

154982

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ANAHTARLAMALI DEVRELERDE BAŞLANGIÇ
KOŞULLARININ BELİRLENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elk. Müh. Murat DEMİR

Anabilim Dalı : Elektrik Mühendisliği

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ali Bekir YILDIZ

HAZİRAN 2004

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ANAHTARLAMALI DEVRELERDE BAŞLANGIÇ
KOŞULLARININ BELİRLENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elektrik Müh. Murat DEMİR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 03 Haziran 2004

Tezin Savunulduğu Tarih : 06 Temmuz 2004

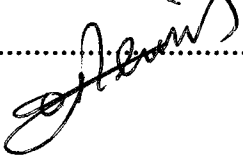
Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Ali Bekir YILDIZ

(..........)

Üye

Yrd. Doç. Dr. Oya DEMİRER

(..........)

Üye

Prof. Dr. Oruç BİLGİÇ

(..........)

Temmuz 2004

ANAHTARLAMALI DEVRELERDE BAŞLANGIÇ KOŞULLARININ BELİRLENMESİ

Murat DEMİR

Anahtar Kelimeler: Başlangıç koşulları, dirac impulsar, anahtarlama devreler

Özet: Bu çalışmada; anahtarlama devrelerinde başlangıç koşullarının belirlenmesini sağlayan bir yöntem incelenmiştir. Anahtarlama devrelerinde, sistem değişkenlerinin başlangıç değerleri sistemin ilk koşulu olarak kabul edilir ve sistem denklemlerinin çözümünde kullanılır. Anahtarlama devrelerinde ise, özellikle anahtarlama anlarında dirac impulsif akım ve gerilimler görülmektedir. Bu nedenle, anahtarlama devrelerinin zaman domeni analizi için sistem değişkenlerinin $t=0^+$ daki (anahtarlama sonrası) başlangıç değerlerinin belirlenmesi gerekir.

Bu amaçla, öncelikle sistem denklemlerinin kolayca elde edilmesine imkan tanıyan Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Yöntemi kullanılmıştır. Daha sonra dönüşüm yöntemi uygulanarak minimum sayıda değişkenle çözüme imkan tanıyan Durum Denklemleri Sistemi'ne geçilmiştir. Bu denklem sistemi üzerinden $t=0^+$ daki başlangıç değerleri $t=0^-$ 'deki (anahtarlama öncesi) değerler cinsinden belirlenmiştir. Ayrıca bu sistemlerin kontrol edilebilirliği ve gözlemlenebilirliği incelenmiş ve bir güç elektroniği uygulama devresi dahil edilmiştir.

DEFINING OF THE INITIAL CONDITIONS IN THE SWITCHING CIRCUITS

Murat DEMİR

Keywords : Initial conditions, dirac impulses, switching circuits

Abstract : In this study, a method for defining the initial conditions in the switching circuits has been examined. In non-switched circuits, the initial values of the system variables are accepted as initial conditions and used in the solving of the system equations. But, in the switching circuits, peak currents/voltages (Dirac impulses) occur especially during switching instants. Therefore, the initial conditions of the system variables in $t=0^+$ (after switching) must be defined for time-domain analysis of the switching circuits.

Firstly, the Modified Nodal Equations System which allows the system equations to be obtained easily has been used. Later, by using conversion method, it has been passed into the State Variables Equation System which allows the solving by minimum variables. Over these equations, the initial conditions in $t=0^+$ has been defined by the initial conditions in $t=0^-$ (before switching). Also the controllability and observability of the system has been examined and a power electronic application circuit has been included.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Elektrik devrelerinin analizinde kullanılan pekçok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemler içinde en popüler olanları Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri (G.D.D.) yöntemi ile Durum Değişkenleri (D.D.) yöntemidir. Bu iki yöntemin de birbirine göre avantaj ve dezavantajları bulunmaktadır. Yapılan çalışmalar göstermiştir ki herhangi bir devrenin analizinde, denklem sistemlerinin elde edilme aşamasında G.D.D. yönteminin, sistemin çözdürülmesi aşamasında ise D.D. yönteminin kullanımı her iki yöntemin de dezavantajlarını ortadan kaldırmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada elektrik devrelerinin analizinde denklem sistemi oluşturulurken G.D.D. sistemi kullanılmakta, daha sonra bazı matematiksel işlemlerden sonra D.D.'ye dönüştürülerek devre denklemleri çözüme hazır hale getirilmektedir. D.D. yönteminin çözüm aşamasında kullanılmasının en büyük avantajı bilinmeyen sayısının minimum olmasıdır.

D.D. yöntemi diferansiyel denklem sisteminden oluşur ve sistem denklemlerinin çözülebilmesi için sistem bilinmeyenlerinin başlangıç değerleri belirlenmiş olmalıdır. Bu işlem normal şartlarda çok basit olmakla beraber, özellikle anahtarlamalı devrelerde ve devrede impulsiv kaynak bulunması halinde biraz daha zordur. Bu gibi durumlarda sistem denklemlerinde kaynağın türevli bileşenleri görülebilir. Bu da devrede peak akım ve gerilim olduğunu gösterir. Bu nedenle başlangıç değerlerinin bu durumlar dikkate alınarak yeniden hesaplanması gerekir. Aksi takdirde başlangıç şartları yanlış alınmış olacağından devrenin analizi de hatalı yapılmış olacaktır. Bu çalışmada yukarıda sözü edilen durumlarda (sistem denklemlerinde kaynağın türevli bileşenleri ile karşılaşıldığında) başlangıç şartlarının nasıl hesaplanacağı açıklanmaktadır.

Gerek tezimin hazırlanmasında gerekse diğer tüm akademik çalışmalarında yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali Bekir YILDIZ' a,

tezin hazırlanması sırasında yardımlarından dolayı tüm öğretim elemanı arkadaşlarıma ve hocalarıma ve her zaman yanımda olan, maddi ve manevi destekcim Aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER.....	vi
SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
TABLolar DİZİNİ	xv
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
1.1. Kirchhoff Kanunları.....	3
1.1.1. Kirchhoff akım kanunu	3
1.1.2. Kirchhoff gerilim kanunu	3
1.2. Yüklerin Korunumu Kanunu	4
1.3. Basamak Fonksiyonu	5
1.4. Dirac Delta (İmpuls) Fonksiyonu	5
1.5. Kapasite ve Endüktansın Basamak ve İmpuls Cevapları.....	8
1.5.1. Kapasite elemanı	9
1.5.2. Endüktans elemanı	10
BÖLÜM 2. ANAHTARLAMALI DEVRELERDE KULLANILAN ANAHTAR MODELLERİ	12
2.1. İki Değerli Eleman Yaklaşımı	12
2.2. Küçük Sinyal Durum-Uzay Modeli	13
2.3. Parçalı Lineer Devre Yaklaşımı.....	13
2.4. Ayrık Zamanlı Anahtar Modeli	14

2.5. İdeal Anahtar Modeli	16
BÖLÜM 3. SİSTEM DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ	17
3.1. Durum Değişkenleri Yöntemi.....	17
3.2. Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Yöntemi	24
3.2.1. Dirençli devrelere ait genelleştirilmiş düğüm denklemlerinin elde edilmesi	26
3.2.2. Dinamik devrelere ait genelleştirilmiş düğüm denklemlerinin elde edilmesi	36
BÖLÜM 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ DÜĞÜM DENKLEMLERİ SİSTEMİNDEN DURUM DEĞİŞKENLERİ SİSTEMİNE GEÇİŞ	49
4.1. Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Sisteminden Durum Değişkenleri Sistemine Geçişin Nedenleri.....	49
4.2. Geçişin Matematiksel İfadesi.....	50
BÖLÜM 5. BAŞLANGIÇ KOŞULLARININ BELİRLENMESİ.....	66
5.1. t-domeni Çözümleri	68
5.2. s-domeni Çözümü	73
5.3. İmpulsif Kaynak İçeren Devreler.....	83
BÖLÜM 6. ANAHTARLAMALI DEVRELERİN KONTROL EDİLEBİLİRLİK VE GÖZLEMLENEBİLİRLİK YÖNÜNDEN İNCELENMESİ	86
6.1. Kontrol Edilebilirlik.....	86
6.2. Kontrol Edilebilirlik Kriterleri	87
6.2.1. Kalman kontrol edilebilirlik kriteri	87
6.2.2. Benzerlik dönüşümü ile kontrol edilebilirlik tayini	88
6.3. Gözlemlenebilirlik	88
6.4. Gözlemlenebilirlik Kriterleri	89
6.4.1. Kalman gözlemlenebilirlik kriteri	89
6.4.2. Benzerlik dönüşümü ile gözlemlenebilirlik tayini	89
6.5. Anahtarlama Devrelerinde Kontrol Edilebilirlik ve Gözlemlenebilirlik	90

BÖLÜM 7. BİR GÜÇ ELEKTRONİĞİ UYGULAMA DEVRESİ.....	98
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	102
KİŞİSEL YAYINLAR ve ESERLER.....	104
KAYNAKLAR	105
ÖZGEÇMİŞ.....	108



SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

A	:	Amper
A_c	:	Kapasitelere ilişkin düğüm matrisi
A_e	:	Gerilim kaynaklarına ilişkin düğüm matrisi
A_j	:	Akım kaynaklarına ilişkin düğüm matrisi
A_L	:	Endüktanslara ilişkin düğüm matrisi
A_R	:	Dirençlere ilişkin düğüm matrisi
A_1	:	1 tipi elemanlara ilişkin düğüm matrisi
A_2	:	2 tipi elemanlara ilişkin düğüm matrisi
C	:	Kapasite
C_d	:	Düğüm kapasitans matrisi
C_x	:	Kapasite matrisi
D	:	Diod
$e(t)$:	Alternatif gerilim kaynağı
E	:	Doğru gerilim kaynağı
G_d	:	Düğüm iletkenlik matrisi
G_k	:	Kalman gözlemlenebilirlik matrisi
G_x	:	İletkenlik matrisi
I	:	Birim matris
I_1	:	1 tipi eleman akımı
I_2	:	2 tipi eleman akımı

i_C	:	Kapasite akımı
i_e	:	Gerilim kaynağı akımı
i_{kd}	:	Kısadevre akımı
i_L	:	Endüktans akımı
i_R	:	Direnç akımı
i_S	:	Anahtar akımı
$i_{1,2,3,\dots}$:	1,2,3,... no' lu düğüme giren ya da çıkan akım
J	:	Akım kaynağı
J_S	:	Açık anahtar modelleyen kaynak
k_i	:	Matrisin i. Sütunu
K	:	Kalman kontrol edilebilirlik matrisi
L	:	Endüktans
L_{on}	:	İletimdeki endüktans değeri
L_{off}	:	Kesimdeki endüktans değeri
L_x	:	Öz endüktans matrisi
n_d	:	Düğüm sayısı
n_e	:	Gerilim kaynağı sayısı
n_j	:	Akım kaynağı sayısı
n_R	:	Direnç sayısı
q	:	Yük miktarı
q_0	:	Başlangıç yük değeri
Q	:	Transistör
R	:	Direnç
R_{on}	:	İletim direnci
R_{off}	:	Kesim direnci
R_S	:	İletim direnci
s_i	:	Matrisin i. satırı
S	:	Anahtar

t_{on}	:	İletim süresi
t_{off}	:	Kesim süresi
T	:	Benzerlik matrisi
U	:	Gerilim Değeri
U_C	:	Kapasite gerilimi
U_d	:	Düğüm gerilimi
U_i	:	i. düğüm gerilimi
U_L	:	Endüktans gerilimi
U_R	:	Direnç gerilimi
U_s	:	Kapalı anahtarı modelleyen kaynak
U_0	:	Başlangıç gerilim değeri
V	:	Volt
$x(t)$:	Sistem bilinmeyenleri
$x_1(t)$:	Gerilim değişkenleri
$x_2(t)$:	Akım değişkenleri
y	:	Kaynak değerleri matrisi (kaynak vektörü)
Y	:	Admitans
Y_d	:	Düğüm admitansı
z	:	Geçiş değişkeni
$\delta(t)$:	Dirac Delta Fonksiyonu
D.D.	:	Durum denklemleri
G.D.D.	:	Genelleştirilmiş düğüm denklemleri
K.A.Y.	:	Kirchhoff akım yasası
Kd	:	Kısa devre elemanı
TL	:	Transmisyon hattı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Basit bir elektrik devresi	3
Şekil 1.2. Basit bir anahtarlamaalı elektrik devresi	4
Şekil 1.3. Basamak ve birim basamak fonksiyonu grafikleri.....	5
Şekil 1.4. Darbe fonksiyonu grafiği	6
Şekil 1.5. $x(t)$ ' nin limit durumunu gösteren grafikler	6
Şekil 1.6. (a) Dirac Delta fonksiyonu , (b) Ötelenmiş Dirac Delta fonksiyonu.....	7
Şekil 1.7. Birim basamak fonksiyonuna yakın bir eğri ve bunun türevi.....	8
Şekil 1.8. (a) Basit bir anahtarlamaalı devre (b) Akım kaynağının zamana bağlı değişimi (basamak fonksiyonu) (c) Kapasite geriliminin zamana bağlı değişimi	9
Şekil 1.9. (a) Basit bir anahtarlamaalı devre (b) Gerilim kaynağının zamana bağlı değişimi (basamak fonksiyonu) (c) Kapasite akımının zamana bağlı değişimi. 9	
Şekil 1.10.(a)Basit bir anahtarlamaalı devre (b)Gerilim kaynağının zamana bağlı değişimi (basamak fonksiyonu) (c) Endüktans akımının zamana bağlı değişimi.....	10
Şekil 1.11.(a) Basit bir anahtarlamaalı devre (b) Akım kaynağının zamana bağlı değişimi (basamak fonksiyonu) (c) Endüktans geriliminin zamana bağlı değişimi	10
Şekil 1.12.(a) Açılan anahtarlı devre (b) End. geriliminin zamana bağlı değişimi.....	11
Şekil 2.1. Anahtar ve ayırık zaman modeli	14
Şekil 2.2. R-L Devresi ve endüktansa ait akım ve gerilim değişimleri.....	15
Şekil 2.3. (a) İdeal anahtar (b-c) Eşdeğer devre.....	15
Şekil 3.1.a. Sinüsoidal kaynaklarla sürülen bir RLC Devresi b. Devrenin Grafi	21
Şekil 3.2. Basit bir elektrik devresi ve devrenin grafi	23
Şekil 3.3. Dirençli bir elektrik devresi	30
Şekil 3.4. Dirençli bir devre	33
Şekil 3.5. Endüktans elemanı	38
Şekil 3.6. Kapasite elemanı	39

Şekil 3.7. Anahtarlama bir elektrik devresi	41
Şekil 3.8. $t > 0$ için Şekil 3.7' deki devre.....	41
Şekil 3.9. Basit bir elektrik devresi	44
Şekil 3.10. $t > 0$ için Şekil 3.7' deki devre.....	47
Şekil 4.1. Anahtarlama bir elektrik devresi	55
Şekil 4.2. Kapanan anahtarın U_s gerilim kaynağı ile modelini içeren devre.....	55
Şekil 4.3. Anahtarlama bir elektrik devresi ve açılan anahtarın J_s akım kaynağı ile modelini içeren devre.....	60
Şekil 5.1. Anahtarlama bir RC devresi, $t > 0$ için devre grafi ve devrenin durum değişkeninin zamana bağlı değişimi	66
Şekil 5.2. Anahtarlama bir RC devresi, $t > 0$ için devre grafi ve başlangıç şartının zamana bağlı değişimi.....	67
Şekil 5.3. Anahtarlama bir RL devresi, $t > 0$ için devre grafi ve başlangıç şartının zamana bağlı değişimi.....	68
Şekil 5.4. Ötelenmiş birim basamak fonksiyonu ve anahtarlama olayının gerçekleştiği zaman dilimini gösteren grafik.....	70
Şekil 5.5. Basit bir anahtarlama devre	73
Şekil 5.6. t-domeni çözümü için anahtarlama sonrası devrenin, kapanan anahtarın U_s gerilim kaynağı ile modelini içeren durumu ve devre grafi.....	73
Şekil 5.7. Anahtarlama sonrası devre grafi (s domeni çözümü için)	74
Şekil 5.8. U_{C1} ve U_{C2} 'nin başlangıç şartlarındaki değişimi gösteren grafik.....	75
Şekil 5.9. Anahtarlama elektrik devresi.....	75
Şekil 5.10. t-domeni çözümü için anahtarlama sonrası devrenin, kapanan anahtarın U_s gerilim kaynağı ile modelini içeren durumu ve devre grafi.....	76
Şekil 5.11. U_{C1} ve U_{C2} 'nin zamana bağlı değişimleri	78
Şekil 5.12. s-domeni çözümü için devre grafi	78
Şekil 5.13. Anahtarlama bir elektrik devresi ve açılan anahtarın J_s akım kaynağı ile modelini içeren devre.....	80
Şekil 5.14. t-domeni çözümü için devre grafi	80
Şekil 5.15. i_{L1} ve i_{L2} 'nin zamana bağlı değişimleri.....	81

Şekil 5.16. s-domeni çözümü için devre grafi	82
Şekil 5.17. İmpulsif kaynak içeren devre, devreye ait impulsif kaynağın zamana bağlı değişimi ve devrenin t-domeni için çizilmiş grafi.....	83
Şekil 5.18. (a) $t > 0$ için devre şeması (b) $U_c(t)$ ' nin zamana bağlı değişimi	85
Şekil 6.1. Anahtarlama bir elektrik devresi ve devre grafi	91
Şekil 6.2. Örnek 2 için çizilmiş devre şeması ve $t > 0$ için devre grafi	94
Şekil 7.1. İdeal flyback anahtarlama konvertörün devre şeması	99
Şekil 7.2. Q_1 ve D_1 kesimdeyken devre şemaları ve devre grafi	99
Şekil 7.3. Q_1 kesimde, D_1 iletimdeyken devre şemaları ve devre grafi	100
Şekil 7.4. Q_1 ve D_1 iletimdeyken devre şemaları ve devre grafi.....	100
Şekil 7.5. Q_1 iletimde, D_1 kesimdeyken devre şemaları ve devre grafi	101

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 2.1. Anahtarlama elemanlarının modelini gösteren tablo	16
Tablo 3.1. Direnç bağlantı tablosu	30
Tablo 3.2. Örnek 3.2 'ye ait direnç bağlantı tablosu.....	30
Tablo 3.3. Gerilim kaynakları bağlantı tablosu.....	31
Tablo 3.4. Akım kaynakları bağlantı tablosu	32
Tablo 3.5. Örnek 3.3' e ait direnç bağlantı tablosu.....	33
Tablo 3.6. Örnek 3.3' e ait gerilim kaynakları bağlantı tablosu	34
Tablo 3.7. Örnek 3.3' e ait akım kaynakları bağlantı tablosu.....	34
Tablo 3.8. "2"tipi eleman bağlantı tablosu.....	40
Tablo 3.9. Örnek 3.4. için oluşturulan direnç düğüm tablosu.....	41
Tablo 3.10. Örnek 3.4. için oluşturulan "2"tipi eleman bağlantı tablosu.....	42
Tablo 3.11. Kapasite bağlantı tablosu.....	44
Tablo 3.12. Örnek 3.5 için oluşturulmuş kapasite bağlantı tablosu.....	45

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Elektrik devrelerinin doğru şekilde analizinin yapılabilmesi için ilk koşulların mutlaka dikkate alınması gerekir. Normalde başka bir kapasite veya gerilim kaynağı ile çevre oluşturmuyorsa kapasite uçlarındaki gerilim ani olarak değişmez. Benzer şekilde başka bir endüktans veya akım kaynağı ile kesitleme oluşturmuyorsa endüktanstan geçen akım da ani olarak değişmez. Buna göre başlangıç değerlerin bulunabilmesi için; kapasiteler uçlarındaki başlangıç gerilimine eşdeğer olan gerilim kaynakları ile, endüktanslar ise üzerinden geçen başlangıç akımına eşdeğer olan akım kaynakları ile modellenir. Sonuçta rezistif bir devre elde edilir. Elde edilen cebirsel formdaki bu rezistif devre çözümlenerek düğüm denklem sistemine ait değişkenlerin başlangıç koşulları bulunur. Bulunan bu değerler $t = 0^-$ değerleridir. Normalde durum değişkeni olan kapasite gerilimleri ile endüktans akımları aniden değişmediğinden bulunan bu $t = 0^-$ değerleri $t = 0^+$ değerlerine eşit olur ve sistemin zaman domeni analizinde başlangıç şartı olarak kullanılır. Özellikle anahtarlamalı veya impulsif kaynak içeren devrelerde ise başlangıç koşullarını belirlemek biraz daha zordur. Devredeki akım ve gerilimlerde ani değişimler (sıçramalar) olduğunda (kapasiteler kendi aralarında yada gerilim kaynakları ile çevre oluşturuyorsa veya endüktanslar kendi aralarında ya da akım kaynakları ile kesitleme oluşturuyorsa) bu eşitlik geçerli olmaz. Bu durumda denklem sisteminde kaynak türevleri görülür. Bu da devrede peak akım ve gerilim olduğunu gösterir. O halde başlangıç değerlerinin bu durumlar dikkate alınarak yeniden hesaplanması gerekir. Aksi takdirde başlangıç şartları yanlış alınmış olacağından devrenin analizi de hatalı yapılmış olacaktır. Bu çalışmada; hangi durumlarda başlangıç koşullarının yeniden hesaplanması gerektiği ve bu hesaplamaların nasıl yapıldığı anlatılmıştır.

