modlarda çalıştırılmayacak kadar uzun olan açu setleri bu modda kolaylıkla çalıştırılabilir. Robotun uç işlevcisine takılan özel amaçlı aletlerle birçok farklı şekillerde (dairesel, karesel veya parabolik vs.) yörünge tanımlanıp delme, kesme, boyama vs. işlemleri gerçekleştirilebilir.

'Dosyadan oku' tuşunun tıklanmasıyla Şekil 5.24.a'dki tablo ekrana gelir. Bu tablodaki Dosya adının girileceği kutuya çalıştırılacak txt uzantılı dosya adı girilip OK tuşu tıklanınca ??? .txt dosyasındaki veriler bir matrise yüklenir. Bu arada aynı figür üzerinde Şekil 5.24.b'de görüldüğü gibi okunan dosyadaki veri uzunluğunun yanı sıra okunacak verinin başlangıç, bitiş ve döngü sayısı da görüntülenir. Okunacak verinin başlangıç, bitiş ve döngü sayısı uygun yazım kutularına girildikten sonra OK tuşu tıklanarak robotun bu verileri çalıştırması sağlanır. Ayrıca, formatlı bilgi içeren '??? .txt' uzantılı bir dosyaya eklem açıları arasında en az bir birim boşluk olacak şekilde veri girilmelidir. Şekil 5.25'de bu durum açık bir şekilde görülmektedir.

Şekil 5.24, 'Silindir1.txt' adlı dosyanın nasıl çalıştırıldığını göstermektedir. 'Silindir1.txt' dosyasına, NS robotuna bir silindir çizdirecek şekilde veri girilmiştir. Şekil 5.26'da NS robotuna çizdirilen silindir görülmektedir.

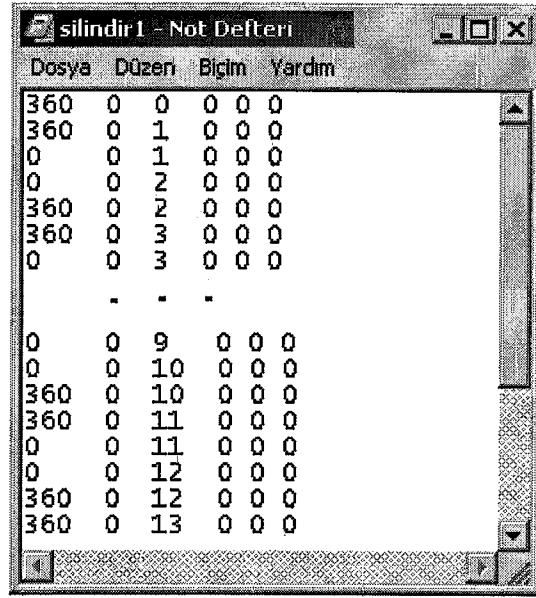


(a)

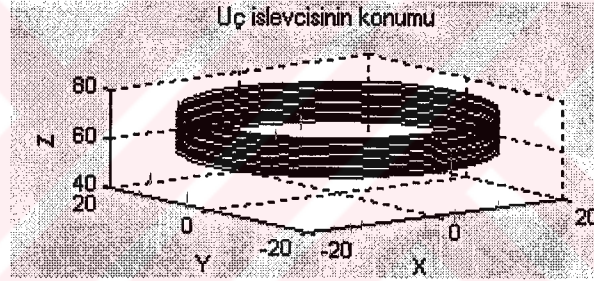


(b)

Şekil 5.24. Dosyadan formatlı veri okuma.



Şekil 5.25. Silindir1.txt dosyasına formatlı bilgi girilmesi.

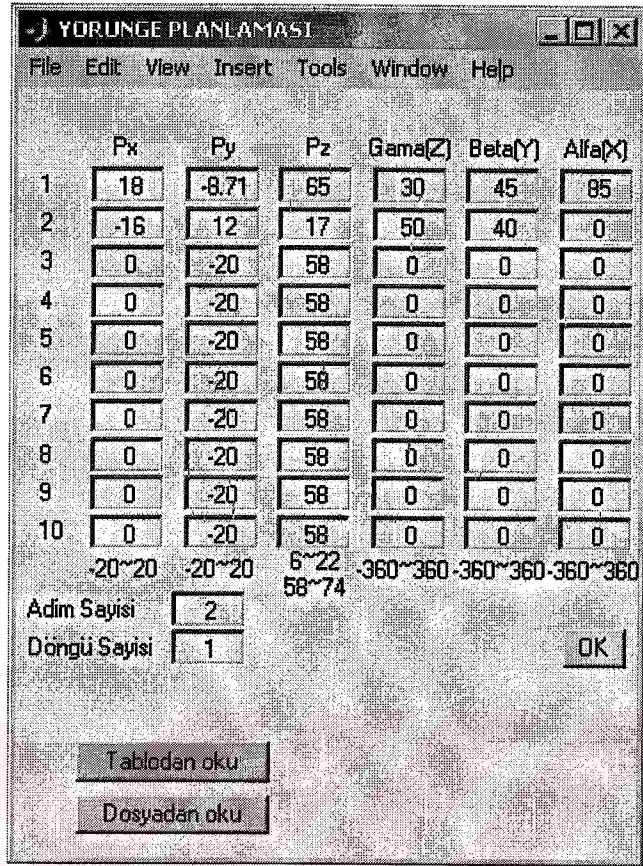


Şekil 5.26. NS robotuna bir silindirin çizdirilmesi.

#### 5.4.5. Sürekli yörünge-II

Benzetim programında, sürekli yörünge-II modunda çalışmak için S.Yör.-II tuşu tıklanır. Araç kutusu bu modda ileri kinematikte olduğu gibi birden fazla ters kinematik açı setini ardı ardına çalıştırır. Arayüzde, S.Yör.-II tuşu tıklandığında ekranda 'Tablodan oku' ve 'Dosyadan oku' şeklinde iki seçenek görüntülenir. Şekil 5.27'de 'Tablodan oku' seçeneğinin tıklanması sonucu ekrana gelen figür görülmektedir. Şekil 5.27'deki tablonun 1. satırında yer alan ilk üç kutuya üç boyutlu uzayda robotun gideceği  $p_x$ ,  $p_y$  ve  $p_z$  koordinatları, son üç kutuya ise arzu edilen yönelimi sağlayacak Euler açı seti girilir.





Şekil 5.27. Araç kutusunun sürekli yörünge-II modunda çalıştırılması.

İkinci seçenek olan 'Dosyadan oku' tıklandığı zaman harici ortamdan gönderilen formatlı ters kinematik verileri olan kartezyen koordinatlar ve Euler açı sistemine göre tanımlanmış yönelim açı seti araç kutusunda çalıştırılır. Bu aşamada sürekli yörünge-I'de ki adımlar tekrar edilir.

## 5.5. Sonuçlar

Bu bölümde onaltısı Euler ve onaltısı da eklem kaçıklılık bilekli olmak üzere 32 adet robotun canlandırılmasını gerçekleştiren robot benzetim programı yapıldı. Bu benzetim programıyla robotların ileri ve ters kinematikleri, robotların uç işlevcilerinin hızları ivmeleri ve konumları iki farklı yörünge planlama yöntemi kullanılarak gerçekleştirilir.

Gerçekleştirilen çevrimdışı benzetim programı hem eğitim hem de endüstriyel amaçlı kullanılabilir. Ayrıca, bu program vasıtasıyla endüstriyel robotlar gerçek ortamda

çalıştırılmadan önce sanal ortamda benzetimi gerçekleştirilerek çıkabilecek problemler önceden tespit edilip gerekli önlemler alınabilir.

Bu benzetim programı kullanılarak robotlarla gerçek zamanlı haberleşme kurulup fiziksel uygulamalar gerçekleştirilebilir.



## BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın birinci bölümünde, iki farklı uzayda altı robot kinematik modelleme yöntemi karşılaştırılarak, bu yöntemler arasındaki farklılıkları görmek için PUMA-560 robotunun her bir yöntem için kinematik modeli çıkarılmıştır. Bütün bu yöntemlere kinematik açıdan bakıldığında aşağıdaki sonuçlara varılmıştır.

1. Kartezyen uzay içinde incelenen üssel yöntem, robotun ileri yön kinematiğini iki aşamada çıkarır. Bu yöntem trigonometrik ifadeler kullanmak yerine, işlenmesi daha basit olan üssel dönme matris tabanlı cebir kullanır.
2. TPS yöntemi bütün robot hareketlerini modelleyerek, küçük hata değişkenleri içermek suretiyle robotun tekil noktalardan geçmesini engeller.
3. Alışkın olunmayan matematik operatörleri kullanan kartonyum yöntemi bilgisayar ortamında daha hızlı çalışmasına karşın, pratikte daha az tercih edilmektedir.
4. İleri yön kinematiğini doğrudan çıkararak ve daha basit gösterime sahip olan D-H yöntemi, en çok tercih edilen yöntemdir.

İkinci bölümde on altı adet robot manipülatörü, beceri ölçeği, vaziyet numarası ve yeni yerel başarı göstergesi olmak üzere üç farklı yerel ve yapısal uzunluk göstergesi, evrensel vaziyet göstergesi ve yeni evrensel başarı göstergesi olmak üzere üç farklı evrensel başarı göstergesine göre karşılaştırıldı. Bu bölümde aşağıdaki sonuçlara varılmıştır.

1. Beceri ölçeği vaziyet numarası ve yeni yerel başarı göstergeleri yerel başarı göstergeleridir ve bu göstergeler, robot manipülatörlerinin bir birleriyle

karşılaştırılmasında kesinlikle kullanılamaz, sadece aynı robotun geniş çaplı hareket yapma veriminin iyileştirilmesinde bir ölçü olabilir.

2. Yapısal uzunluk göstergesi, evrensel vaziyet göstergesi ve yeni evrensel başarı göstergesi, evrensel başarı göstergeleridir. Bu başarı göstergeleri robotların birbirleriyle karşılaştırılmasında kullanılırlar.
3. Her üç başarı göstergesinde de dönel eklem sayısı fazla, dikgen düzenleme ve küresel çalışma uzayına sahip olan robot manipülatörlerinin daha iyi tasarım kriterlerine ve geniş çaplı hareket yapabilme becerisine sahip olduğu görülmüştür.
4. Prizmatik eklem sayısı fazla olan robot manipülatörlerinin geniş çaplı hareket yapabilme becerisinin sınırlı olduğu görülmüştür.
5. Yeni yerel başarı göstergesi robotların geçmemesi gereken tekil noktaları diğer iki yerel başarı göstergesinde olduğu gibi belirgin bir şekilde göstermemektedir.
6. Robotların yerel başarı göstergelerine göre eniyilenmesi sonucunda bağ uzunlukları prizmatik eklemlerde her üç başarı göstergesine göre de 2 civarında çıkarken, dönel eklemlerin bağ uzunlukları yeni yerel başarı göstergesi ve beceri ölçeğinde 2 ile 1.6529, vaziyet numarasında ise 2 ile 0.5 arasında çıkmaktadır.

Üçüncü bölümde temel on altı adet robot manipülatörüne Euler ve eklem kaçıklıklı bilek eklenerek ters kinematikleri çözüldü. Bu bölümde aşağıdaki sonuçlara varılmıştır.

1. Üç ekleminde bir noktada kesiştiği Euler bileğinin eklendiği robot manipülatörleri sınırlı miktarda yük kaldırma kapasitesine sahip olduğundan daha fazla yük kapasitesi gerektiren endüstriyel uygulamalarda eklem kaçıklıklı bilekli robotlar kullanılır.
2. Euler bileğinin üç eklemi de bir noktada kesiştiğinden bu bileğin eklendiği 16 adet robot manipülatörünün ters kinematiği tamamen analitik olarak çözülmüştür.

3. Eklem kaçıklıklı bilekli endüstriyel robotların son üç ekleminde a ve d değişkenleri bulunduğundan, bu robot manipülatörlerinin bir kısmı tamamen analitik, bir kısmı da sayısal olarak çözülmüştür.
4. Bir robot manipülatörünün hareket edebilmesi için gerekli olan ters kinematik denklemler işlemcide çalıştığından, tamamen kesin sonuç üreten analitik çözüme ait denklemler bilgisayar ortamında daha hızlı çalışır.
5. Sayısal olarak eklem açılarını bulmak için yazılan algoritmanın yapısı, ters kinematik denklemlerin bilgisayar ortamındaki çalışma hızını, dolayısıyla robot eklemlerinin çalışma doğrudan etkiler.
6. Euler bilekli endüstriyel robotlarda en fazla 16 farklı ters kinematik çözüm vardır.
7. Üç eklemin bir noktada kesişmemesi, eklem kaçıklıklı bileklerde ters kinematik sanal çözüm sayısının artmasına neden olur.
8. Sayısal çözümün uygulandığı robot manipülatörlerinde çözüm sayısı azalmaktadır.
9. Prizmatik eklemler çözüm sayısının azalmasına dönel eklemlerse artmasına neden olmaktadır. Ayrıca, dönel eklemlerden oluşan robotlarda fiziksel çözüm sayısının fazla olması, üç boyutlu uzayda bir noktaya pek çok farklı şekilde ulaşma imkanı sağlar.
10. Ters kinematik problem çözümünde elde edilen denklemlerin sadece bir kısmı, robotun kendi fiziksel yapısına uygun olarak hareket etmesini sağlayan gerçek çözümler, diğerleri ise sanal çözümlerdir.
11. Euler bilekli robotların ters kinematik denklemlerinde konum ile yönelim bir birinden ayrı gerçekleştiğinden bu robotlar için her zaman bir analitik çözüm vardır. Buna rağmen eklem kaçıklıklı bilekli robotların ters kinematik

denklemlerinde konum ile yönelim iç içe olduğundan her zaman analitik çözüm gerçekleşmez.

12. Euler bilekli robotların ters kinematığında en fazla üç bilinmeyenli üç denklem olduğundan analitik olarak çözülürken, eklem kaçıklıklı bilekli robotların ters kinematığında ise üç denkleme karşılık üçten fazla bilinmeyen olduğundan analitik çözümleri oldukça güç veya yoktur.

13. Euler bilekli robotlarda, ters kinematikle çalışma uzayında hemen hemen bütün noktalara ulaşılırken, eklem kaçıklıklı bileklerde çalışma uzayı genişlemesine karşın bütün noktalara ulaşamaz.

14. Euler veya eklem kaçıklıklı bilekli robotlarda arka arkaya gelen üç eklem bir birine paralelse, bu robotların ters kinematığının analitik çözümü vardır.

15. Eklem kaçıklıklı bilekli dikgen robotların ters kinematığı sayısal olarak çözülür.

Dördüncü bölümde üç eklemlili onaltı adet endüstriyel robotun dinamik modeli Lagrange-Euler yöntemi kullanılarak çıkarılmıştır. Bu bölümde aşağıdaki sonuçlara varılmıştır.

1. Enerji ilişkilerinden faydalanarak bir robotun dinamik modelini çıkararak Lagrange Euler yöntemi durum uzayı değişkenlerini kullanan kontrol algoritmaları için uygundur.

2. Dinamik modelin çıkarılmasında kullanılan matris işlemlerinin daha kolay anlaşılmasından dolayı Lagrange-Euler yöntemi tercih edilmiştir.

3. Bir robotta prizmatik eklem sayısının artması dinamik modeli oluşturan denklemlerin daha basit olmasına neden olur.

Beşinci bölümde on altısı Eluer ve on altısı da eklem kaçıklıklı bilekli olmak üzere otuz iki adet robotun canlandırılmasını gerçekleştiren robot benzetim programı yapıldı.

1. Bu benzetim programıyla robotların ileri ve ters kinematikleri, robotların uç işlevcilerinin hızları ivmeleri ve konumları iki farklı yörünge planlama yöntemi kullanılarak gerçekleştirilir.
2. Gerçekleştirilen çevrimdışı benzetim programı hem eğitim hem de endüstriyel amaçlı kullanılabilir.
3. Bu program vasıtasıyla endüstriyel robotlar gerçek ortamda çalıştırılmadan önce sanal ortamda benzetimi gerçekleştirilerek çıkabilecek problemler önceden tespit edilip gerekli önlemler alınabilir.

Bu konuyla ilgili gelecekte yapılabilecek çalışmalar şu şekilde sıralanabilir.

1. Bu çalışmada D-H yöntemi kullanılarak temel endüstriyel robotların çalışma uzaylarının eniyilenmesi, ileri ve ters kinematikleri incelendi. Aynı işlemler birinci bölümde anlatılan diğer robot kinematik modelleme yöntemleri kullanılarak gerçekleştirilerek, bu şekilde daha genel bir karşılaştırma yapılabilir.
2. Günümüze kadar önceden her hangi bir robot düzenleşiminin kapalı formda çözümlü çözülemeyeceği bilinmemektedir. Bu konuda robotların ters kinematiğinin kapalı formda çözülebilme kriteri üzerine bir çalışma gerçekleştirilebilir.
3. En az enerjiyle maksimum hareket yapabilme kabiliyetini elde etmek için robotların dinamik modelleri kullanılarak robot bağlarının kütlese eniyilenmesi gerçekleştirilebilir.
4. Dördüncü bölümde elde edilen dinamik denklemlerden faydalanarak robotların dinamik kontrolü, değişik kontrol algoritmaları uygulanarak gerçekleştirilebilir.

5. Benzetim programına robotların dinamik analizlerinin gerçekleştirildiği yeni bir araç kutusu eklenebilir.
6. Gerçekleştirilen robot araç kutusu değişik yazılım programlarıyla (C++, visual basic vs.) gerçekleştirilebilir.
7. Benzetim programı kullanılarak bir ara birim vasıtasıyla robotlarla gerçek zamanlı haberleşme kurulup fiziksel uygulamalar gerçekleştirilebilir.





## KAYNAKLAR

- [1] KRISHNA and GUPTA, 1997. *Mechanics and Control of Robotics*. Mechanical Engineering Series, University of Illinois, Chicago.
- [2] CRAIG, J. J., 1989. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, USA.
- [3] DENAVIT, J., and HARTENBERG, R. S., 1955. A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. *ASME J. Appl. Mechanics*, pp. 215-221.
- [4] WU, C. H., and PAUL, R. P., 1982. Resolved Motion Force Control of Robot Manipulators. pp, 266-275.
- [5] ÖZGÖREN, M. K., 1987. Application of Exponential Rotation Matrices to the Kinematic Analysis of Manipulators. *Proceeding Seventh World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. Spain.
- [6] BALKAN, T., and ÖZGÖREN, M.K., 1999. A Method of Inverse Kinematics Solution Including Singular and Multiple Configurations for a Class of Robotic Manipulators. *Mechanism and Machine Theory*.
- [7] GUPTA, K. C., 1986. Kinematic Analysis of Manipulators Using Zero Reference Position Description. *International Journal of Robotics Research*.
- [8] ZHUANG, Z., 1992. A Complete and Parametrically Continuous Kinematic Model for Robot Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 8, No. 4.
- [9] MOORING, B. M., ROTH, Z. S., and DRIELS, M. R., 1991. *Fundamentals of Manipulators Calibration*. New York.
- [10] HOLLERBACH, J. M., 1988. A Survey of Kinematic Calibration. In O Khatib, J. J. Craig, and T. Lozano-Perez, Eds., *Robotics Review*. Cambridge, MA:MIT Press. pp.208-242.
- [11] EVERETT, L. J., DRIELS, M., and Mooring, B.W., 1987. Kinematic Modelling for Robot Calibration. In *Proc. IEEE IN. Conf. Robotics Automat.* pp. 183-189.
- [12] ZHUANG, H., 1989. *Kinematic Modelling, Identification and Compensation of Robot Manipulators*. Ph.D. Dissertation, Filorida Atlantic Univ., Boca Raton.

- [13] ROBERTS, K.S., 1988. A New Representation for A Line. In Proc. Int. Conf. Comput. Vision Pattern Recog. pp. 635-640.
- [14] PAUL, R. P., 1981. Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control. Cambridge, MA: MIT Press.
- [15] BOTTEMA, O., and ROTH, B., 1979. Theoretical Kinematics. Dover, New York.
- [16] BLASCHKE, W., 1982. Gesammelte Werke. Essen: Thales-Verlag.
- [17] YANG, A. T., and FREUDENSTEIN, F., 1964. Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms. Tran. ASME, J. Appl. Mechanics, Vol. 31, pp. 300-308.
- [18] HAMILTON, W. R., 1869. Elements of Quaternions. Vol. I and II. Newyork Chelsea
- [19] PERWIN, E., and WEBB, J. A., 1982. Quaternions in Vision and Robotics. Dept. Comput. Sci. Carnegie-Mellon Univ. Tech. Rep.
- [20] TAYLOR, R. H., 1979. Planning and Execution of Stright Line Manipulators Trajectories. IBM J. Res. Development. Vol. 23, No. 4, pp. 424-436
- [21] WOLOVICH, W. A., 1995. Robotics: Basic Analysis and Design. Brown University.
- [22] HUANG, B, and MILENKOVIC, V., 1983. Kinematics of Major Robot Linkages. Proc. 13<sup>th</sup> International Symposium on Industrial Robots. Robotics International of SME, vol.12, pp. 16-31 to 16-47.
- [23] BINGÜL, Z., 2000. Robot Tekniği Ders Notları. Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mekatronik Mühendisliği.Kocaeli.
- [24] ANG, M. H., WEI, L., and YONG, L. S., 2000. An Industrial Application of Control of Dynamic Behaviour of Robots-A Walk-Through Programmed Welding Robot. Proceedings of the IEEE, International Conference on Robotics and Automation. pp. 2352-2357. San Francisco.
- [25] ASPRAGATHOS, NICHOLAS, A., and DIMITROS, J. K., 1998. A Comparative Study of Three Methods for Robot Kinematics. IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics. Vol. 28, No. 2.
- [26] ROTH, B., 1975. Performance Evolution of Manipulators from A Kinematic View Point. NBS Special Publication. pp.39-61.

- [27] SHIMANO, B.E., and ROTH, B., 1976. Ranges of Motion of Manipulators. Proc. CISM-IFTOMM Symp. Theory Pract. Robot Manipulators. pp.18-27
- [28] TSAI, Y. C., and SONI, A. H., 1981. Accessible Region and synthesis of robot arms. ASME J. Mechanical Design. pp. 803-811.
- [29] GUPTA, K. C., and ROTH, B., 1982 "Design Consideration for Manipulator Workspace. ASME Journal of Mechanism, Transmission and Automation in Design. Vol. 104, pp. 704-711.
- [30] YANG, D. C. H., and LEE, T. W., 1982. Optimization of the Manipulator Workspace. Ed. W. J. Bock. Robotic Research and application. ASME Book No.H00236.
- [31] YANG, D. C. H., and LEE, T. W., 1983. On the workspace of Mechanical Manipulator. ASME J. Mechanism, Transmission and Automation in Design. pp.62-70.
- [32] YANG, D. C. H., and LEE, T. W., 1984. Heuristic Optimization In the Design of Manipulator Workspace . IEEE Trans. On Systems. Man. and Cyber.
- [33] KOHLI, D., and SPANOS, J., 1985. Workspace Analysis of Mechanical Manipulators Using Polynomial Discriminants. ASME Journal of Mechanism , Transmission and Automation in Design. Vol.107, No. 2, pp. 209-215.
- [34] YANG, D. C. H. and LAI, Z. C., 1985. On the Dexterity of Robotic Manipulators-Service Angles. ASME Journal of Mechanism, Transmission and Automation in Design. Vol.107, pp. 262-270.
- [35] LIN, C. C. D., and FREUDENSTEIN, F., 1986. Optimization of the Workspace of A Three-Link Turning-Pair Connected Robot Arm. International Journal of Robotic research, Vol. 5, No.2, pp.104-111.
- [36] BAJPAI, A., and ROTH, B., 1986. Workspace and Mobility of Closed-Loop Manipulator. The International Journal of Robotics Research, Vol. 5, pp. 131-142.
- [37] CWIKALA, M., and LEE, T. W., 1989. The Optimum Kinematic Design of a Spherical Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator. ASME Journal of Mechanism, Transmission and Automation in Design, Vol. 111, pp. 202-207.
- [38] KUMAR, A. and PATEL, M. S., 1986. Mapping the Manipulator Workspace Using Interactive Computer Graphics. The International Journal of Robotics Research, Vol. 5, pp. 122-130.

- [39] KUMAR, A., and WALDRON, K. J., 1980. The dexterous workspace. Design Engineering Tech. Conf. ASME, pp.80-Det-108.
- [40] KUMAR, A., and WALDRON, K. J., 1981. The Workspace of Mechanical Manipulators ASME J. Mechanical Design, pp.665-672.
- [41] GOSSELIN, M. C., and ANGELES, J., 1991. A Global Performance Index for the Kinematic Optimization of Robotic Manipulators. Journal of Mechanical Design, Vol. 113, pp. 220–223.
- [42] PAUL, R. P., and STEVENSON, C. N., 1983. Kinematics of Robot Wrists. The International Journal of Robotics Research. pp. 31-38.
- [43] FORSYTHE, G. E., and MOLER, C. B. 1967 Computer Solution of Linear Algebraic Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hole.
- [44] SALISBURY, J. K., and CRAIG, J. J., 1982. Articulated Hands: Force Control and Kinematic Issues. The International Journal of Robotics Research. pp.4-17.
- [45] ANGELES, J., and ROJAS, A. A., 1987. Manipulator Inverse Kinematics Via Condition Number Minimization and Continuation. The International Journal of Robotics and Automation. pp.61-69.
- [46] VIJAYKUMAR, R., WALDRON, K.J., and Angeles, M. J., 1986. Geometric Optimization of Serial Chain Manipulator Structures for Working Volume and Dexterity. The International Journal of Robotics Research, Vol. 5, No. 2, pp. 91–103.
- [47] VIJAYKUMAR, R., 1985. Robot Manipulators-Workspace and Geometric Dexterity. Master Thesis, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- [48] ABDERRAHIM, M., and WHITTAKER, A.R., 2000. Kinematic Model Identification of Industrial manipulators. Robotics and Computer Integrated Manufacturing. pp. 1-8.
- [49] New River Kinematics Company, 2002. RobotAsist Tool Box ,USA.
- [50] WANG L. C. T, and CHEN, C. C., 1991. A Combined Optimization Method for Solving the Inverse Kinematics Problem of Mechanical Manipulators. IEEE Transaction on Robotics and Automation, Vol. 7 No 4.
- [51] ASADA, H., and SLOTINE, J. J. E., 1986. Robot Analysis and Control. Wiley-Interscience Publication, USA.

- [52] WOLOVICH, W. A. , 1987. Robotics: Basic Analysis and Design. CBS College Publishing, USA.
- [53] SCHILLING, R. J., 1990. Fundamentals of Robotics. Prentice Hall, USA
- [54] KERROW, F. J. M., 1991. Introduction to Robotics. Addison-Wesley Publishing, USA.
- [55] UICKER, J. J., and DENAVIT J. J., and HARTENBERG, R.S., 1954. An Iterative Method for Displacement Analysis of Spatial Mechanisms. ASME J. Appl. Mechanics, Vol. 107, pp.189-200.
- [56] ANGELES, J., 1985. On the Numerical Solution for the Inverse Kinematic Problem. International Journal of Robotics Research, Vol. 4, No.2, pp. 21-37.
- [57] GOLDENBERG, A. A., APKARIAN, J. A., and Smith, H. W., 1987. A New Approach to Kinematic Control of Robot Manipulators. ASME J. Dynamic Syst., Measure., Control, Vol.109, pp. 97-103.
- [58] TSAI, Y. T., and ORIN, E. D., 1987. A Strictly Convergent Real-Time Solution for Inverse Kinematics of Robot Manipulators. J. Robotic System., Vol. 4, No. 4, pp. 477-501.
- [59] MANOCHA, D. and CANNY, J. F., 1994. Efficient Inverse Kinematics for General 6R Manipulators. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 10, No.5, pp. 648-657.
- [60] PIEPER, D., 1983. The Kinematics of Manipulators Under Computer Control. Ph.D. thesis, Stanford University.
- [61] ROTH, B., RASTEGAR, J., and SCHEINMAN, V., 1973. On the Design of Computer Controlled Manipulators. On the Theory and Practice of Robots and Manipulators, First CISM IFToMM Symposium, pp. 93-73.
- [62] ALBALA, H., and ANGELES, J., 1979. Numerical Solution to the Input Output Displacement Equation of General 7R Spatial Mechanisms. In Proc. Fifth World Cong. Theory Mach. Mechanisms, pp. 1008-1011.
- [63] DUFFY, J. and CRANE, C., 1980. A Displacement Analysis of the General Spatial 7R Mechanism. Mechanisms Mach. Theory, Vol. 15, pp. 153-169.

- [64] TSAI, L. W. and MORGAN, A. P., 1985. Solving the Kinematics of the Most General Six and Five Degree-off-Freedom Manipulators by Continuation Methods. *Trans. ASME J. Mech. Transmission Automat. Des.*, pp. 189-200.
- [65] LEE, H.Y., and YIANG, C. G., 1988. Displacement Analysis of the General Spatial 7-Link 7R Mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 23, No. 3, pp. 219-226.
- [66] LEE, H.Y., and YIANG, C. G., 1988. A New Vector Theory for the Analysis of the Spatial Mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 23, No. 3, pp. 209-217.
- [67] RAGHAVAN, M. and ROTH, B., 1989. Kinematic Analysis of the 6R Manipulator of General Geometry. In *Int. Symp. Robotics Res.*, pp. 314-320.
- [68] RAGHAVAN, M., and ROTH, B., 1993. Inverse Kinematic of the General 6R Manipulator and Related Linkages. *Trans. ASME J. Mech. Des.*
- [69] PASHKEVICH, a., 1997. Real Time Inverse Kinematics for Robot with Offset and Reduced Wrist. *Control Eng. Practice*, Vol. 5, No. 10, pp. 1443-1450.
- [70] FU, K. S., GONZALEZ, R.C., and LEE, C. S. G., 1987. *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*. Mc. Graw-Hill, Inc., New York.
- [71] PIEPER, D.L., and ROTH, B. 1968. The Kinematics of Manipulators Under Computer Control. *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Congress for the Theory of Machine and Mechanism*. Vol. 2, pp. 159-168, Zakopane, Poland
- [72] UICKER, J. J., 1965. On the Dynamic Analysis of Spatial Linkages Using 4x4 Matrices. Ph. D. dissertation, Dept. of Mech. Eng. and Astronaut. Sci., Northwestern Unv., Evanston.
- [73] BEJCZY, A. K., 1974. Robot Arm Dynamic and Control. Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA, Tech. Memo, pp. 33-669.
- [74] HOLLERBACH, J. M., 1980. A Recursive Lagrangian Formulation of manipulator Dynamics and A Comparative Study of Dynamic Formulation Complexity. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, Vol. SMC-10, No. 11, pp. 730-736.
- [75] LUH, J.Y.S., WALKER, M. W., and PAUL, R. P. C., 1980. On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators. *Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 102, No. 2, pp. 69-76.

- [76] LEE, C. S. G., LEE, B. H. and NIGAM, N., 1983. Development of the Generalized D'Alembert Equations of Motion for Robot Manipulators. Proc. Of 22<sup>nd</sup> Conf. on Decision and Control, San Antonio, TX, pp. 1205-1210.
- [77] AMSTRONG, W. W., 1979. Recursive Solutions to the Equations of Motion of an n-Link Manipulator. In Proc. Of 5<sup>th</sup> World Congress on Theory of Machines and Mechanisms. pp 1343-1346.
- [78] ORIN, D. E., GHEE, M. R. B., VUKOBRATOVIC, and HARTOCH, G., 1979. Kinematic, and Kinetic Analysis of Open-chain Linkages Utilizing Newton-Euler Methods. Mathematical Biosciences, Vol. 43, pp. 107-130.
- [79] SCHILLING, R., 1990. Fundamentals of Robotics Analysis and Control. Prentice Hall, New Jersey.
- [80] PAUL, R. P., 1981. Robot manipulators: Mathematics, Programming and Control, MIT press, Cambridge, Mass.
- [81] C. S. G., LEE, 1982. Robot Arm Kinematics, Dynamics and Control. Computer, Vol. 15, No. pp. 62-80.
- [82] LI, C. J., 1988. A New Method of Dynamics for Robot Manipulators. IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 18, No.1, pp. 105-114.
- [83] KANE, T. R. and LEVINSON, D. A., 1983. The Use of Kane's Dynamic Equations in Robotics. Int. J. of Robotics Research, Vol. 2, No. 3, pp. 1205-1210.
- [84] MARCHANDS, P., and HOLLAND, O. T., 2003. Graphics and GUIs with Matlab, Chapman and Hall, A CRC Press Company Boca Raton London New York Washington, D. C.