Bölüm 2' de, anahtarlama devrelerinde kullanılan anahtar modellerinden kısaca bahsedilmiştir. Bu çalışmada, ideal anahtar modeli kullanılmıştır. İdeal bir anahtar, iletimde sıfır direnç (kısık devre) kesimde ise sıfır admitans (açık devre) özelliği

gösterir. Tüm anahtarlama elemanları “ $t < 0$ ” ve “ $t > 0$ ” anlarındaki durumlarına göre açılan ya da kapanan anahtar olarak ele alınmış ve ideal anahtar kavramını sağlamak için sıfır değerli gerilim kaynağı ya da akım kaynağı ile modellenmiştir.

Bölüm 3’ te, sistem denklemlerinin analizinde kullanılan en yaygın yöntemlerden olan Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Yöntemi (G.D.D.) ile Durum Değişkenleri Yöntemi’ nden (D.D.) ayrıntılı bir şekilde söz edilmiştir.

Bölüm 4’ te, G.D.D. yönteminden D.D. yöntemine geçiş anlatılmıştır. Her iki yöntem avantaj ve dezavantajları bakımından karşılaştırılmış ve bu geçişin nedenleri ve matematiksel ifadesinden bahsedilmiştir.

Bölüm 5’ te, başlangıç şartlarının belirlenmesinden söz edilmiştir. Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Sistemi, Bölüm 4’ te açıklanan yöntemle Durum Değişkenleri Sistemi’ ne dönüştürüldükten sonra, sistemin zaman domeni analizi için öncelikle sistem bilinmeyenlerinin $t = 0^+$ anındaki akım/gerilim değerleri elde edilmelidir. Anahtarlama devrelerinde, sistem değişkenlerinin başlangıç değerleri sistemin ilk koşulu olarak kabul edilir ve sistem denklemlerinin çözümünde kullanılır. Anahtarlama devrelerinde ise, özellikle anahtarlama anlarında dirac impulsif akım ve gerilimler görülmektedir. Bu nedenle, anahtarlama devrelerinin zaman domeni analizi için sistem değişkenlerinin $t=0^+$ daki (anahtarlama sonrası) başlangıç değerlerinin belirlenmesi gerekir. $t=0^+$ daki başlangıç değerlerinin nasıl hesaplanacağı bu bölümde anlatılmıştır.

Bölüm 6’ da, kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik tanımları ile kriterlerinden söz edilmiş ve bu kriterler yardımıyla anahtarlama devrelerinin kontrol edilebilirliği ve gözlemlenebilirliği incelenmiştir. Böylece peak akım ya da gerilim içeren devrelerde bu anlık peak değişimlerin, devre çözdürülmeden de tespit edilebileceğini görülmektedir.

Bölüm 7’ de, bir güç elektroniği uygulama devresi analiz edilmiştir.

Bu bölümde, tezin daha sonraki bölümlerinde kullanılan bazı temel kavramlardan bahsedilmektedir.

1.1. Kirchhoff Kanunları

İçinde birden fazla kaynak ve çok sayıda diğer devre elemanlarını içeren kompleks elektrik devrelerini daha basit olarak çözmek için Kirchhoff Kanunları kullanılır.

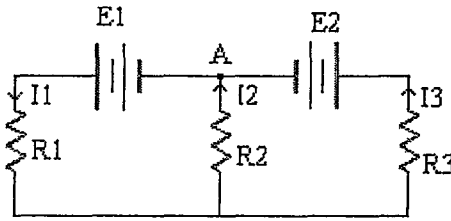
1.1.1. Kirchhoff akım kanunu

Bir elektrik devresinde herhangi bir düğüme gelen akımların toplamı, o düğümden çıkan akımların toplamına eşittir.

1.1.2. Kirchhoff gerilim kanunu

Bir elektrik devresinde herhangi bir gözdeki (çevre) gerilim kaynaklarının cebirsel toplamı, o çevredeki diğer elemanlar üzerindeki gerilimlerin toplamına eşittir.

Örnek 1.1. Şekil 1.1' deki basit elektrik devresinde Kirchhoff Kanunları eşitlikleri yazılacaktır.



Şekil 1.1. Basit bir elektrik devresi

A düğümü için Kirchhoff akım kanunu;

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (1.1)$$

Devre iki gözle bir elektrik devresidir ve her iki göz için ayrı ayrı Kirchhoff gerilim kanunu yazılırsa;

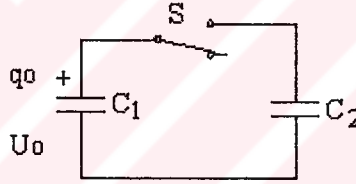
$$E_1 = i_1.R_1 + i_2.R_2 \quad (1.2)$$

$$E_2 = i_2.R_2 - i_3.R_3 \quad (1.3)$$

1.2. Yüklerin Korunumu Kanunu

Herhangi bir sistemdeki elektriksel yüklerin toplamı sıfırdır. Sistem kendi içinde ne kadar değişirse değişsin toplam yük değişmez. Değişen, sistem bileşenlerinin yükleri paylaşım oranıdır.

Örnek 1.2. Kapasitesi C_1 ve uçları arasındaki potansiyel farkı U_0 olan bir kondansatör, kapasitesi C_2 olan yüksüz bir diğer kondansatörle S anahtarı aracılığıyla birleştirilirse, sistemin potansiyel farkı Yüklerin Korunum Kanunu ile belirlenecektir.



Şekil 1.2. Basit bir anahtarlama elektrik devresi

S anahtarının kapatılması ile birinci kondansatörün yükü azalır, fakat ikinci kondansatörün yükü artmaya başlar. Kirchoff Gerilim Kanunu sağlanıncaya kadar yük alışverişi devam eder. Buna göre anahtarlama sonrası kondansatörlerin yükleri q_1 ve q_2 ile gösterilirse

$$q_0 = q_1 + q_2 \quad (1.4)$$

olur. q_0 , C_1 kondansatörünün ve aynı zamanda sistemin anahtarlama öncesi toplam yük miktarıdır. Denklem 1.4' den görüldüğü üzere sistemin toplam yük miktarı değişmeyecektir. Anahtarlama sonrası elemanların gerilimi U ve gerilim-yük ilişkisi

$$q = U.C \quad (1.5)$$

olmak üzere,

$$C_1.U_0 = C_1.U + C_2.U \Rightarrow U = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (1.6)$$

elde edilir.

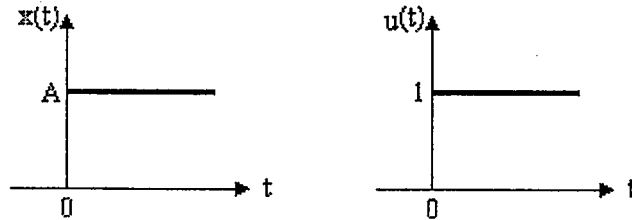
1.3. Basamak Fonksiyonu

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t \geq 0 \end{cases}$$

koşullarını sağlayan $x(t)$ fonksiyonuna basamak fonksiyonu denir. $A=1$ ise elde edilen fonksiyon

$$x(t) = A.u(t) = u(t) \quad (1.7)$$

olup birim basamak fonksiyonu olarak adlandırılır. Şekil 1.3' te sırasıyla basamak ve birim basamak fonksiyonları görülmektedir.

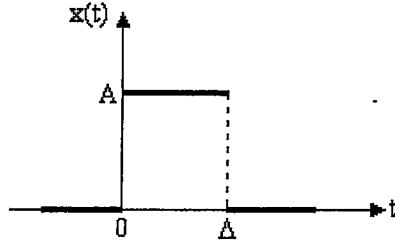


Şekil 1.3. Basamak ve birim basamak fonksiyonu grafikleri

1.4. Dirac Delta (İmpuls) Fonksiyonu

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ ve } t \geq \Delta \\ A, & 0 \leq t < \Delta \end{cases}$$

koşullarını sağlayan $x(t)$ fonksiyonuna darbe (pulse) fonksiyonu denir. Şekil 1.4' te darbe fonksiyonunun grafiği görülmektedir.

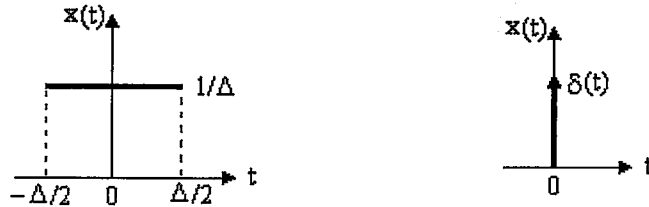


Şekil 1.4. Darbe fonksiyonu grafiği

Şekil 1.4.' teki grafikte Δ darbenin genişliğini, A ise darbenin genliğini gösterir. Şekildeki darbe fonksiyonunun altında kalan alanın değeri $A \cdot \Delta$ ' dir. Bu alan 1' e eşit ise;

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot dt = \int_0^{\Delta} x(t) \cdot dt = A \cdot \Delta = 1 \quad (1.8)$$

yazılabilir. Böylece A (darbe genliği) $1/\Delta$ ' ya eşit olur. Bu durumda Δ (darbe genişliği) minimuma gittikçe A değeri maksimum değere ulaşacaktır. Diğer bir deyişle; $\Delta \rightarrow 0$ olduğunda Şekil 1.4' teki darbe çok daralır ve darbenin genliği sınırsız artar. Denklem 1.8' deki bağıntı hala geçerlidir.



Şekil 1.5. $x(t)$ ' nin limit durumunu gösteren grafikler

$x(t)$ ' nin limit durumu;

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x(t)$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun alanı limit durumunda da 1' dir.

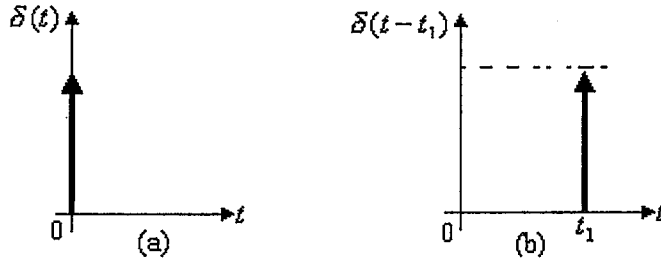
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t).dt = 1 \quad (1.9)$$

Gerçekte matematiksel anlamda bir fonksiyon olmayan, $x(t)$ ' nin limiti olarak belirlenen bu $\delta(t)$ fonksiyonuna Birim Impuls ya da Dirac Delta fonksiyonu denir.

Dirac Delta fonksiyonu,

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \text{ için} \\ \text{sınırsız} & t = 0 \text{ iken} \\ \int_{0^-}^{0^+} \delta(t).dt = 1 & 0^- < t < 0^+ \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Şekil 1.6' da Dirac Delta fonksiyonuna ait grafik görülmektedir. $\delta(t)$ başlangıç noktasında bulunan birim uzunluktaki bir ok ile gösterilmiştir. Okun yanına konulan sayı impulsun alanıdır.



Şekil 1.6. (a) Dirac Delta fonksiyonu , (b) Ötelenmiş Dirac Delta fonksiyonu

Elektrik devrelerinde özellikle anahtarlama anlarında, impulsif akım ve gerilimler oluşur.

Özellik : Birim impuls ile birim basamak fonksiyonu arasındaki ilişki.

Birim basamak fonksiyonuna yakın bir eğriye ait fonksiyon tanımı;

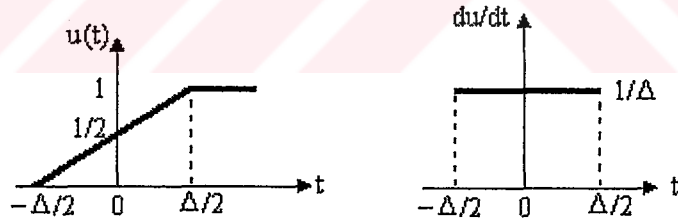
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{\Delta}t + \frac{1}{2} & -\frac{\Delta}{2} \leq t < \frac{\Delta}{2} \\ 1 & t \geq \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

ve bu fonksiyonun türevi ;

$$\frac{du(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & t < -\frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2} \leq t < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & t \geq \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

Δ aralığının sonsuz küçük olması durumunda ($\Delta \rightarrow 0$),

$$\delta(t) = \frac{du}{dt}, \quad u(t) = \int_0^t \delta(t).dt \quad (1.10)$$



Şekil 1.7. Birim basamak fonksiyonuna yakın bir eğri ve bunun türevi

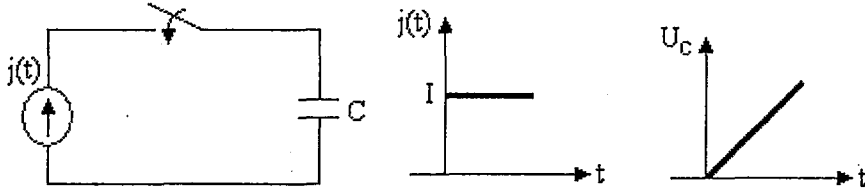
1.5. Kapasite ve Endüktansın Basamak ve İmpuls Cevapları

Kapasite ve endüktansın uç denklemleri türev-integral içermektedir. Anahtarlamalı devrelerde, kapasite ve endüktansa ait akım ve gerilimlerde sıçramalar (peak) meydana gelebilir. Bu amaçla, kapasite ve endüktansın bazı fonksiyonlara karşı gösterdiği cevaplar özetlenecektir. Akım ve gerilimlerin herhangi bir anda süreksizlik içermesi durumunda, türev alma işlemi türevin tanımı kullanılarak yapılabilir.

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (1.11)$$

1.5.1. Kapasite elemanı

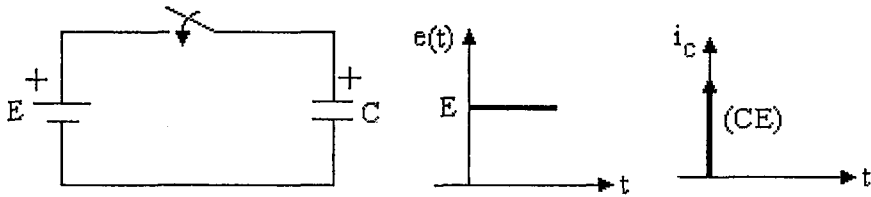
Kapasite, basamak fonksiyonu şeklinde (Şekil 1.8.b) değişen akım kaynağına Şekil 1.8.a' daki gibi seri bağlandığında, $t=0$ anında anahtarın kapatılmasıyla kapasite geriliminin zamana bağlı değişimi Şekil 1.8.c' deki gibi olur.



Şekil 1.8. (a) Basit bir anahtarlama devre (b) Akım kaynağının zamana bağlı değişimi (basamak fonksiyonu) (c) Kapasite geriliminin zamana bağlı değişimi

$$j(t) = I u(t) \Rightarrow U_C(t) = \frac{1}{C} \int j(t).dt = \frac{I}{C} t.u(t) + U_C(0)$$

Kapasite, basamak fonksiyonu şeklinde değişen (Şekil 1.9.b) gerilim kaynağına Şekil 1.9.a' daki gibi seri bağlandığında, $t=0$ anında anahtarın kapatılmasıyla kapasite üzerinden geçen akımın zamana bağlı değişimi Şekil 1.9.c' deki gibi olur.



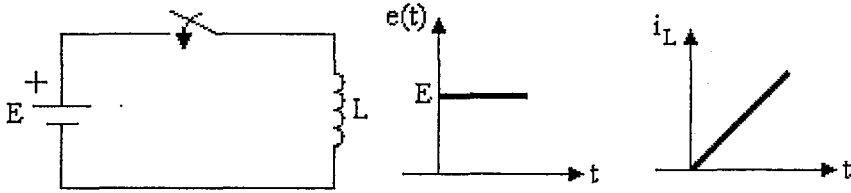
Şekil 1.9. (a) Basit bir anahtarlama devre (b) Gerilim kaynağının zamana bağlı değişimi (basamak fonksiyonu) (c) Kapasite akımının zamana bağlı değişimi

$$e(t) = E.u(t) \Rightarrow i_C(t) = C \frac{de(t)}{dt} = C.E \underbrace{\frac{du(t)}{dt}}_{\delta(t)} = C.E.\delta(t)$$

$$U_c(0) \neq 0 \quad \text{türev tanımı ile} \quad \rightarrow \quad i_c = C \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[E - U_c(0)]1}{\Delta t} = C[E - U_c(0)]\delta(t)$$

1.5.2. Endüktans elemanı

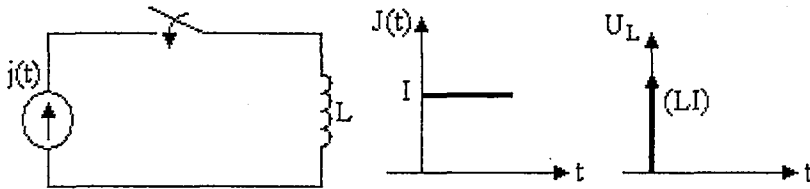
Endüktans, basamak fonksiyonu şeklinde değişen (Şekil 1.10.b) gerilim kaynağına Şekil 1.10.a 'daki gibi seri bağlandığında, $t=0$ anında anahtarın kapatılmasıyla endüktans üzerinden geçen akımın zamana bağlı değişimi Şekil 1.10.c' deki gibi olur.



Şekil 1.10. (a) Basit bir anahtarlama devresi (b) Gerilim kaynağının zamana bağlı değişimi (basamak fonksiyonu) (c) Endüktans akımının zamana bağlı değişimi

$$e(t) = E \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int e(t) \cdot dt = \frac{E}{L} t \cdot u(t) + i_L(0)$$

Endüktans, basamak fonksiyonu şeklinde değişen (Şekil 1.11.b) akım kaynağına Şekil 1.11.a' daki gibi seri bağlandığında, $t=0$ anında anahtarın kapatılmasıyla endüktans geriliminin zamana bağlı değişimi Şekil 1.11.c' deki gibi olur.

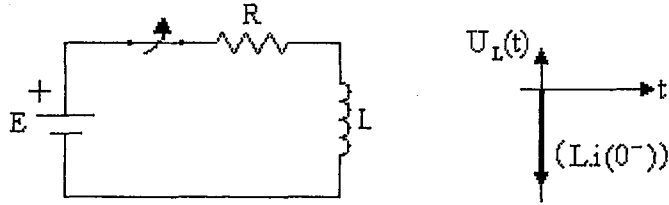


Şekil 1.11. (a) Basit bir anahtarlama devresi (b) Akım kaynağının zamana bağlı değişimi (basamak fonksiyonu) (c) Endüktans geriliminin zamana bağlı değişimi

$$J(t) = I \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \cdot I \underbrace{\frac{du(t)}{dt}}_{\delta(t)} = L \cdot I \delta(t)$$

$$i_L(0^-) \neq 0 \quad \text{türev tanımı ile} \quad \rightarrow \quad U_L(t) = L \cdot [I - i_L(0)] \delta(t)$$

Şekil 1.12.a' daki devrede, uzun süre kapalı duran anahtarın $t=0$ ' da açılması durumunda endüktans geriliminin değişimi Şekil 1.12.b' deki gibi olur.



Şekil 1.12. (a) Açılan anahtarlı devre (b) End. geriliminin zamana bağlı değişimi

$$U_L = L \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[i(0^+) - i(0^-)]}{\Delta t} = -L \cdot i(0^-) \cdot \delta(t) \quad (i(0^+) = 0)$$

$$i(0^-) = \frac{E}{R} \quad (\text{Sürekli hal})$$

BÖLÜM 2. ANAHTARLAMALI DEVRELERDE KULLANILAN ANAHTAR MODELLERİ

Anahtarlama devrelerinde; anahtarlama elemanlarının modellenmesi için pek çok yaklaşım bulunmaktadır. Bunlardan bazıları; iki değerli eleman (direnc-endüktans) yaklaşımı, ayırık zamanlı anahtar modeli, durum-uzay ortalama modeli ve parçalı lineer yaklaşım ve ideal anahtar modeli.

Bu çalışmada amaç uygun anahtar modelinin belirlenmesi olmadığından, her bir model kısaca tanıtılacaktır. Tezin diğer bölümlerinde, ideal anahtar modelinin kullanılması durumunda devre analizinde dikkat edilmesi gereken ayrıntılar verilecektir.

2.1. İki Değerli Eleman Yaklaşımı

En temel ideal olmayan anahtar kavramı iki değerli eleman yaklaşımıdır. Bu yaklaşıma göre anahtarlama elemanları, iletimde (t_{on} süresince) küçük bir dirence ($R_{on} = 1 \Omega$ gibi), kesimde ise büyük bir dirence ($R_{off} = 1 M\Omega$ gibi) sahiptir. Anahtar elemanları için böylesine birbirinden farklı iki değer kullanılması; sistem matrisinin özdeğerlerinin de birbirine göre çok farklı olmasına neden olmaktadır. Bu nedenle iki değerli direnc kullanımı, R_{on} ve R_{off} dirençlerinin uygun seçilmediği durumlarda yakınsaklık problemine neden olmaktadır.

Diğer bir iki değerli eleman yaklaşımı da Sudha et al (1993) tarafından anahtar elemanının iki değerli endüktans elemanı ile modellenmesi ile gerçekleştirilmiştir. İletimde küçük değerli bir endüktans (L_{on}), kesimde ise büyük değerli bir endüktans

(L_{off}) kullanılmıştır. Bu yöntem sabit boyutlu bir sistem matrisi vermektedir. Fakat buna karşın çözümün elde edilmesinde çok yoğun matris işlemlere gereksinim duyulmaktadır.

2.2. Küçük Sinyal Durum-Uzay Modeli

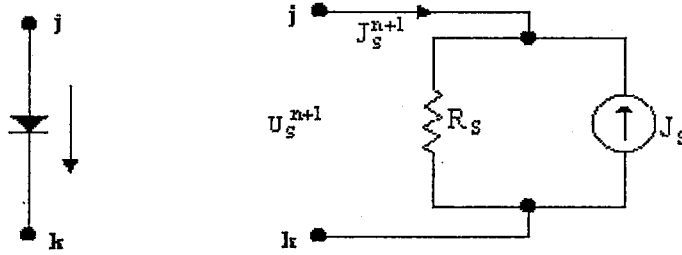
Middlebrook ve Cuk tarafından (1976) geliştirilen yöntem, anahtarlama devrelerinin küçük sinyal çalışmalarının incelenmesi için çok uygundur. Bu yaklaşım pek çok güç elektroniği devresinde uygulanmıştır. Sürekli-zamanlı bir çözüm sağlamasına karşın, küçük sinyal analiz tekniğinin bir konvertere uygulanmasında bazı sınırlamalar vardır. Devre değişkenleri çalışma noktası civarında büyük değişimler gösterdiği zaman, bu analiz tekniği uygun değildir. Ayrıca anahtarlama periyodu devrenin zaman sabitlerinden daha küçük değilse, yöntemin getirdiği yaklaşımlar kabul edilebilir sınırların dışına çıkar.

2.3. Parçalı Lineer Devre Yaklaşımı

Bu yaklaşımda, güç elektroniği devresi güç katı ve diğer nonlineer kısımları alt lineer devre topolojilerine ayrıştırılarak parçalı lineer bir sistem olarak analiz edilir. Herhangi bir anda, devredeki her bir anahtar iletim ya da kesim durumunda olduğundan sonuçta elde edilen model, sistem parametrelerinin zamana göre değişimiyle belirlenen lineer zamanla değişen bir sistem olur. Böyle bir sistemde öncelikle her bir lineer topoloji için devre denklemleri oluşturulur. Devre denklemleri oluşturulduktan sonra, anahtarlama sırasına göre devreyi tanımlayan diferansiyel denklemler sırasıyla çözülür. Sistemdeki bir veya daha fazla anahtar konum değiştirdiği zaman, topoloji güncellenerek çözüme devam edilir. Bir devrede n tane anahtar olduğu takdirde 2^n tane anahtarlanmış devre topolojisi olacaktır. Her bir topoloji için devre denklemlerinin elde edilmesi, bu denklemlerin çözdürülerek saklanması gerekir [3]. Bu yüzden n tane anahtarlı devrede 2^n tane anahtarlanmış devre topolojisi olduğundan her biri için sistem denklemlerinin elde edilerek hesaplanması ve saklanması gerekir. Bu ise yöntemi etkisiz kılar ve anahtar sayısında bir sınırlamaya neden olur.

2.4. Ayrık Zamanlı Anahtar Modeli

Bu modelde, reaktif elemanların uç denklemlerine Euler, Trapezoidal Yöntemi gibi nümerik integrasyon tekniklerinin uygulanmasıyla rezistif bir devre elde edilir. Ayrık anahtar modelinin genel yapısı Şekil 2.1.'de gösterilmiştir. Modeldeki R_s direnci sabittir. Yöntemin en temel avantajı sabit bir sistem matrisinin elde edilmesidir.



Şekil 2.1. Anahtar ve ayrık zaman modeli

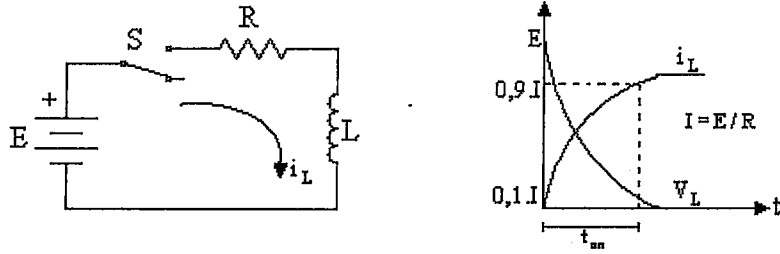
Bir diğer ayrık modelleme yaklaşımı da TL (transmisyon hattı) anahtar modelidir. Bu yaklaşımda, anahtar iletimde küçük bir endüktans ile, kesimde ise küçük bir kapasite ile modellenmiştir.

Bu tür ayrık model yaklaşımlarında genelde sadece iletim direnci (R_s) ve ileri yöndeki gerilim düşümü (U_s) gibi statik karakteristikler dikkate alınmaktadır. Oysa 1997' de A. B. Yıldız ve N. Abut tarafından anahtarlama elemanlarının statik karakteristiklerinin yanında dinamik karakteristiklerinin dikkate alındığı bir model geliştirilmiştir. Böylece yapılan simulasyonların doğruluğu arttırılmıştır.

Bir anahtar elemanının konum değiştirdikten sonra iletim ya da kesim durumundaki özellikleri elemanın statik karakteristiklerini, geçiş bölgesindeki davranış özellikleri ise dinamik karakteristiklerini oluşturur.

Bir yarı iletken elemanın iletme girerken ve çıkarken akım ve gerilim değişimleri doğrusal bir değişim göstermez. Gerek diot, gerekse transistör ve tristör gibi yarı iletken elemanları, anahtarlama geçişlerinde üstel (eksponansiyel) bir yapıya sahiptir.

Benzer bir değişim Şekil 2.2' deki devrede de mevcuttur. Bu nedenle geçiş süresince, az önce sözü edilen çalışmada yarı iletken elemanı bir endüktansla modellenmiştir.



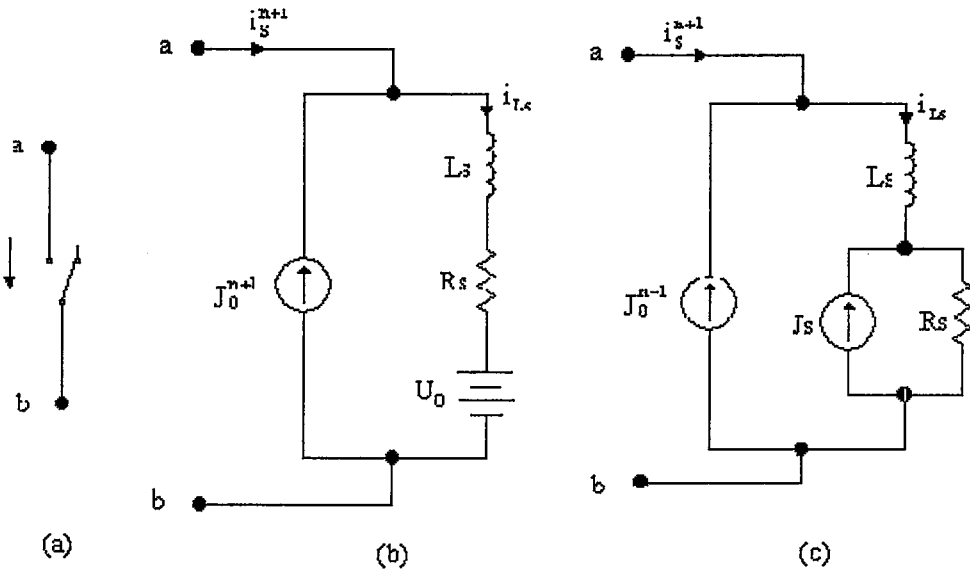
Şekil 2.2. R-L Devresi ve endüktansa ait akım ve gerilim değişimleri

$$i_L(t) = I(1 - e^{-tR/L}) \quad \text{ve} \quad i_L(t = t_{on}) = 0,9I \quad (2.1)$$

Denklem 2.1' den modelleme endüktansının değeri :

$$L = \frac{R \cdot t_{on}}{2,3} \quad (2.2)$$

Bu çalışmada, Şekil 2.3' te görüldüğü gibi küçük değerli seri bir endüktans (L_s) yarı iletken elemanın dinamik karakteristiğini modellemek için kullanılmıştır.



Şekil 2.3. (a) İdeal anahtar (b-c) Eşdeğer devre

Anahtar elemanının iletim-kesim durumu, modeldeki J_0^{n+1} iteratif akım kaynağı ile sağlanmıştır.

2.5. İdeal Anahtar Modeli

İdeal bir anahtar, iletimde sıfır direnç (kısa devre) kesimde ise sıfır admitans (açık devre) özelliği gösterir. Bir durumdan diğerine anahtarlama anlıktır. İdeal anahtar kullanımı, anahtarlanmamış devrelerin analizinde genellikle karşılaşılmayan bazı problemler getirir. Anahtarlama anlarında kapasite gerilimleri ve endüktans akımları süreksiz olduğunda akım ve gerilimlerin impulse fonksiyonları (Dirac impuls) olabilir. İdeal anahtarlı güç elektroniği devrelerinin simulasyonunda, impulse fonksiyonlarının ihmalî hatalı sonuçlara neden olur. Böyle bir duruma ilişkin tam bir analiz Bedrosian ve Vlach (1992) tarafından yapılmıştır. Bu tez çalışmasında ideal anahtar modelinin kullanıldığı devrelerin analizine ilişkin incelemeler yapılmıştır.

Tüm anahtarlama elemanları “ $t < 0^-$ ” ve “ $t > 0^+$ ” anlarındaki durumlarına göre açılan ya da kapanan anahtar olarak ele alınmış ve ideal anahtar kavramını sağlamak için sıfır değerli gerilim kaynağı ya da akım kaynağı ile modellenmiştir. Tablo 4.1’ de anahtarlama elemanlarının hangi koşullarda ne ile modellenmekte olduğu görülmektedir. Burada $t = 0^-$ anahtarlama öncesini, $t = 0^+$ ise anahtarlama sonrasını ifade etmektedir. Bölüm 5’ te sistem denklemleri $t < 0^-$ ve $t > 0^+$ için ayrı ayrı elde edilmiş ve çözülmüştür.

Tablo 2.1. Anahtarlama elemanlarının modelini gösteren tablo

	Açılan anahtar	Kapanan anahtar
$t=0^-$ anında başlangıç koşulları belirlenirken	Değeri 0 V olan gerilim kaynağı veya kısa devre elemanı	Değeri 0 A olan akım kaynağı veya açık devre elemanı
$t=0^+$ anında sistem denklemleri oluşturulurken	Değeri 0 A olan akım kaynağı ya da açık devre elemanı	Değeri 0 V olan gerilim kaynağı ya da kısa devre elemanı

BÖLÜM 3. SİSTEM DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

3.1. Durum Değişkenleri Yöntemi

Durum Değişkenleri (D.D.) yöntemi devre analizinde kullanılan en popüler yöntemlerden biridir. Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri (G.D.D.) yönteminden önce ortaya konulmuş olan bu yöntem ile elde edilen sistem modeli, başlangıç koşulları ile verilmiş birinci mertebeden diferansiyel denklem sisteminden oluşmaktadır. Bu yöntemde devre denklemlerinin oluşturulması için graph teorisinden yararlanılmaktadır. Durum değişkenleri olarak kapasite gerilimleri ve endüktans akımlarının seçilme zorunluluğu vardır. Bunun nedeni; kapasite üzerindeki gerilim değişiminin ve endüktanstan geçen akım değişiminin sürekli olmasıdır. Buna karşılık kapasiteye ait akım değişimi ile endüktans üzerindeki gerilim değişimleri süreksizlikler içermektedir ve dolayısıyla durum değişkeni olarak seçilmemektedir. Özellikle anahtarlamalı devrelerde kapasitelerin bazılarının gerilim değişimleri de akım değişimlerinde olduğu gibi süreksiz bir değişim içerebilmektedir. Benzer şekilde bazı endüktansların akım değişimlerinde de süreksizlikler görülebilir. Bu durum devrede bazı kapasitelerin gerilim kaynakları ve/veya diğer kapasitelerle çevre oluşturması durumunda bu kapasitelere ait gerilim değişimlerinde görülür. Benzer şekilde bazı endüktansların akım kaynakları ve/veya diğer endüktanslarla kesitleme oluşturması durumunda bu endüktanslara ait akım değişimlerinde de görülür. Bu nedenle durum denklemlerinin elde edilmesinde çok yoğun matematiksel işlemlere, bunun sonucu olarak da yoğun programlama bilgisine gereksinim duyulmaktadır.

Yöntemin en avantajlı yönü ise sistem matrislerinin boyutlarının minimum olmasıdır. Teorik incelemeler için çok faydalı olmasına karşın, yukarıda da açıklandığı üzere önemli miktarda bellek transferi gerektirecek sistem matrislerinin elde edilme problemi ile yoğun programlama gereksiniminden dolayı genelde bu yöntem bilgisayar uygulamaları için uygun değildir. Özellikle de anahtarlamalı devrelerde anahtarların konumunun bir durumdan diğerine geçişinde, durum değişkenlerinin sayısının değişebilmesinden dolayı bu yöntem, her bir anahtarlanmış devre için sistem matrislerinin yeniden elde edilmesini gerektirir. Bu sebeplerden dolayı bu çalışmada D.D. yönteminden sistemin çözüm aşamasında yararlanılmaktadır. Öncelikle sistem denklemleri G.D.D. yöntemi ile elde edilir ve daha sonra D.D. sistemine dönüştürülerek işlemlere devam edilir (Bkz. Bölüm 4). Böylece D.D. yönteminin sistem denklemleri oluşturulma aşamasındaki saydığımız dezavantajlarından kurtularak çözüm aşamasında kullanılmakta ve yöntemden en verimli şekilde yararlanılmaktadır [4].

D. D. yöntemi ile sistem matrislerinin elde edilmesinde, öncelikle incelenmekte olan devreye ilişkin devre grafi çizilerek uygun ağaç seçilmelidir.

Uygun Ağaç Seçimi :

Yöntemde devrenin bilinmeyenleri olarak kapasite gerilimleri ve endüktans akımlarının bazıları yer almaktadır. Bu aşamada uygun ağaç seçimi önem kazanmaktadır.

1. Bütün gerilim kaynakları ağaca alınır.
2. Mümkün olduğunca çok kapasite ağaca alınır.
3. Ağaç tamamlanmamışsa bazı dirençler ağaca alınır.
4. Ağaç tamamlanmamışsa bazı endüktanslar ağaca alınır.

Uygun ağaç seçildikten sonra ağaca giren kapasitelerin gerilimleri ve kırışlerdeki endüktans akımları, durum değişkenleri yani yöntemin değişkenleridir.

$$C: \quad i_c = C \cdot \frac{dU_c}{dt} \quad (3.1)$$

$$L: \quad U_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} \quad (3.2)$$

Durum Değişkenleri yönteminin genel formatı Denklem 3.3' te görülmektedir.

Denklem 3.3.' de A ve B katsayı matrisleridir. $x(t)$ sistemin bilinmeyenlerini (durum değişkenlerini) ve $u(t)$ ise kaynak vektörünü göstermektedir.

Bazı durumlarda R, L, C ve kaynaklardan oluşan bir devrede kapasiteler kendi aralarında ve/veya gerilim kaynakları ile bir çevre oluşturuyorsa kimi kapasiteler ağaca alınmayıp kirişte bırakılır. Yine bir düğüme sadece endüktanslar ve/veya akım kaynakları bağlıysa bazı endüktanslar ağaca alınır. Bu gibi durumlarda sistem denklemlerinde kaynakların türevleri görülebilmektedir (Denklem 3.3.b).