## EKLER

### EK-A: TPS YÖNTEMİNDE KULLANILAN DÖNME MATRİSİNİN ELEMANLARI

$$R(k, \theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \text{ şeklinde yazılarak her bir elaman aşağıdaki gibi bulunur.}$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= k_x k_x V\alpha + c\alpha = k_x k_x (1 - c\alpha) + c\alpha = \frac{-b_y}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \frac{-b_y}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} (1 - b_z) + b_z \\ &= \frac{b_y^2}{b_x^2 + b_y^2} (1 - b_z) + b_z = \frac{b_y^2 - b_y^2 b_z + b_z b_x^2 + b_y^2 b_z}{b_x^2 + b_y^2} = \frac{b_y^2 + b_z b_x^2}{b_x^2 + b_y^2} \\ &\left. \begin{aligned} b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 &= 1 \Rightarrow 1 - b_z^2 = b_x^2 + b_y^2 \\ b_y^2 &= 1 - b_x^2 - b_z^2 \end{aligned} \right\} = \frac{b_y^2 + b_z b_x^2}{b_x^2 + b_y^2} = \frac{1 - b_x^2 - b_z^2 + b_z b_x^2}{1 - b_z^2} \\ &= \frac{-b_x^2 + b_z b_x^2 + 1 - b_z^2}{(1 - b_z)(1 + b_z)} = \frac{-b_x^2(1 - b_z) + (1 - b_z)(1 + b_z)}{(1 - b_z)(1 + b_z)} \\ &= \frac{\cancel{(1 - b_z)}(-b_x^2 + 1 + b_z)}{\cancel{(1 - b_z)}(1 + b_z)} = \frac{(-b_x^2 + 1 + b_z)}{(1 + b_z)} = \\ r_{11} &= k_x k_x V\alpha + c\alpha = 1 - \frac{b_x^2}{1 + b_z} \end{aligned} \quad (1)$$

$$r_{12} = k_y k_x V\alpha + k_z s\alpha, \quad k_z = 0$$

$$r_{12} = k_y k_x (1 - c\alpha) = \frac{-b_y}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \frac{-b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} (1 - b_z)$$

$$b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 1 \Rightarrow 1 - b_z^2 = b_x^2 + b_y^2$$



$$r_{12} = \frac{b_x b_y}{b_x^2 + b_y^2} (1 - b_z) = \frac{-b_x b_y (1 - b_z)}{(1 - b_z)(1 + b_z)}$$

$$r_{12} = k_y k_x V\alpha + k_z s\alpha = \frac{-b_x b_y}{(1 + b_z)} \quad (2)$$

$$r_{13} = k_z k_x (1 - c\alpha) + k_y s\alpha, \quad k_z = 0, \quad r_{13} = k_y s\alpha$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha, \quad b_z = \cos \alpha$$

$$b_z^2 = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 1 \Rightarrow b_z^2 = 1 - b_x^2 - b_y^2$$

$$\cancel{1 - b_x^2 - b_y^2} = \cancel{1 - \sin^2 \alpha} \text{ yeni durumda } b_x^2 + b_y^2 = \sin^2 \alpha \text{ dir.}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{b_x^2 + b_y^2}, \quad r_{13} = k_y s\alpha = \frac{-b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} s\alpha = \frac{-b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$$

$$r_{13} = k_z k_x (1 - c\alpha) + k_y s\alpha = b_x \quad (3)$$

$$r_{21} = k_x k_y (1 - c\alpha) + k_z s\alpha, \quad k_z = 0, \quad r_{21} = k_x k_y (1 - c\alpha)$$

$$r_{21} = k_x k_y (1 - c\alpha) = \frac{-b_y}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \frac{-b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} (1 - b_z) = \frac{b_x b_y}{b_x^2 + b_y^2} (1 - b_z)$$

$$= \frac{-b_x b_y (1 - b_z)}{(1 - b_z)(1 + b_z)}$$

$$r_{21} = k_x k_y (1 - c\alpha) + k_z s\alpha = \frac{-b_x b_y}{(1 + b_z)} \quad (4)$$

$$r_{22} = k_y k_y (1 - c\alpha) + c\alpha = \frac{-b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \frac{-b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} (1 - b_z) + b_z$$

$$= \frac{b_x^2}{b_x^2 + b_y^2} (1 - b_z) + b_z = \frac{b_x^2 - b_z b_x^2 + b_z b_x^2 + b_y^2 b_z}{b_x^2 + b_y^2} = \frac{b_x^2 + b_y^2 b_z}{b_x^2 + b_y^2}$$

$$b_z^2 = 1 - b_x^2 - b_y^2 \text{ ise}$$

$$\frac{b_x^2 + b_y^2 b_z}{b_x^2 + b_y^2} = \frac{1 - b_y^2 - b_x^2 + b_y^2 b_z}{b_x^2 + b_y^2} = \frac{-b_y^2(1 - b_z) + (1 - b_x^2)}{(1 - b_z^2)}$$

$$= \frac{-b_y^2(1 - b_z) + (1 - b_z)(1 + b_z)}{(1 - b_z)(1 + b_z)} = \frac{(1 - b_z)(-b_y^2 + 1 + b_z)}{(1 - b_z)(1 + b_z)}$$

$$r_{22} = k_y k_y (1 - c\alpha) + c\alpha = 1 - \frac{-b_y^2}{1 + b_z} \quad (5)$$

$$r_{23} = k_z k_y (1 - c\alpha) - k_x s\alpha, \quad k_z = 0, \quad r_{23} = -k_x s\alpha \text{ dir.}$$

$$r_{23} = -k_x s\alpha = \frac{b_y}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$$

$$r_{23} = k_z k_y (1 - c\alpha) - k_x s\alpha = b_y \quad (6)$$

$$r_{31} = k_x k_z (1 - c\alpha) - k_y s\alpha, \quad k_z = 0, \quad r_{31} = -k_y s\alpha$$

$$r_{31} = -k_y s\alpha = \frac{b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = -b_x \quad (7)$$

$$r_{32} = k_y k_z (1 - c\alpha) + k_x s\alpha, \quad k_z = 0, \quad r_{32} = -k_x s\alpha$$

$$r_{32} = k_x s\alpha = \frac{-b_y}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = -b_y \quad (8)$$

$$r_{33} = k_z k_z (1 - c\alpha) + c\alpha, \quad k_z = 0, \quad r_{33} = +c\alpha, \quad c\alpha = b_z$$

$$r_{33} = k_z k_z (1 - c\alpha) + c\alpha = b_z \quad (9)$$

**EK-B :ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN JAKOBİYEN MATRİSLERİNİN  
ÇIKARILMASINDA KULLANILAN ARA İŞLEMLER**

**1-SS Robotu**

$$J = [{}^0d_1 {}^0Z_1 \quad {}^0d_2 {}^0Z_2 \quad {}^0d_3 {}^0Z_3] \quad (1)$$

$${}^0d_1 {}^0Z_1 = {}^0Z_1 = {}^0R^1Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$${}^0d_2 {}^0Z_2 = {}^0Z_2 = {}^0R^2Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$${}^0d_3 {}^0Z_3 = {}^0Z_3 = {}^0R^3Z_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

**2-SC Robotu**

$$J = [{}^0d_1 {}^0Z_1 \quad -{}^0d_2 {}^0Z_2 \quad {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3)] \quad (5)$$

$${}^0d_1 {}^0Z_1 = {}^0Z_1 = {}^0R^1Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$-{}^0d_2 {}^0Z_2 = -{}^0Z_2 = -{}^0R^2Z_2 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) = {}^0R^3Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \\ & = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \sin\theta_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_3 & 0 & -\cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos\theta_3 \\ l_1 + d_2 \\ l_2 \sin\theta_3 + d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 + d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos\theta_3 \\ 0 \\ l_2 \sin\theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_3 \\ 0 \\ l_2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

### 3-SN Robotu

$$J = [{}^0d_1 {}^0Z_1 \quad {}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \quad {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3)] \quad (9)$$

$${}^0d_1 {}^0Z_1 = {}^0Z_1 = {}^0R^1Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) = {}^0R^2Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_2 \cos \theta_3) - l_2 \sin \theta_2 \\ l_3(\sin \theta_3) + d_2 \\ l_3(\sin \theta_2 \cos \theta_3) + l_2 \cos \theta_2 + d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_2 \cos \theta_3) - l_2 \sin \theta_2 \\ l_3(\sin \theta_3) \\ l_3(\sin \theta_2 \cos \theta_3) + l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_2 \cos \theta_3) - l_2 \cos \theta_2 \\ 0 \\ l_3(\cos \theta_2 \cos \theta_3) - l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) = {}^0R^3Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_2 \cos \theta_3 & -\sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_2 \cos \theta_3) - l_2 \sin \theta_2 + l_1 \\ l_3(\sin \theta_3) + d_2 \\ l_3(\sin \theta_2 \cos \theta_3) + l_2 \cos \theta_2 + d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 + l_1 \\ d_2 \\ l_2 \cos \theta_2 + d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \theta_2 \\ 0 \\ \cos \theta_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_2 \cos \theta_3) \\ l_3(\sin \theta_3) \\ l_3(\sin \theta_2 \cos \theta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3(\cos \theta_2 \sin \theta_3) \\ l_3(\cos \theta_3) \\ -l_3(\sin \theta_2 \sin \theta_3) \end{bmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

#### 4-CS Robotu

$$J = \begin{bmatrix} {}^0Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) & {}^0d_2 {}^0Z_2 & -{}^0d_3 {}^0Z_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} {}^0Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) &= {}^0R^1 Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + d_3 \sin \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 - d_3 \cos \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + d_3 \sin \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 - d_3 \cos \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 + d_3 \cos \theta_1 \\ l_1 \cos \theta_1 + d_3 \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

$${}^0d_2 {}^0Z_2 = {}^0Z_2 = {}^0R^2 Z_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$${}^0d_3 {}^0Z_3 = {}^0Z_3 = {}^0R^3 Z_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

#### 5-CC Robotu

$$J = \begin{bmatrix} {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) & {}^0d_2 {}^0Z_2 & {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) &= {}^0R^1 Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) + l_2 \cos \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_3) + l_2 \sin \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) + l_2 \cos \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_3) + l_2 \sin \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3) - l_2 \sin \theta_1 \\ l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) + l_2 \cos \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

$${}^0d_2 {}^0Z_2 = {}^0Z_2 = {}_2^0R^2 Z_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) &= {}_3^0R^3 Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{13} & -\sin \theta_{13} & 0 \\ \sin \theta_{13} & \cos \theta_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) + l_2 \cos \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_3) + l_2 \sin \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) \\ l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_3) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3) \\ l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20) \end{aligned}$$

## 6-CR Robotu

$$J = \begin{bmatrix} {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) & {}^0d_2 {}^0Z_2 & {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) &= {}_1^0R^1 Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3) + l_2 \cos \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3) + l_2 \sin \theta_1 \\ l_3 \sin \theta_3 + d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3) + l_2 \cos \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3) + l_2 \sin \theta_1 \\ l_3 \sin \theta_3 + d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3) - l_2 \sin \theta_1 \\ l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3) + l_2 \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22) \end{aligned}$$

$${}^0d_2 {}^0Z_2 = {}^0Z_2 = {}_2^0R^2 Z_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) &= {}_3^0R^3 Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_3 & -\cos \theta_1 \sin \theta_3 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_3 & -\sin \theta_1 \sin \theta_3 & -\cos \theta_1 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3) + l_2 \cos \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3) + l_2 \sin \theta_1 \\ l_3 \sin \theta_3 + d_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3 (\cos \theta_1 \cos \theta_3) \\ l_3 (\sin \theta_1 \cos \theta_3) \\ l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 (\cos \theta_1 \sin \theta_3) \\ -l_3 (\sin \theta_1 \sin \theta_3) \\ l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (24)
\end{aligned}$$

## 7-NS Robotu

$$J = \begin{bmatrix} {}^0Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) & {}^0Z_2 \times ({}^0P_3 - {}^0P_2) & {}^0d_3 {}^0Z_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
& {}^0Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) = {}^0R^1 Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) \\
= & \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -(d_3 + l_2)(\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 \\ -(d_3 + l_2)(\sin \theta_1 \sin \theta_2) - d_2 \cos \theta_1 \\ (d_3 + l_2) \cos \theta_2 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -(d_3 + l_2)(\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 \\ -(d_3 + l_2)(\sin \theta_1 \sin \theta_2) - d_2 \cos \theta_1 \\ (d_3 + l_2) \cos \theta_2 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} (d_3 + l_2)(\sin \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \cos \theta_1 \\ -(d_3 + l_2)(\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}^0Z_2 \times ({}^0P_3 - {}^0P_2) = {}^0R^2 Z_2 \times ({}^0P_3 - {}^0P_2) \\
= & \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \\
& \begin{bmatrix} -(d_3 + l_2)(\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 \\ -(d_3 + l_2)(\sin \theta_1 \sin \theta_2) - d_2 \cos \theta_1 \\ (d_3 + l_2) \cos \theta_2 + h_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_2 \sin \theta_1 \\ -d_2 \cos \theta_1 \\ +h_1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -(d_3 + l_2)(\cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ -(d_3 + l_2)(\sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ (d_3 + l_2) \cos \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(d_3 + l_2)(\cos \theta_1 \cos \theta_2) \\ -(d_3 + l_2)(\sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ -(d_3 + l_2) \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^0d_3 {}^0Z_3 = {}^0Z_3 = {}^0_3R^3 Z_3 &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 & -\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{28}$$

## 8-NN Robotu

$$J = \left[ {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \quad {}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \quad {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \right] \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
{}^0Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) &= {}^0_1R^1 Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \sin\theta_1 \sin\theta_3) - l_2(\cos\theta_1 \sin\theta_2) + d_2 \sin\theta_1 \\ l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \sin\theta_3) - l_2(\sin\theta_1 \sin\theta_2) - d_2 \cos\theta_1 \\ l_3 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + l_2 \cos\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \sin\theta_1 \sin\theta_3) - l_2(\cos\theta_1 \sin\theta_2) + d_2 \sin\theta_1 \\ l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \sin\theta_3) - l_2(\sin\theta_1 \sin\theta_2) - d_2 \cos\theta_1 \\ l_3 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + l_2 \cos\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \sin\theta_3) + l_2(\sin\theta_1 \sin\theta_2) + d_2 \cos\theta_1 \\ l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \sin\theta_1 \sin\theta_3) - l_2(\cos\theta_1 \sin\theta_2) + d_2 \sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
{}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) &= {}^0_2R^2 Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 & -\cos\theta_1 \sin\theta_2 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 & -\sin\theta_1 \sin\theta_2 & -\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \\
&= \begin{bmatrix} l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \sin\theta_1 \sin\theta_3) - l_2(\cos\theta_1 \sin\theta_2) + d_2 \sin\theta_1 \\ l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \sin\theta_3) - l_2(\sin\theta_1 \sin\theta_2) - d_2 \cos\theta_1 \\ l_3 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + l_2 \cos\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_2 \sin\theta_1 \\ -d_2 \cos\theta_1 \\ h_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) - l_2(\cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3) - l_2(\sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3) - l_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2) \\ -l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3) - l_2(\sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) = {}_3R^3 Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3 & -\cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \sin \theta_1 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3 & -\sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_1 \cos \theta_3 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 \cos \theta_3 & -\sin \theta_2 \sin \theta_3 & -\cos \theta_2 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) - l_2(\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3) - l_2(\sin \theta_1 \sin \theta_2) - d_2 \cos \theta_1 \\ l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_2 \cos \theta_2 + h_1 \end{bmatrix} - \\
&\begin{bmatrix} -l_2(\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 \\ -l_2(\sin \theta_1 \sin \theta_2) - d_2 \cos \theta_1 \\ l_2 \cos \theta_2 + h_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) \\ l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3) \\ l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_3) \\ -l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \cos \theta_3) \\ -l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (32)
\end{aligned}$$

## 9-NR Robotu

$$J = [{}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \quad {}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \quad {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3)] \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
&{}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) = {}_1R^1 Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_{23}) + l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - d_2 \sin \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_{23}) + l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + d_2 \cos \theta_1 \\ -l_3(\sin \theta_{23}) - l_2 \sin \theta_2 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \sin\theta_1 \\ l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + d_2 \cos\theta_1 \\ -l_3(\sin\theta_{23}) - l_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_{23}) - l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \cos\theta_1 \\ l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{34}
\end{aligned}$$

$${}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) = {}_2^0R^2 Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 & -\cos\theta_1 \sin\theta_2 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 & -\sin\theta_1 \sin\theta_2 & \cos\theta_1 \\ -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \sin\theta_1 \\ l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + d_2 \cos\theta_1 \\ -l_3(\sin\theta_{23}) - l_2 \sin\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_2 \sin\theta_1 \\ d_2 \cos\theta_1 \\ h_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ -l_3(\sin\theta_{23}) - l_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_{23}) - l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ -l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_{23}) - l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ -l_3(\cos\theta_{23}) - l_2(\cos\theta_2) \end{bmatrix} \tag{35}
\end{aligned}$$

$${}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) = {}_3^0R^3 Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_{23} & -\cos\theta_1 \sin\theta_{23} & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_{23} & -\sin\theta_1 \sin\theta_{23} & \cos\theta_1 \\ -\sin\theta_{23} & -\cos\theta_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \sin\theta_1 \\ l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + d_2 \cos\theta_1 \\ -l_3(\sin\theta_{23}) - l_2 \sin\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \sin\theta_1 \\ +l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + d_2 \cos\theta_1 \\ -l_2 \sin\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_{23}) \\ l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_{23}) \\ -l_3(\sin\theta_{23}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_{23}) \\ -l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_{23}) \\ -l_3(\cos\theta_{23}) \end{bmatrix} \quad (36)$$

### 10-RC Robotu

$$J = \left[ {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \quad {}^0d_2 {}^0Z_2 \quad {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \right] \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) = {}^0R^1 Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \\ & = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_3) + (l_2 + d_2)\sin\theta_1 \\ -l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_3) - (l_2 + d_2)\cos\theta_1 \\ l_3 \cos\theta_3 + h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_3) + (l_2 + d_2)\sin\theta_1 \\ -l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_3) - (l_2 + d_2)\cos\theta_1 \\ l_3 \cos\theta_3 + h_1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_3) + (l_2 + d_2)\cos\theta_1 \\ -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_3) + (l_2 + d_2)\sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

$${}^0d_2 {}^0Z_2 = {}^0Z_2 = {}^0R^2 Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) = {}^0R^3 Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \\ & = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_3 & -\cos\theta_1 \sin\theta_3 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_3 & -\sin\theta_1 \sin\theta_3 & -\cos\theta_1 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \\ & \quad \begin{bmatrix} -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_3) + (l_2 + d_2)\sin\theta_1 \\ -l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_3) - (l_2 + d_2)\cos\theta_1 \\ l_3 \cos\theta_3 + h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(l_2 + d_2)\sin\theta_1 \\ -(l_2 + d_2)\cos\theta_1 \\ h_1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_3) \\ -l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_3) \\ l_3 \cos\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_3) \\ -l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_3) \\ -l_3 \sin\theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

## 11-RN Robotu

$$J = \begin{bmatrix} {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) & {}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) & {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) = {}^0R^1 Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \\ & = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) + l_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) + l_1 \sin \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_3) + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) + l_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) + l_1 \sin \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) - l_1 \sin \theta_1 \\ \cos \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) + l_1 \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) = {}^0R^2 Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \\ & = \begin{bmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} & 0 \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) + l_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) + l_1 \sin \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_3) + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \\ h_1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) \\ \sin \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) \\ l_3(\sin \theta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) \\ \cos \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) = {}^0R^3 Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \\ & = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 \cos \theta_{12} & -\sin \theta_3 \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} \\ \cos \theta_3 \sin \theta_{12} & -\sin \theta_3 \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \\ & \quad \begin{bmatrix} \cos \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) + l_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_{12}(l_3 \cos \theta_3 + l_2) + l_1 \sin \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_3) + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_{12} + l_1 \cos \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_{12} + l_1 \sin \theta_1 \\ l_3(\sin \theta_3) + h_1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \sin \theta_{12} \\ -\cos \theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3(\cos \theta_{12} \cos \theta_3) \\ l_3(\sin \theta_{12} \cos \theta_3) \\ l_3(\sin \theta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3(\cos \theta_{12} \sin \theta_3) \\ -l_3(\sin \theta_{12} \sin \theta_3) \\ l_3(\cos \theta_3) \end{bmatrix} \quad (44) \end{aligned}$$

## 12-RR robotu

$$J = \left[ {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \quad {}^0d_2 {}^0Z_2 \quad {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \right] \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) = {}^0R^1 Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \\ & = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \sin \theta_1 \\ l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_3) - (l_2 + d_2) \cos \theta_1 \\ l_3 \cos \theta_3 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \sin \theta_1 \\ l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_3) - (l_2 + d_2) \cos \theta_1 \\ l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \cos \theta_1 \\ -l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46) \end{aligned}$$

$${}^0d_2 {}^0Z_2 = {}^0Z_2 = {}^0R^2 Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) = {}^0R^3 Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \\ & = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \sin \theta_3 & -\sin \theta_1 \cos \theta_3 & -\cos \theta_1 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_3 & -\sin \theta_1 \sin \theta_3 & -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \\ & \quad \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \sin \theta_1 \\ l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_3) - (l_2 + d_2) \cos \theta_1 \\ l_3 \cos \theta_3 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +(l_2 + d_2) \sin \theta_1 \\ -(l_2 + d_2) \cos \theta_1 \\ h_1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_3) \\ l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_3) \\ l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3) \\ l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3) \\ -l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (48) \end{aligned}$$

## 13-RS Robotu

$$J = \left[ {}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \quad {}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \quad {}^0d_3 {}^0Z_3 \right] \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
{}^0Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) &= {}^0R^1Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos\theta_{12} + l_1 \cos\theta_1 \\ l_2 \sin\theta_{12} + l_1 \sin\theta_1 \\ d_3 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos\theta_{12} + l_1 \cos\theta_1 \\ l_2 \sin\theta_{12} + l_1 \sin\theta_1 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin\theta_{12} - l_1 \sin\theta_1 \\ l_2 \cos\theta_{12} + l_1 \cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^0Z_2 \times ({}^0P_3 - {}^0P_2) &= {}^0R^2Z_2 \times ({}^0P_3 - {}^0P_2) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} & 0 \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos\theta_{12} + l_1 \cos\theta_1 \\ l_2 \sin\theta_{12} + l_1 \sin\theta_1 \\ d_3 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \cos\theta_1 \\ l_1 \sin\theta_1 \\ h_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos\theta_{12} \\ l_2 \sin\theta_{12} \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin\theta_{12} \\ l_2 \cos\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{51}
\end{aligned}$$

$${}^0d_3 {}^0Z_3 = {}^0Z_3 = {}^0R^3Z_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} & 0 \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

#### 14-SR robotu

$$J = [{}^0d_1 {}^0Z_1 \quad {}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \quad {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3)] \tag{53}$$

$${}^0d_1 {}^0Z_1 = {}^0Z_1 = {}^0R^1Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
{}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) &= {}^0R^2Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3 \cos\theta_{23} + l_2 \cos\theta_2 + l_1 \\ l_3 \sin\theta_{23} + l_2 \sin\theta_2 \\ d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3 \cos \theta_{23} + l_2 \cos \theta_2 \\ l_3 \sin \theta_{23} + l_2 \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin \theta_{23} - l_2 \sin \theta_2 \\ l_3 \cos \theta_{23} + l_2 \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) = {}^0R^3 Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \\ & = \begin{bmatrix} \cos \theta_{23} & -\sin \theta_{23} & 0 \\ \cos \theta_{23} & \cos \theta_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3 \cos \theta_{23} + l_2 \cos \theta_2 + l_1 \\ l_3 \sin \theta_{23} + l_2 \sin \theta_2 \\ d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + l_1 \\ l_2 \sin \theta_2 \\ d_1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3 \cos \theta_{23} \\ l_3 \sin \theta_{23} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin \theta_{23} \\ l_3 \cos \theta_{23} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (56)$$

### 15-CN Robotu

$$J = \left[ {}^0d_1 {}^0Z_1 \quad {}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \quad {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \right] \quad (57)$$

$${}^0d_1 {}^0Z_1 = {}^0Z_1 = {}^0R^1 Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) = {}^0R^2 Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \\ & = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_1 \sin \theta_2 + h_1 \\ l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_1 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_3 + d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_1 \sin \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_1 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - l_1 \cos \theta_2 \\ l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_1 \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) = {}^0R^3 Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \\ & = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_2 \sin \theta_3 & -\cos \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_1 \sin \theta_2 + h_1 \\ l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_1 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_3 + d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_2 + h_1 \\ l_1 \cos \theta_2 \\ d_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin \theta_2 \\ -\cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ -l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (60)
\end{aligned}$$

## 16-NC Robotu

$$J = \left[ {}^0Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) \quad {}^0Z_2 \times ({}^0P_3 - {}^0P_2) \quad {}^0d_3 {}^0Z_3 \right] \quad (61)$$

$$\begin{aligned}
& {}^0Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) = {}^0R^1 Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (d_2 + d_3) \sin \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - (d_2 + d_3) \cos \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_2 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (d_2 + d_3) \sin \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - (d_2 + d_3) \cos \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_2 + h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + (d_2 + d_3) \cos \theta_1 \\ l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (d_2 + d_3) \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}^0Z_2 \times ({}^0P_3 - {}^0P_2) = {}^0R^2 Z_2 \times ({}^0P_3 - {}^0P_2) \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (d_2 + d_3) \sin \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - (d_2 + d_3) \cos \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_2 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_2 \sin \theta_1 \\ -d_2 \cos \theta_1 \\ h_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + d_3 \sin \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - d_3 \cos \theta_1 \\ l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ -l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (63)
\end{aligned}$$

$${}^0d_3 {}^0Z_3 = {}^0Z_3 = {}^0R^3 Z_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$



**EK-C: ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN VAZİYET NUMARALARININ  
HESAPLANMASI İÇİN KULLANILAN ARA İŞLEMLER**

**1-SC Robotu**

$$\|J_{SC}\| = \sqrt{\text{tr}(J_{SC}WJ_{SC}^T)} \quad (1)$$

$$\|J_{SC}\| = \sqrt{\text{tr} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_2 \sin \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & l_2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -l_2 \sin \theta_3 & 0 & l_2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}l_2^2 + \frac{2}{3}} \quad (2)$$

$$\|J_{SC}^{-1}\| = \sqrt{\text{tr}(J_{SC}^{-1}W(J_{SC}^{-1})^T)} \quad (3)$$

$$\|J_{SC}^{-1}\| = \sqrt{\text{tr} \left( \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{l_2 \sin \theta_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_3} & 0 & -\frac{1}{l_2 \sin \theta_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + 2l_2^2 - \cos^2 \theta_3 l_2^2}{3l_2^2 \sin^2 \theta_3}} \quad (4)$$

**2-SN Robotu**

$$J_{SN} = \begin{bmatrix} 0 & -l_3(\sin \theta_2 \cos \theta_3) - l_2 \cos \theta_2 & -l_3(\cos \theta_2 \sin \theta_3) \\ 0 & 0 & l_3(\cos \theta_3) \\ 1 & l_3(\cos \theta_2 \cos \theta_3) - l_2 \sin \theta_2 & -l_3(\sin \theta_2 \sin \theta_3) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\|J_{SN}\| = \sqrt{\frac{1 + l_2^2 + l_3^2 + l_3^2 \cos^2 \theta_3}{3}} \quad (6)$$

$$J_{SN}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_2 \sin \theta_2}{l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_2 \cos \theta_2} & \frac{l_3 \sin \theta_3}{l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_2 \cos \theta_2} & 1 \\ -\frac{1}{l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_2 \cos \theta_2} & \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_3}{(l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_2 \cos \theta_2) \cos \theta_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_3 \cos \theta_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\|J_{SN}^{-1}\| = \frac{\sqrt{a_{SN}}}{(l_3^2 \cos^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 + l_2 l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3) \sqrt{3}} \quad (8)$$

### 3-CS Robotu

$$J_{CS} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 + d_3 \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ l_1 \cos \theta_1 + d_3 \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\|J_{CS}\| = \sqrt{\frac{1}{3} l_1^2 + \frac{1}{3} d_3^2 + \frac{2}{3}} \quad (10)$$

$$J_{CS}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_1}{d_3} & \frac{\sin \theta_1}{d_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{l_1 \cos \theta_1 + d_3 \sin \theta_1}{d_3} & \frac{l_1 \sin \theta_1 - d_3 \cos \theta_1}{d_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\|J_{CS}^{-1}\| = \sqrt{\frac{l_1^2 + 2d_3^2 + 1}{3d_3^2}} \quad (12)$$

### 4-CC Robotu

$$J_{CC} = \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_{13}) - l_2 \sin \theta_1 & 0 & -l_3(\sin \theta_{13}) \\ l_3(\cos \theta_{13}) + l_2 \cos \theta_1 & 0 & l_3(\cos \theta_{13}) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\|J_{CC}\| = \sqrt{\frac{l_2^2 + 2l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + 1}{3}} \quad (14)$$

$$J_{CC}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_{13}}{l_2 \sin \theta_3} & \frac{\sin \theta_{13}}{l_2 \sin \theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-l_3 \cos \theta_{13} - l_2 \cos \theta_1}{l_2 l_3 \sin \theta_3} & \frac{-l_3 \sin \theta_{13} - l_2 \sin \theta_1}{l_2 l_3 \sin \theta_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\|J_{CC}^{-1}\| = \sqrt{\frac{2l_3^2 + l_2^2 + l_2^2 l_3^2 + l_2^2 l_3^2 \cos^2 \theta_3 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3}{3l_2^2 l_3^2 \sin^2 \theta_3}} \quad (16)$$

### 5-CR Robotu

$$J_{CR} = \begin{bmatrix} -l_3(\sin \theta_1 \cos \theta_3) - l_2 \sin \theta_1 & 0 & -l_3(\cos \theta_1 \sin \theta_3) \\ l_3(\cos \theta_1 \cos \theta_3) + l_2 \cos \theta_1 & 0 & -l_3(\sin \theta_1 \sin \theta_3) \\ -0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\|J_{CR}\| = \sqrt{\frac{l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + 1}{3}} \quad (18)$$

$$J_{CR}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \theta_1}{l_3 \cos \theta_3 + l_2} & \frac{\cos \theta_1}{l_3 \cos \theta_3 + l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\cos \theta_1}{l_3 \sin \theta_3} & -\frac{\sin \theta_1}{l_3 \sin \theta_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\|J_{CR}^{-1}\| = \frac{\sqrt{a_{CR}}}{(l_3^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + l_2 l_3 \sin \theta_3) \sqrt{3}} \quad (20)$$

### 6-NS Robotu

$$J_{NS} = \begin{bmatrix} (d_3 + l_2)(\sin \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \cos \theta_1 & -(d_3 + l_2)(\cos \theta_1 \cos \theta_2) & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ -(d_3 + l_2)(\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 & -(d_3 + l_2)(\sin \theta_1 \cos \theta_2) & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & -(d_3 + l_2) \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\|J_{NS}\| = \sqrt{\frac{a_{NS}}{3}} \quad (22)$$

$$J_{NS}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2 (d_3 + l_2)} & \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2 (d_3 + l_2)} & 0 \\ \frac{a}{\sin \theta_2 (l_2 + d_3)^2} & \frac{c}{\sin \theta_2 (l_2 + d_3)^2} & -\frac{\sin \theta_2}{(d_3 + l_2)} \\ \frac{b}{(l_2 + d_3)} & \frac{d}{(l_2 + d_3)} & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a = -(d_3 + l_2) \cos \theta_1 \sin \theta_2 + d_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad (24)$$

$$b = -(d_3 + l_2) \cos \theta_1 \sin \theta_2 + d_2 \sin \theta_1 \quad (25)$$

$$c = -(d_3 + l_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 - d_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (26)$$

$$d = -(d_3 + l_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 + d_2 \cos \theta_1 \quad (27)$$

$$\|J_{NS}^{-1}\| = \frac{\sqrt{b_{NS}}}{(d_3^2 \sin \theta_2 + 2l_2 d_3 \sin \theta_2 + l_2^2 \sin \theta_2) \sqrt{3}} \quad (28)$$

## 7-NN Robotu

$$J_{NN} = \begin{bmatrix} e & -l_3 (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3) - l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2) & \cdot \\ f & -l_3 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3) - l_2 (\sin \theta_1 \cos \theta_2) & \cdot \\ 0 & l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_2 \sin \theta_2 & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -l_3 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_3) \\ \cdot & \cdot & -l_3 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \cos \theta_3) \\ \cdot & \cdot & -l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$e = -l_3 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3) + l_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \cos \theta_1 \quad (30)$$

$$f = l_3 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3) - l_2 (\cos \theta_1 \sin \theta_2) + d_2 \sin \theta_1 \quad (31)$$

$$\|J_{NN}\| = \sqrt{\frac{a_{NN}}{3}} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
J_{NN}^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{-l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_3 - \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3) + l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2}{d_2(l_3 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - l_2 \sin\theta_2)} & \cdot & \cdot \\ \frac{g}{d_2 \cos\theta_3(l_3 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - l_2 \sin\theta_2)} & \cdot & \cdot \\ \frac{-l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \sin\theta_1 \sin\theta_3) + l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 - d_2 \sin\theta_1}{d_2 l_3 \cos\theta_3} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \frac{l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3) - l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2}{d_2(l_3 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - l_2 \sin\theta_2)} & \cdot \\ \cdot & \frac{h}{d_2 \cos\theta_3(l_3 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - l_2 \sin\theta_2)} & \cdot \\ \cdot & \frac{-l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3) - l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 - d_2 \cos\theta_1}{d_2 l_3 \cos\theta_3} & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \frac{l_3 \sin\theta_2 \cos\theta_3 - l_2 \cos\theta_2}{d_2(l_3 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - l_2 \sin\theta_2)} \\ \cdot & \frac{d_2 \cos\theta_3 - l_3(\cos\theta_3 \sin\theta_3 - \cos^2\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_3) - l_2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 \sin\theta_3}{d_2 \cos\theta_3(l_3 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - l_2 \sin\theta_2)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{l_3 \cos\theta_3 \sin\theta_2 + l_2 \cos\theta_2}{d_2 l_3 \cos\theta_3} \end{bmatrix} \quad (33)
\end{aligned}$$

Denkleimde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$g = l_3 \sin\theta_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 + \sin\theta_1 \cos^2\theta_3) + l_2^2 \cos\theta_1 \sin\theta_3 (\cos^2\theta_1 - 1) + d_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \quad (34)$$

$$h = l_3 \sin\theta_2 (\sin\theta_1 \sin\theta_3 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \cos\theta_1 - \cos\theta_1 \cos^2\theta_3) + l_2^2 \sin\theta_1 \sin\theta_3 (\cos^2\theta_1 - 1) - d_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \quad (35)$$

$$\|J_{NN}^{-1}\| = \frac{\sqrt{b_{NN}}}{(d_2 l_2 l_3 \sin\theta_2 \cos\theta_3 - d_2 l_3^2 \cos\theta_2 \cos^2\theta_3) \sqrt{3}} \quad (36)$$

## 8-NR Robotu

$$J_{NR} = \begin{bmatrix} -l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_{23}) - l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \cos\theta_1 & \cdot & \cdot \\ l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_{23}) + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \sin\theta_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_{23}) - l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 & -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_{23}) \\ \cdot & -l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_{23}) - l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 & -l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_{23}) \\ \cdot & -l_3(\cos\theta_{23}) - l_2(\cos\theta_2) & -l_3(\cos\theta_{23}) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\|J_{NR}\| = \sqrt{\frac{a_{NR}}{3}} \quad (38)$$

$$J_{NR}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sin\theta_1}{l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos\theta_{23}} & \cdot & \cdot \\ \frac{e_{NR}}{l_2 l_3 \sin\theta_3 (1+l_2)} & \cdot & \cdot \\ -\frac{\cos\theta_1 (l_3 \cos\theta_{23} + l_2 \cos\theta_2) - d_2 \sin\theta_1}{l_2 l_3 \sin\theta_3} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \frac{\cos\theta_1}{l_3 \cos\theta_{23} + l_2 \cos\theta_2} & 0 \\ \cdot & \frac{f_{NR}}{l_2 l_3 \sin\theta_3 (1+l_2)} & -\frac{\sin\theta_{23}}{l_2 \sin\theta_3} \\ \cdot & -\frac{\sin\theta_1 (l_3 \cos\theta_{23} + l_2 \cos\theta_2) + d_2 \cos\theta_1}{l_2 l_3 \sin\theta_3} & \frac{l_3 \sin\theta_{23} + l_2 \sin\theta_2}{l_2 l_3 \sin\theta_3} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Denkleimde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$e_{NR} = \cos\theta_{23} (l_3 \cos\theta_1 \cos\theta_{23} + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - d_2 \sin\theta_1) \quad (40)$$

$$f_{NR} = \cos\theta_{23} (l_3 \sin\theta_1 \cos\theta_{23} + l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + d_2 \cos\theta_1) \quad (41)$$

$$\|J_{NR}^{-1}\| = \frac{\sqrt{b_{NR}}}{(l_2 l_3 \sin\theta_3 (l_3 \cos\theta_{23} + l_2 \cos\theta_2))\sqrt{3}} \quad (42)$$

## 9-RC Robotu

$$J_{RC} = \begin{bmatrix} l_3(\sin\theta_1 \sin\theta_3) + (l_2 + d_2)\cos\theta_1 & \sin\theta_1 & -l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_3) \\ -l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_3) + (l_2 + d_2)\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & -l_3(\sin\theta_1 \cos\theta_3) \\ 0 & 0 & -l_3 \sin\theta_3 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\|J_{RC}\| = \sqrt{\frac{l_3^2 \sin^2\theta_3 + l_2^2 + d_2^2 + l_3^2 + 2l_2 d_2 + 1}{3}} \quad (44)$$

$$J_{RC}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_1}{l_2 + d_2} & \frac{\sin \theta_1}{l_2 + d_2} & -\frac{\cos \theta_3}{(l_2 + d_2) \sin \theta_3} \\ \frac{f_{RC}}{l_2 + d_2} & \frac{-l_3 \sin \theta_1 \sin \theta_3 + (l_2 + d_2) \cos \theta_1}{l_2 + d_2} & \frac{l_3 \cos \theta_3}{(l_2 + d_2)} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l_3 \sin \theta_3} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$f_{RC} = -l_3 \cos \theta_1 \sin \theta_3 + (l_2 + d_2) \sin \theta_1 \quad (46)$$

$$\|J_{RC}^{-1}\| = \sqrt{\frac{l_3^2 (\sin^2 \theta_3 (l_2 + d_2)^2 + l_3^2 \sin^2 \theta_3 + 1) + (l_2 + d_2)^2}{3l_3^2 \sin^2 \theta_3 (l_2 + d_2)^2}} \quad (47)$$

## 10-RN Robotu

$$J_{RN} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{12} (l_3 \cos \theta_3 + l_2) - l_1 \sin \theta_1 & -\sin \theta_{12} (l_3 \cos \theta_3 + l_2) & -l_3 (\cos \theta_{12} \sin \theta_3) \\ \cos \theta_{12} (l_3 \cos \theta_3 + l_2) + l_1 \cos \theta_1 & \cos \theta_{12} (l_3 \cos \theta_3 + l_2) & -l_3 (\sin \theta_{12} \sin \theta_3) \\ 0 & 0 & l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\|J_{RN}\| = \sqrt{\frac{a_{RN}}{3}} \quad (49)$$

$$J_{RN}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_{12}}{l_1 \sin \theta_2} & \frac{\sin \theta_{12}}{l_1 \sin \theta_2} & \frac{\sin \theta_3}{l_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3} \\ h & i & j \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3 \cos \theta_3} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$h = -\frac{l_3 \cos \theta_3 \cos \theta_{12} + l_2 \cos \theta_{12} + l_1 \cos \theta_1}{l_1 \sin \theta_2 (l_2 + l_3 \cos \theta_3)} \quad (51)$$

$$i = -\frac{l_3 \cos \theta_3 \sin \theta_{12} + l_2 \sin \theta_{12} + l_1 \sin \theta_1}{l_1 \sin \theta_2 (l_2 + l_3 \cos \theta_3)} \quad (52)$$

$$j = -\frac{\sin \theta_3 (l_3 \cos \theta_3 + l_1 \cos \theta_2 + l_2)}{l_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 (l_2 + l_3 \cos \theta_3)} \quad (53)$$

$$\|J_{RN}^{-1}\| = \frac{\sqrt{b_{RN}}}{(l_1 l_2 l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_1 l_3^2 \sin \theta_2 \cos^2 \theta_3) \sqrt{3}} \quad (54)$$