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (3.3.a)$$

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x(t) + B_1 \cdot u(t) + B_2 \cdot \frac{du}{dt} \quad (3.3.b)$$

Sistem denklemlerinde kaynağın türevli bileşenlerinin bulunması, devrede peak akım ve gerilimlerin varlığını (Dirac impulse) göstermektedir. Bu peak değişimler, anlık ve yüksek değerli, kontrolsüz değişimlerdir. Denklem 3.3.b' de kaynağın türevli bileşenini ortadan kaldıracak şekilde dönüşüm (Denklem 3.4) yapılabilir [5]. Bu dönüşümün yapılmasındaki amaç; denklem sisteminin çözümünde kullanılan yöntemlerin (Backward Euler, Yamuk Yöntemi gibi...), Denklem 3.3.a formatındaki sistemlere uygulanabiliyor olmasıdır.

$$z(t) = x(t) - B_2 \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = z(t) + B_2 \cdot u(t) \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} [z(t) + B_2 \cdot u(t)] = A \cdot [z(t) + B_2 \cdot u(t)] + B_1 \cdot u + B_2 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = A \cdot z(t) + [B_1 + A \cdot B_2] u(t) \quad (3.5)$$

Böylece kaynakların türevi yok edilip, sistem denklemleri Denklem 3.3.a' daki forma getirilmiş olmaktadır. Sistem denklemlerinde kaynak vektörünün yüksek mertebeden türevleri de bulunabilir [5]. Bu durumda D. D. sisteminin genel ifadesi ise Denklem 3.6' da görülmektedir.

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + \sum_{i=1}^m B_i \cdot u^i(t) \quad (3.6)$$

Denklem 3.6' nın çözümünü elde etmek için denklem sisteminde kaynağın 1. mertebeden türevli bileşeni olduğunda yapılan dönüşüme benzer bir dönüşüm Denklem 3.7 ve Denklem 3.8' deki şekilde tanımlanabilir.

$$z(t) = x(t) - K_1 \cdot u(t) - K_2 \cdot \frac{du(t)}{dt} - \dots - K_m \cdot \frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} = x(t) - \sum_{i=1}^m K_i \cdot u^{i-1}(t) \quad (3.7)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + \sum_{i=1}^m (B_i - K_i) \cdot u^i(t) \quad (3.8)$$

Denklem 3.7 ve Denklem 3.8' deki K_i , $i=1, 2, \dots, m$ olmak üzere

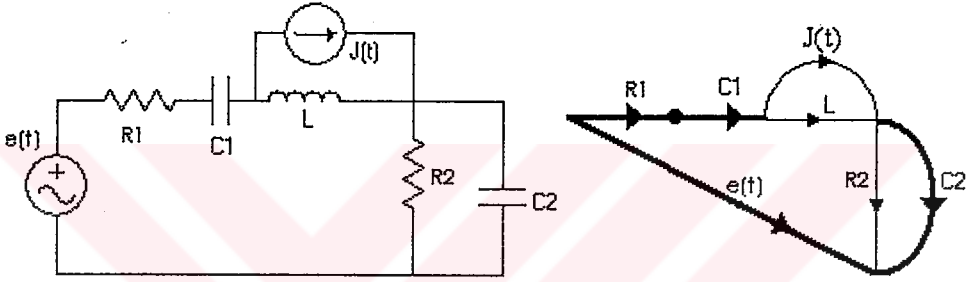
$$K_i = A^{m-i} \cdot B_m + A^{m-i-1} \cdot B_{m-1} + \dots + B_i = \sum_{j=i}^m A^{j-i} \cdot B_j \quad (3.9)$$

biçimindedir. Bu durumda Denklem 3.8

$$\frac{dz(t)}{dt} = A.z(t) + (B + \sum_{j=1}^m A^j.B_j).u(t) \quad (3.10)$$

olarak ifade edilir.

Örnek 3.1. Şekil 3.1' deki devrenin durum denklemleri elde edilecektir.



Şekil 3.1.a. Sinüsoidal kaynaklarla sürülen bir RLC devresi b. devrenin grafi

1. Öncelikle devre grafi çizilerek uygun ağaç seçilir (Şekil 3.2).

2. Dallardaki kapasiteler için ayrı ayrı akım denklemleri yazılır ve uç denklemleri yardımıyla dal gerilimleri formuna getirilir.

$$i_{C1} - i_L - j(t) = 0$$

$$i_{C2} + i_{R2} - i_L - j(t) = 0$$

$$i_{C1} = C_1 \cdot \frac{dU_{C1}}{dt} , \quad i_{C2} = C_2 \cdot \frac{dU_{C2}}{dt} , \quad i_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} \quad \text{ve} \quad U_{R2} = U_{C2}$$

olduğuna göre

$$C_1 \cdot \frac{dU_{C1}}{dt} = i_L + j(t) \Rightarrow \frac{dU_{C1}}{dt} = \frac{i_L}{C_1} + \frac{j(t)}{C_1} \quad (3.11)$$

$$C_2 \cdot \frac{dU_{C2}}{dt} = \frac{-U_{R2}}{R_2} + i_L + j(t) \Rightarrow \frac{dU_{C2}}{dt} = \frac{-U_{C2}}{R_2 \cdot C_2} + \frac{i_L}{C_2} + \frac{j(t)}{C_2} \quad (3.12)$$

elde edilir.

3. Kirişteki endüktans için gerilim denklemi yazılır ve uç denklemler yardımıyla giriş akımları formuna getirilir.

$$U_L + U_{C2} - e(t) + U_{R1} + U_{C1} = 0$$

$$U_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}, \quad U_{R1} = R_1 \cdot I_{R1} \quad \text{ve} \quad I_{R1} = i_L + j(t)$$

olduğuna göre

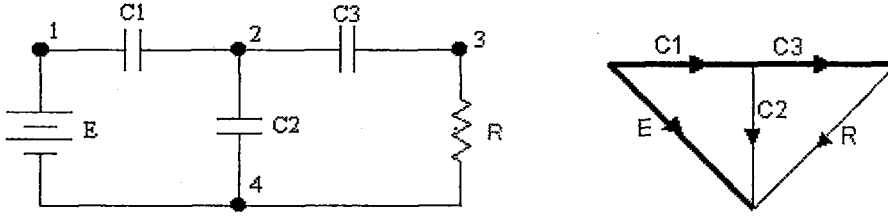
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{e}{L} - \frac{U_{C1}}{L} - \frac{U_{C2}}{L} - \frac{R_1 \cdot i_L}{L} - \frac{R_1 \cdot j(t)}{L} \quad (3.13)$$

olarak bulunur.

4. Elde edilen denklemler Denklem 3.3.a formatında yazılır.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{-1}{(R_2 \cdot C_2)} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-1}{L} & \frac{-R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Örnek 3.2. Şekilde 3.3' teki devrenin durum denklemleri elde edilecektir.



Şekil 3.2. Basit bir elektrik devresi ve devrenin grafi

$$i_{C1} = i_{C2} + i_R \Rightarrow C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} = C_2 \frac{dU_{C2}}{dt} + \frac{U_R}{R} \Rightarrow$$

$$C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} = C_2 \frac{d(E - U_{C1})}{dt} + \frac{(E - U_{C1} - U_{C3})}{R} \Rightarrow (C_1 + C_2) \frac{dU_{C1}}{dt} = C_2 \frac{dE}{dt} + \frac{(E - U_{C1} - U_{C3})}{R}$$

$$\frac{dU_{C1}}{dt} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{dE}{dt} + \frac{E}{R(C_1 + C_2)} - \frac{U_{C1}}{R(C_1 + C_2)} - \frac{U_{C3}}{R(C_1 + C_2)} \quad (3.15)$$

$$i_{C3} = i_R \Rightarrow C_3 \frac{dU_{C3}}{dt} = \frac{U_R}{R} \Rightarrow C_3 \frac{dU_{C3}}{dt} = \frac{(E - U_{C1} - U_{C3})}{R}$$

$$\frac{dU_{C3}}{dt} = \frac{E}{R.C_3} - \frac{U_{C1}}{R.C_3} - \frac{U_{C3}}{R.C_3} \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} & -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} \\ -\frac{1}{R.C_3} & -\frac{1}{R.C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R(C_1 + C_2)} \\ \frac{1}{R.C_3} \end{bmatrix} E + \begin{bmatrix} \frac{C_2}{(C_1 + C_2)} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{dE}{dt}$$

Denklem 3.15 ve Denklem 3.16' da görüldüğü üzere sistem denklemlerinde kaynağın türevli bileşeni bulunmaktadır. Bu bileşeni denklem sisteminden yok etmek için

Denklem 3.4 ve Denklem 3.5' teki dönüşümler uygulanırsa Şekil 3.2' deki devreye ait D.D. sistemi Denklem 3.17' deki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_{C3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_2 \\ (C_1 + C_2) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{dE}{dt}$$

$$B_1 + A.B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R(C_1 + C_2)} \\ \frac{1}{R.C_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} & -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} \\ -\frac{1}{R.C_3} & -\frac{1}{R.C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ (C_1 + C_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{R.(C_1 + C_2)^2} \\ \frac{C_1}{R.C_3.(C_1 + C_2)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} & -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} \\ -\frac{1}{R.C_3} & -\frac{1}{R.C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_1}{R.(C_1 + C_2)^2} \\ \frac{C_1}{R.C_3.(C_1 + C_2)} \end{bmatrix} E \quad (3.17)$$

3.2. Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Yöntemi

Devre analizinde kullanılan diğer bir yöntem olan Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Yöntemi' nin temeli ilk olarak Ho et al (1975) tarafından ileri sürülmüştür. Günümüze kadar pek çok eleman (transformatör, OP-AMP gibi) bu gösterime dahil edilerek yöntem daha da geliştirilmiştir. Bu yöntemle oluşturulmuş başlıca programlar: ECAP, CANCER, PSPICE, CASPEC.

Genelleştirilmiş düğüm denklem sisteminde hem gerilim hem de akım değişkenleri bulunmaktadır. Elemanlar uç denklemlerine göre, gerilim veya akım bilinmeyenleri vektörüne katkı vermektedir. Bu amaçla elemanlar iki gruba ayrılır. Bu sınıflandırma elemanların uç denklemlerinin $i = G.U$ formatında yazılıp yazılmamasına göre gerçekleştirilmektedir. İletkenlik (admitans) tanımına sahip olan ya da bu tanıma kullanan elemanlar "1" tipi olarak anılmaktadır (direnc, kapasite, gerilim kontrollü akım

kaynağı gibi). Bu elemanların uç denklemleri $i = G.U$ ($i = Y.U$) formunda yazılabildiğinden denklem sisteminde G_d matrisine ve bilinmeyen olarak da düğüm vektörü U_d 'ye katkı yapmaktadırlar. İletkenlik tanımına sahip olmayan ya da uç denklemleri $i = G.U$ formunda yazılamayan diğer tüm elemanlar ise "2" tipi olarak anılmaktadırlar (endüktans, kısadevre elemanı gibi) ve bilinmeyen olarak akım vektörüne (I_e veya I_2) katkı yapmaktadırlar.

Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Yöntemi sistem denklemlerinin çok kolay bir şekilde elde edilmesine imkan tanımaktadır. Bu yöntemle sistem denklemlerinin oluşturulma süresinde önemli bir indirgeme elde edilmektedir. Özellikle bilgisayar destekli devre analizi programlarında G.D.D. yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır. Çünkü bilgisayar destekli devre analizi programlarında sistem denklemlerinin oluşturulma yöntemi, programın gücünü, hızını ve bellek gereksinimini belirleyen önemli bir etkidir ve düğüm analizi yöntemi bu beklentileri karşılamaktadır. Ayrıca anahtarlama devrelerinin analizinde de G.D.D. yöntemi oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Sistem denklemlerinin çok kolay bir şekilde elde edilmesine imkan tanır. Böylece sistem denklemlerinin oluşturulma süresinde indirgeme elde edilir. Ayrıca anahtarların durumlarının yöntemin değişkenleri cinsinden son derece etkili ve kolay bir şekilde kontrol edilebilmesi, G.D.D. yönteminin anahtarlama devrelerinde yaygın olarak kullanılmasının nedenleridir. Bu sayılanlara ek olarak tüm lineer elemanlar, kontrollü kaynaklar ve çeşitli yarı iletken elemanların sistem denklemlerine kolay bir şekilde katılabilmesi de yöntemin avantajları arasındadır.

Bu avantajlarına karşın yöntemin dezavantajları da mevcuttur. Gerekli yada gereksiz bir çok gerilim ve akım değişkeni bulunmaktadır. Bu ise büyük boyutlu matrisel işlemlere ve uzun hesaplama süresi ile yüksek bellek ihtiyacına neden olmaktadır.

G.D.D. yöntemi, avantaj ve dezavantajları bakımından D.D. yöntemi ile karşılaştırıldığında, denklem sistemlerinin kurulumunda kullanılmasının ne derece faydalı olduğu görülmektedir (Bkz. Bölüm 4.1).

Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Yöntemi ile sistem denklemleri, t domenindeki türevli ve integralli bileşenlerden kurtularak işlemleri basite indirmek için öncelikle s domeninde elde edilir. Burada denklemler cebirsel formdadır. Endüktans, kapasite ve uç denklemleri diferansiyel denklem formundaki diğer elemanların (transformatör v.b.) s domenindeki eşitlikleri kullanılır. Denklem sistemi elde edildikten sonra Ters Laplace dönüşümü uygulanarak t domenine geçilir. Böylece diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

Denklem sisteminin eldesi öncelikle rezistif devrelerde gösterilecektir.

3.2.1. Dirençli devrelere ait genelleştirilmiş düğüm denklemlerinin elde edilmesi

Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Yöntemi, Kirchoff Akım Yasası' nın bir uygulamasıdır. Kirchoff Akım Yasası (K.A.Y.)' na göre; bir devrede bir düğüme giren akımların toplamı, o düğümü terkeden akımların toplamına eşittir. Düğüme giren akımlar negatif ve düğümü terkeden akımlar pozitif alındığı takdirde, K. A. Y. gereğince ortak bir düğümde toplanan akımların cebirsel toplamı sıfır olmaktadır.

$$A_i(t) = 0 \quad (3.10)$$

A ve i(t) birer matristir. Bu matrisleri daha açık ifade edecek olursak:

$$(nd - 1) \quad \begin{bmatrix} A_e & A_R & A_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_R \\ j \end{bmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

Burada ;

A_e : Gerilim kaynaklarına ilişkin düğüm matrisi

A_R : Dirençlere ilişkin düğüm matrisi

A_j : Akım kaynaklarına ilişkin düğüm matrisi

n_d : Düğüm sayısı

Eleman gerilimleri ile düğüm gerilimleri arasındaki ilişki;

$$U(t) = A^T \cdot U_d \quad (3.12.a)$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ U_R(t) \\ U_j(t) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A^T = \begin{bmatrix} A_e^T \\ A_R^T \\ A_j^T \end{bmatrix} \quad (3.12.b)$$

şeklindedir. 2-uçlu direnç elemanlarının uç denklemleri

$$i_R(t) = G_x \cdot U_R(t) \quad (3.13)$$

Denklem 3.12' deki $U_R(t) = A_R^T \cdot U_d$ ifadesi Denklem 3.13' te yerine konur.

$$i_R(t) = G_x \cdot A_R^T \cdot U_d \quad (3.14)$$

Denklem 3.14, Denklem 3.11' de yerine konursa;

$$A_e \cdot j_e + A_R \cdot G_x \cdot A_R^T \cdot U_d + A_j \cdot j = 0$$

ya da

$$\begin{bmatrix} A_R \cdot G_x \cdot A_R^T & A_e \\ A_e^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d \\ i_e \end{bmatrix} = -A_j \cdot j \quad (3.15)$$

Denklem 3.15' de bilinmeyen sayısı ise $n_d - 1 + n_e$ ' dir. Gerekli ek denklem, Denklem 3.12' den sağlanmaktadır.

$$e(t) = A_e^T \cdot U_d$$

$$\begin{bmatrix} A_R \cdot G_x \cdot A_R^T & A_e \\ A_e^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_j \\ U & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Sonuç olarak elde edilen bu sisteme Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri (G.D.D.) Sistemi denilmektedir.

Denklem 3.16' daki $G_d = A_R \cdot G_x \cdot A_R^T$ “ Düğüm iletkenlik matrisi ” olarak adlandırılmaktadır. G_d matrisi, simetrik ve tersi olan bir matristir.

Denklem 3.16 ile gösterilen matris bileşenleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir ;

$$\mathbf{a)} \ G_T = \begin{bmatrix} G_d & A_e \\ A_e^T & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b)} \ x = \begin{bmatrix} U_d \\ i_e \end{bmatrix} \quad \mathbf{c)} \ B = \begin{bmatrix} 0 & -A_j \\ U & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d)} \ y = \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Bu durumda G.D.D. sistemi

$$G_T \cdot x = B \cdot y \quad (3.18)$$

formatına indirgenmiş olmaktadır. Bu sisteme göre bilinmeyen matrisi x ile gösterilmektedir. İncelenmekte olan devre bu forma getirildikten sonra gerekli matematiksel işlemler yardımıyla sistemin bilinmeyenleri elde edilebilmektedir.

Bilinmeyenler : Düğüm gerilimleri, gerilim kaynaklarının akımları

Denklem sistemi çözüldükten sonra, istenen akım ve gerilimler bilinmeyenler cinsinden kolayca elde edilebilmektedir.

Tüm sistem bileşenlerini ve devredeki elemanların sistem denklemlerine nasıl katkıda bulduklarını inceleyelim (Bkz. Denklem 3.17-a, b, c, d).

Düğüm sayısı n_d , gerilim kaynağı sayısı n_e , direnç sayısı n_R ve akım kaynağı sayısı n_j ile gösterilecek olursa;

G_d : Düğüm iletkenlik matrisi ,	$(n_d - 1) * (n_d - 1)$
A_e : Gerilim kaynaklarına ilişkin düğüm matrisi,	$(n_d - 1) * n_e$
x : Bilinmeyenler matrisi,	$(n_d - 1 + n_e) * (1)$
A_j : Akım kaynaklarına ilişkin düğüm matrisi ,	$(n_d - 1) * (n_j)$
U : Birim matris,	$(n_e) * (n_e)$

Düğüm iletkenlik matrisinin elde edilmesi (G_d) :

$$G_d = A_R \cdot G_x \cdot A_R^T \quad (3.19)$$

A_R :Dirençlere ilişkin düğüm matrisi,

$$(n_d - 1) * (n_R)$$

G_x : İletkenlik matrisi,

$$(n_R) * (n_R)$$

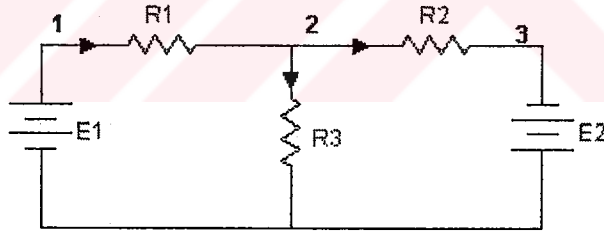
A_R matrisinin elde edilmesi :

Dirençlere ilişkin düğüm matrisinin elde edilmesinde her bir direnç bağımsız olarak düşünülerek Tablo 3-1 kurulmaktadır. Tablo kurulumunda dirençlerin bağlı oldukları düğümler ile başlangıçta referans alınan akım yönleri önemlidir.

Tablo 3.1. Direnç bağlantı tablosu

Direnç Düğüm	R_1	R_2	R_3	...
1	A_R			
2				
3				
⋮				

Örnek 3.2. Şekil 3.3' teki dirençli devre için dirençlere ilişkin düğüm matrisi elde edilecektir.



Şekil 3.3. Dirençli bir elektrik devresi

Tablo 3.2. Örnek 3.2 'ye ait direnç bağlantı tablosu

Direnç Düğüm	R_1	R_2	R_3
1	1	0	0
2	-1	1	1
3	0	-1	0

Bu durumda

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

G_x matrisinin elde edilmesi:

G_x (iletkenlik) matrisi, esas köşegen elemanları devredeki dirençlerin iletkenlik değerlerinden oluşan köşegen matrisidir:

$$G_x = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & G_{nr} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Gerilim kaynaklarına ilişkin düğüm matrisinin elde edilmesi (A_e):

Dirençlere ilişkin düğüm matrisi A_R 'nin elde edilmesi ile benzer bir biçimde elde edilmektedir. Tek fark A_e matrisi elde edilirken direnç yerine gerilim kaynakları üzerinde inceleme yapılmaktadır.

Tablo 3.3. Gerilim kaynakları bağlantı tablosu

GerilimKayn.	E_1	E_2	E_3	...
Düğüm				
1	A_e			
2				
3				
⋮				

Akım kaynaklarına ilişkin düğüm matrisinin elde edilmesi (A_j) :

Dirençlere ilişkin düğüm matrisi A_R 'nin eldesi ile benzer bir biçimde elde edilmektedir. Tek fark A_j matrisi elde edilirken direnç yerine akım kaynakları üzerinde inceleme yapılmaktadır.

Tablo 3.4. Akım kaynakları bağlantı tablosu

Akım Kayn. / Düğüm	J_1	J_2	J_3	...
1	A_j			
2				
3				
⋮				

Bilinmeyenler matrisinin yazılması (x) :

Dirençli devrelerde x bilinmeyenler matrisi, $[(n_d - 1) + n_e] * 1$ boyutlu bir matristir.

Düğüm gerilimleri ile bağımlı ve bağımsız tüm gerilim kaynaklarının akımlarını içermektedir.

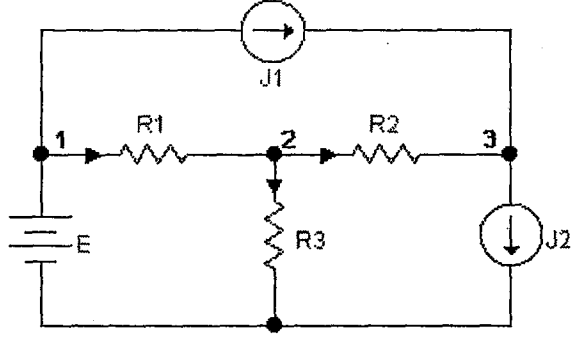
$$x = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_{nd-1} \ i_{e1} \ i_{e2} \ \dots \ i_{ene}]^T \quad (3.22)$$

Kaynak değerleri matrisi (y) :

Bağımsız gerilim kaynaklarının gerilimleri ile bağımsız akım kaynaklarının akımlarını içeren $(n_e + n_j) * 1$ boyutlu bir matristir.

$$y = [E_1 \ E_2 \ \dots \ E_{nc} \ J_1 \ J_2 \ \dots \ J_{nj}]^T \quad (3.23)$$

Örnek 3.3. Şekil 3.4 'e ait G. D. D. matrisi elde edilecektir.



Şekil 3.4. Dirençli bir devre

Tablo 3.5. Örnek 3.3' e ait direnç bağlantı tablosu

$A_R :$

Direnç \ Düğüm	R_1	R_2	R_3
1	1	0	0
2	-1	1	1
3	0	-1	0

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A_R^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24 - 3.25)$$

$$G_x = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$G_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Tablo 3.6. Örnek 3.3' e ait gerilim kaynakları bağlantı tablosu

$A_e :$

Düğüm \ Gerilim K.	E
1	1
2	0
3	0

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A_e^T = [1 \ 0 \ 0] \quad (3.28-3.29)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ i_{e1} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Tablo 3.7. Örnek 3.3' e ait akım kaynakları bağlantı tablosu

$A_J :$

Düğüm \ Akım K.	J_1	J_2
1	1	0
2	0	0
3	-1	1

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

ve kaynak vektörü “y” :

$$y = \begin{bmatrix} E \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Sistemin tüm bileşenleri bulunduğuna göre Şekil 3.4’ teki devreye ait G. D. D. sistemi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} G_1 & -G_1 & 0 & 1 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ i_{e1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

İncelenmekte olan devreye ait GDD sistemi bu şekilde elde edildikten sonra aşağıda gösterilmiş olan matematiksel işlemler yardımıyla önce sistemin bilinmeyenleri ve daha sonra sistem bilinmeyenleri yardımıyla devredeki tüm elemanlara ait akım ve gerilimler kolayca hesaplanabilmektedir.

Denklem 3.18’in her iki tarafı G_T^{-1} ile çarpılırsa

$$G_T \cdot x = B \cdot y \quad \Rightarrow \quad G_T^{-1} \cdot G_T \cdot x = G_T^{-1} \cdot B \cdot y \quad (3.34)$$

ve buradan

$$x = G_T^{-1} \cdot B \cdot y \quad (3.35)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem bize sistemin bilinmeyenleri olan, referans hariç tüm düğüm gerilimleri ile gerilim kaynaklarının akımlarını vermektedir.

3.2.2. Dinamik devrelere ait genelleştirilmiş düğüm denklemlerinin elde edilmesi

Dinamik devreler endüktans ve kapasite içeren devrelerdir. Öncelikle dirençli devrelerde olduğu gibi Kirchoff akım ve gerilim yasaları Denklem 3.36' da verilen formda olacak şekilde, devre elemanları düzenlenir.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} \cdot U_d \quad (3.36)$$

Burada A_1 ve A_2 ilgili elemanlara (1 ve 2 tipi elemanlara) ilişkin düğüm matrislerini, U_d ise düğüm gerilimlerini göstermektedir. '1' ve '2' tipi olarak ifade edilen elemanların tanım bağıntıları,

$$I_1 = Y_1 \cdot U_1 + I_{k1} \quad , \quad U_{k2} = Y_2 \cdot U_2 + Z_2 \cdot I_2 \quad (3.37)$$

şeklindedir. Ayrıca $Y_d = A_1 \cdot Y_1 \cdot A_1^T$ (düğüm admitansı) alınarak, Genelleştirilmiş Düğüm Denklem sistemi,

$$\begin{bmatrix} Y_d & A_2 \\ A_1^T & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_1 \\ U & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

şeklinde olur. GDD sisteminin s domeninde gösterimi ise Denklem 3.39' daki gibidir.

$$(G + s.C).x(s) = B.y(s) \quad (3.39)$$

Burada G, C ve B katsayı matrisleridir. Tüm iletkenlikler ve düğüm denklemlerinin elde edilmesinden kaynaklanan, frekanstan bağımsız değerler G matrisini oluşturur. Frekans değişkeni ile ilgili kapasite ve endüktansların değerleri C matrisinde yer alır. y(s) bağımsız akım ve gerilim kaynakları ile kapasite ve endüktansların sıfırdan farklı başlangıç şartlarını içeren vektördür. x(s) bilinmeyenler vektörüdür.

Bilinmeyenler : Düğüm gerilimleri, endüktans akımları, gerilim kaynaklarının akımları, kısadevre eleman akımları

Değişkenlerin tipleri dikkate alınarak, sistem denklemleri 3.40' daki biçimde yeniden düzenlenebilir.

$$\left\{ \begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & 0 \end{array} \right\} + s \cdot \left\{ \begin{array}{c|c} C_d & 0 \\ \hline 0 & -L_x \end{array} \right\} \cdot \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_j \\ \hline U & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E(s) \\ J(s) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Burada $x_1(s)$ gerilim değişkenlerini, $x_2(s)$ ise akım değişkenlerini göstermektedir. E(s) gerilim kaynaklarını, J(s) akım kaynaklarını göstermektedir.

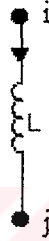
Sistemin zaman domeni gösterimini elde etmek için Denklem 3.40 ile verilen denklem sisteminin Ters Laplace dönüşümü alınır:

$$\left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} C_d & 0 \\ \hline 0 & -L_x \end{array} \right] \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -A_j \\ \hline U & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Aşağıda; Denklem 3.40 ile ifade edilen sistem denkleminin bileşenlerinin elde edilmesine geçmeden önce bu tür devrelerde endüktans ve kapasite elemanlarının sistem denklemlerine nasıl katkı verdikleri incelenmiştir.

Endüktansların sistem denklemlerine katkısı :

Endüktanslar '2' tipi eleman olarak ele alınır ve s domenindeki eşitliği kullanılır. Denklem 3.43' e bakılacak olunursa endüktansın başlangıç şartı sistem denklemlerinden çıkarılmıştır. Çünkü başlangıç şartı, t domeninde sadece sistem denklemlerinin nümerik çözümü aşamasında kullanılır. Buna göre bağlı olduğu düğümler ve akım yönü Şekil 3.5' teki gibi olan bir endüktansın sistem denklemlerine katkısı Denklem 3.44' te görülmektedir.



Şekil 3.5. Endüktans elemanı

$$U_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \Leftrightarrow U(s) = s.L.I(s) - L.i(0) \quad \text{'2' Tipi} \quad (3.42)$$

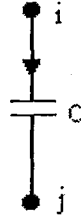
$$U(s) = U_i - U_j = s.L.I(s) \Rightarrow U_i - U_j - s.L.I(s) = 0 \quad (3.43)$$

$$C = \begin{matrix} & i & j \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|c} & & 1 \\ & & -1 \\ \hline 1 & -1 & -s.L \end{array} \right] \end{matrix} \quad (3.44)$$

Kapasitelerin sistem denklemlerine katkısı :

Kapasiteler '1' tipi eleman olarak ele alınır ve s domenindeki eşitliği kullanılır. Denklem 3.46' da kapasitenin başlangıç şartının endüktansta olduğu gibi sistem

denklemlerinden çıkarıldığı görülmektedir. Buna göre bağlı olduğu düğümler ve akım yönü Şekil 3.6' daki gibi olan bir kapasitenin sistem denklemlerine katkısı Denklem 3.47' de görülmektedir.



Şekil 3.6. Kapasite elemanı

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt} \Leftrightarrow I(s) = s.C.U_c(s) - C.U_c(0) \quad \text{'1' Tipi} \quad (3.45)$$

$$I_c(s) = s.C.(U_i - U_j) \quad (3.46)$$

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} s.C & -s.C \\ -s.C & s.C \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.47)$$

Şimdi Denklem 3.40 ile verilen s-domenindeki G.D.D. sisteminin bileşenlerinin elde edilmesine geçilecektir.

G_{11} matrisinin elde edilmesi :

$$G_{11} = G_d \quad (3.48)$$

G_d : Düğüm iletkenlik matrisi , (Bkz. : Denk. 3.19)

G_{12} matrisinin elde edilmesi :

$$G_{12} = A_2 \quad (3.49)$$

A_2 matrisi endüktans akımları, kısadevre akımları, gerilim kaynaklarının akımlarını içermektedir. Tablo 3.8’ de görüldüğü üzere A_2 matrisi 3 farklı eleman grubuna ait bağlantı bilgisini içermektedir.

Tablo 3.8 matris formda yazıldığında

$$A_2 = [A_L \quad A_{kd} \quad A_e] \quad (3.50)$$

matris eşitliği elde edilir.

Tablo 3.8. “2” tipi eleman bağlantı tablosu

Düğüm \ A_2	$L_1, L_2 \dots$	$kd_1, kd_2 \dots$	$E_1, E_2 \dots$
1	A_L	A_{kd}	A_e
2			
3			
\vdots			

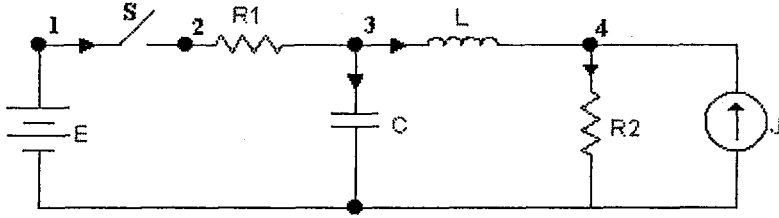
Tablo 3.8’deki A_L , A_{kd} , A_e matrislerinin elde edilmesi; ilgili elemanların bağlı oldukları düğümler ile başlangıç akım yönleri dikkate alınarak A_R matrisinin elde edilmesinde olduğu gibi gerçekleştirilir.

G_{21} matrisinin elde edilmesi :

$$G_{21} = A_2^T \quad (3.51)$$

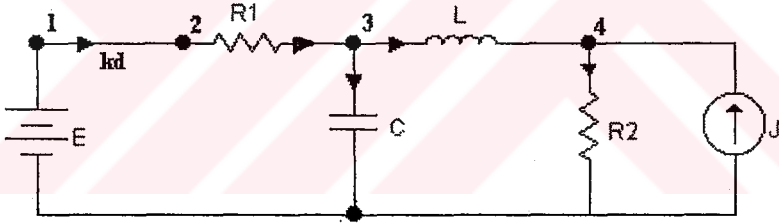
Denklem 3.50' de A_2 matrisinin elde edilmesi görülmektedir.

Örnek 3.4. Şekil 3.7' deki anahtarlama devreye ilişkin $t > 0$ için G matrisi elde edilecektir.



Şekil 3.7. Anahtarlama bir elektrik devresi

$t > 0$ için S anahtarı kapanır. Anahtar kısa devre elemanı olarak gösterilmiştir. Devre Şekil 3.8' deki hali alır.



Şekil 3.8. $t > 0$ için Şekil 3.7' deki devre

Tablo 3.9. Örnek 3.4. için oluşturulan direnç düğüm tablosu

Direnç Düğüm	R_1	R_2
1	0	0
2	1	0
3	-1	0
4	0	1

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_R^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_x = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}$$

$$G_d = A_R \cdot G_x \cdot A_R^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & -G_1 & 0 \\ 0 & -G_1 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 \end{bmatrix}$$

$$G_{12} = A_2$$

ve

$$A_2 = [A_L \quad A_{kd} \quad A_e]$$

Tablo 3.10. Örnek 3.4. için oluşturulan "2" tipi eleman bağlantı tablosu

Düğüm \ A ₂	L	kd	E
1	0	1	1
2	0	-1	0
3	1	0	0
4	-1	0	0

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_{21} = A_2^T \Rightarrow$$

$$A_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & G_1 & G_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -G_1 & -G_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

C_d matrisinin elde edilmesi :

$$C_d = A_C \cdot C_x \cdot A_C^T \quad (3.53)$$

C_d : Düğüm kapasite matrisi, $(n_d - 1) * (n_d - 1)$
 A_C : Kapasitelere ilişkin düğüm matrisi, $(n_d - 1) * n_C$
 C_x : Kapasite matrisi, $(n_C) * (n_C)$

Burada n_C kapasite sayısına göstermektedir.

A_C matrisinin elde edilmesi :

Dirençlere ilişkin düğüm matrisinin elde edilmesinde olduğu gibi elde edilir. A_R matrisinin elde ediliş yönteminden farkı, A_C matrisi elde edilirken kapasitelerin bağlı oldukları düğümler ile başlangıçta kabul edilen akım yönleri dikkate alınır.

Tablo 3.11. Kapasite bağlantı tablosu

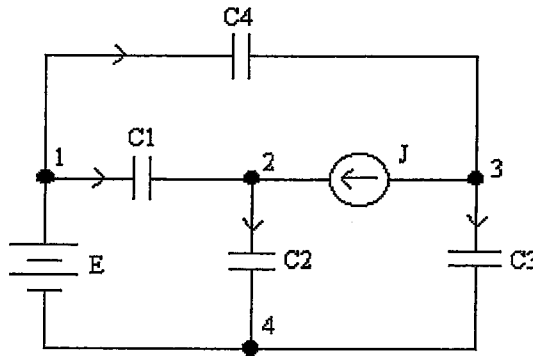
Düğüm \ Kapasite	C_1	C_2	C_3	...
1	A_C			
2				
3				
⋮				

C_x matrisinin elde edilmesi :

C_x (Kapasite) matrisi esas köşegen elemanları devredeki kapasite elemanlarının kapasite değerlerinden oluşan köşegen matrisidir ve Denklem 3.54' teki gibi ifade edilir.

$$C_x = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_{nC} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Örnek 3.5. Şekil 3.11 ile verilen devre için C_d matrisi elde edilecektir.



Şekil 3.9. Basit bir elektrik devresi

Tablo 3.12. Örnek 3.5 için oluşturulmuş kapasite bağlantı tablosu

Düğüm \ Kapasite	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
1	1	0	0	1
2	-1	1	0	0
3	0	0	1	-1

$$A_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A_C^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.55-3.56)$$

Şekil 3.9' dan görüldüğü gibi incelenen devrede 4 kapasite bulunmaktadır. Bu durumda C_x matrisi Denklem 3.57' de görülmektedir;

$$C_x = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Sonuç olarak

$$C_d = A_C \cdot C_x \cdot A_C^T = \begin{bmatrix} C_1 + C_4 & -C_1 & -C_4 \\ -C_1 & C_1 + C_2 & 0 \\ -C_4 & 0 & C_3 + C_4 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

olarak elde edilir.

L_x matrisinin elde edilmesi :

L_x (Öz endüktans) matrisi esas köşegen elemanları devredeki endüktans elemanlarının endüktans değerlerinden oluşan köşegen matrisidir ve Denklem 3.59' daki gibi ifade edilir. Boyutu $n_L * n_L$ 'dir.

$$L_x = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L_{nL} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

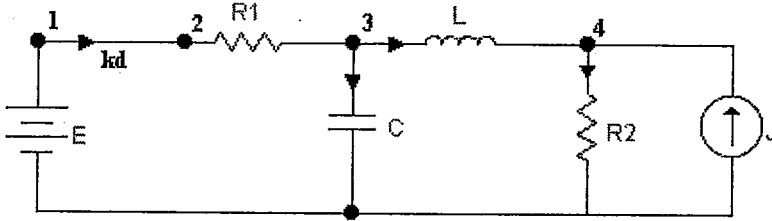
Bilinmeyenler matrisinin elde edilmesi (x) :

Referans düğüm hariç tüm düğümlerin gerilimleri ile kısa devre elemanı, endüktans ve gerilim kaynaklarının akımları sistemin bilinmeyenleridir.

$$x = \begin{bmatrix} U \\ i_{kd} \\ i_L \\ i_e \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ \dots \\ U_{nd-1} \end{bmatrix}, \quad i_{kd} = \begin{bmatrix} i_{kd1} \\ i_{kd2} \\ \dots \\ \dots \\ i_{kd(nkd)} \end{bmatrix}, \quad i_L = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ \dots \\ \dots \\ i_{L(nL)} \end{bmatrix}, \quad i_e = \begin{bmatrix} i_{E1} \\ i_{E2} \\ \dots \\ \dots \\ i_{e(ne)} \end{bmatrix}$$

Örnek 3.6. Şekil 3.7' deki devre için GDD matris sistemi elde edilecektir. Şekil 3.7' deki anahtarlamalı devrenin S anahtarı kapandıktan sonraki devrenin yeni hali Şekil 3.8' de görülmektedir.