### 11-RR Robotu

$$J_{RR} = \begin{bmatrix} -l_3 (\cos \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & -l_3 (\sin \theta_1 \cos \theta_3) \\ -l_3 (\sin \theta_1 \sin \theta_3) + (l_2 + d_2) \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & l_3 (\cos \theta_1 \cos \theta_3) \\ 0 & 0 & -l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\|J_{RR}\| = \sqrt{\frac{D_a}{3}} \quad (56)$$

$$J_{RR}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_1}{l_3 \sin \theta_3 - (l_2 + d_2)} & -\frac{\sin \theta_1}{l_3 \sin \theta_3 - (l_2 + d_2)} & 0 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & -\frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l_3 \sin \theta_3} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\|J_{RR}^{-1}\| = \frac{\sqrt{b_{RR}}}{(-l_3^2 \sin^2 \theta_3 + l_2 l_3 \sin \theta_3 + d_2 l_3 \sin \theta_3) \sqrt{3}} \quad (58)$$

### 12-RS Robotu

$$J_{RS} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_{12} - l_1 \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_{12} & 0 \\ l_2 \cos \theta_{12} + l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\|J_{RS}\| = \sqrt{\frac{2l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + 1}{3}} \quad (60)$$



$$J_{RS}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_{12}}{l_1 \sin \theta_2} & \frac{\sin \theta_{12}}{l_1 \sin \theta_2} & 0 \\ -\frac{l_2 \cos \theta_{12} + l_1 \cos \theta_1}{l_1 l_2 \sin \theta_2} & -\frac{l_2 \sin \theta_{12} + l_1 \sin \theta_1}{l_1 l_2 \sin \theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\|J_{RS}^{-1}\| = \sqrt{\frac{l_1^2 + 2l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_1^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2}{3l_1^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2}} \quad (62)$$

### 13-SR Robotu

$$J_{SR} = \begin{bmatrix} 0 & -l_3 \sin \theta_{23} - l_2 \sin \theta_2 & -l_3 \sin \theta_{23} \\ 0 & l_3 \cos \theta_{23} + l_2 \cos \theta_2 & l_3 \cos \theta_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\|J_{SR}\| = \sqrt{\frac{l_2^2 + 2l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + 1}{3}} \quad (64)$$

$$J_{SR}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\cos \theta_{23}}{l_1 \sin \theta_3} & \frac{\sin \theta_{23}}{l_2 \sin \theta_3} & 0 \\ -\frac{\cos \theta_{23} + l_2 \cos \theta_2}{l_2 l_3 \sin \theta_3} & -\frac{l_3 \sin \theta_{23} + l_2 \sin \theta_2}{l_2 l_3 \sin \theta_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\|J_{SR}^{-1}\| = \sqrt{\frac{2l_3^2 + l_2^2 + 2l_2 l_3 \cos \theta_3 + l_2^2 l_3^2 \sin^2 \theta_3}{3l_2^2 l_3^2 \sin^2 \theta_3}} \quad (66)$$

### 14-CN Robotu

$$J_{CN} = \begin{bmatrix} 0 & -l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - l_1 \cos \theta_2 & -l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ 0 & l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_1 \sin \theta_2 & -l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ 1 & 0 & l_2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\|J_{CN}\| = \sqrt{\frac{l_2^2 \cos^2 \theta_3 + l_1^2 + l_2^2 + 1}{3}} \quad (68)$$

$$J_{CN}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_1 \sin \theta_2}{l_2 \sin \theta_3} & \frac{l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + l_1 \cos \theta_2}{l_2 \sin \theta_3} & 1 \\ -\frac{\sin \theta_2}{l_2 \cos \theta_3} & -\frac{\cos \theta_2}{l_2 \cos \theta_3} & 0 \\ \frac{-l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + l_1 \sin \theta_2}{l_2^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3} & \frac{-l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_1 \cos \theta_2}{l_2^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\|J_{CN}^{-1}\| = \sqrt{\frac{l_1^2 l_2^2 \cos^2 \theta_3 + l_2^4 \cos^2 \theta_3 + l_1^2 + l_2^2}{3l_2^4 \sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_3}} \quad (70)$$

## 15-NC Robotu

$$J_{NC} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + (d_2 + d_3) \cos \theta_1 & -l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \sin \theta_1 \\ l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (d_2 + d_3) \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \\ 0 & l_2 \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\|J_{NC}\| = \sqrt{\frac{l_2^2 (\cos^2 \theta_2 + 1) + (d_2 + d_3)^2 + 1}{3}} \quad (72)$$

$$J_{NC}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_1}{d_2 + d_3} & \frac{\sin \theta_1}{d_2 + d_3} & \frac{\sin \theta_2}{(d_2 + d_3) \cos \theta_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_2 \cos \theta_2} \\ d_{NC} & \frac{l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - (d_2 + d_3) \cos \theta_1}{d_2 + d_3} & \frac{l_2 \sin \theta_2}{d_2 + d_3} \end{bmatrix} \quad (73)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$d_{NC} = \frac{l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (d_2 + d_3) \sin \theta_1}{d_2 + d_3} \quad (74)$$

$$\|J_{NC}^{-1}\| = \sqrt{\frac{(l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 1)((d_2 + d_3)^2 + l_2^2) + l_2^4 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_2}{3l_2^2 \cos^2 \theta_2 (d_2 + d_3)^2}} \quad (75)$$

**EK D :EULER BİLEKLİ ENDÜSTRİYEL ROBOTLARIN TERS  
KİNEMATİKLERİNİN ÇIKARILMASINDA KULLANILAN ARA  
İŞLEMLER**

**1-SS Robotu**

Tablo 3.3'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
 {}^0_6T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_3 + d_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (1)
 \end{aligned}$$

SS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & d_3 + d_4 \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 & d_2 \\ -c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + s\theta_4 s\theta_6 & c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + s\theta_4 c\theta_6 & -c\theta_4 s\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

## 2-SC Robotu

Tablo 3.4'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned} {}^0_6T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_1 + d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_3 + d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \end{aligned}$$

SC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{SC} c\theta_6 - c\theta_3 s\theta_4 s\theta_6 & -a_{SC} s\theta_6 & -c\theta_3 c\theta_4 s\theta_5 + s\theta_3 c\theta_5 & d_4 s\theta_3 \\ -s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - c\theta_4 s\theta_6 & s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - c\theta_4 c\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 & l_1 + d_2 \\ b_{SC} c\theta_6 - s\theta_3 s\theta_4 s\theta_6 & -b_{SC} s\theta_6 & -s\theta_3 c\theta_4 s\theta_5 - c\theta_3 c\theta_5 & -d_4 c\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

SC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.7'nin uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} e_{CS} & g_{CS} & c\theta_3c\theta_4r_{13} - s\theta_4r_{23} + s\theta_3c\theta_4r_{33} & \cdot \\ f_{CS} & h_{CS} & -c\theta_3s\theta_4r_{13} - c\theta_4r_{23} - s\theta_3s\theta_4r_{33} & \cdot \\ s\theta_3r_{11} - c\theta_3r_{31} & s\theta_3r_{12} - c\theta_3r_{32} & s\theta_3r_{13} - c\theta_3r_{33} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} c\theta_5c\theta_6 & -c\theta_5s\theta_6 & -s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & \cdot \\ s\theta_5c\theta_6 & -s\theta_5s\theta_6 & c\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Denklemde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$e_{CS} = c\theta_3c\theta_4r_{11} - s\theta_4r_{21} + s\theta_3c\theta_4r_{31} \quad (6)$$

$$f_{CS} = -c\theta_3s\theta_4r_{11} - c\theta_4r_{21} - s\theta_3s\theta_4r_{31} \quad (7)$$

$$g_{CS} = c\theta_3c\theta_4r_{12} - s\theta_4r_{22} + s\theta_3c\theta_4r_{32} \quad (8)$$

$$h_{CS} = -c\theta_3s\theta_4r_{12} - c\theta_4r_{22} - s\theta_3s\theta_4r_{32} \quad (9)$$

### 3-SN Robotu

Tablo 3.5'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
 {}^0_4T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_4 c\theta_2 s\theta_3 - l_2 s\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_3 + d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_2 s\theta_3 + l_2 c\theta_2 + d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

SN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_4 c\theta_2 s\theta_3 - l_2 s\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_3 + d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_2 s\theta_3 + l_2 c\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

SN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$= \begin{bmatrix} j_{SN} & k_{SN} & c\theta_2 c\theta_3 r_{13} + s\theta_3 r_{23} + s\theta_2 c\theta_3 r_{33} & \cdot \\ i_{SN} & l_{SN} & -c\theta_2 s\theta_3 r_{13} + c\theta_3 r_{23} - s\theta_2 s\theta_3 r_{33} & \cdot \\ -s\theta_2 r_{11} + c\theta_2 r_{31} & -s\theta_2 r_{12} + c\theta_2 r_{32} & -s\theta_2 r_{13} + c\theta_2 r_{33} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & -c\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ -s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 s\theta_6 & -c\theta_5 & \cdot \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & -s\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$j_{SN} = c\theta_2 c\theta_3 r_{11} + s\theta_3 r_{21} + s\theta_2 c\theta_3 r_{31} \quad (13)$$

$$i_{SN} = -c\theta_2 s\theta_3 r_{11} + c\theta_3 r_{21} - s\theta_2 s\theta_3 r_{31} \quad (14)$$

$$k_{SN} = c\theta_2 c\theta_3 r_{12} + s\theta_3 r_{22} + s\theta_2 c\theta_3 r_{32} \quad (15)$$

$$l_{SN} = -c\theta_2 s\theta_3 r_{12} + c\theta_3 r_{22} - s\theta_2 s\theta_3 r_{32} \quad (16)$$

#### 4-CS Robotu

Tablo 3.6'dan elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
 {}^0_6T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & (d_3 + d_4)s\theta_1 + l_1c\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & (d_3 + d_4)c\theta_1 + l_1s\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (17)
 \end{aligned}$$

CS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} c\theta_1r_{11} + s\theta_1r_{21} & c\theta_1r_{12} + s\theta_1r_{22} & c\theta_1r_{13} + s\theta_1r_{23} & c\theta_1p_x + s\theta_1p_y \\ -s\theta_1r_{11} + c\theta_1r_{21} & -s\theta_1r_{12} + c\theta_1r_{22} & -s\theta_1r_{13} + c\theta_1r_{23} & -s\theta_1p_x + c\theta_1p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -(d_3 + d_4) \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)
 \end{aligned}$$

CS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.7'nin uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} g_{CS} & i_{CS} & c\theta_1 c\theta_4 r_{13} + s\theta_1 c\theta_4 r_{23} + s\theta_4 r_{33} \\ h_{CS} & j_{CS} & -c\theta_1 s\theta_4 r_{13} - s\theta_1 s\theta_4 r_{23} + c\theta_4 r_{33} \\ s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21} & s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22} & s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} c\theta_5 c\theta_6 & -c\theta_5 s\theta_6 & s\theta_5 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 \\ -s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)
\end{aligned}$$

Denklemlerde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$g_{CS} = c\theta_1 c\theta_4 r_{11} + s\theta_1 c\theta_4 r_{21} + s\theta_4 r_{31} \quad (20)$$

$$h_{CS} = -c\theta_1 s\theta_4 r_{11} - s\theta_1 s\theta_4 r_{21} + c\theta_4 r_{31} \quad (21)$$

$$i_{CS} = c\theta_1 c\theta_4 r_{12} + s\theta_1 c\theta_4 r_{22} + s\theta_4 r_{32} \quad (22)$$

$$j_{CS} = -c\theta_1 s\theta_4 r_{12} - s\theta_1 s\theta_4 r_{22} + c\theta_4 r_{32} \quad (23)$$

## 5-CC Robotu

Tablo 3.7'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
{}^0T_6 &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \dots & d_4 s\theta_{13} + l_2 c\theta_1 \\ \dots & -d_4 c\theta_{13} + l_2 s\theta_1 \\ \dots & d_2 \\ \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (24)
\end{aligned}$$



CC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} & c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_3 + l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}
 \end{aligned}$$

Üçüncü eklem açısının bulunması için (1,4) ve (2,4) matris elemanlarının karşılıklı kareleri alınıp alt alta toplanır.

$$c^2\theta_1 p_x^2 + s^2\theta_1 p_y^2 + 2c\theta_1 p_x s\theta_1 p_y = d_4^2 s^2\theta_3 + l_2^2 + 2d_4 s\theta_3 l_2$$

$$s^2\theta_1 p_x^2 + c^2\theta_1 p_y^2 - 2s\theta_1 p_x c\theta_1 p_y = d_4^2 c^2\theta_3$$

$$p_x^2 (s^2\theta_1 + c^2\theta_1) + p_y^2 (s^2\theta_1 + c^2\theta_1) = d_4^2 (c^2\theta_3 + s^2\theta_3) + 2l_2 d_4 s\theta_3$$

( $s^2\theta + c^2\theta = 1$ ) sadeleştirilmesi gerçekleştirilmiştir.

$$p_x^2 + p_y^2 - d_4^2 - l_2^2 = 2l_2 d_4 s\theta_3,$$

$$\sin\theta_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 - d_4^2 - l_2^2}{2l_2 d_4} \tag{26}$$

CC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.7'nin uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} h_{cc} & j_{cc} & c\theta_4 c\theta_{13} r_{13} + s\theta_{13} c\theta_4 r_{23} + s\theta_4 r_{33} & \cdot \\ i_{cc} & k_{cc} & -c\theta_{13} s\theta_4 r_{13} - s\theta_{13} s\theta_4 r_{23} + c\theta_4 r_{33} & \cdot \\ s\theta_{13} r_{11} - c\theta_{13} r_{21} & s\theta_{13} r_{12} - c\theta_{13} r_{22} & s\theta_{13} r_{13} - c\theta_{13} r_{23} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_5 c\theta_6 & -c\theta_5 s\theta_6 & -s\theta_5 & . \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & . \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{bmatrix} \quad (27)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$h_{CC} = c\theta_4 c\theta_{13} r_{11} + s\theta_{13} c\theta_4 r_{21} + s\theta_4 r_{31} \quad (28)$$

$$i_{CC} = -c\theta_{13} s\theta_4 r_{11} - s\theta_{13} s\theta_4 r_{21} + c\theta_4 r_{31} \quad (29)$$

$$j_{CC} = c\theta_4 c\theta_{13} r_{12} + s\theta_{13} c\theta_4 r_{22} + s\theta_4 r_{32} \quad (30)$$

$$k_{CC} = -c\theta_{13} s\theta_4 r_{12} - s\theta_{13} s\theta_4 r_{22} + c\theta_4 r_{32} \quad (31)$$

## 6-CR Robotu

Tablo 3.8'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} . & . & . & d_4 c\theta_1 s\theta_3 + l_2 c\theta_1 \\ . & . & . & d_4 s\theta_1 s\theta_3 + l_2 s\theta_1 \\ . & . & . & -d_4 c\theta_3 + d_2 \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

CR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} & c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_3 + l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_3 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{33}
\end{aligned}$$

CR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.7'nin uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} i_{CR} r_{11} + j_{CR} r_{21} + s\theta_3 c\theta_4 r_{31} & i_{CR} r_{12} + j_{CR} r_{22} + s\theta_3 c\theta_4 r_{32} & \cdot & \cdot \\ k_{CR} r_{11} - l_{CR} r_{21} - s\theta_3 s\theta_4 r_{31} & k_{CR} r_{12} - l_{CR} r_{22} - s\theta_3 s\theta_4 r_{32} & \cdot & \cdot \\ c\theta_1 s\theta_3 r_{11} - s\theta_1 s\theta_3 r_{21} - c\theta_3 r_{31} & c\theta_1 s\theta_3 r_{12} - s\theta_1 s\theta_3 r_{22} - c\theta_3 r_{32} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & i_{CR} r_{13} + j_{CR} r_{23} + s\theta_3 c\theta_4 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & k_{CR} r_{13} - l_{CR} r_{23} - s\theta_3 s\theta_4 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & c\theta_1 s\theta_3 r_{13} - s\theta_1 s\theta_3 r_{23} - c\theta_3 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} c\theta_5 c\theta_6 & -c\theta_5 s\theta_6 & s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & \cdot \\ -s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{34}
\end{aligned}$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$i_{CR} = c\theta_1 c\theta_3 c\theta_4 + s\theta_1 s\theta_4 \tag{35}$$

$$j_{CR} = s\theta_1 c\theta_3 c\theta_4 - s\theta_1 s\theta_4 \tag{36}$$

$$k_{CR} = -c\theta_1 c\theta_3 s\theta_4 + s\theta_1 c\theta_4 \tag{37}$$

$$l_{CR} = s\theta_1 c\theta_3 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_4 \tag{38}$$

## 7-NS Robotu

Tablo 3.9'dan elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
 {}^0_5T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3+l_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -c\theta_1s\theta_2(l_2+d_3+d_4)+d_2s\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_1s\theta_2(l_2+d_3+d_4)-d_2c\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_2(l_2+d_3+d_4)+h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (39)
 \end{aligned}$$

NS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.5'in uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_2(c\theta_1p_x+s\theta_1p_y)+s\theta_2(p_z-h_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_2(c\theta_1p_x+s\theta_1p_y)+c\theta_2(p_z-h_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & s\theta_1p_x-c\theta_1p_y-d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_2+d_3+d_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

NS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} l_{NS} & n_{NS} & c\theta_1c\theta_2r_{13}+s\theta_1c\theta_2r_{23}+s\theta_2r_{33} & \cdot \\ -s\theta_1r_{11}+c\theta_1r_{21} & -s\theta_1r_{12}+c\theta_1r_{22} & -s\theta_1r_{13}+c\theta_1r_{23} & \cdot \\ m_{NS} & p_{NS} & -c\theta_1s\theta_2r_{13}-s\theta_1s\theta_2r_{23}+c\theta_2r_{33} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & -c\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & -s\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$l_{NS} = c\theta_1 c\theta_2 r_{11} + s\theta_1 c\theta_2 r_{21} + s\theta_2 r_{31} \quad (42)$$

$$m_{NS} = -c\theta_1 s\theta_2 r_{11} - s\theta_1 s\theta_2 r_{21} + c\theta_2 r_{31} \quad (43)$$

$$n_{NS} = c\theta_1 c\theta_2 r_{12} + s\theta_1 c\theta_2 r_{22} + s\theta_2 r_{32} \quad (44)$$

$$p_{NS} = -c\theta_1 s\theta_2 r_{12} - s\theta_1 s\theta_2 r_{22} + c\theta_2 r_{32} \quad (45)$$

## 8-NN Robotu

Tablo 3.10'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -d_4(-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3) - l_2 c\theta_1 s\theta_2 + d_2 s\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4(-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3) - l_2 s\theta_1 s\theta_2 - d_2 c\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_2 s\theta_3 + l_2 c\theta_2 + h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

NN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} & c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_4 c\theta_2 s\theta_3 - l_2 s\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_3 - d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_2 s\theta_3 + l_2 c\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{47}
\end{aligned}$$

Matris elemanları (1,4), (2,4) ve (3,4)'ün karşılıklı kareleri alınıp alt alta toplanmasıyla üçüncü eklem değişkeni bulunur.

$$c^2\theta_1 p_x^2 + s^2\theta_1 p_y^2 + 2c\theta_1 s\theta_1 p_x p_y = d_4^2 c^2\theta_2 s^2\theta_3 + l_2^2 s^2\theta_2 - 2d_4 l_2 c\theta_2 s\theta_2 s\theta_3$$

$$s^2\theta_1 p_x^2 + c^2\theta_1 p_y^2 - 2s\theta_1 p_x c\theta_1 p_y = d_4^2 c^2\theta_3 + d_2^2 + 2d_4 d_2 c\theta_3$$

$$(p_z - h_1)^2 = d_4^2 s^2\theta_2 s^2\theta_3 + l_2^2 c^2\theta_2 + 2d_4 l_2 s\theta_2 c\theta_2 s\theta_3$$

$$\begin{aligned}
p_x^2 (s^2\theta_1 + c^2\theta_1) + p_y^2 (s^2\theta_1 + c^2\theta_1) + (p_z - h_1)^2 &= d_4^2 s^2\theta_3 (c^2\theta_2 + s^2\theta_2) \\
&+ l_2^2 (c^2\theta_2 + s^2\theta_2) + d_4^2 c^2\theta_3 + d_2^2 + 2d_4 d_2 c\theta_3
\end{aligned}$$

$$p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 = d_4^2 s^2\theta_3 + l_2^2 + d_4^2 c^2\theta_3 + d_2^2 + 2d_4 d_2 c\theta_3$$

$$p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 = d_4^2 (s^2\theta_3 + c^2\theta_3) + l_2^2 + d_2^2 + 2d_4 d_2 c\theta_3$$

$$p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 = d_4^2 + l_2^2 + d_2^2 + 2d_4 d_2 c\theta_3$$

$$c\theta_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_4 d_2} \tag{48}$$

NN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} j_{NN} r_{11} + k_{NN} r_{21} + s\theta_2 c\theta_3 r_{31} & j_{NN} r_{12} + k_{NN} r_{22} + s\theta_2 c\theta_3 r_{32} & \cdot & \cdot \\ l_{NN} r_{11} + m_{NN} r_{21} - s\theta_2 s\theta_3 r_{31} & l_{NN} r_{12} + m_{NN} r_{22} - s\theta_2 s\theta_3 r_{32} & \cdot & \cdot \\ -c\theta_1 s\theta_2 r_{11} - s\theta_1 s\theta_2 r_{21} + c\theta_2 r_{31} & -c\theta_1 s\theta_2 r_{12} - s\theta_1 s\theta_2 r_{22} + c\theta_2 r_{32} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & j_{NN}r_{13} + k_{NN}r_{23} + s\theta_2 c\theta_3 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & l_{NN}r_{13} + m_{NN}r_{23} - s\theta_2 s\theta_3 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -c\theta_1 s\theta_2 r_{13} - s\theta_1 s\theta_2 r_{23} + c\theta_2 r_{33} & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & -c\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ -s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 s\theta_6 & -c\theta_5 & \cdot \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & -s\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$j_{NN} = c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3 \quad (50)$$

$$k_{NN} = s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3 \quad (51)$$

$$l_{NN} = -c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3 \quad (52)$$

$$m_{NN} = -s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3 \quad (53)$$

## 9-NR Robotu

Tablo 3.11'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -\sin\theta_4 & -\cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_1 s\theta_{23} + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 s\theta_1 s\theta_{23} + l_2 s\theta_1 c\theta_2 + d_2 c\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_{23} - l_2 s\theta_2 + h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

NR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} & c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 s\theta_{23} + l_2 c\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_{23} - l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (55)
 \end{aligned}$$

Matris elemanları (1,4), (2,4) ve (3,4)'ün karşılıklı kareleri alınıp alt alta toplanmasıyla üçüncü eklem değişkeni bulunur.

$$\begin{aligned}
 (c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y)^2 &= d_4^2 s^2 \theta_{23} + l_2^2 c^2 \theta_2 - 2d_4 l_2 c\theta_2 s\theta_{23} \\
 (-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y)^2 &= d_4^2 \\
 (p_z - h_1)^2 &= d_4^2 c^2 \theta_{23} + l_2^2 s^2 \theta_2 + 2d_4 l_2 s\theta_2 c\theta_{23} \\
 (p_x^2 + p_y^2)(s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + (p_z - h_1)^2 &= d_4^2 (s^2 \theta_{23} + c^2 \theta_{23}) \\
 &\quad + l_2^2 (c^2 \theta_2 + s^2 \theta_2) + d_2^2 - 2d_4 l_2 c\theta_2 s\theta_{23} + 2d_4 l_2 s\theta_2 c\theta_{23} \\
 p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 &= d_4^2 + l_2^2 + d_2^2 + 2d_4 l_2 (s\theta_2 c\theta_{23} - c\theta_2 s\theta_{23}) \\
 p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2 &= 2d_4 l_2 (c\theta_2 s\theta_2 c\theta_3 - s^2 \theta_2 s\theta_3 \\
 &\quad - c\theta_2 s\theta_2 c\theta_3 - c^2 \theta_2 s\theta_3) \\
 p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2 &= -2d_4 l_2 s\theta_3 (s^2 \theta_2 + c^2 \theta_2) \\
 s\theta_3 &= -\frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_4 l_2} \quad (56)
 \end{aligned}$$

NR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilen matrisler.



$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cc|cc}
c\theta_1 c\theta_{23} r_{11} + s\theta_1 c\theta_{23} r_{21} - s\theta_{23} r_{31} & c\theta_1 c\theta_{23} r_{12} + s\theta_1 c\theta_{23} r_{22} - s\theta_{23} r_{32} & \cdot & \cdot \\
-c\theta_1 s\theta_{23} r_{11} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{21} - c\theta_{23} r_{31} & -c\theta_1 c\theta_{23} r_{12} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{22} - c\theta_{23} r_{32} & \cdot & \cdot \\
s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot
\end{array} \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c}
\cdot & \cdot & c\theta_1 c\theta_{23} r_{13} + s\theta_1 c\theta_{23} r_{23} - s\theta_{23} r_{33} & \cdot \\
\cdot & \cdot & -c\theta_1 s\theta_{23} r_{13} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{23} - c\theta_{23} r_{33} & \cdot \\
\cdot & \cdot & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 1
\end{array} \right] \\
& = \left[ \begin{array}{ccc|cc}
c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & c\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\
-s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & \cdot \\
-s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - c\theta_4 s\theta_6 & s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - c\theta_4 c\theta_6 & -s\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right] \quad (57)
\end{aligned}$$

## 10-RC Robotu

Tablo 3.12'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
{}^0_6T &= \left[ \begin{array}{cccc}
\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\
\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & h_1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc}
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -d_2 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc}
\cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\
\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & l_2 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right] \\
& \left[ \begin{array}{cccc}
\cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & d_4 \\
-\sin\theta_4 & -\cos\theta_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc}
\cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
\sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc}
\cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
-\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right] \\
& = \left[ \begin{array}{cccc}
\cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_1 c\theta_3 + (l_2 + d_2) s\theta_1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & -d_4 s\theta_1 c\theta_3 - (l_2 + d_2) c\theta_1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & -d_4 s\theta_3 + h_1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{array} \right] \quad (58)
\end{aligned}$$

RC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} & c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -(l_2 + d_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{59}
\end{aligned}$$

RC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -c\theta_1 s\theta_3 r_{11} - s\theta_1 s\theta_3 r_{21} + c\theta_3 r_{31} & -c\theta_1 s\theta_3 r_{12} - s\theta_1 s\theta_3 r_{22} + c\theta_3 r_{32} & \cdot & \cdot \\ -c\theta_1 c\theta_3 r_{11} - s\theta_1 c\theta_3 r_{21} - s\theta_3 r_{31} & -c\theta_1 c\theta_3 r_{12} - s\theta_1 c\theta_3 r_{22} - s\theta_3 r_{32} & \cdot & \cdot \\ s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21} & s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -c\theta_1 s\theta_3 r_{13} - s\theta_1 s\theta_3 r_{23} + c\theta_3 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -c\theta_1 c\theta_3 r_{13} - s\theta_1 c\theta_3 r_{23} - s\theta_3 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & -c\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & \cdot \\ -s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - c\theta_4 s\theta_6 & s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - c\theta_4 c\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{60}
\end{aligned}$$

## 11-RN Robotu

Tablo 3.13'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \dots & d_4 c\theta_{12} s\theta_3 + l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1 \\ \dots & d_4 s\theta_{12} s\theta_3 + l_2 s\theta_{12} + l_1 s\theta_1 \\ \dots & -d_4 c\theta_3 + h_1 \\ \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (61)
\end{aligned}$$

RN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} & c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \dots & d_4 c\theta_2 s\theta_3 + l_2 c\theta_2 + l_1 \\ \dots & d_4 s\theta_2 s\theta_3 + l_2 s\theta_2 \\ \dots & -d_4 c\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (62)
\end{aligned}$$

Matris elemanları (1,4) ve (2,4)'ün karşılıklı kareleri alınıp alt alta toplanmasıyla birinci eklem değişkeni bulunur.

$$\begin{aligned}
c^2\theta_1 p_x^2 + s^2\theta_1 p_y^2 + 2c\theta_1 s\theta_1 p_x p_y + l_1^2 - 2c\theta_1 p_x l_1 - 2s\theta_1 p_y l_1 &= c^2\theta_2 (d_4^2 s^2\theta_3 + l_2^2) \\
s^2\theta_1 p_x^2 + c^2\theta_1 p_y^2 - 2s\theta_1 p_x c\theta_1 p_y &= s^2\theta_2 (d_4^2 s^2\theta_3 + l_2^2) \\
p_x^2 (s^2\theta_1 + c^2\theta_1) + p_y^2 (s^2\theta_1 + c^2\theta_1) + l_1^2 - 2c\theta_1 p_x l_1 - 2s\theta_1 p_y l_1 & \\
&= (s^2\theta_2 + c^2\theta_2) (d_4 s^2\theta_3 + l_2)^2 \\
p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - 2c\theta_1 p_x l_1 - 2s\theta_1 p_y l_1 &= (d_4 s\theta_3 + l_2)^2 \\
-2c\theta_1 p_x l_1 - 2s\theta_1 p_y l_1 &= (d_4 s\theta_3 + l_2)^2 - p_x^2 - p_y^2 - l_1^2 \\
2l_1 p_x c\theta_1 + 2p_y l_1 s\theta_1 &= p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - (d_4 s\theta_3 + l_2)^2 \quad (63)
\end{aligned}$$

RN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} c\theta_3 c\theta_{12} r_{11} + c\theta_3 s\theta_{12} r_{21} + s\theta_3 r_{31} & c\theta_3 c\theta_{12} r_{12} + c\theta_3 s\theta_{12} r_{22} + s\theta_3 r_{32} & \cdot & \cdot \\ -s\theta_3 c\theta_{12} r_{11} - s\theta_3 s\theta_{12} r_{21} + c\theta_3 r_{31} & -s\theta_3 c\theta_{12} r_{12} - s\theta_3 s\theta_{12} r_{22} + c\theta_3 r_{32} & \cdot & \cdot \\ s\theta_{12} r_{11} - c\theta_{12} r_{21} & s\theta_{12} r_{12} - c\theta_{12} r_{22} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & c\theta_3 c\theta_{12} r_{13} + c\theta_3 s\theta_{12} r_{23} + s\theta_3 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -s\theta_3 c\theta_{12} r_{13} - s\theta_3 s\theta_{12} r_{23} + c\theta_3 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & s\theta_{12} r_{13} - c\theta_{12} r_{23} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & c\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & -c\theta_5 & \cdot \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)
 \end{aligned}$$

## 12-RR Robotu

Tablo 3.14'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
 {}^0_6T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -(l_2 + d_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_1 c\theta_3 + (l_2 + d_2) s\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_1 c\theta_3 - (l_2 + d_2) c\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_3 + h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (65)
 \end{aligned}$$

RR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} & c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_3 - (l_2 + d_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{66}
\end{aligned}$$

RR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -s\theta_1 s\theta_3 r_{11} + c\theta_1 s\theta_3 r_{21} + c\theta_3 r_{31} & -s\theta_1 s\theta_3 r_{12} + c\theta_1 s\theta_3 r_{22} + c\theta_3 r_{32} & \cdot & \cdot \\ -s\theta_1 c\theta_3 r_{11} + c\theta_1 c\theta_3 r_{21} - s\theta_3 r_{31} & -s\theta_1 c\theta_3 r_{12} + c\theta_1 c\theta_3 r_{22} - s\theta_3 r_{32} & \cdot & \cdot \\ -c\theta_1 r_{11} - s\theta_1 r_{21} & -c\theta_1 r_{12} - s\theta_1 r_{22} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -s\theta_1 s\theta_3 r_{13} + c\theta_1 s\theta_3 r_{23} + c\theta_3 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -s\theta_1 c\theta_3 r_{13} + c\theta_1 c\theta_3 r_{23} - s\theta_3 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -c\theta_1 r_{13} - s\theta_1 r_{23} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & -c\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ -s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 s\theta_6 & -c\theta_5 & \cdot \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & -s\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{67}
\end{aligned}$$

### 13-RS Robotu

Tablo 3.15'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_2 s\theta_{12} + l_1 s\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & h_1 - d_3 - d_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

RS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} & c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & l_2 c\theta_2 + l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_2 s\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Matris elemanları (1,4) ve (2,4)'ün karşılıklı kareleri alınıp alt alta toplanmasıyla birinci eklem değişkeni bulunur.

$$c^2\theta_1 p_x^2 + s^2\theta_1 p_y^2 + 2c\theta_1 s\theta_1 p_x p_y - 2c\theta_1 p_x l_1 - 2s\theta_1 p_y l_1 + l_1^2 = l_2^2 c^2\theta_2 \\
s^2\theta_1 p_x^2 + c^2\theta_1 p_y^2 - 2s\theta_1 p_x c\theta_1 p_y = l_2^2 s^2\theta_2$$

$$p_x^2 (s^2\theta_1 + c^2\theta_1) + p_y^2 (s^2\theta_1 + c^2\theta_1) - 2c\theta_1 p_x l_1 - 2s\theta_1 p_y l_1 + l_1^2 = l_2^2 (c^2\theta_2 + s^2\theta_2) \\
2p_x l_1 c\theta_1 + 2p_y l_1 s\theta_1 = p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2 \quad (70)$$

RS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.5'in uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c\theta_{12}r_{11} + s\theta_{12}r_{21} & c\theta_{12}r_{12} + s\theta_{12}r_{22} & c\theta_{12}r_{13} + s\theta_{12}r_{23} & \cdot \\ -s\theta_{12}r_{11} + c\theta_{12}r_{21} & -s\theta_{12}r_{12} + c\theta_{12}r_{22} & -s\theta_{12}r_{13} + c\theta_{12}r_{23} & \cdot \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6 & -c\theta_4c\theta_5s\theta_6 - s\theta_4c\theta_6 & -c\theta_4s\theta_5 & \cdot \\ -s\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6 & s\theta_4c\theta_5s\theta_6 - c\theta_4c\theta_6 & s\theta_4s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_5c\theta_6 & -s\theta_5s\theta_6 & -c\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (71)
\end{aligned}$$

#### 14-SR Robotu

Tablo 3.16'dan elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
{}^0_6T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_4s\theta_{23} + l_2c\theta_2 + l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4c\theta_{23} + l_2s\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (72)
\end{aligned}$$

SR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.5'in uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_2(p_x - l_1) + s\theta_2p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_2(p_x - l_1) + c\theta_2p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_z - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_4s\theta_3 + l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4c\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (73)$$

Matris elemanları (1,4) ve (2,4)'ün karşılıklı kareleri alınıp alt alta toplanmasıyla ikinci eklem değişkeni bulunur.

$$\begin{aligned}
 (p_x^2 + p_y^2)(s^2\theta_2 + c^2\theta_2) - 2l_1p_x(s^2\theta_2 + c^2\theta_2) - 2l_2p_x c\theta_2 + l_1^2(c^2\theta_2 + s^2\theta_2) \\
 - 2l_2p_y s\theta_2 + 2l_1l_2c\theta_2 + l_2^2 = d_4^2 \\
 (p_x^2 + p_y^2) - 2l_1p_x - 2l_2p_x c\theta_2 + l_1^2 - 2l_2p_y s\theta_2 + 2l_1l_2c\theta_2 + l_2^2 = d_4^2 \\
 (2l_1l_2 - 2l_2p_x)c\theta_2 - 2l_2p_y s\theta_2 = d_4^2 + 2l_1p_x - p_x^2 - p_y^2 - l_1^2 - l_2^2
 \end{aligned} \tag{74}$$

SR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.7'nin uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_{23} r_{11} + c\theta_4 s\theta_{23} r_{21} + s\theta_4 r_{31} & c\theta_4 c\theta_{23} r_{12} + c\theta_4 s\theta_{23} r_{22} + s\theta_4 r_{32} & \cdot & \cdot \\ -s\theta_4 c\theta_{23} r_{11} - s\theta_4 s\theta_{23} r_{21} + c\theta_4 r_{31} & -s\theta_4 c\theta_{23} r_{12} - s\theta_4 s\theta_{23} r_{22} + c\theta_4 r_{32} & \cdot & \cdot \\ s\theta_{23} r_{11} - c\theta_{23} r_{21} & s\theta_{23} r_{12} - c\theta_{23} r_{22} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & c\theta_4 c\theta_{23} r_{13} + c\theta_4 s\theta_{23} r_{23} + s\theta_4 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -s\theta_4 c\theta_{23} r_{13} - s\theta_4 s\theta_{23} r_{23} + c\theta_4 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & s\theta_{23} r_{13} - c\theta_{23} r_{23} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} c\theta_5 c\theta_6 & -c\theta_5 s\theta_6 & s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & \cdot \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{75}
 \end{aligned}$$