Şekil 3.10. $t > 0$ için Şekil 3.7' deki devre

Örnek 3.4.' te Şekil 3.8 için G matrisi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & G_1 & G_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -G_1 & -G_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dinamik elemanların katkıları ;

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_x = [C], \quad A_c^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$C_d = A_c \cdot C_x \cdot A_c^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [C] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$L_x = [L] \quad (3.62)$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Denklem 3.52, 3.61, 3.62 ve 3.63 dikkate alınarak Şekil 3.7' deki devreye ait s-
domenindeki G.D.D. sistemi Denklem 3.64' teki gibi elde edilir.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & G_1 & -G_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & -G_1 & -G_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & G_2 & -1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) + s \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -L & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \\ U_4(s) \\ i_L(s) \\ i_{kd}(s) \\ i_c(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ j \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

BÖLÜM 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ DÜĞÜM DENKLEMLERİ SİSTEMİNDEN DURUM DEĞİŞKENLERİ SİSTEMİNE GEÇİŞ

4.1. Genelleştirilmiş Dügüm Denklemleri Sisteminden Durum Değişkenleri Sistemine Geçişin Nedenleri

Anahtarlamalı devrelerinin modellenmesi ve analizinde iki metod ön plana çıkmaktadır: Durum Değişkenleri yöntemi ile Genelleştirilmiş Dügüm Denklemleri yöntemi. İki yöntemden de Bölüm 3' te ayrıntılı olarak bahsedilmiştir.

Avantaj ve dezavantajları yönünden karşılaştırıldığında; iki yöntemin de birbirine göre üstünlükleri bulunur. Durum Denklemleri yönteminde, çözüm aşamasında sistem bilinmeyenlerinin sayısı minimumdur. Genelleştirilmiş Dügüm Denklemleri yönteminde olduğu gibi gerekli gereksiz bir çok gerilim ve akım değişkeni bulunarak büyük boyutlu matrisel işlemlere ve uzun hesaplama süresi ile daha yüksek bellek ihtiyacına gerek duyulmaz. Bu bakımdan daha avantajlı olmasına karşın, sistem denklemlerinin oluşturulmasındaki kolaylık yönünden Genelleştirilmiş Dügüm Denklemleri yönteminin üstünlüğü göz ardı edilemez. Özellikle bilgisayar destekli devre analizi programlarında G.D.D. yöntemi yaygın olarak kullanılır. Çünkü bilgisayar destekli devre analizi programlarında sistem denklemlerinin oluşturulma yöntemi, programın gücünü, hızını ve bellek gereksinimini belirleyen önemli bir etkidir ve düğüm analizi yöntemi bu beklentileri karşılar. Ayrıca anahtarlamalı devrelerin analizinde de G.D.D. yöntemi oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Sistem denklemlerinin çok kolay bir şekilde elde edilmesine imkan tanır ve böylece sistem denklemlerinin oluşturulma süresinde indirgeme elde edilir. Anahtarların durumlarının yöntemin değişkenleri cinsinden son

derece etkili ve kolay bir şekilde elde edilebilmesi G.D.D. yönteminin anahtarlamalı devrelerde yaygın olarak kullanılmasının nedenlerindedir [6]. Bu sayılanlara ek olarak tüm lineer elemanlar, kontrollü kaynaklar ve çeşitli yarı iletken elemanların sistem denklemlerine kolay bir şekilde katılabilmesi de yöntemin avantajları arasındadır.

Görüldüğü üzere iki yöntemin de birbirine göre avantaj ve dezavantajları bulunmaktadır. Bu iki yöntemin avantajlı yanları biraraya getirilerek elde edilen yeni bir yöntem sistem denklemlerinin elde edilmesi ve çözümü için optimum model oluşturur.

Yeni yöntemle sistem denklemleri G.D.D. ile elde edilecek, fakat çözüm aşamasında D.D.' ye dönüştürülecektir. Gerçekleştirilen bu yöntem, iki yöntemin de avantajlı yanlarını içinde barındırarak sistem denklemlerinin elde edilmesi ve çözüm aşamasında minimum değişkenle hesapların yapılmasına imkan tanır [7].

4.2. Geçişin Matematiksel İfadesi

Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Sisteminin zaman domenindeki ifadesi Denklem 4.1.a' da verilmiştir.

Denklem 4.1.a' daki katsayı matrisleri değişkenleri ayırmak amacıyla aşağıdaki gibi parçalanır. Denklem 4.1.a' daki C matrisi öncelikle Echelon forma getirilerek Denklem 4.1.b elde edilir.

$$G \cdot x(t) + C \frac{dx(t)}{dt} = B_0 \cdot u(t) \quad (4.1.a)$$

$$\begin{array}{l} k \\ n_o - k \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{01} \\ B_{02} \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (4.1.b)$$

Burada amaç bağımlı ve bağımsız değişkenleri ayırmaktır. Denklem 4.1.b' de x_1 bağımsız değişkenleri, x_2 ise bağımlı değişkenleri gösterir. Bu nedenle denklem sisteminden x_2 ($n_0 - k$ adet) değişkenleri yok edilir.

$$n_0 - k \rightarrow G_{21} \cdot x_1 + G_{22} \cdot x_2 = B_{02} \cdot u(t) \Rightarrow x_2 = -G_{22}^{-1} \cdot G_{21} \cdot x_1 + G_{22}^{-1} \cdot B_{02} \cdot u(t) \quad (4.2)$$

$$k \rightarrow G_{11} \cdot x_1 + G_{12} \cdot x_2 + C_{11} \cdot \frac{dx_1}{dt} + C_{12} \cdot \frac{dx_2}{dt} = B_{01} \cdot u(t) \quad (4.3)$$

Denklem 4.2' den çekilen x_2 değeri Denklem 4.3' te yerine konulursa

$$G_{11} \cdot x_1 + G_{12} \left[-G_{22}^{-1} \cdot G_{21} \cdot x_1 + G_{22}^{-1} \cdot B_{02} \cdot u(t) \right] + C_{11} \cdot \frac{dx_1}{dt} + C_{12} \cdot \frac{d \left[-G_{22}^{-1} \cdot G_{21} \cdot x_1 + G_{22}^{-1} \cdot B_{02} \cdot u(t) \right]}{dt} = B_{01} \cdot u(t)$$

ve basit bir düzenleme ile;

$$\left[G_{11} - G_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot G_{21} \right] x_1 + \left[C_{11} - C_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot G_{21} \right] \frac{dx_1}{dt} = \left[B_{01} - G_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{02} \right] u(t) - C_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{02} \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad (4.4)$$

elde edilir. Denklem 4.4' te

$$G_1 = G_{11} - G_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot G_{21} ,$$

$$C_1 = C_{11} - C_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot G_{21}$$

$$B_1 = B_{01} - G_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{02} ,$$

$$B_2 = -C_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{02}$$

olarak ifade edilirse Denklem 4.4

$$G_1 \cdot x_1 + C_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = B_1 \cdot u(t) + B_2 \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad (4.5)$$

şeklini alır. Denklem 4.5' in elde edilmesinde temel problem G_{22}^{-1} ' in bulunmasıdır. Bu amaçla Denklem 4.1.b' de gerekli elemanter satır-sütun işlemleri yapılır. Böylece bağımsız değişkenler saptanır.

Denklem 4.5' in her iki tarafı C_1^{-1} ile çarpılırsa durum denklemlerine geçilmiş olur.

$$\frac{dx_1}{dt} = A \cdot x_1 + B \cdot u(t) + B_A \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad (4.6)$$

$$A = -C_1^{-1} \cdot G_1, \quad B = C_1^{-1} \cdot B_1, \quad B_A = C_1^{-1} \cdot B_2$$

Eğer Denklem 4.5' te C_1^{-1} mevcut değilse x_1 değişkenlerin bazılarının hala bağımlı olduğu anlaşılır. İşlemler tekrar uygulanır. Bu işlemler non-singüler bir C_1 buluncaya kadar devam eder. Böyle bir durumda G_1, C_1, B_1 ve B_2 ' nin nasıl bulunacağı aşağıda verilmiştir. Denklem 4.5' teki sisteme elementer satır işlemleri uygulanarak, C_1 matrisi Echelon Form'a getirilir. Denklem sistemi yine değişkenleri ayırmak amacıyla parçalanmıştır.

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow \\ 2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} B_{01} \\ B_{02} \end{array} \right] \cdot u(t) + \left[\begin{array}{c} B_{11} \\ B_{12} \end{array} \right] \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad (4.7)$$

Denklem 4.7' deki 2 no' lu satır açık şekilde yazılıp x_2 değişkeni çekildiğinde

$$2 \rightarrow G_{21} \cdot x_1 + G_{22} \cdot x_2 = B_{02} \cdot u(t) + B_{12} \cdot \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$x_2 = -G_{22}^{-1} \cdot G_{21} \cdot x_1 + G_{22}^{-1} \cdot B_{02} \cdot u(t) + G_{22}^{-1} \cdot B_{12} \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad (4.8)$$

elde edilir. İşlemin devamı olarak Denklem 4.7' nin 1. satırı açık bir şekilde yazılır ve Denklem 4.8' de elde ettiğimiz x_2 değeri bu denklemde yerine konulursa;

$$1 \rightarrow G_{11} \cdot x_1 + G_{12} \cdot x_2 + C_{11} \cdot \frac{dx_1}{dt} + C_{12} \cdot \frac{dx_2}{dt} = B_{01} \cdot u(t) + B_{11} \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad (4.9)$$

$$1 \rightarrow G_{11} \cdot x_1 + G_{12} \cdot \left[-G_{22}^{-1} \cdot G_{21} \cdot x_1 + G_{22}^{-1} \cdot B_{02} \cdot u(t) + G_{22}^{-1} \cdot B_{12} \cdot \frac{du(t)}{dt} \right] + C_{11} \cdot \frac{dx_1}{dt} + C_{12} \cdot \frac{d}{dt} \left[-G_{22}^{-1} \cdot G_{21} \cdot x_1 + G_{22}^{-1} \cdot B_{02} \cdot u(t) + G_{22}^{-1} \cdot B_{12} \cdot \frac{du(t)}{dt} \right] = B_{01} \cdot u(t) + B_{11} \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad (4.10)$$

$$1 \rightarrow [G_{11} - G_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot G_{21}] x_1 + [C_{11} - C_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot G_{21}] \frac{dx_1}{dt} = [B_{01} - G_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{02}] u(t) + [B_{11} - G_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{12} - C_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{02}] \frac{du(t)}{dt} - C_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{12} \cdot \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \quad (4.11)$$

bulunur. Denklem 4.11' de aşağıdaki şekilde kısaltmalar yapıldığında, sistem Denklem 4.12 ile gösterilen hale gelir.

$$G_1 = G_{11} - G_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot G_{21}, \quad C_1 = C_{11} - C_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot G_{21}, \quad B_1 = B_{01} - G_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{02}$$

$$B_2 = B_{11} - G_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{12} - C_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{02}, \quad B_3 = -C_{12} \cdot G_{22}^{-1} \cdot B_{12}$$

$$G_1 \cdot x_1 + C_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = B_1 \cdot u(t) + B_2 \cdot \frac{du(t)}{dt} + B_3 \cdot \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \quad (4.12)$$

Son olarak Denklem 4.12' de C_1^{-1} varsa eşitliğin her iki tarafı C_1^{-1} ile çarpılarak durum denklemlerine geçilmiş olur.

$$\frac{dx_1}{dt} = A.x_1 + B.u(t) + B_A \cdot \frac{du(t)}{dt} + B_B \cdot \frac{d^2u(t)}{dt^2} \quad (4.13)$$

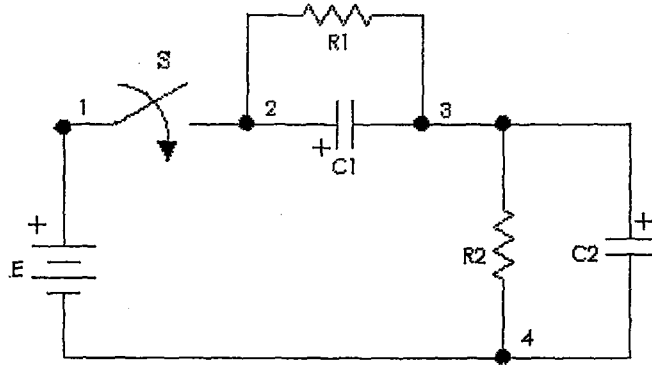
$$A = -C_1^{-1}.G_1, \quad B = C_1^{-1}.B_1, \quad B_A = C_1^{-1}.B_2, \quad B_B = C_1^{-1}.B_3$$

Eğer Denklem 4.12' de C_1^{-1} mevcut değilse x_1 değişkenlerin bazılarının hala bağımlı olduğu anlaşılır. İşlemler tekrar uygulanır. Bu işlemler non-singüler bir C_1 bulununcaya kadar devam eder. Bu durumda, durum denklemlerine ait genel format Denklem 4.14' te verilmiştir.

$$\frac{dx}{dt} = A.x + B.u + B_1 \cdot \frac{du}{dt} + B_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \dots + B_n \cdot \frac{d^nu}{dt^n} \quad 4.14$$

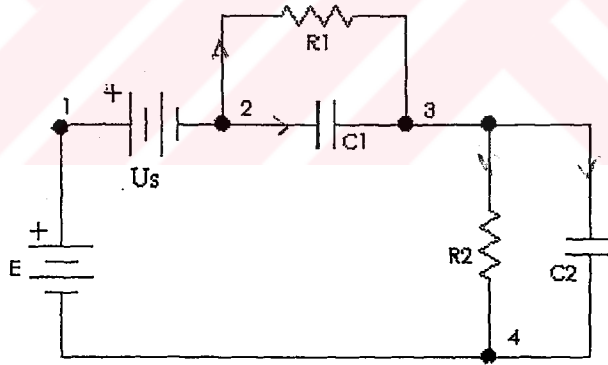
Devreye ait çıkış denklemlerinde kaynağın türevli bileşenlerinin görülmesi, devrenin uygunsuz bir devre (sistem) olduğunu gösterir. Bu durumda başlangıç koşulları sadece $x_0(0^+)$ ve $u(0^+)$ ' a değil, aynı zamanda $t = 0^+$ ' daki $u(t)$ ' nin türevlerine de bağlıdır. Bu tür devreler kontrol edilemeyen devrelerdir. Normalde bir sisteme ait giriş ve çıkış değişkenlerini birbirine bağlayan transfer fonksiyonu ifadesinde paydanın derecesi payın derecesinden büyük olmasına karşın uygunsuz devrelerde tam tersi söz konusu olur. Bu ise devrede dirac impulsların var olduğunu ve devrenin kararsız olduğunu gösterir. Bu tür durumlar sadece aktif devrelerde karşılaşılan durumlardır ve bu uygunsuz durumlar sınırlandırılmıştır. Normalde C_1 matrisi, non-singüler olmalıdır. İterasyon bir devir içinde durmalı ve A , B , B_1 ve u matrisleri bir devir içerisinde bulunmalıdır. Devrenin uygun olup olmadığını belirlemek için C_1 matrisi Echelon forma getirilir. C_1 matrisi non-singüler ise sistemin durum değişkenleri ve başlangıç koşulları kolayca hesaplanabilir. Eğer C_1 matrisi singüler ise bu durumda işlemler non-singüler bir C_1 bulununcaya kadar devam edilir.

Örnek 4.1. Şekil 4.1' deki devrede anahtar $t=0$ anında kapatılmaktadır. $t>0$ için devreye ilişkin G.D.D. sistemi kullanılarak Durum Denklemleri sistemi elde edilecektir. ($E=10V$, $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $C_1 = C_2 = 2F$, $U_{C1}(0^-) = 2V$, $U_{C2}(0^-) = 5V$)



Şekil 4.1. Anahtarlamalı bir elektrik devresi

Şekil 4.1.' deki devrede $t>0$ anında kapanan S anahtarı, değeri 0 Volt olan gerilim kaynağı ile modellenmektedir. Bu durumda devre Şekil 4.2.' deki gibi olur.



Şekil 4.2. Kapanan anahtarın U_s gerilim kaynağı ile modelini içeren devre

Her iki kaynağın anahtarlama durumuna göre ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$U_s(t) = \begin{cases} E(0^-) - U_{C1}(0^-) - U_{C2}(0^-) & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad E = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E & t \geq 0 \end{cases}$$

Devreye ilişkin G.D.D. sistemi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & G_1 & -G_1 & -1 & 0 \\ 0 & -G_1 & G_1+G_2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_1 & C_1+C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Eleman değerleri yerine konulduktan sonra; öncelikle C matrisi satır-sütun işlemleri ile Echelon forma getirilir.

$s_1 \leftrightarrow s_2$, $s_2 \leftrightarrow s_3$ (satır değişiklikleri)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix}$$

$k_1 \leftrightarrow k_2$ (sütun değişikliği)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \\ U_3 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \\ U_3 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix}$$

$$s_1 + s_2 \rightarrow s_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \\ U_3 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \\ U_3 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix}$$

$$k_2 \leftrightarrow k_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_1 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_1 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

G_{22}

Denklem 4.16' da G_{22}^{-1} olmadığından satır-sütun işlemleri yapılarak Denklem 4.17 elde edilir.

$$s_3 \leftrightarrow s_5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & . & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & . & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_1 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & . & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_1 \\ i_s \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix}$$

$$k_3 \Leftrightarrow k_5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ i_e \\ i_s \\ U_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ i_e \\ i_s \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Denklem 4.17' de G_{22} ' nin tersi mevcut olduğundan ilk x_1 değişkenleri belirlenmiş olur. Bu amaçla Denklem 4.4 ile verilen ifadeler kullanılarak Denklem 4.5' deki yapı aşağıdaki gibi elde edilir. Burada $B_2 = 0$ olmuştur.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ i_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Denklem 4.18' de C_1 matrisinin tersinin olmadığı görülmektedir. Bunun anlamı denklem sisteminde hala bağımlı değişkenler vardır. Bu durumda biraz daha değişken elenebilir. C_1 matrisi Echelon formda olduğu için doğrudan G_{22}^{-1} ' i elde edecek şekilde düzenlemeler yapılır.

$$k_1 \Leftrightarrow k_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ U_3 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_e \\ U_3 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix}$$

Bu durumda yine Denklem 4.4 yardımıyla, ikinci x_1 değişkenleri Denklem 4.19' daki gibi elde edilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{G_1} \begin{bmatrix} i_e \\ U_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{C_1} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_e \\ U_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_2} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Denklem 4.19' da C_1 matrisinin tersi hala olmadığından değişken elemeye devam edilir. Önce C_1 matrisi Echelon forma getirilir.

$$s_1 + s_2 \rightarrow s_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ U_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_e \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix}$$

$$k_1 \leftrightarrow k_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & . & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & . & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ i_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & . & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & . & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_3 \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & . & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & . & -2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 2 & . & -2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix}$$

Bu durumda yine Denklem 4.4 yardımıyla üçüncü x_1 değişkenleri Denklem 4.20' deki gibi elde edilir.

$$[-1]U_3 + [-2] \frac{dU_3}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} + [1 \quad -1] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

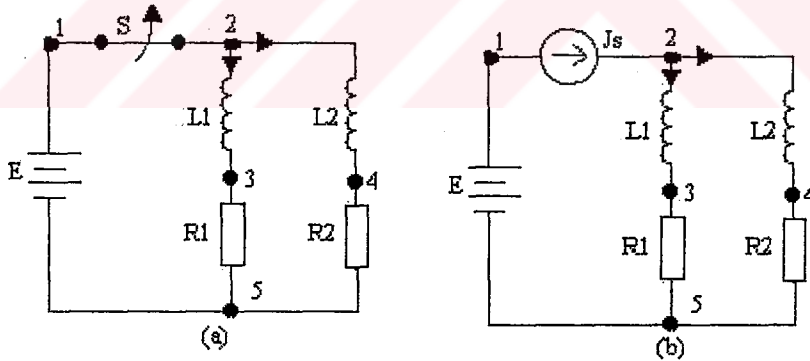
Devreye ilişkin G.D.D. sistemini veren Denklem 4.15' teki fazla olan değişkenler elenerek en sade format elde edilmiştir. Böylece çok değişkenli (5 adet) G.D.D.

sisteminden minimum değişkenli (1 adet) D.D. sistemine indirgeme tamamlanmıştır ve dolayısıyla çözüm aşamasına geçilebilir. Bu amaçla öncelikle Denklem 4.20 yeniden düzenlenir ve Denklem 4.21 formatına getirilir.

$$\frac{dU_3}{dt} = \frac{-U_3}{2} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_s \\ E \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Şekil 4.1' deki devrenin denklemlerinin bulunmasında D.D. yöntemi kullanılsaydı, tek bilinmeyenli bir denklem elde edilirdi. G.D.D. yöntemine ait denklem sisteminde dönüşümlerin kullanılması ile de tek bilinmeyenli bir denklem elde edilmiştir. Devrede $U_3 = U_{C2}$ olduğundan, D.D. sisteminde U_{C2} yöntemin bilinmeyeni yani durum değişkenidir.

Örnek 4.2. Şekil 4.3.a' da uzun süre kapalı olan anahtar $t=0$ anında açılıyor. $t>0$ için açılan anahtarın J_s akım kaynağı ile modelini içeren Şekil 4.3.b' deki devreye ilişkin G.D.D. sistemi kullanılarak D.D. sistemi elde edilecektir.



Şekil 4.3. Anahtarlamalı bir elektrik devresi ve açılan anahtarın J_s akım kaynağı ile modelini içeren devre

$$E = 12V, R_1 = 2\Omega, R_2 = 1\Omega, L_1 = 2H, L_2 = 4H,$$

$$i_{L1}(0^-) = 6A, i_{L2}(0^-) = 12A \quad (t < 0 \text{ için sürekli hal durumu dikkate alınarak belirlenir.})$$

$$J_s(t) = \begin{cases} \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Devreye ilişkin G.D.D. sistemi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & G_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ I_{L1} \\ I_{L2} \\ I_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ I_{L1} \\ I_{L2} \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix}$$

Eleman değerleri yerine konulduktan sonra, öncelikle C matrisi satır-sütun işlemleri ile Echelon forma getirilir.

$$s_1 \leftrightarrow s_5, \quad s_2 \leftrightarrow s_6$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ I_{L1} \\ I_{L2} \\ I_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ I_{L1} \\ I_{L2} \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix}$$

$$k_1 \Leftrightarrow k_5, \quad k_2 \Leftrightarrow k_6$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_3 \\ U_4 \\ U_1 \\ U_2 \\ I_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_3 \\ U_4 \\ U_1 \\ U_2 \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix}$$

G22.

Denklemden G_{22}^{-1} olmadığından satır-sütun işlemlerine devam edilir.

$$k_4 \Leftrightarrow k_6, \quad s_4 \Leftrightarrow s_6$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \\ U_4 \\ I_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 \\ U_4 \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix}$$

G22

G_{22}^{-1} mevcut olduğundan Denklem 4.4 yardımıyla, ilk x_1 değişkenleri Denklem 4.22'deki gibi elde edilir. Burada $B_2 = 0$ olmuştur.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G1} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_3 \\ U_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C1} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_3 \\ U_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B1} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Denklem 4.22' de C_1 matrisinin tersinin olmadığı görülmektedir. Bu durumda biraz daha değişken elenebilir.

$$k_4 \Leftrightarrow k_3$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix} \end{array}$$

$$s_4 \Leftrightarrow s_3$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0.5 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix} \end{array}$$

G_{22}^{-1} mevcut olduğundan ikinci x_1 değişkenleri Denklem 4.23' teki gibi elde edilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{G1} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C1} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ U_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B1} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Denklem 4.23' de C_1^{-1} hala mevcut değildir. Değişken elemeye devam edilir.

$$k_2 \Leftrightarrow k_3$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_{L1} \\ U_2 \\ I_{L2} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ U_2 \\ I_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{G_{22}}$

G_{22}^{-1} mevcut olduğundan üçüncü x_1 değişkenleri Denklem 4.24' teki gibi elde edilir.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right]}_{G1} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ U_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{array} \right]}_{C1} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ U_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]}_{B1} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix} + \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{array} \right]}_{B2} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Denklem 4.24' te C_1 matrisinin tersi hala mevcut değildir. Değişken elemeye devam edilir. Bu amaçla öncelikle C_1 matrisi Echelon forma getirilir ve daha sonra son x_1 değişkenleri Denklem 4.25' teki gibi elde edilir.

$$s_2 = s_1 + s_2 / 2$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} -2 & 1 & 0 \\ \hline -1.5 & 1.5 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_{L1} \\ U_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{L1} \\ U_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{array} \right] \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{G_{22}}$

$$\underbrace{\left[-1 \right]}_{G1} I_{L1} + \underbrace{\left[-2 \right]}_{C1} \frac{dI_{L1}}{dt} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right]}_{B1} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix} + \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & -\frac{4}{3} \end{array} \right]}_{B2} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Denklem 4.25' te eşitliğin her iki tarafını C_1^{-1} ile çarparsak Durum Denklemleri formuna geçilmiş olur.

$$\frac{dI_{L1}}{dt} = -\frac{1}{2}I_{L1} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E \\ J_s \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

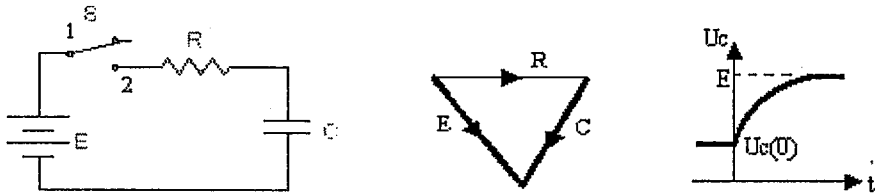
G.D.D. denklem sistemine dönüşümlerin uygulanmasıyla bilinmeyen sayısı 7' den 1' e indirilmiştir. Devre denklemlerinin bulunmasında D.D. yöntemi kullanılsaydı bir bilinmeyenli denklem elde edilirdi. I_{L1} akımı hem D.D. yönteminin hem de G.D.D. yönteminin bilinmeyenidir.

BÖLÜM 5. BAŞLANGIÇ KOŞULLARININ BELİRLENMESİ

Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Sistemi, Bölüm 4.2.' de açıklanan yöntemle Durum Değişkenleri Sistemi' ne dönüştürüldükten sonra, sistemin zaman domeni analizi için öncelikle sistem bilinmeyenlerinin $t = 0^+$ anındaki akım/gerilim değerlerinin elde edilmesi gerekir.

D. D. yönteminde sistem bilinmeyenleri olarak, kapasite gerilimleri ve endüktans akımları alınmaktadır. Bilindiği gibi, diğer kapasite ya da gerilim kaynakları ile çevre oluşturmuyorsa kapasite uçlarındaki gerilim ani olarak değişmez. Benzer şekilde diğer endüktans ya da akım kaynakları ile kesitleme oluşturmuyorsa endüktanstan geçen akım ani olarak değişmez.

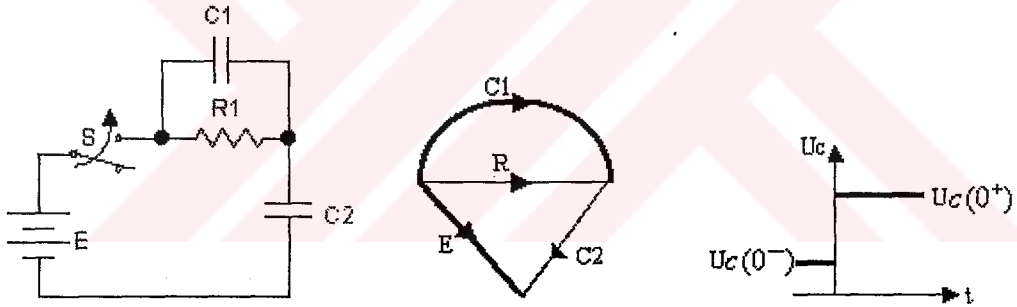
Şekil 5.1.' de peak değişimler içermeyen bir devre ve o devreye ait devre grafi ile devrenin durum değişkeninin (U_c) zamana bağlı değişimi görülmektedir. Devrede peak değişimler sözkonusu olmadığı için, $t = 0^-$ ' deki başlangıç değerleri $t = 0^+$ ' daki başlangıç değerlerine eşit olur ve sistemin zaman domeni analizinde ilk koşul olarak kullanılır. Şekil 5.1' deki devrede $U_c(0^-) = U_c(0^+)$ ' dir.



Şekil 5.1. Anahtarlamalı bir RC devresi, $t > 0$ için devre grafi ve devrenin durum değişkeninin zamana bağlı değişimi

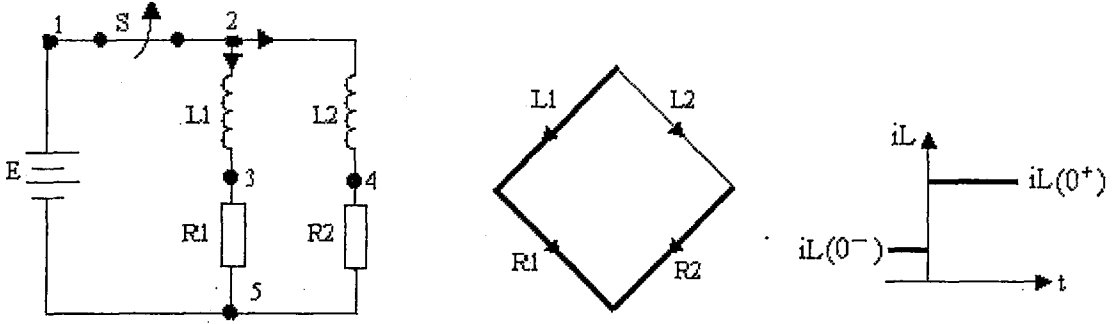
Fakat her zaman değişkenlerin $t = 0^-$ değerleri $t = 0^+$ değerlerine eşit olmaz. Özellikle devrede anahtarların ya da bazı süreksiz kaynakların bulunması durumunda, $t = 0^+$ için başlangıç şartlarının bulunması önem kazanır. Çünkü dinamik devrelerde kapasiteler kendi aralarında ve/veya gerilim kaynakları ile çevre oluşturuyorsa ya da endüktanslar kendi aralarında ve/veya akım kaynakları ile kesitleme oluşturuyorsa $t = 0^+$ daki koşullar genel olarak $t = 0^-$ deki koşullara eşit değildir. Bu durumda devredeki akım ve gerilimlerde ani değişimler (sıçramalar) olur.

Şekil 5.2.' deki devreye ait grafta kapasitelerden biri kirişte kalmıştır. Bu durumda devredeki peak değişimin nedeni için yukarıda açıklanan koşul gerçekleşmiş olur. $t > 0$ için Kirchoff Gerilim Kanununun sağlanması için $U_{C1}(0^-) \neq U_{C1}(0^+)$ ve $U_{C2}(0^-) \neq U_{C2}(0^+)$ olur.



Şekil 5.2. Anahtarlamalı bir RC devresi, $t > 0$ için devre grafi ve başlangıç şartının zamana bağlı değişimi

Şekil 5.3.' teki devreye ait grafta ise endüktanslardan biri ağaca girmiştir. Bu durumda devrede peak değişimin var olduğu anlaşılır. $t > 0$ için Kirchoff Akım Kanunu' nun gerçekleşmesi için $i_{L1}(0^-) \neq i_{L1}(0^+)$ ve $i_{L2}(0^-) \neq i_{L2}(0^+)$ olur.



Şekil 5.3. Anahtarlamalı bir RL devresi, $t > 0$ için devre grafi ve başlangıç şartının zamana bağlı değişimi

Bölüm 4' teki örneklerden de görüldüğü gibi, bu tip özel durumların olduğu devrelere ilişkin denklemlerde kaynak fonksiyonların türevleri de görülür.

$$\frac{dx}{dt} = A.x + B_1.u + B_2.\frac{du}{dt} \quad 5.1$$

Bu durumda başlangıç koşullarının belirlenmesinde çeşitli yöntemler kullanılır.

1. t- domeninde denklem sistemi çözümü
2. s- domeninde denklem sistemi çözümü

5.1. t-domeni Çözümleri

1) Anahtarlar, belirli bir andan sonra sürekli olarak kapalı veya açık kalmaları durumuna bağlı olarak ya doğru gerilim kaynağı ya da doğru akım kaynağı olarak gözönüne alınır. Bu kaynaklar devre topolojileri incelenerek parçalı fonksiyonlar olarak ifade edilir. Devre denklemleri

$$\frac{dx}{dt} = A.x + B.u \quad (5.2)$$

formunda elde edilir.

Teorem : Denklem 5.2 ile verilen lineer diferansiyel denklem sisteminde, kaynaklar $[t_a, t_b]$ aralığında parça parça sürekli fonksiyonlar ise çözümü aranan $x(t)$ vektörü de aynı aralıkta zamanın sürekli fonksiyonlarıdır [5].

$$x(t_0^-) = x(t_0^+)$$

Eğer denklem sisteminde kaynak fonksiyonlarının türevleri mevcutsa (Denklem 5.1) Teorem geçerli olmayacaktır.

$$x(t_0^-) \neq x(t_0^+)$$

Bu durumda aşağıdaki dönüşüm yapılarak Denklem 5.1 sistemi, Denklem 5.2 formuna getirilir ve böylece Teorem geçerli kılınabilir.

$$z(t) = x(t) - B_2 \cdot u(t) \quad 5.3$$

Denklem 5.3' ten $x(t)$ çekilir ve Denklem 5.1' de yerine konursa;

$$x(t) = z(t) + B_2 \cdot u(t)$$

$$\frac{d[z(t) + B_2 \cdot u(t)]}{dt} = A \cdot [z(t) + B_2 \cdot u(t)] + B_1 \cdot u(t) + B_2 \cdot \frac{du}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = A \cdot z(t) + \underbrace{[B_1 + A \cdot B_2]}_B u(t) = A \cdot z + B \cdot u(t) \quad 5.4$$

elde edilir. Böylece sistem denklemlerinden kaynağın türevli bileşeni kaldırıldığından ve

Denklem 5.2 formu elde edildiğinden artık Teorem geçerlidir. $z(t_0^-) = z(t_0^+)$ eşitliği kullanılarak $x(t_0^+)$ değeri, $x(t_0^-)$ cinsinden ifade edilebilir.

$$\text{Denklem 5.3' te: } t = 0^- \quad \rightarrow \quad z(t_0^-) = x(t_0^-) - B_2 \cdot u(t_0^-) \quad (5.5)$$

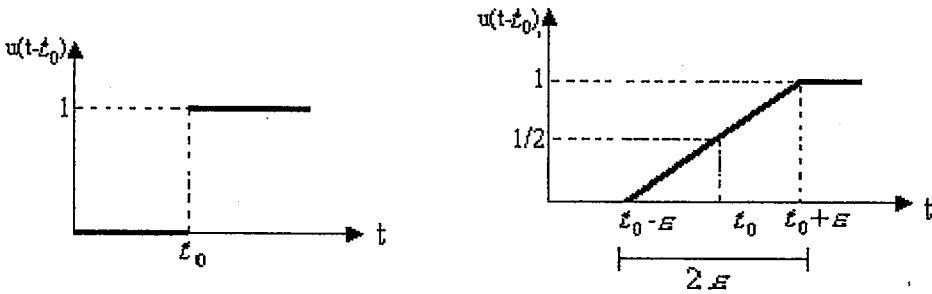
$$\text{Denklem 5.3' te: } t = 0^+ \quad \rightarrow \quad z(t_0^+) = x(t_0^+) - B_2 \cdot u(t_0^+) \quad (5.6)$$

Denklem 5.5 ile Denklem 5.6 birbirine eşitlendiğinde $x(t_0^+)$;

$$x(t_0^-) - B_2 \cdot u(t_0^-) = x(t_0^+) - B_2 \cdot u(t_0^+) \Rightarrow x(t_0^+) = x(t_0^-) + B_2 \cdot [u(t_0^+) - u(t_0^-)] \quad (5.7)$$

olarak elde edilir.

2) Denklem 5.7 ile elde edilen sonuç farklı bir yoldan da bulunabilir. Anahtarlama işleminin t_0 gibi bir anda olduğu düşünülür. Genellikle $t_0 = 0$ ' dir. $t=0$ anında anahtarlama işlemi anlık olmakla birlikte, bu olayın zaman ekseninde 2ε gibi sonsuz küçük bir aralıkta olduğu düşünülür (Şekil 5.4.b). Anahtarlamadan az önceki an $t = t_0 - \varepsilon$, anahtarlamadan az sonraki an ise $t = t_0 + \varepsilon$ ' dir. Bu durum Şekil 5.4.a' daki birim basamak fonksiyonu için Şekil 5.4.b' de gösterilmiştir.



Şekil 5.4. Ötelenmiş birim basamak fonksiyonu ve anahtarlama olayının gerçekleştiği zaman dilimini gösteren grafik

Sistem denklemlerinde kaynak fonksiyonlarının türevlerinin görülmesi durumunda, kaynakların devreye uygulanması (anahtarlanması), başlangıç koşulları üzerinde çok etkili olur. Bu durumda denklem sistemi Denklem 5.1' deki gibi olur.

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B_1 \cdot u + B_2 \cdot \frac{du}{dt} \quad (5.8)$$

Bu denklem genel bir durumu göstermektedir ve 2 farklı durum için incelenebilir.

$B_2=0$ durumu : Kaynak vektörü $u(t)$, $t=t_0, t_1, \dots, t_n$ gibi belirli sayıdaki süreksizlik (sıçrama) anları hariç zamanın sürekli ve sonlu fonksiyonları olsun. Kaynak vektöründeki her bir süreksizlik bir anahtarlama olayı olarak düşünülür. Bu süreksizlik (anahtarlama) noktalarındaki $x(t)$ çözümünün özelliklerini incelemek için, Denklem 5.8' in her iki yanının $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ aralığında integralini alalım ($B_2 = 0$ için). $\epsilon \rightarrow 0$ için her iki yanın limit durumu incelenecek olursa;

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \frac{dx(t)}{dt} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} A \cdot x(t) \cdot dt + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} B_1 \cdot u(t) \cdot dt \quad (5.9)$$

$\epsilon \rightarrow 0$ için limit durumunda, $x(t)$ her zaman sınırlanmış değişkenler vektörüdür. Denklem 5.9' un sağ tarafı sıfır olur.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \frac{dx(t)}{dt} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [x(t_0 + \epsilon) - x(t_0 - \epsilon)] = 0$$

$$x(t_0^+) - x(t_0^-) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t_0^+) = x(t_0^-)$$

Sistem denklemlerinde kaynak fonksiyonlarının türevleri görülmediğinde, kaynak fonksiyonları sınırlı olduğu sürece, durum değişkenleri anahtarlama anı süresince süreklilik gösterir. Bu durum 1. kısımda verilen Teorem ile uyumaktadır.

$$U_C(0^-) = U_C(0^+) \quad , \quad i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

Devrede impulsif kaynaklar (sınırsız) var ise $B_2 = 0$ olsa bile, değişkenler süreksizlik içerir. Kapasitenin uç akımı impulsif bir akım olmadığı sürece, uç gerilimi aniden değişmez. Benzer şekilde endüktansın uç gerilimi impulsif bir gerilim olmadığı sürece uç akımı aniden değişmez.