## 15-CN Robotu

Tablo 3.17'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & h_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_4 c\theta_2 s\theta_3 - l_1 s\theta_2 + h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_2 s\theta_3 + l_1 c\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_3 + d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (76)$$

CN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.5'in uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_2 r_{11} + s\theta_2 r_{21} & c\theta_2 r_{12} + s\theta_2 r_{22} & c\theta_2 r_{13} + s\theta_2 r_{23} & c\theta_2 (p_x - h_1) + s\theta_2 p_y \\ -s\theta_2 r_{11} + c\theta_2 r_{21} & -s\theta_2 r_{12} + c\theta_2 r_{22} & -s\theta_2 r_{13} + c\theta_2 r_{23} & -s\theta_2 (p_x - h_1) + c\theta_2 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_4 s\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_4 c\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

CN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 r_{11} + s\theta_2 c\theta_3 r_{21} + s\theta_3 r_{31} & c\theta_2 c\theta_3 r_{12} + s\theta_2 c\theta_3 r_{22} + s\theta_3 r_{32} & \cdot & \cdot \\ -c\theta_2 s\theta_3 r_{11} - s\theta_2 s\theta_3 r_{21} + c\theta_3 r_{31} & -c\theta_2 s\theta_3 r_{12} - s\theta_2 s\theta_3 r_{22} + c\theta_3 r_{32} & \cdot & \cdot \\ s\theta_2 r_{11} - c\theta_2 r_{21} & s\theta_2 r_{12} - c\theta_2 r_{22} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & c\theta_2 c\theta_3 r_{13} + s\theta_2 c\theta_3 r_{23} + s\theta_3 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -c\theta_2 s\theta_3 r_{13} - s\theta_2 s\theta_3 r_{23} + c\theta_3 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & s\theta_2 r_{13} - c\theta_2 r_{23} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & c\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & -c\theta_5 & \cdot \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (78)$$

## 16-NC Robotu

Tablo 3.18'deki D-H değişkenlerinden yararlanarak elde edilen ileri yön kinematik matrisleri.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & (d_2 + d_3 + d_4)s\theta_1 + l_2 c\theta_1 c\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -(d_2 + d_3 + d_4)c\theta_1 + l_2 s\theta_1 c\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_2 s\theta_2 + h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

NC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} & c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & l_2 c\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_2 - d_3 - d_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_2 s\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

NC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 r_{11} + s\theta_1 c\theta_2 r_{21} + s\theta_2 r_{31} & c\theta_1 c\theta_2 r_{12} + s\theta_1 c\theta_2 r_{22} + s\theta_2 r_{32} & \cdot & \cdot \\ -c\theta_1 s\theta_2 r_{11} - s\theta_1 s\theta_2 r_{21} + c\theta_2 r_{31} & -c\theta_1 s\theta_2 r_{12} - s\theta_1 s\theta_2 r_{22} + c\theta_2 r_{32} & \cdot & \cdot \\ s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21} & s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & c\theta_1 c\theta_2 r_{13} + s\theta_1 c\theta_2 r_{23} + s\theta_2 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -c\theta_1 s\theta_2 r_{13} - s\theta_1 s\theta_2 r_{23} + c\theta_2 r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & -c\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & -s\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (81)
 \end{aligned}$$

**EK E :EKLEM KAÇIKLILIKLI BİLEKLİ ENDÜSTRİYEL  
ROBOTLARIN TERS KİNEMATİKLERİNİN ÇIKARILMASINDA  
KULLANILAN ARA İŞLEMLER**

**1-SS Robotu**

Tablo 3.20'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & -l_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^0_6T = \begin{bmatrix} \dots & d_6 c\theta_5 + d_3 + d_4 \\ \dots & -d_6 s\theta_4 s\theta_5 - l_4 s\theta_4 + d_2 \\ \dots & d_6 c\theta_4 s\theta_5 + l_4 c\theta_4 + d_1 \\ \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

SS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & a_{SS} \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & -s\theta_4 s\theta_5 & b_{SS} \\ -c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + s\theta_4 s\theta_6 & c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + s\theta_4 c\theta_6 & c\theta_4 s\theta_5 & c_{SS} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Denklemden kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{SS} = d_6 c\theta_5 + d_3 + d_4 \quad (3)$$

$$b_{SS} = -d_6 s\theta_4 s\theta_5 - l_4 s\theta_4 + d_2 \quad (4)$$

$$c_{SS} = d_6 c\theta_4 s\theta_5 + l_4 c\theta_4 \quad (5)$$

## 2-SC Robotu

Tablo 3.21'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_6 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_6 c\theta_{34} s\theta_5 + l_4 c\theta_{34} + l_3 c\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6 c\theta_5 + l_1 + d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6 s\theta_{34} s\theta_5 + l_4 s\theta_{34} + l_3 s\theta_3 + d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

SC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_{34}c\theta_5 & -c\theta_{34}s\theta_5 & s\theta_{34} & l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 \\ s\theta_{34}c\theta_5 & -s\theta_{34}s\theta_5 & -c\theta_{34} & l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} r_{11}c\theta_6 - r_{12}s\theta_6 & r_{13} & -r_{11}s\theta_6 - r_{12}c\theta_6 & r_{13}d_6 + p_x \\ r_{31}c\theta_6 - r_{32}s\theta_6 & r_{33} & -r_{31}s\theta_6 - r_{32}c\theta_6 & r_{33}d_6 + p_z - d_1 \\ -r_{21}c\theta_6 + r_{22}s\theta_6 & -r_{23} & r_{21}s\theta_6 + r_{22}c\theta_6 & -r_{23}d_6 - p_y + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Beşinci eklem açısının sinüs bileşeninin bulunması için (1,2) ve (2,2) matris elemanlarının karşılıklı kareleri alınıp alt alta toplanır.

$$\begin{aligned}
c^2\theta_{34}s^2\theta_5 &= r_{13}^2 \\
s^2\theta_{34}s^2\theta_5 &= r_{33}^2 \\
s^2\theta_5 &= r_{13}^2 + r_{33}^2 \\
s\theta_5 &= \mp\sqrt{r_{13}^2 + r_{33}^2} \quad (8)
\end{aligned}$$

SC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.5'in uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & p_x \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_z - d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -p_y + d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_6c\theta_{34}s\theta_5 + l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6s\theta_{34}s\theta_5 + l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_6c\theta_5 - l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Denklem 3.9'dan elde edilen  $c\theta_{34}$  Denklem 3.5'deki (1,4) karşılıklı matris elemanlarında yerine konur.

$$\frac{r_{13}d_6 + p_x - l_3c\theta_3}{l_4}(d_6s\theta_5 + l_4) + c\theta_3l_3 = p_x$$

$$(r_{13}d_6 + p_x - l_3c\theta_3)(d_6s\theta_5 + l_4) + c\theta_3l_3l_4 = l_4p_x$$

$$(r_{13}d_6 + p_x - l_3c\theta_3)(d_6s\theta_5 + l_4) + c\theta_3l_3l_4 = l_4p_x$$

$$\begin{aligned}
r_{13}d_6^2s\theta_5 + p_x d_6 s\theta_5 - l_3 d_6 s\theta_5 c\theta_3 + r_{13}d_6 l_4 + p_x l_4 - l_3 l_4 c\theta_3 + l_3 l_4 c\theta_3 &= l_4 p_x \\
r_{13}d_6^2s\theta_5 + p_x d_6 s\theta_5 - l_3 d_6 s\theta_5 c\theta_3 + r_{13}d_6 l_4 &= 0 \\
c\theta_3 &= \frac{r_{13}d_6^2s\theta_5 + p_x d_6 s\theta_5 + r_{13}d_6 l_4}{l_3 d_6 s\theta_5}
\end{aligned} \tag{10}$$

### 3-SN Robotu

Tablo 3.22'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
{}^0_4T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_6T &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_6(c\theta_2c\theta_{34}s\theta_5 + s\theta_2c\theta_5) + l_4c\theta_2c\theta_{34} + l_3c\theta_2c\theta_3 - l_2s\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6s\theta_{34}s\theta_5 + l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 + d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6(s\theta_2c\theta_{34}s\theta_5 - c\theta_2c\theta_5) + l_4s\theta_2c\theta_{34} + l_3s\theta_2c\theta_3 + l_2c\theta_2 + d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \tag{11}
\end{aligned}$$

SN robotunun  $d_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve  $\theta_4$  eklem değişkenlerini sayısal olarak çözmek için Denklem 3.11 uygulanarak elde edilen denklem sistemi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
l_3 \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} - l_2 \frac{2x_2}{1+x_2^2} - p_x + d_6 r_{13} \\
+ l_4 \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \left( \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} - \frac{2x_3}{1+x_3^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

$$l_3 \frac{2x_3}{1+x_3^2} + d_2 - p_y + d_6 r_{23} + l_4 \left( \frac{2x_3}{1+x_3^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} + \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2} \right) = 0 \quad (13)$$

$$l_3 \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} + l_2 \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} + d_1 - p_z + d_6 r_{33} + l_4 \frac{2x_2}{1+x_2^2} \left( \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} - \frac{2x_3}{1+x_3^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2} \right) = 0 \quad (14)$$

SN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_4(d_6 s\theta_5 + l_4) + l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & s\theta_4(d_6 s\theta_5 + l_4) \\ -s\theta_2 r_{11} + c\theta_2 r_{31} & -s\theta_2 r_{12} + c\theta_2 r_{32} & -s\theta_2 r_{13} + c\theta_2 r_{33} & -d_6 c\theta_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_3(c\theta_2 p_x + s\theta_2 p_z - s\theta_2 d_1) + s\theta_3(p_y - d_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_3(c\theta_2 p_x + s\theta_2 p_z - s\theta_2 d_1) + c\theta_3(p_y - d_2) \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & -c\theta_5 & -s\theta_2 p_x + c\theta_2(p_z - d_1) - l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

#### 4-CS Robotu

Tablo 3.23'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_6(c\theta_1c\theta_4s\theta_5 + s\theta_1c\theta_5) + l_4c\theta_1c\theta_4 + l_1c\theta_1 + d_3s\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6(s\theta_1c\theta_4s\theta_5 - c\theta_1c\theta_5) + l_4s\theta_1c\theta_4 + l_1s\theta_1 - d_3c\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6s\theta_4s\theta_5 + l_4s\theta_4 + d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

CS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_4c\theta_5 & -c\theta_4s\theta_5 & -s\theta_4 & l_4c\theta_4 + l_1 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & -d_3 \\ s\theta_4c\theta_5 & -s\theta_4s\theta_5 & c\theta_4 & l_4s\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{CS} & -c\theta_1r_{13} - s\theta_1r_{23} & i_{CS} & -(c\theta_1r_{13} + s\theta_1r_{23})d_6 + c\theta_1p_x + s\theta_1p_y \\ j_{CS} & s\theta_1r_{13} - c\theta_1r_{23} & l_{CS} & -(-s\theta_1r_{13} + c\theta_1r_{23})d_6 - s\theta_1p_x + c\theta_1p_y \\ c\theta_6r_{31} - s\theta_6r_{32} & -r_{33} & m_{CS} & -r_{33}d_6 + p_z - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$h_{CS} = (c\theta_1r_{11} + s\theta_1r_{21})c\theta_6 - (c\theta_1r_{12} + s\theta_1r_{22})s\theta_6 \quad (18)$$

$$j_{CS} = (-s\theta_1r_{11} + c\theta_1r_{21})c\theta_6 - (-s\theta_1r_{12} + c\theta_1r_{22})s\theta_6 \quad (19)$$

$$i_{CS} = (c\theta_1r_{11} + s\theta_1r_{21})s\theta_6 + (c\theta_1r_{12} + s\theta_1r_{22})c\theta_6 \quad (20)$$

$$l_{CS} = (-s\theta_1r_{11} + c\theta_1r_{21})s\theta_6 + (-s\theta_1r_{12} + c\theta_1r_{22})c\theta_6 \quad (21)$$

$$m_{CS} = s\theta_6r_{31} + c\theta_6r_{32} \quad (22)$$

Raghavan ve Roth çözümü uygulayarak beşinci eklem değişkeni Denklem 14'deki karşılıklı matris elemanlarının aşağıdaki gibi düzenlenmesiyle bulunur.

$$(1,4) \quad l_4c\theta_4 + l_1 + (c\theta_1r_{13} + s\theta_1r_{23})d_6 - c\theta_1p_x - s\theta_1p_y = 0 \quad (23)$$

$$(2,2) \quad s\theta_1r_{13} - c\theta_1r_{23} - c\theta_5 = 0 \quad (24)$$

$$(3,3) \quad s\theta_6r_{31} + c\theta_6r_{32} - c\theta_4 = 0 \quad (25)$$

Denklem Raghavan ve Roth çözümünde yer alan  $\sin\theta_i = \frac{2x_i}{1+x_i^2}$  ve

$\cos\theta_i = \frac{1-x_i^2}{1+x_i^2}$  dönüşümü her üç denklem için yazılır.

$$(1,4) \quad l_4 \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} + l_1 + \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} r_{13} d_6 + \frac{2x_1}{1+x_1^2} r_{23} d_6 - \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} p_x - \frac{2x_1}{1+x_1^2} p_y = 0 \quad (26)$$

$$(2,2) \quad r_{13} \frac{2x_1}{1+x_1^2} - r_{23} \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} - \frac{1-x_5^2}{1+x_5^2} = 0 \quad (27)$$

$$(3,3) \quad r_{31} \frac{2x_6}{1+x_6^2} + r_{32} \frac{1-x_6^2}{1+x_6^2} - \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} = 0 \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ 0 & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5^2 \\ x_4^2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (29)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a = x_1^2 (l_1 - l_4 - r_{13} d_6 + p_x) + x_1 (2r_{23} d_6 - 2) + l_1 - l_4 + r_{13} d_6 - p_x \quad (30)$$

$$b = x_1^2 (l_1 + l_4 - r_{13} d_6 + p_x) + x_1 (2r_{23} d_6 - 2p_y) + l_1 + l_4 + r_{13} d_6 - p_x \quad (31)$$

$$c = x_1^2 (1 + r_{23}) + 2r_{13} x_1 - r_{23} + 1 \quad (32)$$

$$d = x_1^2 (-1 + r_{23}) + 2r_{13} x_1 - 1 - r_{23} \quad (33)$$

$$e = x_6^2 (1 - r_{32}) + 2r_{13} x_6 + 1 + r_{32} \quad (34)$$

$$f = x_6^2 (-1 - r_{32}) + 2r_{13} x_6 - 1 + r_{32} \quad (35)$$

Denklem 43'deki sistemin sol tarafındaki 3x3 matrisin determinanti sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\Delta = -c(af - be) = 0 \text{ ise } c = 0 \text{ veya } (af - be) = 0 \quad (36)$$

Dikkat edildiği gibi denklemde iki adet çarpan bulunmaktadır. Bu çarpanlardan tek eklem değişkeni içeren  $c$  ifadesi alınrsa sistemin kökleri daha kolay bulunur.

$$x_1^2(1+r_{23})+2r_{13}x_1-r_{23}+1=0 \text{ ise } x_1 = \frac{1}{2(1+r_{23})}(-2r_{13} \pm 2\sqrt{r_{23}^2-1+r_{13}^2}) \quad (37)$$

Bu ifadenin kökleri gerçek olabilmesi için  $\sqrt{r_{23}^2-1+r_{13}^2} > 0$  olmalıdır.

$r_{13}^2+r_{23}^2+r_{33}^2=1$  bilindiğine göre,  $r_{13}^2+r_{23}^2=1$  olursa karekökün içerisi sıfır olarak bir gerçek kök oluşur.  $r_{13}^2+r_{23}^2=1$  ise  $r_{33}=0$  olur. Denklem 37'de (3,2) karşılıklı matris elemanları eşitlenmesiyle aşağıdaki ifade elde edilir ( $-s\theta_4s\theta_5 = -r_{33}$  ise  $s\theta_4 = 0$  veya  $s\theta_5 = 0$  olur).

$$s\theta_5 = 0 \quad (38)$$

## 5-CC Robotu

Tablo 3.24'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} . & . & . & d_6(c\theta_{13}c\theta_4 - s\theta_{13}s\theta_4)s\theta_5 + l_4(c\theta_{13}c\theta_4 - s\theta_{13}s\theta_4) + l_3c\theta_{13} + l_2c\theta_1 \\ . & . & . & d_6(s\theta_{13}c\theta_4 + c\theta_{13}s\theta_4)s\theta_5 + l_4(s\theta_{13}c\theta_4 + c\theta_{13}s\theta_4) + l_3s\theta_{13} + l_2s\theta_1 \\ . & . & . & -d_6c\theta_5 + d_2 \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

CC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} c\theta_{34}c\theta_5 & -c\theta_{34}s\theta_5 & s\theta_{34} & l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 + l_2 \\ s\theta_{34}c\theta_5 & -s\theta_{34}s\theta_5 & -c\theta_{34} & l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} \cdot & -c\theta_1r_{13} - s\theta_1r_{23} & \cdot & c\theta_1(p_x - r_{13}d_6) + s\theta_1(p_y - r_{23}d_6) \\ \cdot & s\theta_1r_{13} - c\theta_1r_{23} & \cdot & -s\theta_1(p_x - r_{13}d_6) + c\theta_1(p_y - r_{23}d_6) \\ l_{CC} & -r_{33} & s\theta_6r_{31} + c\theta_6r_{32} & -r_{33}d_6 + p_z - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)
 \end{aligned}$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$l_{CC} = c\theta_6r_{31} - s\theta_6r_{32} \quad (41)$$

Dördüncü dönel eklem değişkenini birinci dönel eklem değişkeni cinsinden bulmak için Denklem 3.9'daki (1,4) ve (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenir.

$$c\theta_1(p_x - r_{13}d_6) + s\theta_1(p_y - r_{23}d_6) = l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 + l_2 \quad (42)$$

$$-s\theta_1(p_x - r_{13}d_6) + c\theta_1(p_y - r_{23}d_6) = l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 \quad (43)$$

Denklemden  $(p_x - r_{13}d_6) = m$  ve  $(p_y - r_{23}d_6) = n$  kısaltması yapıldıktan sonra her iki eşitliğin karşılıklı kareleri alınıp alt alta toplansın.

$$m^2 + n^2 + l_2^2 - 2l_2mc\theta_1 - 2l_2ns\theta_1 = l_4^2 + l_3^2 + 2l_3l_4(c\theta_3c\theta_{34} + s\theta_3s\theta_{34}) \quad (44)$$

Denklemden  $(c\theta_3c\theta_{34} + s\theta_3s\theta_{34}) = c\theta_4$  düzenlemesi yapılırsa aşağıdaki ifade bulunur.

$$c\theta_4 = \frac{m^2 + n^2 + l_2^2 - 2l_2mc\theta_1 - 2l_2ns\theta_1 - l_4^2 - l_3^2}{2l_3l_4} \quad (45)$$

CC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_6 c\theta_{34} s\theta_5 + l_4 c\theta_{34} + l_3 c\theta_3 + l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6 s\theta_{34} s\theta_5 + l_4 s\theta_{34} + l_3 s\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_6 c\theta_5 + d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Dördüncü dönel eklem değişkenini birinci dönel eklem değişkeni cinsinden bulmak için Denklem 3.4'deki (1,4) ve (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenir.

$$c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - l_2 = c\theta_{34} (d_6 s\theta_5 + l_4) + l_3 c\theta_3 \quad (47)$$

$$-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y = s\theta_{34} (d_6 s\theta_5 + l_4) + l_3 s\theta_3 \quad (48)$$

Denklemden  $(d_6 s\theta_5 + l_4) = k$  kısaltması yapıldıktan sonra her iki eşitliğin karşılıklı kareleri alınıp alt alta toplansın.

$$p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 = k^2 + l_3^2 + 2l_3 k (c\theta_3 c\theta_{34} + s\theta_3 s\theta_{34}) \quad (49)$$

Denklemden  $(c\theta_3 c\theta_{34} + s\theta_3 s\theta_{34}) = c\theta_4$  düzenlemesi yapılsın.

$$p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 - k^2 - l_3^2 = 2l_3 k c\theta_4$$

$$c\theta_4 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 - k^2 - l_3^2}{2l_3 k} \quad (50)$$

Denklem 3.4'den ve Denklem 3.9'dan elde edilen  $c\theta_4$  ifadeleri bir birine eşitlenip içler dışlar çarpımı yapılsın.

$$\frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 - k^2 - l_3^2}{2l_3 k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m^2 + n^2 + l_2^2 - 2l_2mc\theta_1 - 2l_2ns\theta_1 - l_4^2 - l_3^2}{2l_3l_4} \\
&l_4(p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - k^2 - l_3^2) - 2l_2l_4p_xc\theta_1 - 2l_2l_4p_ys\theta_1 \\
&\quad = k(m^2 + n^2 + l_2^2 - l_4^2 - l_3^2) - 2l_2kmc\theta_1 - 2l_2kns\theta_1 \\
&c\theta_1(2l_2km - 2l_2l_4p_x) + s\theta_1(2l_2kn - 2l_2l_4p_y) \\
&\quad + l_4(p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - k^2 - l_3^2) - k(m^2 + n^2 + l_2^2 - l_4^2 - l_3^2) = 0 \quad (51)
\end{aligned}$$

Denklemden  $l_4(p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - k^2 - l_3^2) - k(m^2 + n^2 + l_2^2 - l_4^2 - l_3^2) = y$ ,  
 $(2l_2km - 2l_2l_4p_x) = q$  ve  $(2l_2kn - 2l_2l_4p_y) = p$  kısaltmaları yapılırsa aşağıdaki  
denklem elde edilir.

$$qc\theta_1 + ps\theta_1 = -y \quad (52)$$

## 6-CR Robotu

Tablo 3.25'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
{}^0_6T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_6T &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_6(c\theta_1c\theta_3s\theta_5 - s\theta_1c\theta_5) + l_4c\theta_1c\theta_3 + l_3c\theta_1c\theta_3 + l_2c\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6(s\theta_1c\theta_3s\theta_5 + c\theta_1c\theta_5) + l_4s\theta_1c\theta_3 + l_3s\theta_1c\theta_3 + l_2s\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6s\theta_3s\theta_5 + l_4s\theta_3 + l_3s\theta_3 + d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (53)
\end{aligned}$$

CR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_{34}c\theta_5 & -c\theta_{34}s\theta_5 & s\theta_{34} & l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 + l_2 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & 0 \\ s\theta_{34}c\theta_5 & -s\theta_{34}s\theta_5 & -c\theta_{34} & l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & -c\theta_1r_{13} - s\theta_1r_{23} & c_{CR} & c\theta_1(p_x - r_{13}d_6) + s\theta_1(p_y - r_{23}d_6) \\ \cdot & s\theta_1r_{13} - c\theta_1r_{23} & d_{CR} & -s\theta_1(p_x - r_{13}d_6) + c\theta_1(p_y - r_{23}d_6) \\ \cdot & -r_{33} & s\theta_6r_{31} + c\theta_6r_{32} & -r_{33}d_6 + p_z - d_2 \\ \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{CR} = (c\theta_1r_{11} + s\theta_1r_{21})s\theta_6 + (c\theta_1r_{12} + s\theta_1r_{22})c\theta_6 \quad (55)$$

$$d_{CR} = (-s\theta_1r_{11} + c\theta_1r_{21})s\theta_6 + (-s\theta_1r_{12} + c\theta_1r_{22})c\theta_6 \quad (56)$$

$c\theta_{34}$  değişkeninin eşdeğeri Denklem 3.9'daki (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$c\theta_{34} = -r_{31}s\theta_6 - r_{32}c\theta_6 \quad (57)$$

CR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.4'ün uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_1p_x + s\theta_1p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_1p_x + c\theta_1p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_6c\theta_{34}s\theta_5 + l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 + l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6c\theta_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6s\theta_{34}s\theta_5 + l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 + d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Denklem 3.4'deki (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenir.

$$(d_6 s\theta_5 + l_4)c\theta_{34} + l_3 c\theta_3 + l_2 = c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \quad (59)$$

Denklem 3.9'dan elde edilen  $c\theta_{34}$ , Denklem 3.4'den elde edilen Denklem 95'de yerine konursa üçüncü eklem açısı için gerekli olan denklem elde edilir.

$$(d_6 s\theta_5 + l_4)(-r_{31}s\theta_6 - r_{32}c\theta_6) + l_3 c\theta_3 + l_2 = c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y$$

$$c\theta_3 = \frac{c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - (d_6 s\theta_5 + l_4)(-r_{31}s\theta_6 - r_{32}c\theta_6) - l_2}{l_3} \quad (60)$$

## 7-NS Robotu

Tablo 3.26'dan elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 + d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \dots & j_{NS} & \dots \\ \dots & k_{NS} & \dots \\ \dots & (s\theta_2 c\theta_4 s\theta_5 + c\theta_2 c\theta_5)d_6 + s\theta_2 c\theta_4 l_4 + s\theta_2 l_3 + c\theta_2 (d_3 + l_2) + h_1 & \dots \\ \dots & 1 & \dots \end{bmatrix} \quad (61)$$

Denklemde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$j_{NS} = ((c\theta_1 c\theta_2 c\theta_4 - s\theta_1 s\theta_4)s\theta_5 - c\theta_1 s\theta_2 c\theta_5)d_6 + (c\theta_1 c\theta_2 c\theta_4 - s\theta_1 s\theta_4)l_4 - c\theta_1 s\theta_2 (d_3 + l_2) + c\theta_1 c\theta_2 l_3 + s\theta_1 d_2 \quad (62)$$



$$k_{NS} = ((s\theta_1 c\theta_2 c\theta_4 + c\theta_1 s\theta_4) s\theta_5 - s\theta_1 s\theta_2 c\theta_5) d_6 + (s\theta_1 c\theta_2 c\theta_4 + c\theta_1 s\theta_4) l_4 - s\theta_1 s\theta_2 (d_3 + l_2) + s\theta_1 c\theta_2 l_3 - c\theta_1 d_2 \quad (63)$$

NS robotunun  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $d_3$  ve  $\theta_4$  eklem değişkenlerini sayısal olarak çözmek için Denklem 3.11 uygulanarak elde edilen denklem sistemi aşağıda verilmiştir.

$$l_3 \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} - (l_2 + d_3) \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{2x_2}{1+x_2^2} + d_2 \frac{2x_1}{1+x_1^2} - p_x + d_6 r_{13} + l_4 \left( \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2} \right) = 0 \quad (64)$$

$$l_3 \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} - (l_2 + d_3) \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{2x_2}{1+x_2^2} - d_2 \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} - p_y + d_6 r_{23} + l_4 \left( \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} + \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2} \right) = 0 \quad (65)$$

$$l_3 \frac{2x_2}{1+x_2^2} + (l_2 + d_3) \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} + h_1 - p_z + d_6 r_{33} + l_4 \left( \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} \right) = 0 \quad (66)$$

NS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 & -c\theta_4 s\theta_5 & -s\theta_4 & l_4 c\theta_4 + l_3 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & d_3 + l_2 \\ -s\theta_4 c\theta_5 & s\theta_4 s\theta_5 & -c\theta_4 & -l_4 s\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .. & . & . & m_{NS} \\ . & . & . & n_{NS} \\ r_{NS} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & s_{NS} & p_{NS} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$m_{NS} = c\theta_2 (c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - c\theta_1 r_{13} d_6 - s\theta_1 r_{23} d_6) + s\theta_2 (p_z - h_1 - r_{33} d_6) \quad (68)$$

$$n_{NS} = -s\theta_2 (c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - c\theta_1 r_{13} d_6 - s\theta_1 r_{23} d_6) + c\theta_2 (p_z - h_1 - r_{33} d_6) \quad (69)$$

$$p_{NS} = -(s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23}) d_6 + s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y - d_2 \quad (70)$$

$$r_{NS} = (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})c\theta_6 - (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})s\theta_6 \quad (71)$$

$$s_{NS} = (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})s\theta_6 + (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})c\theta_6 \quad (72)$$

## 8-NN Robotu

Tablo 3.27'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^0_6T = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & j_{NN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & k_{NN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_{NN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (73)$$

Denkleimde kullanılan aşağıda verilmiştir.

$$j_{NN} = -((c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3)c\theta_4 + (-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3)s\theta_4)s\theta_5 \\ + c\theta_1 s\theta_2 c\theta_5 d_6 ((c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3)c\theta_4 + (-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3)s\theta_4)l_4 \\ + (c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3)l_3 - c\theta_1 s\theta_2 l_2 + s\theta_1 d_2 \quad (74)$$

$$k_{NN} = -((s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3)c\theta_4 + (-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3)s\theta_4)s\theta_5 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_5 d_6 \\ ((s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3)c\theta_4 + (-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3)s\theta_4)l_4$$

$$(s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3)l_3 - s\theta_1 s\theta_2 l_2 - c\theta_1 d_2 \quad (75)$$

$$l_{NN} = -(-(s\theta_2 c\theta_{34})s\theta_5 - c\theta_2 c\theta_5)d_6 + (s\theta_2 c\theta_{34})l_4 + s\theta_2 c\theta_3 l_3 + c\theta_2 l_2 + h_1 \quad (76)$$

NN robotunun  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve  $\theta_4$  eklem değişkenlerini sayısal olarak çözmek için Denklem 3.11 uygulanarak elde edilen denklem sistemi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} l_3 \left( \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{2x_3}{1+x_3^2} \right) - l_2 \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{2x_2}{1+x_2^2} + d_2 \frac{2x_1}{1+x_1^2} \\ - p_x + d_6 r_{13} + l_4 \left[ \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} \left( \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{2x_3}{1+x_3^2} \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{2x_3}{1+x_3^2} + \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} \right) \frac{2x_4}{1+x_4^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} l_3 \left( \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} + \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{2x_3}{1+x_3^2} \right) - l_2 \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{2x_2}{1+x_2^2} - d_2 \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \\ - p_y + d_6 r_{23} + l_4 \left[ \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} \left( \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} + \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{2x_3}{1+x_3^2} \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{2x_3}{1+x_3^2} - \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} \right) \frac{2x_4}{1+x_4^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} l_3 \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} + l_2 \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} + h_1 - p_z + d_6 r_{33} \\ + l_4 \frac{2x_2}{1+x_2^2} \left( \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} - \frac{2x_3}{1+x_3^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (79)$$

NN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_{34}c\theta_5 & -c\theta_{34}s\theta_5 & -s\theta_{34} & l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & l_2 \\ -s\theta_{34}c\theta_5 & s\theta_{34}s\theta_5 & -c\theta_{34} & -l_4s\theta_{34} - l_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & m_{NN} \\ \cdot & -c\theta_1 s\theta_2 r_{13} - s\theta_1 s\theta_2 r_{23} + c\theta_2 r_{33} & \cdot & n_{NN} \\ r_{NN} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & s_{NN} & p_{NN} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Denkleimde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$m_{NN} = c\theta_2(c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - c\theta_1 r_{13} d_6 - s\theta_1 r_{23} d_6) + s\theta_2(p_z - h_1 - r_{33} d_6) \quad (81)$$

$$n_{NN} = -s\theta_2(c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - c\theta_1 r_{13} d_6 - s\theta_1 r_{23} d_6) + c\theta_2(p_z - h_1 - r_{33} d_6) \quad (82)$$

$$p_{NN} = -(s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23})d_6 + s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y - d_2 \quad (83)$$

$$r_{NN} = (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})c\theta_6 - (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})s\theta_6 \quad (84)$$

$$s_{NN} = (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})s\theta_6 + (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})c\theta_6 \quad (85)$$

## 9-NR Robotu

Tablo 3.28'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^0_6T = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & j_{NS} \\ \cdot & \cdot & \cdot & k_{NS} \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_{NS} \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (86)$$

Denkleimde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$j_{NR} = (c\theta_1 s\theta_5 (c\theta_{23} c\theta_4 - s\theta_{23} s\theta_4) - s\theta_1 c\theta_5) d_6 + l_4 c\theta_1 (c\theta_{23} c\theta_4 - s\theta_{23} s\theta_4) + l_3 c\theta_1 c\theta_{23} + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 d_2 \quad (87)$$

$$k_{NR} = (s\theta_1 s\theta_5 (c\theta_{23} c\theta_4 - s\theta_{23} s\theta_4) + c\theta_1 c\theta_5) d_6 + l_4 s\theta_1 (c\theta_{23} c\theta_4 - s\theta_{23} s\theta_4) + l_3 s\theta_1 c\theta_{23} + l_2 s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 d_2 \quad (88)$$

$$l_{NR} = -(s\theta_{23} c\theta_4 + c\theta_{23} s\theta_4) s\theta_5 d_6 - l_4 (s\theta_{23} c\theta_4 + c\theta_{23} s\theta_4) - l_3 s\theta_{23} - l_2 s\theta_2 + h_1 \quad (89)$$

NR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$= \begin{bmatrix} c\theta_{34} c\theta_5 & -c\theta_{34} s\theta_5 & -s\theta_{34} & l_4 c\theta_{34} + l_3 c\theta_3 + l_2 \\ s\theta_{34} c\theta_5 & -s\theta_{34} s\theta_5 & c\theta_{34} & l_4 s\theta_{34} + l_3 s\theta_3 \\ -c\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{NR} & \cdot & \cdot & m_{NR} \\ \cdot & \cdot & s_{NR} & n_{NR} \\ \cdot & s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23} & t_{NR} & p_{NR} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (90)$$

Denkleimde kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$m_{NR} = -c\theta_2 (c\theta_1 r_{13} d_6 + s\theta_1 r_{23} d_6 - c\theta_1 p_x - s\theta_1 p_y) + s\theta_2 (r_{33} d_6 - p_z + h_1) \quad (91)$$

$$n_{NR} = s\theta_2 (c\theta_1 r_{13} d_6 + s\theta_1 r_{23} d_6 - c\theta_1 p_x - s\theta_1 p_y) + c\theta_2 (r_{33} d_6 - p_z + h_1) \quad (92)$$

$$p_{NR} = (s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23}) d_6 - s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y - d_2 \quad (93)$$

$$r_{NR} = c\theta_2 (c\theta_1 c\theta_6 r_{11} + s\theta_1 c\theta_6 r_{21} - c\theta_1 s\theta_6 r_{12} - s\theta_1 s\theta_6 r_{22}) - s\theta_2 (r_{31} c\theta_6 + r_{32} s\theta_6) \quad (94)$$

$$s_{NR} = -s\theta_2 (c\theta_1 s\theta_6 r_{11} + s\theta_1 s\theta_6 r_{21} + c\theta_1 c\theta_6 r_{12} + s\theta_1 c\theta_6 r_{22}) - c\theta_2 (r_{31} s\theta_6 + r_{32} c\theta_6) \quad (95)$$

$$t_{NR} = (c\theta_1 r_{21} - s\theta_1 r_{11}) s\theta_6 + (c\theta_1 r_{22} - s\theta_1 r_{12}) c\theta_6 \quad (96)$$

Denklem 3.9'un uygulanıp elde edilen (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle üretilen  $c\theta_{34}$ 'ün eşdeğeri yine aynı matristeki (1,1) karşılıklı matris elemanlarında yerine konarak ikinci dönel eklem değişkeni bulunur.

$$c\theta_{34}c\theta_5 = c\theta_2k - s\theta_2l \quad (97)$$

$$c\theta_{34} = -s\theta_2m - c\theta_2n \quad (98)$$

$$\begin{aligned} (-s\theta_2m - c\theta_2n)c\theta_5 &= c\theta_2k - s\theta_2l \text{ ise } ms\theta_2c\theta_5 + nc\theta_2c\theta_5 + c\theta_2k - s\theta_2l = 0 \\ s\theta_2(mc\theta_5 - l) + c\theta_2(nc\theta_5 + k) &= 0 \end{aligned} \quad (99)$$

Denklem 3.9'daki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla dördüncü eklem değişkeni bulunur.

$$\begin{aligned} l_3^2 + l_4^2 + 2l_3l_4(c\theta_3c\theta_{34} + s\theta_3s\theta_{34}) &= p^2 + q^2 \text{ ise } l_3^2 + l_4^2 + 2l_3l_4c\theta_4 = p^2 + q^2 \\ c\theta_4 &= \frac{p^2 + q^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3l_4} \end{aligned} \quad (100)$$

## 10-RC Robotu

Tablo 3.29'dan elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -d_6(c\theta_1 s\theta_{34} s\theta_5 - s\theta_1 c\theta_5) - l_4 c\theta_1 s\theta_{34} - l_3 c\theta_1 s\theta_3 + (l_2 + d_2) s\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_6(s\theta_1 s\theta_{34} s\theta_5 + c\theta_1 c\theta_5) - l_4 s\theta_1 s\theta_{34} - l_3 s\theta_1 s\theta_3 - (l_2 + d_2) c\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6 c\theta_{34} s\theta_5 + l_4 c\theta_{34} + l_3 c\theta_3 + h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (101)$$

RC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$= \begin{bmatrix} c\theta_{34} c\theta_5 & -c\theta_{34} s\theta_5 & -s\theta_{34} & l_4 c\theta_{34} + l_3 c\theta_3 \\ s\theta_{34} c\theta_5 & -s\theta_{34} s\theta_5 & c\theta_{34} & l_4 s\theta_{34} + l_3 s\theta_3 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} c\theta_6 r_{31} - s\theta_6 r_{32} & -r_{33} & s\theta_6 r_{31} + c\theta_6 r_{32} & -r_{33} d_6 + p_z - h_1 \\ c_{RC} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & e_{RC} & g_{RC} \\ d_{RC} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & f_{RC} & h_{RC} \\ 1. & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (102)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{RC} = -(c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21})c\theta_6 + (c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22})s\theta_6 \quad (103)$$

$$d_{RC} = (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})c\theta_6 - (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})s\theta_6 \quad (104)$$

$$e_{RC} = -(c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21})s\theta_6 - (c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22})c\theta_6 \quad (105)$$

$$f_{RC} = (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})s\theta_6 + (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})c\theta_6 \quad (106)$$

$$g_{RC} = c\theta_1 (r_{13} d_6 - p_x) + s\theta_1 (r_{23} d_6 - p_y) \quad (107)$$

$$h_{RC} = -s\theta_1 (r_{13} d_6 - p_x) + c\theta_1 (r_{23} d_6 - p_y) - d_2 \quad (108)$$

Raghuvean ve Roth çözümü uygulayarak beşinci eklem değişkeni Denklem 93'deki karşılıklı matris elemanlarının aşağıdaki gibi düzenlenmesiyle bulunur.

$$(3.1) \quad -s\theta_5 = (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})c\theta_6 - (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})s\theta_6 \quad (109)$$

$$(3.2) \quad -c\theta_5 = -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} \quad (110)$$

Raghavan ve Roth çözümünde yer alan  $\sin \theta_i = \frac{2x_i}{1+x_i^2}$  ve  $\cos \theta_i = \frac{1-x_i^2}{1+x_i^2}$

dönüşümü her iki denklem için yazılır.

$$(3.1) \quad \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_6^2}{1+x_6^2} r_{11} - \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{1-x_6^2}{1+x_6^2} r_{21} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{2x_6}{1+x_6^2} r_{12} + \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{2x_6}{1+x_6^2} r_{22} + \frac{2x_5}{1+x_5^2} = 0 \quad (111)$$

$$(3.2) \quad -\frac{2x_1}{1+x_1^2} r_{13} + \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} r_{23} + \frac{1-x_5^2}{1+x_5^2} = 0 \quad (112)$$

RC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.5'in uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21} & s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22} & s\theta_1 r_{13} - c\theta_1 r_{23} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (113)$$

Beşinci eklem değişkeni bulmak için Raghavan ve Roth yöntemi Denklem 174'de de uygulanır.

$$(3.1) \quad s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21} = -s\theta_5 c\theta_6 \text{ ise } \frac{2x_1}{1+x_1^2} r_{11} - \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} r_{21} + \frac{2x_5}{1+x_5^2} \frac{1-x_6^2}{1+x_6^2} = 0 \quad (114)$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5^2 \\ x_5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (115)$$



Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a = x_1^2(1 + r_{23}) + x_1(2r_{13}) + 1 - r_{23} \quad (116)$$

$$b = x_1^2(-1 + r_{23}) + x_1(2r_{13}) - 1 - r_{23} \quad (117)$$

$$c = x_1^2(r_{21}x_6^2 + 2x_6r_{22} - r_{21}) + x_1(4x_6r_{12} + 2x_6^2r_{11} - 2r_{11}) - r_{21}x_6^2 - 2r_{22}x_6 + r_{21} \quad (118)$$

$$d = x_1^2(-2 - 2x_6^2) - x_6^2 - 2 \quad (119)$$

$$e = x_1^2(r_{21}x_6^2 + 2x_6r_{22} - r_{21}) + x_1(4x_6r_{12} + 2x_6^2r_{11} - 2r_{11}) - r_{21}x_6^2 - 2r_{22}x_6 + r_{21} \quad (120)$$

$$f = x_1^2(r_{21}) + x_1(2r_{11} + 2x_6^2r_{11}) - r_{21} - r_{21}x_6^2 \quad (121)$$

$$g = x_1^2(2 - 2x_6^2) + 2 - 2x_6^2 \quad (122)$$

$$e = x_1^2(r_{21}x_6^2 + r_{21}) + x_1(2r_{21} + 2x_6^2r_{21}) - r_{21}x_6^2 - r_{21} \quad (123)$$

(Denklem  $a$  ve  $b$  aynı kökleri ürettiğinden  $a=b$  denir).

Denklem 107'deki sistemin sol tarafındaki  $3 \times 3$  matrisin determinanı sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\Delta = a(df - eg + cg - fd) = 0 \text{ ise } a = 0 \text{ veya } (df - eg + cg - fd) = 0 \quad (124)$$

Dikkat edildiği gibi denklemde iki adet çarpan bulunmaktadır. Bu çarpanlardan tek eklem değişkeni içeren  $a$  ifadesi alınırsa sistemin kökleri daha kolay bulunur.

$$x_1^2(1 + r_{23}) + x_1(2r_{13}) + 1 - r_{23} = 0 \text{ ise } x_1 = \frac{1}{2(r_{23} - 1)}(-2r_{13} \pm 2\sqrt{r_{23}^2 - 1 + r_{13}^2}) \quad (125)$$

Bu ifadenin kökleri gerçek olabilmesi için  $\sqrt{r_{23}^2 - 1 + r_{13}^2} > 0$  olmalıdır.

$r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1$  olduğuna göre  $r_{13}^2 + r_{23}^2 = 1$  olursa karekökün içerisi sıfır olarak bir gerçek kök oluşur.  $r_{13}^2 + r_{23}^2 = 1$  ise  $r_{33} = 0$  olur. Bu durumda Eşitlik 6'dan faydalanarak kalan eklem değişkenlerinin ters kinematikleri bulunur.

## 11-RN Robotu

Tablo 3.30'dan elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_6 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^0_6T = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & i_{RN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & j_{RN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & s\theta_{34}s\theta_5d_6 + s\theta_{34}l_4 + s\theta_3l_3 + h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (126)$$

$$i_{RN} = (c\theta_{12}(c\theta_{34} - s\theta_{34})s\theta_5 - s\theta_{12}c\theta_5)d_6 + c\theta_{12}c\theta_{34}l_4 \\
 + c\theta_{12}c\theta_3l_3 + c\theta_{12}l_2 + c\theta_1l_1 \quad (127)$$

$$j_{RN} = (s\theta_{12}(c\theta_{34} - s\theta_{34})s\theta_5 + c\theta_{12}c\theta_5)d_6 + s\theta_{12}c\theta_{34}l_4 \\
 + s\theta_{12}c\theta_3l_3 + s\theta_{12}l_2 + s\theta_1l_1 \quad (128)$$

$$\left(\frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{2x_2}{1+x_2^2}\right)(l_3 \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} + l_2) + l_1 \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} - p_x - d_6r_{13} \\
 + l_4 \left(\frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{2x_2}{1+x_2^2}\right) \left(\frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} - \frac{2x_3}{1+x_3^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2}\right) = 0 \quad (129)$$

$$\left(\frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} + \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{2x_2}{1+x_2^2}\right)(l_3 \frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} + l_2) + l_1 \frac{2x_1}{1+x_1^2} - p_y - d_6r_{23} \\
 + l_4 \left(\frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} + \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{2x_2}{1+x_2^2}\right) \left(\frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} - \frac{2x_3}{1+x_3^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2}\right) = 0 \quad (130)$$

$$(l_3 \frac{2x_3}{1+x_3^2} + h_1 - p_z - d_6 r_{33} + l_4 (\frac{1-x_3^2}{1+x_3^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2} + \frac{2x_3}{1+x_3^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2})) = 0 \quad (131)$$

RN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_{34}c\theta_5 & -c\theta_{34}s\theta_5 & s\theta_{34} & l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 + l_2 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & 0 \\ s\theta_{34}c\theta_5 & -s\theta_{34}s\theta_5 & -c\theta_{34} & l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & m_{RN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & n_{RN} \\ c\theta_6 r_{31} - s\theta_6 r_{32} & r_{33} & -s\theta_6 r_{31} - c\theta_6 r_{32} & r_{33}d_6 + p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (132)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$m_{RN} = (c\theta_{12}r_{13} + s\theta_{12}r_{23})d_6 + c\theta_{12}p_x + s\theta_{12}p_y - l_1c\theta_2 \quad (133)$$

$$n_{RN} = (-s\theta_{12}r_{13} + c\theta_{12}r_{23})d_6 - s\theta_{12}p_x + c\theta_{12}p_y + l_1s\theta_2 \quad (134)$$

Denklem 3.9'daki (3,1) ve (3,2) karşılıklı matris elemanlarında yer alan  $s\theta_{34}$ 'lerin eşitlenmesiyle beşinci eklem değişkenini bulmak için gerekli ifade elde edilir.

$$s\theta_{34} = \frac{r_{31}c\theta_6 - r_{32}s\theta_6}{c\theta_5} \quad (135)$$

$$s\theta_{34} = -\frac{r_{33}}{s\theta_5} \quad (136)$$

$$\frac{r_{31}c\theta_6 - r_{32}s\theta_6}{c\theta_5} = -\frac{r_{33}}{s\theta_5} \text{ ise } -r_{33}c\theta_5 = s\theta_5(r_{31}c\theta_6 - r_{32}s\theta_6) \quad (137)$$

$$r_{33}c\theta_5 + s\theta_5(r_{31}c\theta_6 - r_{32}s\theta_6) = 0 \quad (138)$$

## 5-RR Robotu

Tablo 3.31'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -(l_2 + d_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^0_6T = \begin{bmatrix} \dots & d_6(s\theta_1 s\theta_{34} s\theta_5 + c\theta_1 c\theta_5) - l_4 s\theta_1 s\theta_{34} - l_3 s\theta_1 s\theta_3 + (l_2 + d_2) s\theta_1 \\ \dots & d_6(-c\theta_1 s\theta_{34} s\theta_5 + s\theta_1 c\theta_5) + l_4 c\theta_1 s\theta_{34} + l_3 c\theta_1 s\theta_3 - (l_2 + d_2) c\theta_1 \\ \dots & -d_6 c\theta_{34} s\theta_5 + l_4 c\theta_{34} + l_3 c\theta_3 + h_1 \\ \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (139)$$

RR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_{34} c\theta_5 & -c\theta_{34} s\theta_5 & -s\theta_{34} & l_4 c\theta_{34} + l_3 c\theta_3 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & 0 \\ -s\theta_{34} c\theta_5 & s\theta_{34} s\theta_5 & -c\theta_{34} & -l_4 s\theta_{34} - l_3 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} c\theta_6 r_{31} - s\theta_6 r_{32} & -r_{33} & s\theta_6 r_{31} + c\theta_6 r_{32} & r_{33} d_6 + p_z - h_1 \\ c_{RR} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & e_{RR} & g_{RR} \\ d_{RR} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & f_{RR} & h_{RR} \\ 1. & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (140)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{RR} = -(c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21})c\theta_6 + (c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22})s\theta_6 \quad (141)$$

$$d_{RR} = (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})c\theta_6 - (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})s\theta_6 \quad (142)$$

$$e_{RR} = -(c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21})s\theta_6 - (c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22})c\theta_6 \quad (143)$$

$$f_{RR} = (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})s\theta_6 + (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})c\theta_6 \quad (144)$$

$$g_{RR} = -c\theta_1(r_{13}d_6 + p_x) - s\theta_1(r_{23}d_6 + p_y) \quad (145)$$

$$h_{RR} = s\theta_1(r_{13}d_6 + p_x) - c\theta_1(r_{23}d_6 + p_y) - l_2 - d_2 \quad (146)$$

Denklem 3.9' un uygulanmasıyla elde edilen (3,3) matris elemanlarının eşitlenmesiyle elde edilen  $c\theta_{34}$ 'ün aynı matriste yer alan (1,1) elemanında yerine konmasıyla Denklem 142 elde edilir.

$$l_4 c\theta_{34} + l_3 c\theta_3 = r_{33}d_6 + p_z - h_1 \quad (147)$$

$$c\theta_{34} = -(s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})s\theta_6 - (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})c\theta_6 \quad (148)$$

$$-l_4 s\theta_6 (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21}) - l_4 c\theta_6 (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22}) + l_3 c\theta_3 = r_{33}d_6 + p_z - h_1$$

$$c\theta_3 = \frac{r_{33}d_6 + p_z - h_1 + l_4 s\theta_6 (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21}) + l_4 c\theta_6 (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})}{l_3} \quad (149)$$

### 13-RS Robotu

Tablo 3.32'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \dots & -d_6(c\theta_{12}c\theta_4 + s\theta_{12}s\theta_4)s\theta_5 + l_4(c\theta_{12}c\theta_4 + s\theta_{12}s\theta_4) + l_2c\theta_{12} + l_1c\theta_1 \\ \dots & -d_6(s\theta_{12}c\theta_4 - c\theta_{12}s\theta_4)s\theta_5 + l_4(s\theta_{12}c\theta_4 - c\theta_{12}s\theta_4) + l_2s\theta_{12} + l_1s\theta_1 \\ \dots & -d_6c\theta_5 - d_3 + h_1 \\ \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (150)$$

RS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 & -c\theta_4 s\theta_5 & s\theta_4 & l_4 c\theta_4 + l_2 \\ -s\theta_4 c\theta_5 & s\theta_4 s\theta_5 & c\theta_4 & -l_4 s\theta_4 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_{12}(-r_{13}d_6 + p_x) + s\theta_{12}(-r_{23}d_6 + p_y) - l_1 c\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_{12}(-r_{13}d_6 + p_x) + c\theta_{12}(-r_{23}d_6 + p_y) + l_1 s\theta_2 \\ k_{RS} & r_{33} & l_{RS} & -r_{33}d_6 + p_z - h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (151)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$k_{RS} = c\theta_6 r_{31} - s\theta_6 r_{32} \quad (152)$$

$$l_{RS} = -s\theta_6 r_{31} - c\theta_6 r_{32} \quad (153)$$

Dördüncü dönel eklem değişkenini birinci dönel eklem değişkeni cinsinden bulmak için Denklem 3.9'daki (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenir.

$$c\theta_{12}(-r_{13}d_6 + p_x) + s\theta_{12}(-r_{23}d_6 + p_y) - l_1 c\theta_2 = l_4 c\theta_4 + l_2 \quad (154)$$

$$-s\theta_{12}(-r_{13}d_6 + p_x) + c\theta_{12}(-r_{23}d_6 + p_y) + l_1 s\theta_2 = -l_4 s\theta_4 \quad (155)$$

Denklemden  $(-r_{13}d_6 + p_x) = a$  ve  $(-r_{23}d_6 + p_y) = b$  olsun. Her iki denklemden de karşılıklı eşitliklerin kareleri alınıp alt alta toplansın.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + l_1^2 - 2al_1(c\theta_{12} c\theta_2 + s\theta_{12} s\theta_2) - 2bl_1(s\theta_{12} c\theta_2 - c\theta_{12} s\theta_2) \\ = l_2^2 + l_4^2 + 2l_2 l_4 c\theta_4 \end{aligned} \quad (156)$$

Denklemden  $(c\theta_{12} c\theta_2 + s\theta_{12} s\theta_2) = c\theta_1$  ve  $(s\theta_{12} c\theta_2 - c\theta_{12} s\theta_2) = s\theta_1$  yerlerine konarak  $c\theta_4$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$a^2 + b^2 + l_1^2 - 2al_1c\theta_1 - 2bl_1s\theta_1 = l_2^2 + l_4^2 + 2l_2l_4c\theta_4$$

$$c\theta_4 = \frac{a^2 + b^2 + l_1^2 - 2l_1(ac\theta_1 + bs\theta_1) - l_2^2 - l_4^2}{2l_2l_4} \quad (157)$$

RS robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.5'in uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -d_6c\theta_4s\theta_5 + l_4c\theta_4 + l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6s\theta_4s\theta_5 - l_4s\theta_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_6c\theta_5 - d_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_{12}p_x + s\theta_{12}p_y - l_1c\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_{12}p_x + c\theta_{12}p_y + l_1s\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_z - h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (158)$$

$$-d_6c\theta_4s\theta_5 + l_4c\theta_4 + l_2 = c\theta_{12}p_x + s\theta_{12}p_y - l_1c\theta_2 \quad (159)$$

$$d_6s\theta_4s\theta_5 - l_4s\theta_4 = -s\theta_{12}p_x + c\theta_{12}p_y + l_1s\theta_2 \quad (160)$$

Denklemden  $(-d_6s\theta_5 + l_4) = k$  olsun. Her iki eşitliğinde karşılıklı kareleri alınıp alt alta toplansın.

$$k^2 + l_2^2 + 2l_2kc\theta_4 = p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - 2l_2p_xc\theta_1 - 2l_2p_ys\theta_1$$

$$c\theta_4 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - 2l_2(p_xc\theta_1 + p_ys\theta_1) - k^2 - l_2^2}{2l_2k} \quad (161)$$

Denklem 3.9'dan ve Denklem 3.5'den elde edilen  $c\theta_4$  ifadeleri bir birine eşitlenip içler dışlar çarpımı yapılsın.

$$\frac{a^2 + b^2 + l_1^2 - 2l_1(ac\theta_1 + bs\theta_1) - l_2^2 - l_4^2}{2l_2l_4} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - 2l_2(p_xc\theta_1 + p_ys\theta_1) - k^2 - l_2^2}{2l_2k}$$

$$\begin{aligned}
& k(a^2 + b^2 + l_1^2 - l_2^2 - l_4^2) - 2l_1k(ac\theta_1 + bs\theta_1) \\
& = l_4(p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - k^2 - l_2^2) - 2l_2l_4(p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1) \\
& 2l_2l_4(p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1) - 2l_1k(ac\theta_1 + bs\theta_1) = s \\
& pc\theta_1 + qs\theta_1 = s
\end{aligned} \tag{162}$$

#### 14-SR Robotu

Tablo 3.33'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
{}^0_6T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_6T &= \begin{bmatrix} \dots & d_6(c\theta_{23}c\theta_4 - s\theta_{23}s\theta_4)s\theta_5 + l_4(c\theta_{23}c\theta_4 - s\theta_{23}s\theta_4) + l_3c\theta_{23} + l_2c\theta_2 + l_1 \\ \dots & d_6(s\theta_{23}c\theta_4 + c\theta_{23}s\theta_4)s\theta_5 + l_4(s\theta_{23}c\theta_4 + c\theta_{23}s\theta_4) + l_3s\theta_{23} + l_2s\theta_2 \\ \dots & -d_6c\theta_5 + d_1 \\ \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{163}
\end{aligned}$$

SR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_{34}c\theta_5 & -c\theta_{34}s\theta_5 & s\theta_{34} & l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 + l_2 \\ s\theta_{34}c\theta_5 & -s\theta_{34}s\theta_5 & -c\theta_{34} & l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_2(-r_{13}d_6 + p_x - l_1) + s\theta_2(-r_{23}d_6 + p_y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_2(-r_{13}d_6 + p_x - l_1) + c\theta_2(-r_{23}d_6 + p_y) \\ e_{RS} & -r_{33} & s\theta_6 r_{31} + c\theta_6 r_{32} & -r_{33}d_6 + p_z - d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (164)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$e_{RS} = c\theta_6 r_{31} - s\theta_6 r_{32} \quad (165)$$

İkinci eklem değişkenini bulmak için aşağıdaki işlemler gerçekleştirilir.

$(-r_{13}d_6 + p_x - l_1) = a$  ve  $(-r_{23}d_6 + p_y) = b$  olsun. Denklem 156'da (1,4) karşılıklı matris elemanlarından sol taraftaki  $l_2$  sağ tarafa atılıp her iki eşitliğinde kareleri alınıp alt alta toplansın.

$$l_3^2 + l_4^2 + 2l_3l_4(c\theta_3 c\theta_{34} + s\theta_3 s\theta_{34}) = a^2 + b^2 + l_2^2 - 2al_2c\theta_2 - 2bl_2s\theta_2 \quad (166)$$

Denklemden  $(c\theta_3 c\theta_{34} + s\theta_3 s\theta_{34}) = c\theta_4$  eşitliği yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$l_3^2 + l_4^2 + 2l_3l_4 c\theta_4 = a^2 + b^2 + l_2^2 - 2al_2c\theta_2 - 2bl_2s\theta_2$$

$$c\theta_4 = \frac{a^2 + b^2 + l_2^2 - l_3^2 - l_4^2 - 2al_2c\theta_2 - 2bl_2s\theta_2}{2l_3l_4} \quad (167)$$

SR robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_4(d_6s\theta_5 + l_4) + l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & s\theta_4(d_6s\theta_5 + l_4) \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_6c\theta_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_{23}(p_x - l_1) + s\theta_{23}p_y - l_2c\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_{23}(p_x - l_1) + c\theta_{23}p_y + l_2s\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_z - d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (168)$$

Denklem 160'da (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının kareleri alt alta toplansın.

$$c\theta_4(d_6s\theta_5 + l_4) + l_3 = c\theta_{23}(p_x - l_1) + s\theta_{23}p_y - l_2c\theta_3 \quad (169)$$

$$s\theta_4(d_6s\theta_5 + l_4) = -s\theta_{23}(p_x - l_1) + c\theta_{23}p_y + l_2s\theta_3 \quad (170)$$

Denklemlerde  $(d_6s\theta_5 + l_4) = k$  ve  $(p_x - l_1) = m$  olsun. Her iki eşitliğinde kareleri alınıp alt alta toplansın.

$$\begin{aligned} k^2 + l_3^2 + 2l_3k c\theta_4 \\ = m^2 + l_2^2 + p_y^2 - 2l_2m(c\theta_3 c\theta_{23} + s\theta_3 s\theta_{23}) + 2l_2p_y(s\theta_3 c\theta_{23} - c\theta_3 s\theta_{23}) \end{aligned} \quad (171)$$

Denklemden  $(c\theta_3 c\theta_{23} + s\theta_3 s\theta_{23}) = c\theta_2$  ve  $(s\theta_3 c\theta_{23} - c\theta_3 s\theta_{23}) = -s\theta_2$  denklilikleri yerine yazılsın.

$$k^2 + l_3^2 + 2l_3k c\theta_4 = m^2 + l_2^2 + p_y^2 - 2l_2m c\theta_2 - 2l_2p_y s\theta_2$$

$$c\theta_4 = \frac{m^2 + l_2^2 + p_y^2 - k^2 - l_3^2 - 2l_2m c\theta_2 - 2l_2p_y s\theta_2}{2l_3k} \quad (172)$$

Denklem 159 ve 164 eşitlenip düzenlenirse ikinci ekleme ait ters kinematik çözüm kolaylıkla bulunur.

$$\frac{a^2 + b^2 + l_2^2 - l_3^2 - l_4^2 - 2al_2c\theta_2 - 2bl_2s\theta_2}{2l_3l_4} =$$

$$\frac{m^2 + l_2^2 + p_y^2 - k^2 - l_3^2 - 2l_2m c\theta_2 - 2l_2p_y s\theta_2}{2l_3k}$$

$$\begin{aligned}
& k(a^2 + b^2 + l_2^2 - l_3^2 - l_4^2) - 2al_2k c\theta_2 - 2bl_2k s\theta_2 \\
& = l_4(m^2 + l_2^2 + p_y^2 - k^2 - l_3^2) - 2l_2ml_4 c\theta_2 - 2l_2p_y l_4 s\theta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(l_2p_y l_4 - bl_2k)s\theta_2 + 2(l_2ml_4 - al_2k)c\theta_2 \\
& = l_4(m^2 + l_2^2 + p_y^2 - k^2 - l_3^2) - k(a^2 + b^2 + l_2^2 - l_3^2 - l_4^2)
\end{aligned} \tag{173}$$

Denklemden  $l_4(m^2 + l_2^2 + p_y^2 - k^2 - l_3^2) - k(a^2 + b^2 + l_2^2 - l_3^2 - l_4^2) = z$ , olsun. Yeni durumda denklem aşağıdaki gibi olur.

$$2l_2(p_y l_4 - bk)s\theta_2 + 2l_2(ml_4 - ak)c\theta_2 = z \tag{174}$$

## 15-CN Robotu

Tablo 3.34'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$$\begin{aligned}
{}^0_6T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & h_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_1 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_6T &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -d_6(c\theta_2c\theta_{34}s\theta_5 + s\theta_2c\theta_5) + l_4c\theta_2c\theta_{34} + l_3c\theta_2c\theta_3 - l_1s\theta_2 + h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_6(s\theta_2c\theta_{34}s\theta_5 - s\theta_2c\theta_5) + l_4s\theta_2c\theta_{34} + l_3s\theta_2c\theta_3 + l_1c\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_6s\theta_{34}s\theta_5 + l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 + d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \tag{175}
\end{aligned}$$

CN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix}
c\theta_{34}c\theta_5 & -c\theta_{34}s\theta_5 & -s\theta_{34} & l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 \\
s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & l_1 \\
s\theta_{34}c\theta_5 & -s\theta_{34}s\theta_5 & c\theta_{34} & l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
c_{CN} & -c\theta_2r_{13} - s\theta_2r_{23} & e_{CN} & k_{CN} \\
d_{CN} & s\theta_2r_{13} - c\theta_2r_{23} & f_{CN} & l_{CN} \\
c\theta_6r_{31} - s\theta_6r_{32} & -r_{33} & s\theta_6r_{31} + c\theta_6r_{32} & r_{33}d_6 + p_z - d_1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \quad (176)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$c_{CN} = (c\theta_2r_{11} + s\theta_2r_{21})c\theta_6 - (c\theta_2r_{12} + s\theta_2r_{22})s\theta_6 \quad (177)$$

$$d_{CN} = (-s\theta_2r_{11} + c\theta_2r_{21})c\theta_6 + (s\theta_2r_{12} - c\theta_2r_{22})s\theta_6 \quad (178)$$

$$e_{CN} = (c\theta_2r_{11} + s\theta_2r_{21})s\theta_6 + (c\theta_2r_{12} + s\theta_2r_{22})c\theta_6 \quad (179)$$

$$f_{CN} = (-s\theta_2r_{11} + c\theta_2r_{21})s\theta_6 + (-s\theta_2r_{12} + c\theta_2r_{22})c\theta_6 \quad (180)$$

$$k_{CN} = d_6(c\theta_2r_{13} + s\theta_2r_{23}) + c\theta_2p_x + s\theta_2p_y - h_1c\theta_2 \quad (181)$$

$$l_{CN} = d_6(-s\theta_2r_{13} + c\theta_2r_{23}) - s\theta_2p_x + c\theta_2p_y + h_1s\theta_2 \quad (182)$$

CN robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.5'in uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix}
. & . & c\theta_{34}s\theta_5 & -c\theta_{34}(d_6s\theta_5 - l_4) + l_3c\theta_3 \\
. & . & . & -c\theta_5d_6 + l_1 \\
. & . & . & -s\theta_{34}(d_6s\theta_5 - l_4) + l_3s\theta_3 \\
. & . & 0 & 1
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
. & . & c\theta_2r_{13} + s\theta_2r_{23} & c\theta_2(p_x - h_1) + s\theta_2p_y \\
. & . & . & -s\theta_2(p_x - h_1) + c\theta_2p_y \\
. & . & . & p_z - d_1 \\
. & . & 0 & 1
\end{bmatrix} \quad (183)$$

Üçüncü dönel eklem açısının bulunması için Denklem 3.5'in uygulanıp (1,3) ve (1,4) karşılıklı matris elemanları alt alta yazılır.

$$-c\theta_{34}(d_6s\theta_5 - l_4) + l_3c\theta_3 = c\theta_2(p_x - h_1) + s\theta_2p_y \quad (184)$$

$$c\theta_{34}s\theta_5 = c\theta_2r_{13} + s\theta_2r_{23} \text{ ise } c\theta_{34} = \frac{c\theta_2r_{13} + s\theta_2r_{23}}{s\theta_5} \quad (185)$$

$c\theta_{34}$  değeri denklem (1.3)'de yerine konup aşağıdaki denklem elde edilir.

$$c\theta_3 = \frac{s\theta_5[c\theta_2(p_x - h_1) + s\theta_2p_y] + (c\theta_2r_{13} + s\theta_2r_{23})(d_6s\theta_5 - l_4)}{l_3s\theta_5} \quad (186)$$

## 16-NC Robotu

Tablo 3.35'den elde edilen ileri yön kinematik matrisleri ve konum vektörü.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & (c\theta_1c\theta_{24}s\theta_5 + s\theta_1c\theta_5)d_6 + c\theta_1c\theta_{24}l_4 + c\theta_1c\theta_2l_2 + s\theta_1(d_2 + d_3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & (s\theta_1c\theta_{24}s\theta_5 - c\theta_1c\theta_5)d_6 + s\theta_1c\theta_{24}l_4 + s\theta_1c\theta_2l_2 - c\theta_1(d_2 + d_3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & s\theta_{24}s\theta_5d_6 + s\theta_{24}l_4 + s\theta_2l_2 + h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (187)$$

NC robotunun  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $d_3$  ve  $\theta_4$  eklem değişkenlerini sayısal olarak çözmek için

Denklem 3.11 uygulanarak elde edilen denklem sistemi aşağıda verilmiştir.

$$l_2 \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} + (d_2 + d_3) \frac{2x_1}{1+x_1^2} - p_x + d_6 r_{13} + l_4 \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \left( \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} - \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2} \right) = 0 \quad (188)$$

$$l_2 \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} - (d_2 + d_3) \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} - p_y + d_6 r_{23} + l_4 \frac{2x_1}{1+x_1^2} \left( \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} - \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2} \right) = 0 \quad (189)$$

$$l_2 \frac{2x_2}{1+x_2^2} + h_1 - p_z + d_6 r_{33} + l_4 \left( \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} \frac{2x_4}{1+x_4^2} + \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{1-x_4^2}{1+x_4^2} \right) = 0 \quad (190)$$

NC robotunun eklem değişkenlerini bulmak için Denklem 3.9'un uygulanmasıyla elde edilen matrisler.

$$\begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 & -c\theta_4 s\theta_5 & -s\theta_4 & l_4 c\theta_4 + l_2 \\ s\theta_4 c\theta_5 & -s\theta_4 s\theta_5 & c\theta_4 & l_4 s\theta_4 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -c\theta_2 [c\theta_1 (r_{13} d_6 - p_x) + s\theta_1 (r_{23} d_6 - p_y)] + s\theta_2 (p_z - h_1 - r_{33} d_6) \\ \cdot & \cdot & \cdot & s\theta_2 [c\theta_1 (r_{13} d_6 - p_x) + s\theta_1 (r_{23} d_6 - p_y)] + c\theta_2 (p_z - h_1 - r_{33} d_6) \\ a & b & c & s\theta_1 (p_x - r_{13} d_6) - c\theta_1 (p_y + r_{23} d_6) - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (191)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a = (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})c\theta_6 - (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})s\theta_6 \quad (192)$$

$$b = -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} \quad (193)$$

$$c = (s\theta_1 r_{11} - c\theta_1 r_{21})s\theta_6 + (s\theta_1 r_{12} - c\theta_1 r_{22})c\theta_6 \quad (194)$$

**EK-F : ROBOTLARIN DİNAMİK MODELLERİNİN ÇIKARILMASINDA  
KULLANILAN ARA İŞLEMLER**

**1-SC robotu**

**1.Bağ**

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{l_1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$D_1 = {}^0R \bar{D}_1 {}^0R^T = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}l_1 \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$z^0 = {}^0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem prizmatik olduğundan  $\xi = 0$ ' dir.

Dolayısıyla,  $b_1 = \xi z^0 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

**2.Bağ**

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_2}{2} & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad {}^0_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$D_2 = {}^0R\overline{D_2} {}^0R^T = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy_2} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = H_1 {}^0T \Delta c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}l_2 + q_2 \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$z^1 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem prizmatik olduğundan  $\xi_2 = 0$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_2 = \xi z^1 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ 'dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2 = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

### 3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} l_3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \quad \overline{D_3} = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, \quad {}^0T_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 + q_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$D_3 = {}^0R\overline{D_3} {}^0R_3^T, \quad \bar{c}_3 = H_1 {}^0T_3 \Delta c_3$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\theta_3 I_{xx_3} + s^2\theta_3 I_{yy_3} & 0 & c\theta_3 s\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \\ 0 & I_{zz_3} & 0 \\ c\theta_3 s\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) & 0 & s^2\theta_3 I_{xx_3} + c^2\theta_3 I_{yy_3} \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2 c\theta_3 \\ l_1 + q_2 \\ \frac{1}{2}l_2 s\theta_3 + q_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$y^2 = {}^0Ri^3 = [0 \ -1 \ 0]^T$  ve üçüncü eklem dönel olduğundan  $\xi_3 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_3 = \xi y^2 = 1 \cdot [0 \ -1 \ 0]^T = [0 \ -1 \ 0]^T$ 'dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}l_2 s\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & +\frac{1}{2}l_2 c\theta_3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$



$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3 = \begin{bmatrix} m_3 & 0 & \frac{1}{2} l_2 m_3 c \theta_3 \\ 0 & m_3 & 0 \\ \frac{1}{2} l_2 m_3 c \theta_3 & 0 & \frac{1}{4} l_2^2 m_3 + I_{zz_3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Birinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} l_2 m_3 s \theta_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine yerçekimine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0 (m_1 A^1_{31} + m_2 A^2_{31} + m_3 A^3_{31}) = g_0 (m_1 + m_2 + m_3) \quad (14)$$

İkinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenine yerçekimiyle aynı yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \ g_0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = -g_0 (m_2 A^2_{22} + m_3 A^3_{22}) = -g_0 (m_2 + m_3) \quad (16)$$

Üçüncü eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4}l_2m_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}l_2m_3s\theta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle aynı yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ g_0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir. Üçüncü ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = -g_0m_3A^3_{23} = 0 \quad (18)$$

## 2-SN Robotu

### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d_2}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$D_1 = {}^0_1R\bar{D}_1{}^0_1R^T = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T\Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d_2}{2} \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$z^0 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem prizmatik olduğundan,  $\xi_1 = 0$ ' dir.

Dolayısıyla,  $b_1 = \xi z^0 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ ' dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$D(q_1) = m_1A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

## 2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{l_2}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad {}^0_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$D_2 = {}^0_2R \bar{D}_2 {}^0_2R^T, \quad \bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\theta_2 I_{xx_2} + s^2\theta_2 I_{yy_2} & 0 & c\theta_2 s\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) \\ 0 & I_{zz_2} & 0 \\ s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & 0 & s^2\theta_2 I_{xx_2} + c^2\theta_2 I_{yy_2} \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_2 s\theta_2 \\ d_2 \\ \frac{1}{2}l_2 c\theta_2 + q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$z^1 = {}^0_1R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_2 = \xi_2 z^1 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}l_2 c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}l_2 s\theta_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2$$

$$= \begin{bmatrix} m_2 & -\frac{1}{2}l_2 m_2 s\theta_2 & 0 \\ -\frac{1}{2}l_2 m_2 s\theta_2 & \frac{1}{4}l_2^2 m_2 + s^2\theta_2 I_{xx_2} + c^2\theta_2 I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

## 3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} \frac{l_3}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, \quad {}^0_3T = \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 & -c\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_2 & -l_2 s\theta_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & d_2 \\ s\theta_2 c\theta_3 & -s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 & l_2 c\theta_2 + q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$D_3 = {}^0_3 R \overline{D_3} {}^0_3 R^T \quad \bar{c}_3 = H_1 {}^0_3 T \Delta c_3$$

$$= \begin{bmatrix} a_{SN} & b_{SN} & c_{SN} \\ b_{SN} & s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} & e_{SN} \\ c_{SN} & s \theta_2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) & d_{SN} \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_3 c \theta_2 c \theta_3 - l_2 s \theta_2 \\ \frac{1}{2} l_3 s \theta_3 + d_2 \\ \frac{1}{2} l_3 s \theta_2 c \theta_3 + l_2 c \theta_2 + q_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{SN} = c^2 \theta_2 (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) + s^2 \theta_2 I_{zz_3} \quad (29)$$

$$b_{SN} = c \theta_2 c \theta_3 s \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (30)$$

$$c_{SN} = c \theta_2 s \theta_2 (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3} - I_{zz_3}) \quad (31)$$

$$d_{SN} = s^2 \theta_2 (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) + c^2 \theta_2 I_{zz_3} \quad (32)$$

$$e_{SN} = s \theta_2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (33)$$

$y^2 = {}^0_2 R i^3 = [0 \ -1 \ 0]^T$  ve üçüncü eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir.

Dolayısıyla,  $b_3 = \xi_2 y^2 = 1 \cdot [0 \ -1 \ 0]^T = [0 \ -1 \ 0]^T$  dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} l_3 s \theta_2 c \theta_3 - l_2 c \theta_2 & -\frac{1}{2} l_3 c \theta_2 s \theta_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} l_3 \cos \theta_3 \\ 1 & \frac{1}{2} l_3 c \theta_2 c \theta_3 - l_2 s \theta_2 & -\frac{1}{2} l_3 s \theta_2 s \theta_3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_2 c \theta_3 - l_2 m_3 s \theta_2 & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{4} l_3^2 m_3 c^2 \theta_3 + l_2^2 m_3 + s^2 \theta_2 (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) + c^2 \theta_2 I_{zz_3} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2} l_3 m_3 l_2 s \theta_3 - s \theta_2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_3 & \cdot & \frac{1}{2}I_3m_3s\theta_2s\theta_3 \\ \frac{1}{2}l_3m_3c\theta_2c\theta_3 - l_2m_3s\theta_2 & \cdot & \frac{1}{2}I_3l_2m_3s\theta_3 - s\theta_2s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \\ -\frac{1}{2}I_3m_3s\theta_2s\theta_3 & \cdot & \frac{1}{4}I_3^2m_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Birinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}l_2m_2c\theta_2 - \frac{1}{2}l_3m_3s\theta_2c\theta_3 - l_2m_3c\theta_2 & -\frac{1}{2}l_3m_3c\theta_2s\theta_3 \\ 0 & -\frac{1}{2}l_3m_3c\theta_2s\theta_3 & -\frac{1}{2}I_3m_3s\theta_2c\theta_3 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıda verilmiştir.

$$h_{(1)} = g_0(m_1A^1_{31} + m_2A^2_{31} + m_3A^3_{31}) = g_0(m_1 + m_2 + m_3) \quad (37)$$

İkinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{4}l_2m_3c\theta_2 - \frac{1}{4}l_3m_3s\theta_2c\theta_3 - \frac{1}{2}l_2m_3c\theta_2 & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{4}l_3m_3c\theta_2s\theta_3 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \frac{1}{4}l_2m_3c\theta_2 + \frac{1}{4}l_3m_3s\theta_2c\theta_3 + \frac{1}{2}l_2m_3c\theta_2 & \cdot \\ \cdot & s\theta_2c\theta_2(I_{xx_2} - I_{yy_2} + c^2\theta_3I_{xx_3} + s^2\theta_3I_{yy_3} - I_{zz_3}) & \cdot \\ \cdot & s\theta_3c\theta_3(-\frac{1}{2}l_3^2m_3 + 2s^2\theta_2[I_{yy_3} - I_{xx_3}]) - (s\theta_2c^2\theta_3 - \frac{1}{2}s\theta_2)(I_{yy_3} - I_{xx_3}) & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \frac{1}{4}l_3m_3c\theta_2s\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2}c\theta_2c\theta_3s\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2}I_2I_3m_3c\theta_3 + (2s\theta_2c^2\theta_3 - s\theta_2)(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \end{bmatrix} \quad (38)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle aynı yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \ g_0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci eklem yerçekimi ivmesi aşağıda verilmiştir.

$$h_{(2)} = -g_0(m_2A^2_{22} + m_3A^3_{22}) = 0 \quad (39)$$

Üçüncü eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} c_3 &= \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{2}l_3m_3c\theta_2s\theta_3 + \frac{1}{4}l_3m_3c\theta_2s\theta_3 & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{4}l_3m_3s\theta_2c\theta_3 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \frac{1}{4}l_3m_3c\theta_2s\theta_3 & \cdot \\ \cdot & s\theta_3c\theta_3(c\theta_2I_{yy_3} - c\theta_2I_{xx_3} + \frac{1}{4}l_3^2m_3 + s^2\theta_2I_{xx_3} - I_{yy_3}) & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{4}l_2l_3m_3c\theta_3 - (s\theta_2c^2\theta_3 - \frac{1}{2}s\theta_2)(I_{yy_3} - I_{xx_3}) & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \frac{1}{4}l_3m_3s\theta_2c\theta_3 \\ \cdot & \cdot & -\frac{1}{4}l_2l_3m_3c\theta_3 + (s\theta_2c^2\theta_3 - \frac{1}{2}s\theta_2)(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \\ \cdot & \cdot & s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \end{bmatrix} \quad (40) \end{aligned}$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Üçüncü eklem yerçekimi ivmesi,

$$h_{(3)} = g_0 m_3 A^3_{33} = -g_0 l_3 m_3 s \theta_2 s \theta_3 \quad (41)$$

### 3-CS Robotu

#### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_2}{2} & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$D_1 = {}^0_1R \bar{D}_1 {}^0_1R^T = \begin{bmatrix} I_{xx_1} c^2 \theta_1 + I_{yy_1} s^2 \theta_1 & s \theta_1 c \theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ s \theta_1 c \theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & I_{xx_1} s^2 \theta_1 + I_{yy_1} c^2 \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$z^0 = {}^0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem dönel olduğundan,  $\xi = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_1 = \xi z^0 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

#### 2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad {}^0_2T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$D_2 = {}^0_2R \bar{D}_2 {}^0_2R^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 I_{xx_2} + \sin^2 \theta_1 I_{yy_2} & \sin \theta_1 \cos \theta_1 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & 0 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_1 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & \cos^2 \theta_1 I_{yy_2} + \sin^2 \theta_1 I_{xx_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1 \\ \frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1 \\ q_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$z^1 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem prizmatik olduğundan,  $\xi_2 = 0$  dir. Dolayısıyla,  $b_2 = \xi_2 z^1 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}l_1 \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}l_1^2 m_2 + I_{zz_2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

### 3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_3}{2} & 1 \end{bmatrix}^T \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, \quad {}^0_3T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & l_1 c\theta_1 + q_3 s\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & l_1 s\theta_1 - q_3 c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$D_3 = {}^0R \bar{D}_3 {}^0R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_3} + s^2\theta_1 I_{zz_3} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_3} - I_{zz_3}) & 0 \\ c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_3} - I_{zz_3}) & s^2\theta_1 I_{xx_3} + c^2\theta_1 I_{zz_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy_3} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_3 = H_1 {}^0_3T \Delta c_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_3 s\theta_1 + l_1 c\theta_1 + q_3 s\theta_1 \\ -\frac{1}{2}l_3 c\theta_1 + l_1 s\theta_1 - q_3 c\theta_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$z^2 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve üçüncü prizmatik olduğundan,  $\xi_3 = 0$  dir. Dolayısıyla,  $b_3 = \xi_3 z^2 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}l_3 + q_3)c\theta_1 - l_1 s\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ (\frac{1}{2}l_3 + q_3)s\theta_1 + l_1 c\theta_1 & 0 & -c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$



$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3 = \begin{bmatrix} m_3(l_1^2 + \frac{1}{4}l_3^2 + l_3q_3 + q_3^2) & 0 & -m_3l_1 + I_{yy_3} \\ 0 & m_3 & 0 \\ -m_3l_1 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Birinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ l_3m_3 + 2m_3q_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z ekseni yerçekimine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Böylece birinci eklemin yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0(m_1A^1_{31} + m_2A^2_{31} + m_3A^3_{31}) = 0 \quad (55)$$

İkinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z ekseni yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Böylece ikinci ekleme yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = g_0(m_2A^2_{32} + m_3A^3_{32}) = g_0(m_2 + m_3) \quad (57)$$

Üçüncü eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_3m_3 - m_3q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ -g_0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir. Sonuç olarak, üçüncü eklemin yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = g_0 m_3 A^3_{23} = -g_0 m_3 c\theta_1 \quad (59)$$

#### 4-CC Robotu

##### 1. Bağı

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$D_1 = {}^0_1R \bar{D}_1 {}^0_1R^T \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_1} + s^2\theta_1 I_{yy_1} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & s^2\theta_1 I_{xx_1} + c^2\theta_1 I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$z^0 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci ekleme dönel olduğundan,  $\xi = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_1 = \xi z^0 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

## 2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, {}^0_2T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$D_2 = {}^0_2R \bar{D}_2 {}^0_2R^T, \bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_2} + s^2\theta_1 I_{yy_2} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & 0 \\ c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & s^2\theta_1 I_{xx_2} + c^2\theta_1 I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_2 c\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_2 s\theta_1 \\ q_2 + h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$z^1 = {}^0_1R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem prizmatik olduğundan,  $\xi_2 = 0$  dir.

Dolayısıyla,  $b_2 = \xi_2 z^1 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} s\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{l_2}{2} c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + I_{zz_2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

## 3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} \frac{l_3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, {}^0_3T = \begin{bmatrix} c\theta_{13} & -s\theta_{13} & 0 & l_2 c\theta_1 \\ s\theta_{13} & c\theta_{13} & 0 & l_2 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$D_3 = {}^0_3R \bar{D}_3 {}^0_3R^T, \bar{c}_3 = H_1 {}^0_3T \Delta c_3$$

$$= \begin{bmatrix} I_{yy_3} s^2\theta_{13} & -I_{yy_3} s\theta_{13} c\theta_{13} & 0 \\ -I_{yy_3} s\theta_{13} c\theta_{13} & I_{yy_3} c^2\theta_{13} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_3 c\theta_{13} + l_2 c\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_3 s\theta_{13} + l_2 s\theta_1 \\ q_2 + h_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$z^2 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve üçüncü eklem dönel olduğundan,  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_3 = \xi_3 z^2 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$ ' dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{l_3}{2}s\theta_{13} - l_2s\theta_1 & 0 & -\frac{1}{2}l_3s\theta_{13} \\ \frac{l_3}{2}c\theta_{13} + l_2s\theta_1 & 0 & \frac{1}{2}l_3c\theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$= \begin{bmatrix} m_3(l_2 l_3 c\theta_3 + l_2^2 + \frac{1}{4}l_3^2) + I_{zz_3} & 0 & m_3(\frac{1}{2}l_3 l_2 c\theta_3 + \frac{1}{4}l_3^2) + I_{zz_3} \\ 0 & m_3 & 0 \\ m_3(\frac{1}{2}l_3 c\theta_3 l_2 + \frac{1}{4}l_3^2) + I_{zz_3} & 0 & \frac{1}{4}m_3 l_3^2 + I_{zz_3} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Birinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -l_2 l_3 m_3 s\theta_3 & 0 & -\frac{1}{2}l_2 l_3 m_3 s\theta_3 \end{bmatrix} \quad (72)$$

Birinci eklem yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine yatay yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci eklem ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0(m_1 A^1{}_{31} + m_2 A^2{}_{31} + m_3 A^3{}_{31}) = 0 \quad (73)$$

İkinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = g_0(m_2 A^2_{32} + m_3 A^3_{32}) = g_0(m_2 + m_3) \quad (75)$$

Üçüncü eklem için hız bağlaşım matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$c_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3 & 0 & \frac{1}{4}l_2l_3m_3s\theta_3 \\ \theta & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}l_2l_3m_3s\theta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Üçüncü ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = g_0m_3A^3_{33} = 0 \quad (77)$$

## 5-CR Robotu

### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$D_1 = {}^0_1R \bar{D}_1 {}^0_1R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_1} + s^2\theta_1 I_{yy_1} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & s^2\theta_1 I_{xx_1} + c^2\theta_1 I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{h_1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$z^0 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem dönel olduğundan  $\xi = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_1 = \xi z^0 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$ ' dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (81)$$

2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} l_2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad {}^0_2T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$D_2 = {}^0_2R \bar{D}_2 {}^0_2R^T = \begin{bmatrix} c^2 \theta_1 I_{xx_2} + s^2 \theta_1 I_{yy_2} & c \theta_1 s \theta_1 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & 0 \\ c \theta_1 s \theta_1 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & s^2 \theta_1 I_{xx_2} + c^2 \theta_1 I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_2 c \theta_1 \\ \frac{1}{2} l_2 s \theta_1 \\ q_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$z^1 = {}^0_1Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem prizmatik olduğundan  $\xi_2 = 0$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_2 = \xi_2 z^1 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ ' dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_2 s \theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} l_2 c \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{zz_2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (85)$$

### 3. Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} \frac{l_3}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, {}^0_3T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_3 & -c\theta_1 s\theta_3 & s\theta_1 & l_2 \cos\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_3 & -c\theta_1 c\theta_3 & -c\theta_1 & l_2 \sin\theta_1 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$D_3 = {}^0_3R \bar{D}_3 {}^0_3R^T, \quad \bar{c}_3 = H_1 {}^0_3T \Delta c_3$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\theta_1(I_{xx_3}c^2\theta_3 + I_{yy_3}s^2\theta_3) + s^2\theta_1 I_{zz_3} & a_{CR} & b_{CR} \\ a_{CR} & e_{CR} & c_{CR} \\ b_{CR} & c_{CR} & d_{CR} \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_3c\theta_1c\theta_3 + l_2c\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_3s\theta_1c\theta_3 + l_2s\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_3s\theta_3 + q_2 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{CR} = c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_3} c^2\theta_3 + I_{yy_3} s^2\theta_3 - I_{zz_3}) \quad (88)$$

$$b_{CR} = c\theta_1 c\theta_3 s\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (89)$$

$$c_{CR} = s\theta_1 s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (90)$$

$$d_{CR} = s^2\theta_3 I_{xx_3} + I_{yy_3} c^2\theta_3 \quad (91)$$

$$e_{CR} = s^2\theta_1 (I_{xx_3} c^2\theta_3 + I_{yy_3} s^2\theta_3) + c^2\theta_1 I_{zz_3} \quad (92)$$

$z^2 = {}^0_2R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve üçüncü eksen dönel olduğundan  $\xi_3 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_3 = \xi_3 z^2 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$ ' dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_3s\theta_1c\theta_3 - l_2s\theta_1 & 0 & -\frac{1}{2}l_3c\theta_1s\theta_3 \\ \frac{1}{2}l_3c\theta_1c\theta_3 + l_2c\theta_1 & 0 & -\frac{1}{2}l_3s\theta_1s\theta_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}l_3c\theta_3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$= \begin{bmatrix} f_{CR} & 0 & s^2\theta_3 I_{xx_3} + c^2\theta_3 I_{yy_3} \\ 0 & m_3 & \frac{1}{2}l_3 m_3 c\theta_3 \\ s^2\theta_3 I_{xx_3} + c^2\theta_3 I_{yy_3} & \frac{1}{2}l_3 m_3 c\theta_3 & \frac{1}{4}l_3^2 m_3 + s^2\theta_3 I_{xx_3} + c^2\theta_3 I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (94)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$f_{CR} = m_3 \left( \frac{1}{4}l_3^2 c^2\theta_3 + l_2 l_3 c\theta_3 + l_2^2 \right) + s^2\theta_3 I_{xx_3} + c^2\theta_3 I_{yy_3} \quad (95)$$

Birinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıdaki gibidir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{CR} & 0 & 2s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \end{bmatrix} \quad (96)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$g_{CR} = -m_3 \left( \frac{1}{2}l_3^2 c\theta_3 s\theta_3 + l_2 l_3 s\theta_3 \right) + 2s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (97)$$

Birinci eklem yerleştirilen koordinat çerçevesinde z ekseni yerçekimine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci eklem ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0 (m_1 A^1_{31} + m_2 A^2_{31} + m_3 A^3_{31}) = 0 \quad (98)$$

İkinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıdaki gibidir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}l_3 m_3 s\theta_3 \end{bmatrix} \quad (99)$$



İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenini yerçekimi zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = g_0(m_2 A^2_{32} + m_3 A^3_{32}) = g_0(m_2 + m_3) \quad (100)$$

Üçüncü eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıdaki gibidir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} i_{CR} & 0 & -c\theta_3 s\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} l_3 m_3 s\theta_3 \\ c\theta_3 s\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) & -\frac{1}{4} l_3 m_3 s\theta_3 & s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \end{bmatrix} \quad (101)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$i_{CR} = m_3 \left( \frac{1}{2} l_3^2 c\theta_3 s\theta_3 + l_2 l_3 s\theta_3 \right) - 2s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (102)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle aynı yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ g_0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir.

Üçüncü ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = -g_0 m_3 A^3_{23} = \frac{1}{2} g_0 m_3 l_3 s\theta_1 s\theta_3 \quad (103)$$

## 6-NS Robotu

### 1. Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{d_2}{2} & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$D_1 = {}^0R \overline{D_1} {}^0R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_1} + s^2\theta_1 I_{yy_1} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & s^2\theta_1 I_{xx_1} + c^2\theta_1 I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} d_2 s\theta_1 \\ -\frac{1}{2} d_2 c\theta_1 \\ h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (105)$$

$z^0 = {}^0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci ekleme dönel olduğundan  $\xi = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_1 = \xi z^0 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} d_2 c\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} d_2 s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_1 d_2^2 + I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (107)$$

2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad {}^0T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 & s\theta_1 d_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_1 & -c\theta_1 d_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (108)$$

$$\bar{c}_2 = H_1 {}^0T \Delta c_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_2 c\theta_1 s\theta_2 + d_2 s\theta_1 \\ -\frac{1}{2} l_2 s\theta_1 s\theta_2 - d_2 c\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_2 c\theta_2 + h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (109)$$

$$D_2 = {}^0R \overline{D_2} {}^0R^T = \begin{bmatrix} a_{NS} & b_{NS} & d_{NS} \\ b_{NS} & c_{NS} & s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) \\ d_{NS} & s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & (s^2\theta_2 I_{xx_2} + c^2\theta_2 I_{yy_2}) \end{bmatrix},$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$b_{NS} = s\theta_1 c\theta_1 (c^2\theta_2 I_{xx_2} + s^2\theta_2 I_{yy_2} - I_{zz_2}) \quad (110)$$

$$c_{NS} = s^2\theta_1(c^2\theta_2I_{xx_2} + s^2\theta_2I_{yy_2}) + c^2\theta_1I_{zz_2} \quad (111)$$

$$d_{NS} = c\theta_1c\theta_2s\theta_2(I_{xx_2} - I_{yy_2}) \quad (112)$$

$z^1 = {}^0R_1 z^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,

$b_2 = \xi_2 z^1 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2s\theta_1c\theta_2 + d_2c\theta_1 & -\frac{1}{2}l_2c\theta_1c\theta_2 & 0 \\ -\frac{1}{2}l_2c\theta_1s\theta_2 + d_2s\theta_1 & -\frac{1}{2}l_2s\theta_1c\theta_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}l_2s\theta_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (113)$$

$$D(q_2) = m_2A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2$$

$$= \begin{bmatrix} e_{NS} & -\frac{1}{2}l_2d_2m_2c\theta_2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} & 0 \\ f_{NS} & \frac{1}{4}l_2^2m_2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (114)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$e_{NS} = m_2\left(\frac{1}{4}l_2^2 - \frac{1}{4}l_2^2c^2\theta_2 + d_2^2\right) + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} \quad (115)$$

$$f_{NS} = -\frac{1}{2}l_2d_2m_2c\theta_2 + s^2\theta_2I_{xx_2} + c^2\theta_2I_{yy_2} \quad (116)$$

3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_3}{2} & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}$$

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} c\theta_1c\theta_2 & -s\theta_1 & -c\theta_1s\theta_2 & -c\theta_1s\theta_2(q_3 + l_2) + s\theta_1d_2 \\ s\theta_1c\theta_2 & c\theta_1 & -s\theta_1s\theta_2 & -s\theta_1s\theta_2(q_3 + l_2) - c\theta_1d_2 \\ s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & c\theta_2(q_3 + l_2) + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (117)$$

$$D_3 = {}^0_3R \overline{D_3} {}^0_3R^T = \begin{bmatrix} g_{NS} & h_{NS} & k_{NS} \\ h_{NS} & i_{NS} & s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (I_{xx_3} - I_{zz_3}) \\ k_{NS} & s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (I_{xx_3} - I_{zz_3}) & s^2\theta_2 I_{xx_3} + c^2\theta_2 I_{zz_3} \end{bmatrix},$$

$$\bar{c}_3 = H_1 {}^0_3T \Delta c_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_3 c\theta_1 s\theta_2 - c\theta_1 s\theta_2 (q_3 + l_2) + d_2 s\theta_1 \\ -\frac{1}{2}l_3 s\theta_1 s\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2 (q_3 + l_2) - d_2 c\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_3 c\theta_2 + c\theta_2 (q_3 + l_2) + h_1 \end{bmatrix} \quad (118)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$g_{NS} = c^2\theta_1 (c^2\theta_2 I_{xx_3} + s^2\theta_2 I_{zz_3}) + s^2\theta_1 I_{yy_3} \quad (119)$$

$$h_{NS} = s\theta_1 c\theta_1 (c^2\theta_2 I_{xx_3} + s^2\theta_2 I_{zz_3} - I_{yy_3}) \quad (120)$$

$$i_{NS} = s^2\theta_1 (c^2\theta_2 I_{xx_3} + s^2\theta_2 I_{zz_3}) + c^2\theta_1 I_{yy_3} \quad (121)$$

$$k_{NS} = c\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (I_{xx_3} - I_{zz_3}) \quad (122)$$

$x^2 y^2 = {}^0_2R i^3 = [s\theta_1 - c\theta_1 \ 0]^T$  ve üçüncü prizmatik olduğundan  $\xi_3 = 0$  dir.

Dolayısıyla  $b_3 = \xi_3 x^2 y^2 = 0 \cdot [s\theta_1 - c\theta_1 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} s\theta_1 s\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 + l_2 + q_3) + d_2 c\theta_1 & -c\theta_1 c\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 + l_2 + q_3) & -c\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 s\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 + l_2 + q_3) + d_2 s\theta_1 & -s\theta_1 c\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 + l_2 + q_3) & -s\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 + l_2 + q_3) & c\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (123)$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} n_{NS} & \cdot & \cdot \\ -m_3 c \theta_2 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3 \right) + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{zz_3} & \cdot & \cdot \\ -m_3 d_2 s \theta_2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\Rightarrow & \begin{bmatrix} \cdot & -m_3 c \theta_2 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3 \right) + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{zz_3} & -d_2 m_3 s \theta_2 \\ \cdot & o_{NS} & 0 \\ \cdot & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (124)
\end{aligned}$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$n_{NS} = m_3 s^2 \theta_2 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + l_2 l_3 + l_3 q_3 + q_3^2 + 2l_2 q_3 + l_2^2 \right) + m_3 d_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{zz_3} \quad (125)$$

$$o_{NS} = \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + l_2 l_3 m_3 + l_3 q_3 m_3 + l_2^2 m_3 + 2l_2 m_3 q_3 + m_3 q_3^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{zz_3} \quad (126)$$

Birinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{NS} & r_{NS} & -d_2 m_3 c \theta_2 \\ m_3 s^2 \theta_2 (l_3 + 2q_3 + 2l_2) & -d_2 m_3 c \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (127)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$p_{NS} = c \theta_2 s \theta_2 \left[ \frac{1}{2} l_2^2 m_2 + 2(I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3}) + 2m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + l_2 l_3 + l_3 q_3 + q_3^2 + 2l_2 q_3 + l_2^2 \right) \right] \quad (128)$$

$$r_{NS} = \frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 s \theta_2 + 2s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3}) + m_3 s \theta_2 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3 \right) \quad (129)$$

Birinci eklem yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine yatay yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci eklem ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0(m_1 A^1_{31} + m_2 A^2_{31} + m_3 A^3_{31}) = 0 \quad (130)$$

İkinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} s_{NS} & t_{NS} & \frac{1}{2}d_2 m_3 c\theta_2 \\ u_{NS} & s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3}) & 0 \\ c\theta_2 (\frac{1}{2}d_2 - d_2 m_3) & m_3 (l_3 + 2l_2 + 2q_3) & 0 \end{bmatrix} \quad (131)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$s_{NS} = c\theta_2 s\theta_2 (\frac{1}{4}l_2^2 m_2 - I_{xx_2} - I_{xx_3} + I_{yy_2} + I_{zz_3} - m_3 (\frac{1}{4}l_3^2 + l_2 l_3 + l_3 q_3 + q_3^2 + 2l_2 q_3 + l_2^2)) \quad (132)$$

$$t_{NS} = s\theta_2 (\frac{1}{4}d_2 l_2 m_2 - c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3}) + m_3 (\frac{1}{2}d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3)) \quad (133)$$

$$u_{NS} = s\theta_2 (\frac{1}{4}d_2 l_2 m_2 + c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3}) + m_3 (\frac{1}{2}d_2 l_3 + d_2 l_2 + d_2 q_3)) \quad (134)$$

İkinci eklem yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \quad -g_0 \quad 0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci eklem için yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = g_0 (m_2 A^2_{22} + m_3 A^3_{22}) = g_0 s\theta_1 c\theta_2 (\frac{1}{2}l_2 m_2 - \frac{1}{2}l_3 m_3 - l_2 m_3 - q_3 m_3) \quad (135)$$

Üçüncü eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} m_3 s^2\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 + q_3 + l_2 q_3) & \frac{1}{2}m_3 d_2 c\theta_2 & 0 \\ -d_2 c\theta_2 (1 - \frac{1}{2}m_3) & -m_3 (\frac{1}{2}l_3 + l_2 + q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (136)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Üçüncü ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = g_0 m_3 A_{33}^3 = g_0 m_3 c\theta_2 \quad (137)$$

## 7-NN Robotu

### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{d_2}{2} & 1 \end{bmatrix}^T, \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (138)$$

$$D_1 = {}^0_1R \bar{D}_1 {}^0_1R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_1} + s^2\theta_1 I_{yy_1} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & s^2\theta_1 I_{xx_1} + c^2\theta_1 I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} d_2 s\theta_1 \\ -\frac{1}{2} d_2 c\theta_1 \\ h_1 \end{bmatrix} \quad (139)$$

$z^0 = {}^0_0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem dönel olduğundan  $\xi = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $h_1 = \xi z^0 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} d_2 c\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} d_2 s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (140)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} m_1 \frac{1}{4} d_2^2 + I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (141)$$

### 2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_2}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad {}^0_2T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 & d_2 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_1 & -d_2 c\theta_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (142)$$

$$D_2 = {}^0_2R \overline{D}_2 {}^0_2R^T, \quad \bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2$$

$$= \begin{bmatrix} a_{NN} & b_{NN} & d_{NN} \\ b_{NN} & c_{NN} & s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) \\ d_{NN} & q_{NN} & (s^2\theta_2 I_{xx_2} + c^2\theta_2 I_{yy_2}) \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_2 c\theta_1 s\theta_2 + d_2 s\theta_1 \\ -\frac{1}{2}l_2 s\theta_1 s\theta_2 - d_2 c\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_2 c\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} \quad (143)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{NN} = c^2\theta_1 (c^2\theta_2 I_{xx_2} + s^2\theta_2 I_{yy_2}) + s^2\theta_1 I_{zz_2} \quad (144)$$

$$b_{NN} = s\theta_1 c\theta_1 (c^2\theta_2 I_{xx_2} + s^2\theta_2 I_{yy_2} - I_{zz_2}) \quad (145)$$

$$c_{NN} = s^2\theta_1 (c^2\theta_2 I_{xx_2} + s^2\theta_2 I_{yy_2}) + c^2\theta_1 I_{zz_2} \quad (146)$$

$$d_{NN} = c\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) \quad (147)$$

$$q_{NN} = s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) \quad (148)$$

$z^1 = {}^0_1R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,

$b_2 = \xi_2 z^1 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1 & -\frac{1}{2}l_2 c\theta_1 c\theta_2 & 0 \\ -\frac{1}{2}l_2 c\theta_1 s\theta_2 + d_2 s\theta_1 & -\frac{1}{2}l_2 s\theta_1 c\theta_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}l_2 s\theta_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (149)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2 = \begin{bmatrix} r_{NN} & t_{NN} & 0 \\ s_{NN} & v_{NN} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (150)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.



$$r_{NN} = m_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 + d_2^2 - \frac{1}{4} l_2^2 m_2 c^2 \theta_2 \right) + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} \quad (151)$$

$$s_{NN} = -\frac{1}{2} m_2 l_2 d_2 c \theta_2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} \quad (152)$$

$$t_{NN} = \frac{1}{2} m_2 l_2 c \theta_2 d_2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} \quad (153)$$

$$v_{NN} = \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} \quad (154)$$

3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} \frac{l_3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix},$$

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3 & -c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3 & -c\theta_1 s\theta_2 & -l_2 c\theta_1 s\theta_2 + d_2 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3 & -s\theta_1 s\theta_2 & -l_2 s\theta_1 s\theta_2 - d_2 c\theta_1 \\ s\theta_2 c\theta_3 & -s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 & l_2 c\theta_2 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (155)$$

$$\bar{c}_3 = H_1 {}^0_3T \Delta c_3$$

$$D_3 = {}^0_3R \bar{D}_3 {}^0_3R^T$$

$$= \begin{bmatrix} e_{NN} & f_{NN} & g_{NN} \\ f_{NN} & h_{NN} & i_{NN} \\ g_{NN} & i_{NN} & j_{NN} \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_3 (c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3) - l_2 (c\theta_1 s\theta_2) + d_2 s\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_3 (s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3) - l_2 (s\theta_1 s\theta_2) - d_2 c\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_3 s\theta_2 c\theta_3 + l_2 c\theta_2 + h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (156)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$e_{NN} = c^2 \theta_1 c^2 \theta_2 (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) + 2s\theta_1 s\theta_3 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3})$$

$$+ s^2 \theta_1 (s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3}) + c^2 \theta_1 s^2 \theta_2 I_{zz_3} \quad (157)$$

$$f_{NN} = c\theta_1 s\theta_1 (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3} - s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} - s^2 \theta_2 I_{zz_3})$$

$$+ c\theta_2 c\theta_3 s\theta_3 (2c^2 \theta_1 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) - I_{xx_3} + I_{yy_3}) \quad (158)$$

$$g_{NN} = c\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 c\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) - c\theta_1 s\theta_2 c\theta_2 I_{zz_3} \quad (159)$$

$$h_{NN} = s^2 \theta_1 c^2 \theta_2 (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) + 2s\theta_1 s\theta_3 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3})$$

$$+ c^2\theta_1(s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3}) + s^2\theta_1s^2\theta_2I_{zz_3} \quad (160)$$

$$i_{NN} = s\theta_2s\theta_3c\theta_1c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) + s\theta_1s\theta_2c\theta_2(c^2\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) + I_{yy_3} - I_{zz_3}) \quad (161)$$

$$j_{NN} = s^2\theta_2(c^2\theta_3I_{xx_3} + s^2\theta_3I_{yy_3}) + c^2\theta_2I_{zz_3} \quad (162)$$

$x^2y^2 = {}^0Ri^3 = [s\theta_1 - c\theta_1 \ 0]^T$  ve üçüncü prizmatik olduğundan  $\xi_3 = 1$ ' dir.

Dolayısıyla,  $b_3 = \xi_3 x^2y^2 = 1 \cdot [s\theta_1 - c\theta_1 \ 0]^T = [s\theta_1 - c\theta_1 \ 0]^T$  'dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} k_{NN} & -\frac{1}{2}l_3c\theta_1s\theta_2c\theta_3 - l_2c\theta_1c\theta_2 & -\frac{1}{2}l_3(c\theta_1c\theta_2s\theta_3 + s\theta_1c\theta_3) \\ l_{NN} & -\frac{1}{2}l_3s\theta_1s\theta_2c\theta_3 - l_2s\theta_1c\theta_2 & -\frac{1}{2}l_3(s\theta_1c\theta_2s\theta_3 - c\theta_1c\theta_3) \\ 0 & \frac{1}{2}l_3c\theta_2c\theta_3 - l_2s\theta_2 & -\frac{1}{2}l_3s\theta_2s\theta_3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s\theta_1 \\ 0 & 0 & -c\theta_1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (163)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$k_{NN} = -\frac{1}{2}l_3(s\theta_1c\theta_2c\theta_3 + c\theta_1s\theta_3) + l_2s\theta_1s\theta_2 + d_2c\theta_1 \quad (164)$$

$$l_{NN} = \frac{1}{2}l_3(c\theta_1c\theta_2c\theta_3 - s\theta_1s\theta_3) - l_2c\theta_1s\theta_2 + d_2s\theta_1 \quad (165)$$

$$D(q_3) = m_3A_3^T A_3 + B_3^T D_3B_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_3\left(\frac{1}{4}l_3^2c^2\theta_2c^2\theta_3 + l_2l_3c\theta_2c\theta_3s\theta_2 + l_2^2s^2\theta_2 + \frac{1}{4}l_3^2s^2\theta_3 - l_3d_2s\theta_3 + d_2^2\right) + p_{NN} & \cdot & \cdot \\ m_3\left(\frac{1}{4}l_3^2s\theta_2s\theta_3c\theta_3 + \frac{1}{2}l_3l_2c\theta_2s\theta_3 - \frac{1}{2}d_2l_3s\theta_2c\theta_3 - d_2l_2c\theta_2s\theta_3 + p_{NN}\right) & \cdot & \cdot \\ m_3\left(-\frac{1}{2}l_2l_3s\theta_2c\theta_3 + \frac{1}{4}l_3^2c\theta_2 - \frac{1}{2}l_3d_2s\theta_3c\theta_2\right) + o_{NN} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & n_{NN} + p_{NN} & y_{NN} + o_{NN} \\ \cdot & m_3\left(\frac{1}{4}l_3^2c^2\theta_3 + l_2^2\right) + p_{NN} & \frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3 + o_{NN} \\ \cdot & \frac{1}{2}l_3l_2m_3s\theta_3 + o_{NN} & \frac{1}{4}l_3^2m_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (166)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$y_{NN} = m_3 \left( -\frac{1}{2} l_2 l_3 s \theta_2 c \theta_3 + \frac{1}{4} l_3^2 c \theta_2 - \frac{1}{2} l_3 d_2 c \theta_2 s \theta_3 \right) \quad (167)$$

$$n_{NN} = m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 s \theta_2 s \theta_3 c \theta_3 + \frac{1}{2} l_3 l_2 c \theta_2 s \theta_3 - \frac{1}{2} d_2 l_3 s \theta_2 c \theta_3 - d_2 l_2 c \theta_2 \right) \quad (168)$$

$$o_{NN} = -s \theta_2 c \theta_3 s \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (169)$$

$$p_{NN} = s^2 \theta_2 (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) + c^2 \theta_2 I_{zz_3} \quad (170)$$

Birinci eklemın hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21}^1 & c_{22}^1 & c_{23}^1 \\ c_{31}^1 & -c_{23}^1 & c_{33}^1 \end{bmatrix} \quad (171)$$

Denklemdede kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{21}^1 = 2s \theta_2 c \theta_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 m_2 + 1 + I_{xx_2} - I_{yy_2} - \frac{1}{4} m_3 l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2^2 m_3 \right) + (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) - I_{zz_3} + 2l_2 l_3 m_3 c^2 \theta_2 c \theta_3 - l_2 l_3 m_3 c \theta_3 \quad (172)$$

$$c_{22}^1 = 2s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2} + (c^2 \theta_3 I_{xx_3} + s^2 \theta_3 I_{yy_3}) - I_{zz_3}) + d_2 s \theta_2 \left( \frac{1}{2} l_2 m_2 + l_2 m_3 \right) + m_3 c \theta_2 c \theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 s \theta_3 - \frac{1}{2} d_2 l_3 \right) - \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s^2 \theta_3 \quad (173)$$

$$c_{23}^1 = c \theta_2 c \theta_3 (s \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) - \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3) - m_3 s \theta_2 \left( \frac{1}{4} l_3^2 - \frac{1}{2} l_3 d_2 s \theta_3 \right) \quad (174)$$

$$c_{31}^1 = -\frac{1}{2} l_3^2 m_3 c^2 \theta_2 s \theta_3 c \theta_3 - l_3 m_3 c \theta_2 (l_2 s \theta_2 s \theta_3 - l_3 d_2) + 2s^2 \theta_2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (175)$$

$$c_{32}^1 = l_3^2 m_3 s \theta_2 \left( \frac{1}{2} l_3^2 m_3 s \theta_2 c^2 \theta_3 - \frac{1}{4} \right) + l_3 m_3 \left( \frac{1}{2} l_2 c \theta_2 c \theta_3 + \frac{1}{2} d_2 s \theta_2 s \theta_3 \right) \quad (176)$$

$$c_{33}^1 = \frac{1}{2} l_3 m_3 (l_2 s \theta_2 s \theta_3 - d_2 c \theta_2 c \theta_3) + s \theta_2 (2c^2 \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) + I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (177)$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenini yerçekimine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0(m_1 A^1_{31} + m_2 A^2_{31} + m_3 A^3_{31}) = 0 \quad (178)$$

İkinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{12}^2 & c_{13}^2 \\ c_{21}^2 & c_{22}^2 & c_{23}^2 \\ c_{31}^2 & c_{23}^2 & c_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (179)$$

Denklemdede kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{11}^2 = s\theta_2 c\theta_2 \left( -\frac{1}{4} l_2^2 m_2 - I_{xx2} + I_{yy2} + \frac{1}{4} l_3^2 m_2 c^2\theta_3 - l_2^2 m_3 - (c^2\theta_3 I_{xx3} + s^2\theta_3 I_{yy3}) \right. \\ \left. + I_{zz3} \right) - l_2 l_3 m_3 c\theta_3 \left( c^2\theta_2 + \frac{1}{2} \right) \quad (180)$$

$$c_{12}^2 = -s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx2} - I_{yy2} + (c^2\theta_3 I_{xx3} + s^2\theta_3 I_{yy3}) - I_{zz3}) \\ + m_3 c\theta_2 c\theta_3 \left( \frac{1}{4} d_2 l_3 - \frac{1}{8} l_3^2 s\theta_3 \right) - l_2 d_2 s\theta_2 \left( \frac{1}{4} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) + \frac{1}{4} l_2 l_3 m_3 s\theta_2 s\theta_3 \quad (181)$$

$$c_{13}^2 = c\theta_2 c\theta_3 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 + s\theta_3 I_{xx3} - s\theta_3 I_{yy3} \right) + m_3 s\theta_2 \left( \frac{1}{8} l_3^2 - \frac{1}{4} l_3 d_2 s\theta_3 \right) \quad (182)$$

$$c_{21}^2 = s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx2} - I_{yy2} + (c^2\theta_3 I_{xx3} + s^2\theta_3 I_{yy3}) - I_{zz3}) + m_3 c\theta_2 c\theta_3 \left( \frac{1}{8} l_3^2 s\theta_3 - \frac{1}{4} d_2 l_3 \right) \\ + \frac{1}{4} l_2 d_2 m_2 s\theta_2 - m_3 l_2 s\theta_2 s\theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3 - \frac{1}{2} d_2 \right) \quad (183)$$

$$c_{22}^2 = s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx2} - I_{yy2} + c^2\theta_3 I_{xx3} + s^2\theta_3 I_{yy3} - I_{zz3}) \quad (184)$$

$$c_{23}^2 = c\theta_2 c\theta_3 s\theta_3 (I_{yy3} - I_{xx3}) \quad (185)$$

$$c_{31}^2 = m_3 l_2 c\theta_2 c\theta_3 \left( \frac{3}{8} l_3 - d_2 - \frac{1}{2} s\theta_3 (I_{yy3} - I_{xx3}) \right) + l_3 m_3 s\theta_2 s\theta_3 \left( \frac{1}{2} d_2 - \frac{1}{4} d_2 \right) \\ + \frac{1}{8} l_3^2 m_3 s\theta_2 + l_3^2 m_3 s\theta_2 \left( \frac{1}{2} c^2\theta_3 - \frac{1}{4} \right) + 2s\theta_3 c\theta_3 s^2\theta_2 (I_{yy3} - I_{xx3}) \quad (186)$$

$$c_{32}^2 = s\theta_3 c\theta_3 \left( -\frac{1}{2} l_3^2 m_3 + (I_{yy3} - I_{xx3}) (2s^2\theta_2 - \frac{1}{2} c\theta_2) \right) \quad (187)$$

$$c_{33}^2 = \frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 c\theta_3 + s\theta_2 (I_{yy3} - I_{xx3}) (2c^2\theta_3 - 1) \quad (188)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \quad -g_0 \quad 0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = g_0(m_2 A^2_{22} + m_3 A^3_{22}) = -g_0 \left( \frac{1}{2} l_2 m_2 s \theta_1 c \theta_2 + m_3 s \theta_1 s \theta_2 \left( \frac{1}{2} l_3 c \theta_3 + l_2 \right) \right) \quad (189)$$

Üçüncü eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} c_{11}^3 & c_{12}^3 & c_{13}^3 \\ c_{21}^3 & c_{22}^3 & c_{23}^3 \\ c_{31}^3 & c_{32}^3 & c_{33}^3 \end{bmatrix} \quad (190)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{11}^3 = s \theta_3 c \theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 m_3 c^2 \theta_2 - \frac{1}{4} l_3^2 m_3 - s^2 \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \right) + \frac{1}{2} l_3 m_3 (l_2 s \theta_2 c \theta_2 s \theta_3 + d_2 c \theta_3) \quad (191)$$

$$c_{12}^3 = l_3^2 m_3 s \theta_2 \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{4} c^2 \theta_3 \right) - \frac{1}{4} l_2 l_3 m_3 c \theta_2 c \theta_3 - \frac{1}{4} d_2 l_3 m_3 s \theta_2 s \theta_3 - s \theta_3 c \theta_3 s^2 \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (192)$$

$$c_{13}^3 = s \theta_2 \left( -\frac{1}{4} l_2 l_3 m_3 s \theta_3 - c^2 \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \right) + \frac{1}{2} (I_{yy_3} - I_{xx_3}) + \frac{1}{4} l_3 d_2 m_3 c \theta_2 c \theta_3 \quad (193)$$

$$c_{21}^3 = c \theta_2 c \theta_3 \left( -\frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 + s \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \right) - \frac{1}{4} l_2 l_3 m_3 + \frac{1}{2} d_2 l_2 m_3 - s \theta_3 c \theta_3 s^2 \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) + m_3 s \theta_2 \left( -\frac{1}{4} l_3^2 + \frac{1}{2} d_2 l_3 s \theta_3 - \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_3 + \frac{1}{8} l_3^2 - \frac{1}{4} d_2 l_3 s \theta_3 \right) \quad (194)$$

$$c_{22}^3 = c \theta_3 s \theta_3 (c \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) + \frac{1}{4} l_3^2 m_3 - s^2 \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3})) \quad (195)$$

$$c_{23}^3 = -\frac{1}{4} l_2 l_3 m_3 c \theta_3 - s \theta_2 c^2 \theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) + \frac{1}{2} s \theta_2 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (196)$$

$$c_{31}^3 = \frac{1}{4}l_2l_3m_3s\theta_2s\theta_3 - \frac{1}{4}d_2l_3m_3c\theta_2c\theta_3 + s\theta_2c^2\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3}) - \frac{1}{2}s\theta_2(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (197)$$

$$c_{32}^3 = \frac{1}{4}l_2l_3m_3c\theta_3 + s\theta_2c^2\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3}) - \frac{1}{2}s\theta_2(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (198)$$

$$c_{33}^3 = s\theta_3c\theta_3(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (199)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Üçüncü ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = g_0m_3A_{33}^3 = -\frac{1}{2}g_0m_3l_3s\theta_2s\theta_3 \quad (200)$$

## 8-NR Robotu

### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} \theta & \frac{d_2}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (201)$$

$$\bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1$$

$$D_1 = {}^0_1R \bar{D}_1 {}^0_1R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_1} + s^2\theta_1 I_{yy_1} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & s^2\theta_1 I_{xx_1} + c^2\theta_1 I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}d_2s\theta_1 \\ \frac{1}{2}d_2c\theta_1 \\ h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (202)$$

$z^0 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem dönel olduğundan  $\xi = 1$ ' dir. Dolayısıyla

$b_1 = \xi z^0 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}d_2c\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}d_2s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (203)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_1 d_2^2 + I_{z_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (204)$$

2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{bmatrix}, {}^0_2T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 & -s\theta_1 & -d_2 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 & d_2 c\theta_1 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (205)$$

$$D_2 = {}^0_2R \bar{D}_2 {}^0_2R^T = \begin{bmatrix} a_{NR} & b_{NR} & c_{NR} \\ b_{NR} & d_{NR} & e_{NR} \\ c_{NR} & e_{NR} & s^2\theta_2 I_{x_2} + c^2\theta_2 I_{y_2} \end{bmatrix}, \bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_2 s\theta_1 c\theta_2 + d_2 c\theta_1 \\ -\frac{1}{2} l_2 s\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} \quad (206)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{NR} = c^2\theta_1 (c^2\theta_2 I_{x_2} + s^2\theta_2 I_{y_2}) + s^2\theta_1 I_{z_2} \quad (207)$$

$$b_{NR} = s\theta_1 c\theta_1 (c^2\theta_2 I_{x_2} + s^2\theta_2 I_{y_2} - I_{z_2}) \quad (208)$$

$$c_{NR} = -c\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (I_{x_2} - I_{y_2}) \quad (209)$$

$$d_{NR} = s^2\theta_1 (c^2\theta_2 I_{x_2} + s^2\theta_2 I_{y_2}) + c^2\theta_1 I_{z_2} \quad (210)$$

$$e_{NR} = -s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2 (I_{x_2} - I_{y_2}) \quad (211)$$

$z^1 = {}^0_1R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,

$b_2 = \xi_2 z^1 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_2 s\theta_1 c\theta_2 - d_2 c\theta_1 & -\frac{1}{2} l_2 c\theta_1 s\theta_2 & 0 \\ \frac{1}{2} l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 & -\frac{1}{2} l_2 s\theta_1 s\theta_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} l_2 c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (212)$$

$$\begin{aligned}
D(q_2) &= m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2 \\
&= \begin{bmatrix} m_2 \left( \frac{1}{4} l_2^2 c^2 \theta_2 + d_2^2 \right) + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} m_2 l_2 d_2 s \theta_2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \frac{1}{2} m_2 l_2 d_2 s \theta_2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} & 0 \\ \cdot & \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (213)
\end{aligned}$$

3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} l_3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}$$

$${}^0_3 T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_{23} & -c\theta_1 s\theta_{23} & -s\theta_1 & l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_{23} & -s\theta_1 s\theta_{23} & c\theta_1 & l_2 s\theta_1 c\theta_2 + d_2 c\theta_1 \\ -s\theta_{23} & -c\theta_{23} & 0 & -l_2 s\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} \quad (214)$$

$$\bar{c}_3 = H_1 {}^0_3 T \Delta c_3$$

$$D_3 = {}^0_3 R \bar{D}_3 {}^0_3 R^T$$

$$= \begin{bmatrix} f_{NR} & g_{NR} & h_{NR} \\ g_{NR} & i_{NR} & j_{NR} \\ h_{NR} & j_{NR} & s^2 \theta_{23} I_{xx_3} + c^2 \theta_{23} I_{yy_3} \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_3 c\theta_1 c\theta_{23} + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_3 s\theta_1 c\theta_{23} + l_2 s\theta_1 c\theta_2 + d_2 c\theta_1 \\ -\frac{1}{2} l_3 s\theta_{23} - l_2 s\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} \quad (215)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$f_{NR} = c^2 \theta_1 (c^2 \theta_{23} I_{xx_3} + s^2 \theta_{23} I_{yy_3}) + s^2 \theta_1 I_{zz_3} \quad (216)$$

$$g_{NR} = c\theta_1 s\theta_1 (c^2 \theta_{23} I_{xx_3} + s^2 \theta_{23} I_{yy_3} - I_{zz_3}) \quad (217)$$

$$h_{NR} = -c\theta_1 s\theta_{23} c\theta_{23} (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (218)$$

$$i_{NR} = s^2 \theta_1 (c^2 \theta_{23} I_{xx_3} + s^2 \theta_{23} I_{yy_3}) + c^2 \theta_1 I_{zz_3} \quad (219)$$

$$j_{NR} = -s\theta_1 s\theta_{23} c\theta_{23} (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (220)$$



$x^2 y^2 = {}^0 R i^3 = [-s\theta_1 \ c\theta_1 \ 0]^T$  ve üçüncü eklem dönel olduğundan  $\xi_3 = 1$ ' dir.

Dolayısıyla  $b_3 = \xi_3 x^2 y^2 = 1 \cdot [-s\theta_1 \ c\theta_1 \ 0]^T = [-s\theta_1 \ c\theta_1 \ 0]^T$  'dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_3 s\theta_1 c\theta_{23} - l_2 s\theta_1 c\theta_2 - d_2 c\theta_1 & -\frac{1}{2}l_3 c\theta_1 s\theta_{23} - l_2 c\theta_1 s\theta_2 & -\frac{1}{2}l_3 c\theta_1 s\theta_{23} \\ \frac{1}{2}l_3 c\theta_1 c\theta_{23} + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 & -\frac{1}{2}l_3 s\theta_1 s\theta_{23} - l_2 s\theta_1 s\theta_2 & -\frac{1}{2}l_3 s\theta_1 s\theta_{23} \\ 0 & -\frac{1}{2}l_3 c\theta_{23} - l_2 c\theta_2 & -\frac{1}{2}l_3 c\theta_{23} \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s\theta_1 \\ 0 & 0 & c\theta_1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (221)$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$= \begin{bmatrix} k_{NR} & l_{NR} & m_3 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 s\theta_{23} \right) \\ o_{NR} & p_{NR} & m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + \frac{1}{2} l_2 l_3 c\theta_3 \right) \\ \frac{1}{2} d_2 l_3 m_3 s\theta_{23} & m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + \frac{1}{2} l_2 l_3 c\theta_3 \right) & \frac{1}{4} l_3^2 m_3 + 3I_{zz_3} \end{bmatrix} \quad (222)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$k_{NR} = m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_{23} + l_2 l_3 c\theta_2 c\theta_{23} + l_2^2 c^2 \theta_2 + d_2^2 \right) + s^2 \theta_{23} I_{xx_3} + c^2 \theta_{23} I_{yy_3} \quad (223)$$

$$o_{NR} = +m_3 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 s\theta_{23} + d_2 l_2 s\theta_2 \right) + s^2 \theta_{23} I_{xx_3} + c^2 \theta_{23} I_{yy_3} \quad (224)$$

$$l_{NR} = +m_3 \left( \frac{1}{2} d_2 l_3 s\theta_{23} + d_2 l_2 s\theta_2 \right) + s^2 \theta_{23} I_{xx_3} + c^2 \theta_{23} I_{yy_3} \quad (225)$$

$$p_{NR} = m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 + l_2 l_3 c\theta_3 + l_2^2 \right) + s^2 \theta_{23} I_{xx_3} + c^2 \theta_{23} I_{yy_3} \quad (226)$$

$$r_{NR} = m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_{23} + l_2 l_3 c\theta_2 c\theta_{23} + l_2^2 c^2 \theta_2 + d_2^2 \right) \quad (227)$$

Birinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21}^1 & c_{22}^1 & \frac{1}{2}d_2m_3l_3c\theta_{23} \\ c_{31}^1 & c_{32}^1 & \frac{1}{2}d_2m_3l_3c\theta_{23} \end{bmatrix} \quad (228)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} c_{21}^1 &= -\frac{1}{2}l_2^2m_2s\theta_2c\theta_2 + 2s\theta_2c\theta_2(I_{xx_2} - I_{yy_2}) \\ &+ \frac{1}{2}l_3^2m_3(s\theta_2c\theta_2 + s\theta_3c\theta_3 - 2c\theta_2c\theta_3s\theta_{23}) - l_2l_3m_3(2c\theta_2s\theta_{23} - s\theta_3) \\ &- 2l_2^2m_3s\theta_2c\theta_2 + 2(s\theta_2c\theta_2 + s\theta_3c\theta_3 - 2c\theta_2c\theta_3s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \end{aligned} \quad (229)$$

$$\begin{aligned} c_{22}^1 &= \frac{1}{2}l_2d_2m_2c\theta_2 + 2s\theta_2c\theta_2(I_{xx_2} - I_{yy_2}) + \frac{1}{2}d_2m_3(l_3c\theta_{23} + l_2c\theta_2) \\ &+ 2(s\theta_2c\theta_2 + s\theta_3c\theta_3 - 2c\theta_2c\theta_3s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \end{aligned} \quad (230)$$

$$c_{31}^1 = 2(s\theta_2c\theta_2 + s\theta_3c\theta_3 - 2c\theta_2c\theta_3s\theta_{23})(l_3^2m_3 + I_{yy_3} - I_{xx_3}) - l_2l_3m_3c\theta_2s\theta_{23} \quad (231)$$

$$c_{32}^1 = \frac{1}{2}d_2l_3m_3c\theta_{23} + 2(s\theta_2c\theta_2 + s\theta_3c\theta_3 - 2c\theta_2c\theta_3s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (232)$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine yerçekimine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0(m_1A^1_{31} + m_2A^2_{31} + m_3A^3_{31}) = 0 \quad (233)$$

İkinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{12}^2 & -\frac{1}{4}d_2l_3m_3c\theta_{23} \\ c_{21}^2 & c_{22}^2 & 0 \\ c_{31}^2 & c_{32}^2 & -\frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3 \end{bmatrix} \quad (234)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{11}^2 = \frac{1}{4}l_2^2 m_2 s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_2 c\theta_2 (I_{yy_2} - I_{xx_2}) - \frac{1}{4}l_3^2 m_3 (s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23}) + \frac{1}{2}l_2 l_3 m_3 (2c\theta_2 s\theta_{23} - s\theta_3) + l_2^2 m_3 s\theta_2 c\theta_2 + (s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23})(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (235)$$

$$c_{12}^2 = -\frac{1}{4}l_2 m_2 d_2 c\theta_2 - s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) - \frac{1}{4}d_2 l_3 m_3 c\theta_{23} - \frac{1}{2}d_2 l_2 m_3 c\theta_2 + (s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23})(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (236)$$

$$c_{21}^2 = \frac{1}{4}l_2 d_2 m_2 c\theta_2 + s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) + \frac{1}{4}d_2 l_3 m_3 c\theta_{23} + \frac{1}{2}d_2 l_2 m_3 c\theta_2 + (s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (237)$$

$$c_{22}^2 = s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) + (s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (238)$$

$$c_{31}^2 = \frac{1}{2}d_2 l_3 m_3 c\theta_{23} + 2(s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) - \frac{1}{4}d_2 l_3 m_3 c\theta_{23} \quad (239)$$

$$c_{32}^2 = -l_2 l_3 m_3 s\theta_3 + 2(s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (240)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \quad g_0 \quad 0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = -g_0 (m_2 A^{22} + m_3 A^{32}) = g_0 s\theta_1 \left( \frac{1}{2}l_2 m_2 s\theta_2 + \frac{1}{2}l_3 m_3 s\theta_{23} + l_2 m_3 s\theta_2 \right) \quad (241)$$

Üçüncü eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} c_{11}^3 & c_{12}^3 & -\frac{1}{4}d_2 l_3 m_3 c\theta_{23} \\ c_{21}^3 & c_{22}^3 & \frac{1}{4}l_2 l_3 m_3 s\theta_3 \\ \frac{1}{4}d_2 l_3 m_3 c\theta_{23} & -\frac{1}{4}l_2 l_3 m_3 s\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (242)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{11}^3 = -\frac{1}{4}l_3^2 m_3 (s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23}) + \frac{1}{2}l_2 l_3 m_3 c\theta_2 s\theta_{23} - (s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (243)$$

$$c_{12}^3 = -\frac{1}{4}d_2 l_3 m_3 c\theta_{23} - (s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (244)$$

$$c_{21}^3 = \frac{1}{4}d_2 l_3 m_3 c\theta_{23} - (s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (245)$$

$$c_{22}^3 = \frac{1}{2}l_2 l_3 m_3 s\theta_3 - (s\theta_2 c\theta_2 + s\theta_3 c\theta_3 - 2c\theta_2 c\theta_3 s\theta_{23})(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (246)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle aynı yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ g_0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir.

Üçüncü ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = -g_0 m_3 A^3_{23} = \frac{1}{2}g_0 m_3 l_3 s\theta_1 s\theta_{23} \quad (247)$$

## 9-RC Robotu

### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} l_2/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (248)$$

$$D_1 = {}^0_1R \bar{D}_1 {}^0_1R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_1} + s^2\theta_1 I_{yy_1} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & s^2\theta_1 I_{xx_1} + c^2\theta_1 I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2 c\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_2 s\theta_1 \\ h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (249)$$

$z^0 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem dönel olduğundan  $\xi = 1$ ' dir. Dolayısıyla,

$b_1 = \xi z^0 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_2 s\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}l_2 c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (250)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}l_2^2 m_1 + I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (251)$$

2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}l_4 + l_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, {}^0_2T = \begin{bmatrix} 0 & -c\theta_1 & s\theta_1 & s\theta_1 q_2 \\ 0 & -s\theta_1 & -c\theta_1 & -c\theta_1 q_2 \\ 1 & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (252)$$

$$D_2 = {}^0_2R \bar{D}_2 {}^0_2R^T, \bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{yy_2} + s^2\theta_1 I_{zz_1} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{yy_2} - I_{zz_2}) & 0 \\ c\theta_1 s\theta_1 (I_{yy_2} - I_{zz_2}) & s^2\theta_1 I_{yy_2} + c^2\theta_1 I_{zz_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx_2} \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} s\theta_1 (l_2 + q_2 + \frac{1}{2}l_4) \\ -c\theta_1 (l_2 + q_2 + \frac{1}{2}l_4) \\ h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (253)$$

$z^1 = {}^0_1R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem prizmatik olduğundan  $\xi_2 = 0$  ' dir. Dolayısıyla,

$b_2 = \xi_2 z^1 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  ' dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_1 (l_2 + q_2 + \frac{1}{2}l_4) & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 (l_2 + q_2 + \frac{1}{2}l_4) & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (254)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2$$

$$= \begin{bmatrix} m_2 (\frac{1}{4}l_4^2 + l_2 l_4 + l_4 q_2 + (l_2 + q_2)^2) + I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (255)$$

### 3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} l_3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, {}^0_3T = \begin{bmatrix} -c\theta_1 s\theta_3 & -c\theta_1 c\theta_3 & s\theta_1 & s\theta_1(l_2 + q_2) \\ -s\theta_1 s\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_3 & -c\theta_1 & -c\theta_1(l_2 + q_2) \\ c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (256)$$

$$D_3 = {}^0_3R \bar{D}_3 {}^0_3R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_1(I_{xx_3}s^2\theta_3 + I_{yy_3}c^2\theta_3) + s^2\theta_1 I_{zz_3} & a_{RC} & b_{RC} \\ a_{RC} & e_{RC} & c_{RC} \\ b_{RC} & c_{RC} & d_{RC} \end{bmatrix}, \bar{c}_3 = H_1 {}^0_3T \Delta c_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_3 c\theta_1 s\theta_3 + (l_2 + q_2)s\theta_1 \\ -\frac{1}{2}l_3 s\theta_1 s\theta_3 - (l_2 + q_2)c\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_3 c\theta_3 + h_1 \end{bmatrix} \quad (257)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{RC} = c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_3} s^2\theta_3 + I_{yy_3} c^2\theta_3 - I_{zz_3}) \quad (258)$$

$$b_{RC} = c\theta_1 c\theta_3 s\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (259)$$

$$c_{RC} = s\theta_1 s\theta_3 c\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (260)$$

$$d_{RC} = c^2\theta_3 I_{xx_3} + I_{yy_3} s^2\theta_3 \quad (261)$$

$$e_{RC} = s^2\theta_1 (I_{xx_3} s^2\theta_3 + I_{yy_3} c^2\theta_3) + c^2\theta_1 I_{zz_3} \quad (262)$$

$x^2 y^2 = {}^0_2R i^3 = [s\theta_1 \quad -c\theta_1 \quad 0]^T$  ve üçüncü eksen dönel olduğundan  $\xi_3 = 1$ ' dir.

Dolayısıyla  $b_3 = \xi_3 x^2 y^2 = 1 \cdot [s\theta_1 \quad -c\theta_1 \quad 0]^T = [s\theta_1 \quad -c\theta_1 \quad 0]^T$  'dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_3 s\theta_1 s\theta_3 + (l_2 + q_2)c\theta_1 & s\theta_1 & -\frac{1}{2}l_3 c\theta_1 c\theta_3 \\ -\frac{1}{2}l_3 c\theta_1 s\theta_3 + (l_2 + q_2)s\theta_1 & -c\theta_1 & -\frac{1}{2}l_3 s\theta_1 c\theta_3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}l_3 s\theta_3 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s\theta_1 \\ 0 & 0 & -c\theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (263)$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$= \begin{bmatrix} f_{RC} & \frac{1}{2}l_3m_3s\theta_3 & -\frac{1}{2}l_3m_3c\theta_3(l_2 + q_2) \\ \frac{1}{2}l_3m_3s\theta_3 & m_3 & 0 \\ -\frac{1}{2}l_3m_3c\theta_3(l_2 + q_2) & 0 & \frac{1}{4}l_3^2m_3 + I_{zz_3} \end{bmatrix} \quad (264)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$f_{RC} = +m_3\left(\frac{1}{4}l_3^2s^2\theta_3 + (l_2 + q_2)^2\right) + I_{xx_3}c^2\theta_3 + I_{yy_3}s^2\theta_3 \quad (265)$$

Birinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_2l_4 + 2(m_2 + m_3)(l_2 + q_2) & 0 & -\frac{1}{2}l_3m_3c\theta_3 \\ 2c\theta_3s\theta_3\left(\frac{1}{4}l_3^2m_3 - I_{xx_3} + I_{yy_3}\right) & \frac{1}{2}l_3m_3c\theta_3 & \frac{1}{2}l_3m_3s\theta_3(l_2 + q_2) \end{bmatrix} \quad (266)$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine yerçekimine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0(m_1A^1_{31} + m_2A^2_{31} + m_3A^3_{31}) = 0 \quad (267)$$

İkinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_2l_4 - (m_2 + m_3)(l_2 + q_2) & 0 & \frac{1}{4}l_3m_3c\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4}l_3m_3c\theta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (268)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde bulunan x eksenine yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [-g_0 \ 0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = g_0(m_2 A^2_{12} + m_3 A^3_{12}) = -g_0 c\theta_1(m_2 + m_3) \quad (269)$$

Üçüncü eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} -c\theta_3 s\theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx_3} + I_{yy_3} \right) & -\frac{1}{4} l_3 m_3 c\theta_3 & -\frac{1}{4} l_3 m_3 s\theta_3 (l_2 + q_2) \\ -\frac{3}{4} l_3 m_3 c\theta_3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} l_3 m_3 s\theta_3 (l_2 + q_2) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (270)$$

Üçüncü eklem yerleştirilen koordinat çerçevesinde bulunan x eksen yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [-g_0 \ 0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir.

Üçüncü eklem ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = g_0 m_3 A^3_{13} = -\frac{1}{2} g_0 m_3 l_3 c\theta_1 c\theta_3 \quad (271)$$

## 10-RN Robotu

### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} l_1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (272)$$

$$D_1 = {}^0_1R \bar{D}_1 {}^0_1R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_1} + s^2\theta_1 I_{yy_1} & s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & s^2\theta_1 I_{xx_1} + c^2\theta_1 I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_1 c\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_1 s\theta_1 \\ h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (273)$$

$z^0 = {}^0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem dönel olduğundan  $\xi = 1$ ' dir. Dolayısıyla,

$b_1 = \xi z^0 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.



$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1s\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}l_1c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (274)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}l_1^2 m_1 + I_{z_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (275)$$

2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, {}^0_2T = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 & l_1c\theta_1 \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 & l_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (276)$$

$$D_2 = {}^0_2R \bar{D}_2 {}^0_2R^T, \bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\theta_{12}I_{xx_2} + s^2\theta_{12}I_{yy_2} & s\theta_{12}c\theta_{12}(I_{xx_2} - I_{yy_2}) & 0 \\ s\theta_{12}c\theta_{12}(I_{xx_2} - I_{yy_2}) & s^2\theta_{12}I_{xx_2} + c^2\theta_{12}I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2c\theta_{12} + l_1c\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_2s\theta_{12} + l_1s\theta_1 \\ h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (277)$$

$z^1 = {}^0_1R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_2 = \xi_2 z^1 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$ ' dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_2s\theta_{12} - l_1s\theta_1 & -\frac{1}{2}l_2s\theta_{12} & 0 \\ \frac{1}{2}l_2c\theta_{12} + l_1c\theta_1 & \frac{1}{2}l_2c\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (278)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2$$

$$= \begin{bmatrix} m_2(\frac{1}{4}l_2^2 + l_1l_2c\theta_2 + l_1^2) + I_{z_2} & m_2(\frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1l_2c\theta_2) + I_{z_2} & 0 \\ m_2(\frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1l_2c\theta_2) + I_{z_2} & \frac{1}{4}l_2^2 m_2 + I_{z_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (279)$$

### 3. Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} l_3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, \quad {}^0_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 c\theta_{12} & -s\theta_3 c\theta_{12} & s\theta_{12} & l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1 \\ c\theta_3 s\theta_{12} & -s\theta_3 s\theta_{12} & -c\theta_{12} & l_2 s\theta_{12} + l_1 s\theta_1 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (280)$$

$$D_3 = {}^0_3R \bar{D}_3 {}^0_3R^T, \quad \bar{c}_3 = H_1 {}^0_3T \Delta c_3$$

$$= \begin{bmatrix} a_{RN} & b_{RN} & d_{RN} \\ b_{RN} & c_{RN} & e_{RN} \\ d_{RN} & e_{RN} & s^2\theta_3 I_{xx_3} + c^2\theta_3 I_{yy_3} \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_3 c\theta_3 c\theta_{12} + l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_3 c\theta_3 s\theta_{12} + l_2 s\theta_{12} + l_1 s\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_3 s\theta_3 + h_1 \end{bmatrix} \quad (281)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{RN} = c^2\theta_{12} (c^2\theta_3 I_{xx_3} + s^2\theta_3 I_{yy_3}) + s^2\theta_{12} I_{zz_3} \quad (282)$$

$$b_{RN} = c\theta_{12} s\theta_{12} (c^2\theta_3 I_{xx_3} + s^2\theta_3 I_{yy_3} - I_{zz_3}) \quad (283)$$

$$c_{RN} = s^2\theta_{12} (c^2\theta_3 I_{xx_3} + s^2\theta_3 I_{yy_3}) + c^2\theta_{12} I_{zz_3} \quad (284)$$

$$d_{RN} = c\theta_{12} s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (285)$$

$$e_{RN} = s\theta_{12} s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (286)$$

$z^2 = {}^0_2R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve üçüncü eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ 'dir. Dolayısıyla,  $b_3 = \xi_3 z^2 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_3 s\theta_{12} c\theta_3 - l_2 s\theta_{12} - l_1 s\theta_1 & -\frac{1}{2} l_3 s\theta_{12} c\theta_3 - l_2 s\theta_{12} & -\frac{1}{2} l_3 s\theta_3 c\theta_{12} \\ \frac{1}{2} l_3 c\theta_{12} c\theta_3 + l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1 & \frac{1}{2} l_3 c\theta_{12} c\theta_3 + l_2 c\theta_{12} & -\frac{1}{2} l_3 s\theta_3 s\theta_{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} l_3 c\theta_3 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (287)$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$= \begin{bmatrix} f_{RN} & i_{RN} & -m_3 \left( \frac{1}{2} l_1 l_3 s \theta_2 s \theta_3 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \\ g_{RN} & j_{RN} & s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \\ h_{RN} & s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} & m_3 \frac{1}{4} l_3^2 + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (288)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$f_{RN} = m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 + l_1^2 + 2 l_1 l_2 c \theta_2 + l_1 l_3 c \theta_3 c \theta_3 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \quad (289)$$

$$g_{RN} = m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_3 c \theta_2 c \theta_3 + l_1 l_2 c \theta_2 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \quad (290)$$

$$h_{RN} = -\frac{1}{2} m_3 l_1 l_3 s \theta_2 s \theta_3 + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \quad (291)$$

$$i_{RN} = m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 c \theta_2 c \theta_3 + l_1 l_2 c \theta_2 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \quad (292)$$

$$j_{RN} = m_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 c^2 \theta_3 + l_2 l_3 c \theta_3 + l_2^2 \right) + s^2 \theta_3 I_{xx_3} + c^2 \theta_3 I_{yy_3} \quad (293)$$

Birinci eklem hız bağışım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21}^1 & c_{22}^1 & -\frac{1}{2} l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 \\ c_{31}^1 & c_{32}^1 & -\frac{1}{2} l_1 l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 + 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \end{bmatrix} \quad (294)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{21}^1 = -l_1 s \theta_2 (l_2 m_2 + 2 l_2 m_3 + l_3 m_3 c \theta_3) \quad (295)$$

$$c_{22}^1 = -l_1 s \theta_2 \left( \frac{1}{2} l_2 m_2 + \frac{1}{2} l_3 m_3 c \theta_3 + l_2 m_3 \right) \quad (296)$$

$$c_{31}^1 = -l_3 m_3 s \theta_3 \left( \frac{1}{2} l_3 c \theta_3 + 2 l_2 \right) - l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 + 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (297)$$

$$c_{32}^1 = -l_3 m_3 s \theta_3 \left( \frac{1}{2} l_3 c \theta_3 + l_2 \right) - \frac{1}{2} l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 + 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (298)$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine yerçekimine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0 (m_1 A^1_{31} + m_2 A^2_{31} + m_3 A^3_{31}) = 0 \quad (299)$$

İkinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{12}^2 & \frac{1}{4} l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 \\ c_{21}^2 & 0 & 0 \\ c_{31}^2 & c_{23}^2 & 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \end{bmatrix} \quad (300)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{11}^2 = \frac{1}{2} l_1 l_2 m_2 s \theta_2 + l_1 l_2 m_3 s \theta_2 + \frac{1}{2} l_1 l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 \quad (301)$$

$$c_{12}^2 = \frac{1}{4} l_1 l_2 m_2 s \theta_2 + \frac{1}{4} l_1 l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 + \frac{1}{2} l_1 l_2 m_3 s \theta_2 \quad (302)$$

$$c_{21}^2 = -\frac{1}{4} l_1 l_2 m_2 s \theta_2 - \frac{1}{4} l_1 l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 - \frac{1}{2} l_1 l_2 m_3 s \theta_2 \quad (303)$$

$$c_{31}^2 = -l_2 l_3 m_3 s \theta_3 - \frac{1}{2} l_1 l_3 m_3 c \theta_2 s \theta_3 - 2 s \theta_3 c \theta_3 \left( \frac{1}{4} l_3^2 m_3 - I_{xx_3} + I_{yy_3} \right) + \frac{1}{4} l_1 l_3 m_3 s \theta_2 c \theta_3 \quad (304)$$

$$c_{32}^2 = -\frac{1}{2} l_3^2 m_3 s \theta_3 c \theta_3 - l_2 l_3 m_3 s \theta_3 + 2 s \theta_3 c \theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (305)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = -g_0(m_2 A^2_{32} + m_3 A^3_{32}) = 0 \quad (306)$$

Üçüncü eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir .

$$c_3 = \begin{bmatrix} c_{11}^3 & c_{12}^3 & \frac{1}{4}l_1l_3m_3s\theta_2c\theta_3 - s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \\ c_{21}^3 & c_{22}^3 & -s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \\ c_{22}^3 & s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) & s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \end{bmatrix} \quad (307)$$

Denklemdede kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$c_{11}^3 = \frac{1}{4}m_3l_3^2s\theta_3c\theta_3 + \frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3 + \frac{1}{2}l_1l_3m_3c\theta_2s\theta_3 - s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (308)$$

$$c_{12}^3 = \frac{1}{4}l_3^2m_3s\theta_3c\theta_3 + \frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3 + \frac{1}{4}l_1l_3m_3c\theta_2s\theta_3 - s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (309)$$

$$c_{21}^3 = l_3m_3s\theta_3\left(\frac{1}{2}(l_2 - l_1c\theta_2 + \frac{1}{2}l_1c\theta_2)\right) + s\theta_3c\theta_3\left(\frac{1}{4}l_3^2m_3 - I_{xx_3} + I_{yy_3}\right) \quad (310)$$

$$c_{22}^3 = +\frac{1}{2}l_2l_3m_3s\theta_3 + s\theta_3c\theta_3\left(\frac{1}{4}l_3^2m_3 - I_{xx_3} + I_{yy_3}\right) \quad (311)$$

$$c_{31}^3 = -\frac{1}{4}l_1l_3m_3s\theta_2c\theta_3 - s\theta_3c\theta_3(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (312)$$

Üçüncü eklem yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle aynı yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ g_0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir. Üçüncü eklem ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = -g_0m_3A^3_{23} = -\frac{1}{2}g_0m_3l_3s\theta_{12}s\theta_3 \quad (313)$$

## 11-RR Robotu

### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1 \end{bmatrix} \quad (314)$$

$$D_1 = {}^0R \bar{D}_1 {}^0R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_1} + s^2\theta_1 I_{yy_1} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & s^2\theta_1 I_{xx_1} + c^2\theta_1 I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_2 c\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_2 s\theta_1 \\ h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (315)$$

$z^0 = {}^0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem dönel olduğundan  $\xi = 1$ ' dir. Dolayısıyla  $b_1 = \xi z^0 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_2 s\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} l_2 c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (316)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} l_2^2 m_1 + I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (317)$$

2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_4}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad {}^0_2T = \begin{bmatrix} 0 & -c\theta_1 & s\theta_1 & (l_2 + q_2)s\theta_1 \\ 0 & -s\theta_1 & -c\theta_1 & -(l_2 + q_2)c\theta_1 \\ 1 & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (318)$$

$$D_2 = {}^0R \bar{D}_2 {}^0R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{yy_2} + s^2\theta_1 I_{zz_2} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{yy_2} - I_{zz_2}) & 0 \\ c\theta_1 s\theta_1 (I_{yy_2} - I_{zz_2}) & s^2\theta_1 I_{yy_2} + c^2\theta_1 I_{zz_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx_2} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_4 s\theta_1 + s\theta_1 (l_2 + q_2) \\ -\frac{1}{2} l_4 c\theta_1 - c\theta_1 (l_2 + q_2) \\ h_1 \end{bmatrix} \quad (319)$$

$z^1 = {}^0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem prizmatik olduğundan  $\xi_2 = 0$  ' dir. Dolayısıyla,  $b_2 = \xi_2 z^1 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  'dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_1(l_2 + q_2 + \frac{1}{2}l_4) & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1(l_2 + q_2 + \frac{1}{2}l_4) & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (320)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2$$

$$= \begin{bmatrix} m_2(\frac{1}{4}l_4^2 + q_2 l_4 + l_2 l_4 + (l_2 + q_2)^2) + I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (321)$$

3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} l_3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, {}^0_3T = \begin{bmatrix} -s\theta_1 s\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_3 & -c\theta_1 & (l_2 + q_2)s\theta_1 \\ c\theta_1 s\theta_3 & c\theta_1 c\theta_3 & -s\theta_1 & -(l_2 + q_2)c\theta_1 \\ c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (322)$$

$$D_3 = {}^0_3R \bar{D}_3 {}^0_3R^T =$$

$$\begin{bmatrix} s^2\theta_1(I_{xx_3}s^2\theta_3 + I_{yy_3}c^2\theta_3) + c^2\theta_1 I_{zz_3} & a_{RR} & b_{RR} \\ a_{RR} & e_{RR} & c_{RR} \\ b_{RR} & c_{RR} & d_{RR} \end{bmatrix}, \bar{c}_3 = H_1 {}^0_3T \Delta c_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_3 s\theta_1 s\theta_3 + (l_2 + q_2)s\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_3 c\theta_1 s\theta_3 - (l_2 + q_2)c\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_3 c\theta_3 + h_1 \end{bmatrix} \quad (323)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{RR} = -c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_3} s^2\theta_3 + I_{yy_3} c^2\theta_3 - I_{zz_3}) \quad (324)$$

$$b_{RR} = s\theta_1 c\theta_3 s\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (325)$$

$$c_{RR} = -c\theta_1 s\theta_3 c\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (326)$$

$$d_{RC} = c^2\theta_3 I_{xx_3} + I_{yy_3} s^2\theta_3 \quad (327)$$

$$e_{RC} = c^2\theta_1 (I_{xx_3} s^2\theta_3 + I_{yy_3} c^2\theta_3) + s^2\theta_1 I_{zz_3} \quad (328)$$

$x^2 y^2 = {}^0Ri^3 = [s\theta_1 \quad -c\theta_1 \quad 0]^T$  ve üçüncü eksen dönel olduğundan  $\xi_3 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_3 = \xi_3 x^2 y^2 = 1 \cdot [s\theta_1 \quad -c\theta_1 \quad 0]^T = [s\theta_1 \quad -c\theta_1 \quad 0]^T$  'dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_3 c\theta_1 s\theta_3 + (l_2 + q_2)c\theta_1 & s\theta_1 & -\frac{1}{2}l_3 s\theta_1 c\theta_3 \\ -\frac{1}{2}l_3 s\theta_1 s\theta_3 + (l_2 + q_2)s\theta_1 & -c\theta_1 & \frac{1}{2}l_3 c\theta_1 c\theta_3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}l_3 s\theta_3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s\theta_1 \\ 0 & 0 & -c\theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (329)$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$= \begin{bmatrix} f_{RR} & 0 & s\theta_3 c\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \\ 0 & m_3 & -\frac{1}{2}l_3 m_3 c\theta_3 \\ s\theta_3 c\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) & -\frac{1}{2}l_3 m_3 c\theta_3 & \frac{1}{4}l_3^2 m_3 + s^2\theta_3 I_{xx_3} + c^2\theta_3 I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (330)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$f_{RR} = m_3 \left( \frac{1}{4}l_3^2 s^2\theta_3 - l_3 s\theta_3 (l_2 + q_2) + (l_2 + q_2)^2 \right) + c^2\theta_3 I_{xx_3} + s^2\theta_3 I_{yy_3} \quad (331)$$

Birinci eklem hız bağışım matrisi aşağıda verilmiştir .

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g_{RR} & 0 & 0 \\ h_{RR} & 0 & (2c^2\theta_3 - 1)(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \end{bmatrix} \quad (332)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$g_{RR} = m_2(l_4 + 2l_2 + 2q_2) + m_3(2l_2 + 2q_2 - l_3 s\theta_3) \quad (333)$$

$$h_{RR} = m_3 \left( \frac{1}{2}l_3^2 s\theta_3 c\theta_3 - l_3 c\theta_3 (l_2 + q_2) \right) + 2s\theta_3 c\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \quad (334)$$



Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine yerçekimine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0(m_1 A^1_{31} + m_2 A^2_{31} + m_3 A^3_{31}) = 0 \quad (335)$$

İkinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_2(l_4 + 2l_2 + 2q_2) - \frac{1}{2}m_3(2l_2 + 2q_2 - l_3 s\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}l_3 m_3 s\theta_3 \end{bmatrix} \quad (336)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde bulunan x eksenine yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [-g_0 \ 0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = g_0(m_2 A^2_{12} + m_3 A^3_{12}) = -g_0 s\theta_1(m_2 + m_3) \quad (337)$$

Üçüncü eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} i_{RR} & 0 & -\frac{1}{2}(2c^2\theta_3 - 1)(I_{yy_3} - I_{xx_3}) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}l_3 m_3 s\theta_3 \\ \frac{1}{2}(2c^2\theta_3 - 1)(I_{yy_3} - I_{xx_3}) & \frac{1}{4}l_3 m_3 s\theta_3 & s\theta_3 c\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3}) \end{bmatrix} \quad (338)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$i_{RR} = \frac{1}{2}m_3 c\theta_3(l_2 + q_2) + s\theta_3 c\theta_3 (I_{yy_3} - I_{xx_3} - \frac{1}{4}l_3^2 m_3) \quad (339)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde bulunan x eksenine yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [-g_0 \ 0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir. Üçüncü ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = g_0 m_3 A^3_{13} = \frac{1}{2} g_0 m_3 l_3 s\theta_1 c\theta_3 \quad (340)$$

## 12-RS Robotu

### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (341)$$

$$D_1 = {}^0_1R \bar{D}_1 {}^0_1R^T, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_1} + s^2\theta_1 I_{yy_1} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & s^2\theta_1 I_{xx_1} + c^2\theta_1 I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_1 \sin\theta_1 \\ h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (342)$$

$z^0 = {}^0_0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci ekleme dönel olduğundan  $\xi = 1$ ' dir. Dolayısıyla,

$$\bar{b}_1 = \xi z^0 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T.$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_1 \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (343)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1 D_1 B_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_1 l_1^2 + I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (344)$$

### 2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad {}^0_2T = \begin{bmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} & 0 & l_1 \cos\theta_1 \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 & l_1 \sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (345)$$

$$D_2 = {}^0R\overline{D_2} {}^0R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_{12}I_{xx_2} + s^2\theta_{12}I_{yy_2} & c\theta_{12}s\theta_{12}(I_{xx_2} - I_{yy_2}) & 0 \\ s\theta_{12}c\theta_{12}(I_{xx_2} - I_{yy_2}) & s^2\theta_{12}I_{xx_2} + c^2\theta_{12}I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = H_1 {}^0T\Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2 \cos\theta_{12} + l_1 \cos\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_2 \sin\theta_{12} + l_1 \sin\theta_1 \\ h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (346)$$

$z^1 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_2 = \xi_2 z^1 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_2 \sin\theta_{12} - l_1 \sin\theta_1 & -\frac{1}{2}l_2 \sin\theta_{12} & 0 \\ \frac{1}{2}l_2 \cos\theta_{12} + l_1 \cos\theta_1 & \frac{1}{2}l_2 \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (347)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2 = \begin{bmatrix} m_2 \left( \frac{1}{4}l_2^2 + l_1 l_2 \cos\theta_2 + l_1^2 \right) + I_{zz_2} & m_2 \left( \frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1 l_2 \cos\theta_2 \right) + I_{zz_2} & 0 \\ m_2 \left( \frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1 l_2 \cos\theta_2 \right) + I_{zz_2} & \frac{1}{4}m_2 l_2^2 + I_{zz_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (348)$$

### 3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, \quad {}^0T = \begin{bmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} & 0 & l_2 \cos\theta_{12} + l_1 \cos\theta_1 \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 & l_2 \sin\theta_{12} + l_1 \sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (349)$$

$$D_3 = {}^0R\overline{D_3} {}^0R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_{12}I_{xx_3} + s^2\theta_{12}I_{yy_3} & c\theta_{12}s\theta_{12}(I_{xx_3} - I_{yy_3}) & 0 \\ s\theta_{12}c\theta_{12}(I_{xx_3} - I_{yy_3}) & s^2\theta_{12}I_{xx_3} + c^2\theta_{12}I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_3 = H_1 {}^0T\Delta c_3 = \begin{bmatrix} l_2 \cos\theta_{12} + l_1 \cos\theta_1 \\ l_2 \sin\theta_{12} + l_1 \sin\theta_1 \\ h_1 + q_3 + \frac{1}{2}l_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (350)$$

$z^2 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve üçüncü prizmatik olduğundan  $\xi_3 = 0$  ' dir. Dolayısıyla,  $b_3 = \xi_3 z^2 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  'dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_{12} - l_1 \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_{12} & 0 \\ l_2 \cos \theta_{12} + l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (351)$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$= \begin{bmatrix} m_3 \left( \frac{1}{4} l_2^2 + l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_1^2 \right) + I_{z_3} & m_3 \left( \frac{1}{4} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 \cos \theta_2 \right) + I_{z_3} & 0 \\ m_3 \left( \frac{1}{4} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 \cos \theta_2 \right) + I_{z_3} & \frac{1}{4} l_2^2 m_3 + I_{z_3} & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (352)$$

Birinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(m_2 + m_3) l_1 l_2 s \theta_2 & -\frac{1}{2} (m_2 + m_3) l_1 l_2 s \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (353)$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine yatay yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0 (m_1 A^1_{31} + m_2 A^2_{31} + m_3 A^3_{31}) = 0 \quad (354)$$

İkinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (m_2 + m_3) l_1 l_2 s \theta_2 & \frac{1}{4} (m_2 + m_3) l_1 l_2 s \theta_2 & 0 \\ -\frac{1}{4} (m_2 + m_3) l_1 l_2 s \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (355)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = g_0(m_2 A^2_{32} + m_3 A^3_{32}) = 0 \quad (356)$$

Üçüncü eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (357)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Üçüncü ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = g_0 m_3 A^3_{33} = g_0 m_3 \quad (358)$$

### 13-SR Robotu

#### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (359)$$

$$D_1 = {}^0_1R \bar{D}_1 {}^0_1R^T = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \\ 0 \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (360)$$

$z^0 = {}^0_0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem prizmatik olduğundan  $\xi = 0$ ' dir.

Dolayısıyla,  $b_1 = \xi z^0 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ 'dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (361)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (362)$$

2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} l_2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, {}^0_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (363)$$

$$D_2 = {}^0_2R \bar{D}_2 {}^0_2R^T, \bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\theta_2 I_{xx_2} + s^2\theta_2 I_{yy_2} & s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & 0 \\ s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & s^2\theta_2 I_{xx_2} + c^2\theta_2 I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_2 c\theta_2 + l_1 \\ \frac{1}{2} l_2 s\theta_2 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad (364)$$

$z^1 = {}^0_1R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_2 = \xi_2 z^1 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$ ' dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} l_2 s\theta_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} l_2 c\theta_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (365)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2 = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + I_{zz_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (366)$$

3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} l_3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, {}^0_3T = \begin{bmatrix} c\theta_{23} & -s\theta_{23} & 0 & l_2 c\theta_2 + l_1 \\ s\theta_{23} & c\theta_{23} & 0 & l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (367)$$

$$D_3 = {}^0_3 R \overline{D_3} {}^0_3 R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_{23}I_{xx_3} + s^2\theta_{23}I_{yy_3} & c\theta_{23}s\theta_{23}(I_{xx_3} - I_{yy_3}) & 0 \\ s\theta_{23}c\theta_{12}(I_{xx_3} - I_{yy_3}) & s^2\theta_{23}I_{xx_3} + c^2\theta_{23}I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_3 = H_1 {}^0_3 T \Delta c_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_3c\theta_{23} + l_2c\theta_2 + l_1 \\ \frac{1}{2}l_3s\theta_{23} + l_2s\theta_2 \\ q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (368)$$

$z^2 = {}^0_2 R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve üçüncü eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_3 = \xi_3 z^2 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}l_3s\theta_{23} - l_2s\theta_2 & -\frac{1}{2}l_3s\theta_{23} \\ 0 & \frac{1}{2}l_3c\theta_{23} + l_2c\theta_2 & \frac{1}{2}l_3c\theta_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (369)$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3 = \begin{bmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & +m_3\left(\frac{1}{4}l_3^2 + l_2l_3c\theta_3 + l_2^2\right) + I_{zz_3} & m_3\left(\frac{1}{4}l_3^2 + \frac{1}{2}l_2l_3c\theta_3\right) + I_{zz_3} \\ 0 & m_3\left(\frac{1}{4}l_3^2 + \frac{1}{2}l_2l_3c\theta_3\right) + I_{zz_3} & \frac{1}{4}l_3^2 m_3 + I_{zz_3} \end{bmatrix} \quad (370)$$

Birinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (371)$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0(m_1 A^1_{31} + m_2 A^2_{31} + m_3 A^3_{31}) = g_0(m_1 + m_2 + m_3) \quad (372)$$

İkinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 l_3 m_3 s \theta_3 & -\frac{1}{2} l_2 l_3 m_3 s \theta_3 \end{bmatrix} \quad (373)$$

İkinci eklem yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksen yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci eklem ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = g_0 (m_2 A^2_{32} + m_3 A^3_{32}) = 0 \quad (374)$$

Üçüncü eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_3 & \frac{1}{4} m_3 l_2 l_3 s \theta_3 \\ 0 & -\frac{1}{4} m_3 l_2 l_3 s \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (375)$$

Üçüncü eklem yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksen yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Üçüncü eklem ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = g_0 m_3 A^3_{33} = 0 \quad (376)$$

## 14-CN Robotu

### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (377)$$



$$D_1 = {}^0R \overline{D_1} {}^0R^T = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} h_1 \\ 0 \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (378)$$

$z^0 = {}^0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem prizmatik olduğundan  $\xi = 0$ ' dir. Dolayısıyla  $b_1 = \xi z^0 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ ' dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (379)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1 D_1 B_1^T = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (380)$$

2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{D_2} = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad {}^0T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & h_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (381)$$

$$D_2 = {}^0R \overline{D_2} {}^0R^T = \begin{bmatrix} c^2 \theta_2 I_{xx_2} + s^2 \theta_2 I_{yy_2} & s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & 0 \\ s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = H_1 {}^0T \Delta c_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_1 \sin \theta_2 + h_1 \\ \frac{1}{2} l_1 \cos \theta_2 \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (382)$$

$z^1 = {}^0R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_2 = \xi_2 z^1 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$ ' dir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}l_1 \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}l_1 \sin\theta_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (383)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2 = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}m_2 l_1^2 + I_{zz_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (384)$$

3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \\ 2 \\ 0 \\ -0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}, {}^0_3T = \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 & -c\theta_2 s\theta_3 & s\theta_2 & -l_1 s\theta_2 + h_1 \\ s\theta_2 c\theta_3 & -s\theta_2 s\theta_3 & -c\theta_2 & l_1 c\theta_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (385)$$

$$\bar{c}_3 = H_1 {}^0_3T \Delta c_3$$

$$D_3 = {}^0_3R \bar{D}_3 {}^0_3R^T = \begin{bmatrix} a_{CN} & b_{CN} & c_{CN} \\ b_{CN} & d_{CN} & s\theta_2 s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \\ c_{CN} & k_{CN} & c^2\theta_3 I_{xx_3} + s^2\theta_3 I_{yy_3} \end{bmatrix}, \quad (386)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2 c\theta_2 c\theta_3 - l_1 s\theta_2 + h_1 \\ \frac{1}{2}l_2 s\theta_2 c\theta_3 + l_1 c\theta_2 \\ \frac{1}{2}l_2 s\theta_3 + q_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Denklem kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$a_{CN} = c^2\theta_2 (c^2\theta_3 I_{xx_3} + s^2\theta_3 I_{yy_3}) + s^2\theta_2 I_{zz_3} \quad (387)$$

$$b_{CN} = s\theta_2 c\theta_2 (c^2\theta_3 I_{xx_3} + s^2\theta_3 I_{yy_3} - I_{zz_3}) \quad (388)$$

$$c_{CN} = c\theta_2 s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (389)$$

$$d_{CN} = s^2\theta_2 (c^2\theta_3 I_{xx_3} + s^2\theta_3 I_{yy_3}) + c^2\theta_2 I_{zz_3} \quad (390)$$

$$k_{CN} = s\theta_2 s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (391)$$

$z^2 = {}^0_2R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve üçüncü eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,

$b_3 = \xi_3 z^2 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  'dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}l_2s\theta_2c\theta_3 - l_1c\theta_2 & -\frac{1}{2}l_2c\theta_2s\theta_3 \\ 0 & \frac{1}{2}l_2c\theta_2c\theta_3 - l_1s\theta_2 & -\frac{1}{2}l_2s\theta_2s\theta_3 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}l_2c\theta_3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (392)$$

$$D(q_3) = m_3A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$= \begin{bmatrix} m_3 & 0 & \frac{1}{2}l_2m_3c\theta_3 \\ 0 & e_{CN} & \frac{1}{2}l_1l_2m_3s\theta_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \\ \frac{1}{2}l_2m_3c\theta_3 & f_{CN} & \frac{1}{4}l_2^2m_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \end{bmatrix} \quad (393)$$

Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$e_{CN} = m_3\left(\frac{1}{4}l_2^2c^2\theta_3 + l_1^2\right) + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \quad (394)$$

$$f_{CN} = \frac{1}{2}l_1l_2m_3s\theta_3 + s^2\theta_3I_{xx_3} + c^2\theta_3I_{yy_3} \quad (395)$$

Birinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}l_2m_3s\theta_3 \end{bmatrix} \quad (396)$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde x eksenine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [-g_0 \ 0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0(m_1A_{11}^1 + m_2A_{11}^2 + m_3A_{11}^3) = 0 \quad (397)$$

İkinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3} - \frac{1}{4}m_3 l_2^2) & \frac{1}{2}l_1 l_2 m_3 c\theta_3 + 2s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \end{bmatrix} \quad (398)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde x eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [-g_0 \ 0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = g_0 (m_2 A^2_{12} + m_3 A^3_{12}) = -g_0 \left( \frac{1}{2}l_1 m_2 c\theta_2 - \frac{1}{2}l_2 m_3 s\theta_2 c\theta_3 - l_1 m_3 c\theta_2 \right) \quad (399)$$

Üçüncü eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4}l_2 m_3 s\theta_3 \\ 0 & s\theta_3 c\theta_3 \left( \frac{1}{4}l_2^2 m_3 - I_{xx_3} + I_{yy_3} \right) & -c\theta_3 \left( \frac{1}{4}l_1 l_2 m_3 + s\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \right) \\ g_{CN} & c\theta_3 \left( \frac{1}{4}l_1 l_2 m_3 + s\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \right) & s\theta_3 c\theta_3 (I_{xx_3} - I_{yy_3}) \end{bmatrix} \quad (400)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$g_{CN} = -\frac{1}{4}l_2 m_3 s\theta_3 \quad (401)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde x eksenini yerçekimiyle zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [-g_0 \ 0 \ 0]^T$  şeklinde ifade edilir. Üçüncü ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = g_0 m_3 A^3_{13} = -\frac{1}{2}g_0 l_2 m_3 c\theta_2 s\theta_3 \quad (402)$$

## NC Robotu

### 1.Bağ

$$\Delta c_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d_2}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (403)$$

$$D_1 = {}^0_1R \bar{D}_1 {}^0_1R^T = \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_1} + s^2\theta_1 I_{yy_1} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & s^2\theta_1 I_{xx_1} + c^2\theta_1 I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_1 = H_1 {}^0_1T \Delta c_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}d_2 s\theta_1 \\ \frac{1}{2}d_2 c\theta_1 \\ h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (404)$$

$z^0 = {}^0Ri^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve birinci eklem dönel olduğundan  $\xi = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_1 = \xi z^0 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$  dir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}d_2 c\theta_1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}d_2 s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (405)$$

$$D(q_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T D_1 B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}d_2^2 m_1 + I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (406)$$

## 2.Bağ

$$\Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}, \quad {}^0_2T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 & d_2 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_1 & -d_2 c\theta_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (407)$$

$$D_2 = {}^0_2R \bar{D}_2 {}^0_2R^T = \begin{bmatrix} a_{NC} & b_{NC} & c_{NC} \\ b_{NC} & d_{NC} & e_{NC} \\ c_{NC} & e_{NC} & s^2\theta_2 I_{xx_2} + c^2\theta_2 I_{yy_2} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = H_1 {}^0_2T \Delta c_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_2 c\theta_1 c\theta_2 + d_2 s\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_2 s\theta_1 c\theta_2 - d_2 c\theta_1 \\ \frac{1}{2}l_2 s\theta_2 + h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (408)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$a_{NC} = c^2\theta_1(c^2\theta_2I_{xx_2} + s^2\theta_2I_{yy_2}) + s^2\theta_1I_{zz_2} \quad (409)$$

$$b_{NC} = s\theta_1c\theta_1(c^2\theta_2I_{xx_2} + s^2\theta_2I_{yy_2}) \quad (410)$$

$$c_{NC} = c\theta_1c\theta_2s\theta_2(I_{xx_2} - I_{yy_2}) \quad (411)$$

$$d_{NC} = s^2\theta_1(c^2\theta_2I_{xx_2} + s^2\theta_2I_{yy_2}) + c^2\theta_1I_{zz_2} \quad (412)$$

$$e_{NC} = s\theta_1c\theta_2s\theta_2(I_{xx_2} - I_{yy_2}) \quad (413)$$

$z^1 = {}^0R_1 z^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve ikinci eklem dönel olduğundan  $\xi_2 = 1$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_2 = \xi_2 z^1 = 1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$ ).

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_2s\theta_1c\theta_2 + d_2c\theta_1 & -\frac{1}{2}l_2c\theta_1s\theta_2 & 0 \\ \frac{1}{2}l_2c\theta_1c\theta_2 + d_2s\theta_1 & -\frac{1}{2}l_2s\theta_1s\theta_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}l_2c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (414)$$

$$D(q_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T D_2 B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}l_2^2 m_2 c^2\theta_2 + d_2^2 + s^2\theta_2 I_{xx_2} + c^2\theta_2 I_{yy_2} & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{2}l_2 d_2 m_2 s\theta_2 + s^2\theta_2 I_{xx_2} + c^2\theta_2 I_{yy_2} & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & -\frac{1}{2}l_2 d_2 m_2 s\theta_2 + s^2\theta_2 I_{xx_2} + c^2\theta_2 I_{yy_2} & 0 \\ \cdot & \frac{1}{4}l_2^2 m_2 + s^2\theta_2 I_{xx_2} + c^2\theta_2 I_{yy_2} & 0 \\ \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (415)$$

3.Bağ

$$\Delta c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{l_3}{2} & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}$$

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 & l_2 c\theta_1 c\theta_2 + (d_2 + q_3)s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_1 & l_2 s\theta_1 c\theta_2 - (d_2 + q_3)c\theta_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2 s\theta_2 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (416)$$

$$D_3 = {}^0_3R \overline{D_3} {}^0_3R^T \quad \bar{c}_3 = H_1 {}^0_3T \Delta c_3$$

$$= \begin{bmatrix} a_{NC} & b_{NC} & c_{NC} \\ b_{NC} & d_{NC} & e_{NC} \\ c_{NC} & e_{NC} & s^2\theta_2 I_{xx_3} + c^2\theta_2 I_{yy_3} \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} (d_2 + q_3 - \frac{1}{2}l_3)s\theta_1 + l_2 c\theta_1 c\theta_2 \\ -(d_2 + q_3 - \frac{1}{2}l_3)c\theta_1 + l_2 s\theta_1 c\theta_2 \\ l_2 s\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} \quad (417)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$a_{NC} = c^2\theta_1(c^2\theta_2 I_{xx_3} + s^2\theta_2 I_{yy_3}) + s^2\theta_1 I_{zz_3} \quad (418)$$

$$b_{NC} = s\theta_1 c\theta_1(c^2\theta_2 I_{xx_3} + s^2\theta_2 I_{yy_3}) \quad (419)$$

$$c_{NC} = c\theta_1 c\theta_2 s\theta_2(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (420)$$

$$d_{NC} = s^2\theta_1(c^2\theta_2 I_{xx_3} + s^2\theta_2 I_{yy_3}) + c^2\theta_1 I_{zz_3} \quad (421)$$

$$e_{NC} = s\theta_1 c\theta_2 s\theta_2(I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (422)$$

$z^2 = {}^0_2R i^3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  ve üçüncü prizmatik olduğundan  $\xi_3 = 0$ ' dir. Dolayısıyla,  $b_3 = \xi_3 z^2 = 0 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  dir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} -l_2 s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1(d_2 + q_3 - \frac{1}{2}l_3) & -l_2 c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 \\ l_2 c\theta_1 c\theta_2 + s\theta_1(d_2 + q_3 - \frac{1}{2}l_3) & -l_2 s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_1 \\ 0 & \frac{1}{2}l_2 c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (423)$$

$$D(q_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T D_3 B_3$$

$$= \begin{bmatrix} f_{NC} + s^2\theta_2 I_{xx_3} + c^2\theta_2 I_{yy_3} & h_{NC} & -l_2 m_3 c\theta_2 \\ g_{NC} & i_{NC} & 0 \\ -l_2 m_3 c\theta_2 + s^2\theta_2 I_{xx_3} + c^2\theta_2 I_{yy_3} & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (424)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$f_{NC} = m_3(l_2^2 c^2 \theta_2 + q_3^2 + 2d_2 q_3 - l_3 q_3 + d_2^2 - d_2 l_3 + \frac{1}{4} l_3^2) \quad (425)$$

$$g_{NC} = -l_2 m_3 s \theta_2 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2} l_3) + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{yy_3} \quad (426)$$

$$h_{NC} = -l_2 m_3 s \theta_2 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2} l_3) + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{yy_3} \quad (427)$$

$$i_{NC} = l_2^2 m_3 (1 - \frac{3}{4} c^2 \theta_2) + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{yy_3} \quad (428)$$

Birinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21}^1 & c_{22}^1 & l_2 m_3 s \theta_2 \\ m_3 (2d_2 - l_3 + 2q_3) & -l_2 m_3 s \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (429)$$

Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$c_{21}^1 = 2s \theta_2 c \theta_2 (-\frac{1}{4} l_2^2 m_2 + I_{xx_2} - I_{yy_2} - l_2^2 m_3 + I_{xx_3} - I_{yy_3}) \quad (430)$$

$$c_{22}^1 = -l_2 m_3 c \theta_2 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2} l_3) - \frac{1}{2} l_2 d_2 m_2 c \theta_2 + 2s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{yy_3}) \quad (431)$$

Birinci eklem yerleştirilen koordinat çerçevesinde z eksenine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_1 = [0 \ 0 \ -g_0]^T$  şeklinde ifade edilir. Birinci eklem ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(1)} = g_0 (m_1 A^1_{31} + m_2 A^2_{31} + m_3 A^3_{31}) = 0 \quad (432)$$

İkinci eklem hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{12}^2 & -\frac{1}{2} l_2 m_3 s \theta_2 \\ c_{21}^2 & c_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (433)$$



Denklemden kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir.

$$c_{11}^2 = -s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{yy_3} - \frac{1}{4}l_2^2 m_2 - l_2^2 m_3) \quad (434)$$

$$c_{12}^2 = -s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{yy_3}) + \frac{1}{2}l_2 m_3 c\theta_2 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2}l_3) + \frac{1}{4}l_2 d_2 m_2 c\theta_2 \quad (435)$$

$$c_{21}^2 = s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{yy_3}) - \frac{1}{2}l_2 m_3 c\theta_2 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2}l_3) - \frac{1}{4}l_2 d_2 m_2 c\theta_2 \quad (436)$$

$$c_{22}^2 = s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{yy_3} + \frac{3}{4}l_2^2 m_3) \quad (437)$$

İkinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle aynı yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_2 = [0 \quad g_0 \quad 0]^T$  şeklinde ifade edilir. İkinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(2)} = -g_0 (m_2 A^2_{22} + m_3 A^3_{22}) = g_0 l_2 s\theta_1 s\theta_2 (\frac{1}{2}m_2 + m_3) \quad (438)$$

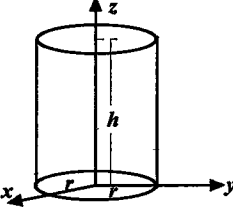
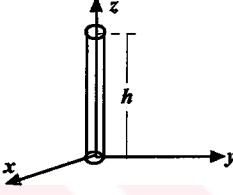
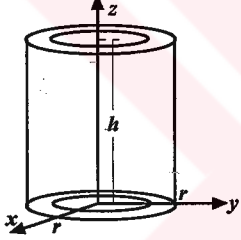
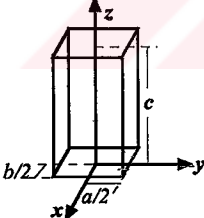
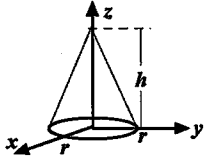
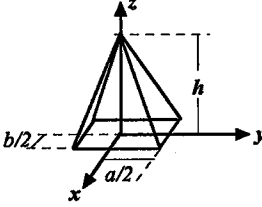
Üçüncü eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıda verilmiştir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} -m_3 (q_3 + d_2 - \frac{1}{2}l_3) & \frac{1}{2}l_2 m_3 s\theta_2 & 0 \\ \frac{3}{2}l_2 m_3 s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (439)$$

Üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde y eksenini yerçekimiyle aynı yönde olduğundan, yerçekimi vektörü  $g_3 = [0 \quad g_0 \quad 0]^T$  şeklinde ifade edilir. Üçüncü ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_{(3)} = -g_0 m_3 A^3_{23} = g_0 m_3 c\theta_1 \quad (440)$$

**EK-G: BAZI DÜZENLİ GEOMETRİK ŞEKİLLERİN ATALET MOMENTLERİ**

Geometrik şekiller ve isimleri	$I_{xx}$	$I_{yy}$	$I_{zz}$	
	Silindir	$\frac{m(3r^2 + 4h^2)}{12}$	$\frac{m(3r^2 + 4h^2)}{12}$	$\frac{mr^2}{4}$
	İnce silindir	$\frac{mh^2}{3}$	$\frac{mh^2}{3}$	0
	İçi boş silindir	$\frac{m(3r^2 + 2h^2)}{6}$	$\frac{m(3r^2 + 2h^2)}{6}$	$mr^2$
	Prizma	$\frac{m(b^2 + 4c^2)}{12}$	$\frac{m(a^2 + 4c^2)}{12}$	$\frac{m(a^2 + b^2)}{12}$
	Huni	$\frac{m(3r^2 + 2h^2)}{20}$	$\frac{m(3r^2 + 2h^2)}{20}$	$\frac{3mr^2}{10}$
	Piramit	$\frac{m(b^2 + 2h^2)}{20}$	$\frac{m(a^2 + 2h^2)}{20}$	$\frac{m(a^2 + b^2)}{20}$

## EK-G: İNGİLİZCE-TÜRKÇE TERİMLER SÖZLÜĞÜ

Terim	Anlamı
Accuracy	:Doğruluk
Actuator	:Eyleyici
Animation	:Canlandırma
Approaching	:Yaklaşım vektörü
Articulated	:Dönel
Base frame	:Ana çerçeve
Centrifugal	:Merkezkaç
Closed form	:Kapalı biçim veya analitik çözüm
Computer aided design- CAD	:Bilgisayar destekli tasarım
Computer aided manufacturing-CAM	:Bilgisayar destekli üretim
Configuration	:Düzenleşim
Conveyer system	:Taşıyıcı sistem
Coordinat frame	:Kordinat çerçevesi
Cross product	:Vektörel çarpım
Coupling	:Bağlaşım
Degree of freedom	:Serbestlik derecesi
Design variable	:Tasarım değişkeni
Diagonal matrix	:Köşegen matris
Distinct	:Farklılık
End effector	:Uç işlevci
Exponential method	:Üssel yöntem
Forward kinematics	:İleri kinematik
Global conditioning index	:Evrensel vaziyet göstergesi
Global performance index	:Evrensel başarı göstergesi
Goal frame	:Hedef çerçevesi
Gross motion	:Geniş çaplı hareket
Hollow	:Boşluk
Joint	:Eklem

Joint angle	:Eklem açısı
Lineer	: Doğrusal
Link	:Bağ
Link length	:Bağ uzunluğu
Link twist	:Bağ açısı
Manipulability measure	:Beceri ölççeği
Maximum	:En büyük
Minimum	:En küçük
Motion matrix	:Hareket matrisi
Multiobjective	:Çok ölçütlü
Nonlinear inequality constrain	:Doğrusal olmayan eşitsizlik kısıtı
Numeric solution	:Sayısal çözüm
Objective function	:Amaç işlevi
Off line pogramming- OLP	:Çevrim dışı programlama
Offset	:Kaçıklılık
On line pogramming	:Çevrim içi programlama
Optimization	:Eniyileme
Optimum	:En iyi
Orientation	:Yönelim
Orientation structure	:Yönelim yapısı
Orthogonal robot	:Dikgen robot
Parametically Continuity	:Parametrik olarak sürekli
Path planning emulation	:Yörünge planlama öykünümü
Performance index	:Başarı göstergesi
Pick and place	:Tut ve yerleştir
Pemultiplication	:Ön çarpma
Planar robot	:Düzlemsel robot
Reachable workspace	:Ulaşılabilir çalışma uzayı
Recursive	:Özyineli
Redundancy	:Artıklık
Regional structure	:Bölgesel yapı
Repetability	:Yinelenebilirlik
Resolution	:Çözünürlük
Revolute	:Dönel

Revolute Joint	:Dönel eklem
Rigid	:Kati
Robot error model	:Robot hata modeli
Rotation matrix	:Dönme matrisi
Round-off	:Yuvarlama
Sensor	:Algılayıcı
Shape matrix	:Şekil matrisi
Simulation	:Benzetim
Singular point	:Tekil nokta
Skew symmetric cross product matrix	:Eksi bakışimli vektörel çarpım matrisi
Sliding vektor	:Kayma vektörü
Static	:Durağan
Station frame	:İstasyon çerçeve
Step motor	:Adım motoru
Structural length index	:Yapısal uzunluk göstergesi
Teach pendant	:Kullanıcı arabirim
Tool frame	:Araç çerçeve
Transpose of a matrix	:Matrisin devriği
Trace of a matrix	:Matrisin izi
Turn slide	:Dönme-kayma
Useful	:Kullanışlı
Virtual	:Sanal
Working cell	:Çalışma hücresi
Wrist frame	:Bilek çerçevesi
Zero referance position	:Sıfır referans konum

## ÖZGEÇMİŞ

1970 yılında Muş'un Bulanık ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Bulanık'ta tamamladı. 1990 yılında Marmara Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik-Bilgisayar Eğitimi Bölümünü kazandı ve 1995 yılında mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Bağcılar Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'ne elektronik öğretmeni olarak atandı. 1996'da Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik-Bilgisayar Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı ve 1998'de mezun oldu. 2000 yılında başladığı Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda doktora öğrenimine devam etmektedir.

1999 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik-Bilgisayar Eğitimi Bölümünde öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.