$B_2 \neq 0$ durumu : Kaynak vektörü $u(t)$ yine sınırlı olsun. Denklem 5.8' in her iki yanını $B_2 = 0$ durumu için yapıldığı gibi aynı sınırlar arasında entegre edilsin. $A.x(t) + B_1.u(t)$ katkısı sıfırdır.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \frac{dx(t)}{dt} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} B_2 \frac{du(t)}{dt} dt \quad (5.10)$$

$$x(t_0^+) - x(t_0^-) = B_2 [u(t_0^+) - u(t_0^-)]$$

$$x(t_0^+) = x(t_0^-) + B_2 [u(t_0^+) - u(t_0^-)] \quad (5.11)$$

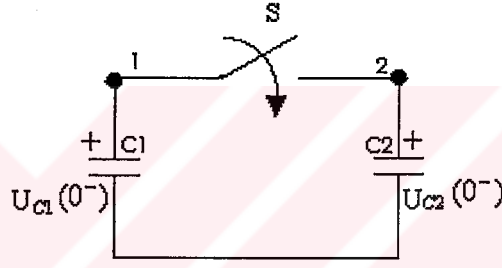
Bu durumda, değişkenler anahtarlama anlarında süreksizlikler (sıçramalar) içerir. Değişkenlerdeki bu sıçramalar, kapasitelerden geçen impulsif akımlar ve endüktans uçlarına uygulanan impulsif gerilimler olarak yorumlanır. Dikkate edilirse Denklem 5.7 ile Denklem 5.11 aynıdır.

5.2. s-domeni Çözümü

s-domeninde Başlangıç Değer Teoremi $t = 0^+$ koşullarını bulmak için kullanılır.

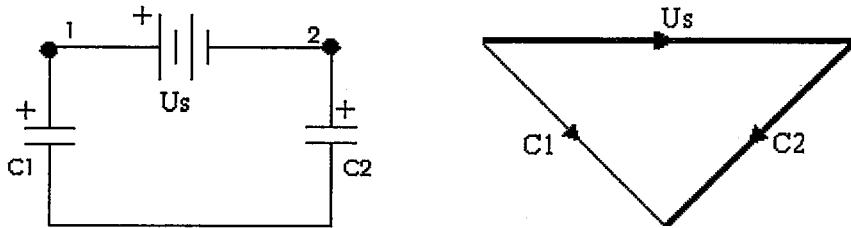
$$L\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} s.F(s) = f(0^+) \quad (5.12)$$

Örnek 5.1. Şekil 5.5' teki anahtarlamalı devrede, anahtar $t=0$ anında kapatılıyor. $U_{C1}(0^+)$ ve $U_{C2}(0^+)$ değerleri t ve s domeninde elde edilecektir.



Şekil 5.5. Basit bir anahtarlamalı devre

t-domeni :



Şekil 5.6. t-domeni çözümü için anahtarlama sonrası devrenin, kapanan anahtarın U_s gerilim kaynağı ile modelini içeren durumu ve devre grafi

$$U_s(t) = \begin{cases} U_{C1}(0^-) - U_{C2}(0^-) & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

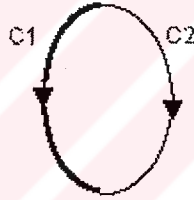
$$i_{C_2} = -i_{C_1} \Rightarrow C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} = -C_1 \frac{d(U_S + U_{C_2})}{dt} \Rightarrow \frac{dU_{C_2}}{dt} = -\frac{C_1}{\underbrace{C_1 + C_2}_{B_2}} \frac{dU_S}{dt}$$

Denklem 5.7 veya Denklem 5.11' e göre;

$$U_{C_2}(0^+) = U_{C_2}(0^-) + B_2 [U_S(0^+) - U_S(0^-)] = U_{C_2}(0^-) - \frac{C_1}{C_1 + C_2} [0 - (U_{C_1}(0^-) - U_{C_2}(0^-))]$$

$$U_{C_2}(0^+) = \frac{C_1 \cdot U_{C_1}(0^-) + C_2 \cdot U_{C_2}(0^-)}{C_1 + C_2} \Rightarrow U_{C_1}(0^+) = U_{C_2}(0^+)$$

s-domeni :



Şekil 5.7. Anahtarlama sonrası devre grafi (s domeni çözümü için)

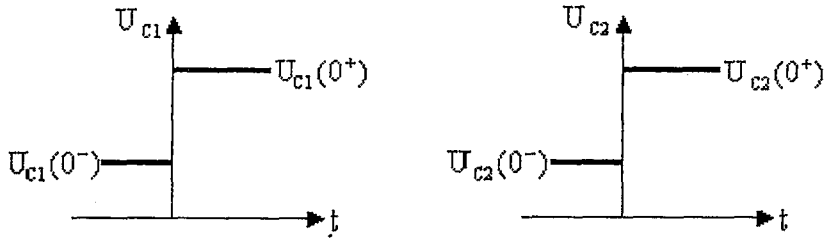
$$I_{C_1} + I_{C_2} = 0 \Rightarrow s \cdot C_1 \cdot U_{C_1}(s) - C_1 \cdot U_{C_1}(0^-) + s \cdot C_2 \cdot U_{C_2}(s) - C_2 \cdot U_{C_2}(0^-) = 0$$

$$U_{C_1}(s) = U_{C_2}(s) \Rightarrow s \cdot (C_1 + C_2) \cdot U_{C_2}(s) = C_1 \cdot U_{C_1}(0^-) + C_2 \cdot U_{C_2}(0^-) \Rightarrow$$

$$U_{C_2}(s) = \frac{C_1 \cdot U_{C_1}(0^-) + C_2 \cdot U_{C_2}(0^-)}{s \cdot (C_1 + C_2)}$$

Denklem 5.12' deki Başlangıç Değer Teoremi' ne göre;

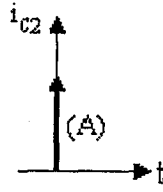
$$U_{C_2}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot U_{C_2}(s) = \frac{C_1 \cdot U_{C_1}(0^+) + C_2 \cdot U_{C_2}(0^+)}{C_1 + C_2}$$



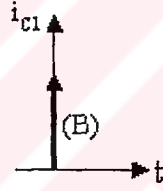
Şekil 5.8. U_{c1} ve U_{c2} 'nin başlangıç şartlarındaki değişimi gösteren grafik

Akımlar :

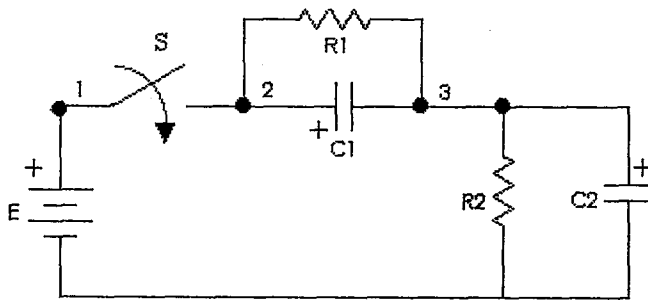
$$I_{c2} = C_2 \cdot [U_{c2}(0^+) - U_{c2}(0^-)] \delta(t) = A \cdot \delta(t)$$



$$I_{c1} = C_1 \cdot [U_{c1}(0^+) - U_{c1}(0^-)] \delta(t) = B \cdot \delta(t)$$



Örnek 5.2. Şekil 5.9' daki anahtarlamalı devrede, anahtar $t=0$ anında kapatılıyor. $U_{c1}(0^+)$ ve $U_{c2}(0^+)$ değerleri t ve s domeninde elde edilecektir. Bölüm 4' teki Örnek 4.1' de aynı devrenin düğüm denklemlerine indirgenme kuralları uygulanarak durum denklemleri Denklem 4.21' deki gibi elde edilmiştir.

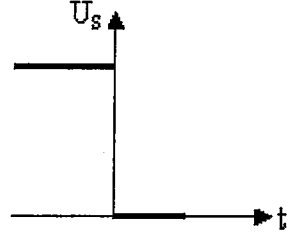


Şekil 5.9. Anahtarlamalı elektrik devresi

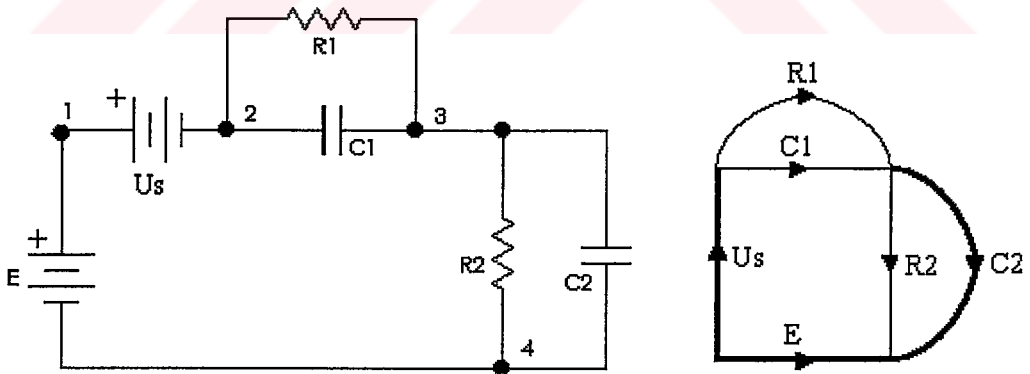
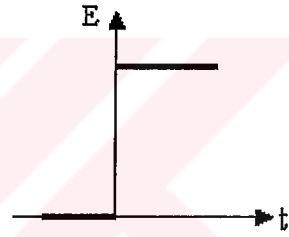
$$(E=10V, R_1 = 1\Omega, R_2 = 1\Omega, C_1 = C_2 = 2F, U_{C1}(0^-) = 2V, U_{C2}(0^-) = 5V)$$

t domeni :

$$U_s(t) = \begin{cases} E(0^-) - U_{C1}(0^-) - U_{C2}(0^-) & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$



$$E = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E & t \geq 0 \end{cases}$$



Şekil 5.10. t-domeni çözümü için anahtarlama sonrası devrenin, kapanan anahtarın U_s gerilim kaynağı ile modelini içeren durumu ve devre grafi

$$i_{C2} = i_{C1} + i_{R1} - i_{R2} \rightarrow C_2 \frac{dU_{C2}}{dt} = C_1 \frac{d(E - U_s - U_{C2})}{dt} + \frac{(E - U_s - U_{C2})}{R_1} - \frac{U_{C2}}{R_2}$$

$$\frac{dU_{C_2}}{dt} = -\frac{(R_1+R_2)}{\underbrace{R_1 R_2 (C_1+C_2)}_A} U_{C_2} + \frac{E}{\underbrace{R_1 (C_1+C_2)}_{B1A}} + \frac{C_1}{\underbrace{(C_1+C_2)}_{B2A}} \frac{dE}{dt} - \frac{U_s}{\underbrace{R_1 (C_1+C_2)}_{B1B}} - \frac{C_1}{\underbrace{(C_1+C_2)}_{B2B}} \frac{dU_s}{dt}$$

Sayısal değerler yerine konulursa Denklem 4.21 elde edilir.

$$\frac{dU_{C_2}}{dt} = -\frac{1}{2} U_{C_2} + \frac{1}{4} E + \frac{1}{2} \frac{dE}{dt} - \frac{1}{4} U_s - \frac{1}{2} \frac{dU_s}{dt}$$

Denklem 5.7 veya Denklem 5.11' e göre

$$U_{C_2}(0^+) = U_{C_2}(0^-) + B_{2A} [E(0^+) - E(0^-)] + B_{2B} [U_s(0^+) - U_s(0^-)] =$$

$$U_{C_2}(0^+) = U_{C_2}(0^-) + \frac{C_1}{C_1+C_2} E + \frac{C_1}{C_1+C_2} [E(0^-) - U_{C_1}(0^-) - U_{C_2}(0^-)]$$

$$U_{C_2}(0^+) = \frac{C_1}{C_1+C_2} E + \frac{C_2}{C_1+C_2} U_{C_2}(0^-) - \frac{C_1}{C_1+C_2} U_{C_1}(0^-)$$

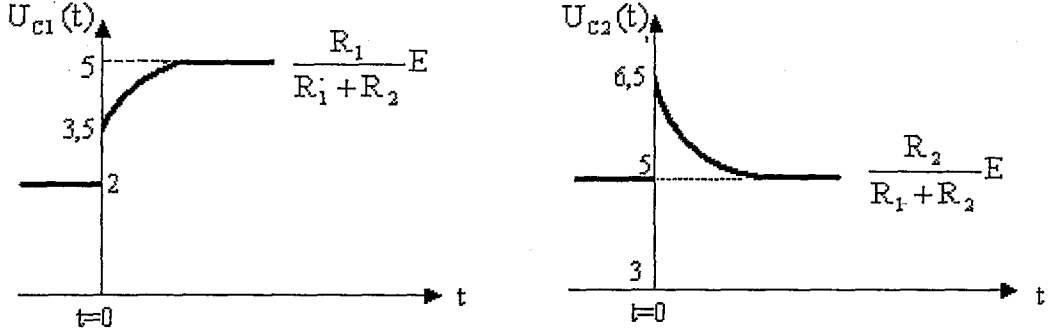
$$U_{C_2}(0^+) = 5 + \frac{6}{4} = 6.5V$$

$$U_{C_1}(0^+) = E - U_s(0^+) - U_{C_2}(0^+) = \frac{C_2}{C_1+C_2} E + \frac{C_1}{C_1+C_2} U_{C_1}(0^-) - \frac{C_2}{C_1+C_2} U_{C_2}(0^-) = 5 - \frac{6}{4} = 3.5$$

Görüldüğü gibi $t = 0^+$ ' da Kirchoff Gerilim Kanunu sağlanıyor. $t > 0$ için bu devreye ait tam çözümler ve grafikler de aşağıda verilmiştir.

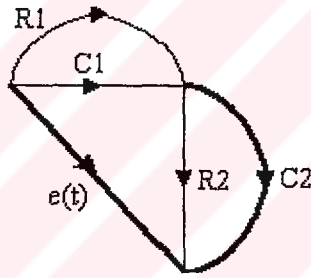
$$U_{C_1}(t) = U_{C_1}(0^+) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} E \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot u(t)$$

$$U_{C2}(t) = U_{C2}(0^+) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \cdot [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] \cdot u(t)$$



Şekil 5.11. U_{C1} ve U_{C2} 'nin zamana bağlı değişimleri

s domeni :



Şekil 5.12. s-domeni çözümü için devre grafi

$$I_{C2}(s) = I_{C1}(s) + I_{R1}(s) - I_{R2}(s)$$

$$s \cdot C_2 \cdot U_{C2}(s) - C_2 \cdot U_{C2}(0^-) = s \cdot C_1 \cdot [E(s) - U_{C2}(s)] - C_1 \cdot U_{C1}(0^-) + \frac{[E(s) - U_{C2}(s)]}{R_1} - \frac{U_{C2}(s)}{R_2}$$

$$C_1 + C_2 = C \quad \text{ve} \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \quad \text{olarak alırsak;}$$

$$U_{C2}(s) = \frac{R \cdot (1 + s \cdot C_1 \cdot R_1)}{R_1 \cdot (1 + s \cdot C \cdot R)} E(s) + \frac{C_2 \cdot R}{1 + s \cdot C \cdot R} U_{C2}(0^-) - \frac{C_1 \cdot R}{1 + s \cdot C \cdot R} U_{C1}(0^-)$$

$$e(t) = E.u(t) \Rightarrow E(s) = \frac{E}{s}$$

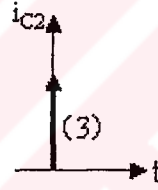
Denklem 5.12.'deki Başlangıç Değer Teoremi' ne göre,

$$U_{C2}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s.U_{C2}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{R.(1+s.C_1.R_1)}{R_1.(1+s.CR)} E + \frac{s.C_2.R}{1+s.CR} U_{C2}(0^-) - \frac{s.C_1.R}{1+s.CR} U_{C1}(0^-) \right]$$

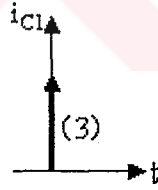
$$U_{C2}(0^+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} E + \frac{C_2}{C_1 + C_2} U_{C2}(0^-) - \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_{C1}(0^-)$$

Akımlar :

$$I_{C2} = C_2.[U_{C2}(0^+) - U_{C2}(0^-)]\delta(t) = 3.\delta(t)$$



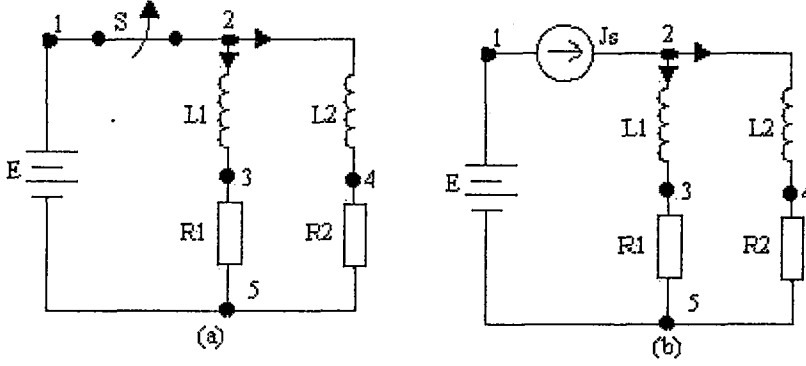
$$I_{C1} = C_1.[U_{C1}(0^+) - U_{C1}(0^-)]\delta(t) = 3.\delta(t)$$



Örnek 5.3. Şekil 5.13.'teki devrede uzun süre kapalı olan anahtar $t=0$ ' da açılıyor. $t = 0^+$ için t ve s domenlerinde $i_{L1}(0^+)$ ve $i_{L2}(0^+)$ değerleri bulunacaktır. Bölüm 4' teki Örnek 4.2' de aynı devrenin düğüm denklemlerine indirgeme kuralları uygulanarak durum denklemleri Denklem 4.26' daki gibi elde edilmiştir.

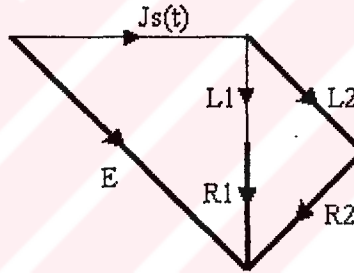
$$E = 12V, R_1 = 2\Omega, R_2 = 1\Omega, L_1 = 2H, L_2 = 4H,$$

$i_{L1}(0^-) = 6A$, $i_{L2}(0^-) = 12A$ ($t < 0$ için sürekli halden elde edilir.)



Şekil 5.13. Anahtarlamaalı bir elektrik devresi ve açılan anahtarın J_s akım kaynağı ile modelini içeren devre

t domeni :



Şekil 5.14. t -domeni çözümü için devre grafi

$$J_s(t) = \begin{cases} \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$U_{L1} = L \frac{di_{L1}}{dt} = -U_{R1} + U_{R2} + U_{L2} = -R_1 i_{L1} + R_2 (J_s - i_{L1}) + L_2 \frac{d(J_s - i_{L1})}{dt}$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} = -\underbrace{\frac{(R_1 + R_2)}{(L_1 + L_2)}}_A i_{L1} + \underbrace{\frac{R_2}{(L_1 + L_2)}}_{B1} J_s + \underbrace{\frac{L_2}{(L_1 + L_2)}}_{B2} \frac{dJ_s}{dt} = -\frac{1}{2} i_{L1} + \frac{1}{6} J_s + \frac{4}{6} \frac{dJ_s}{dt}$$

Bulunan sonuç Denklem 4.26 ile aynıdır. Bu durumda başlangıç şartları Denklem 5.7.'ye göre;

$$i_{L1}(0^+) = i_{L1}(0^-) + B_2 [J_s(0^+) - J_s(0^-)] = 6 + \frac{4}{6} \left[0 - 12 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] = -6A$$

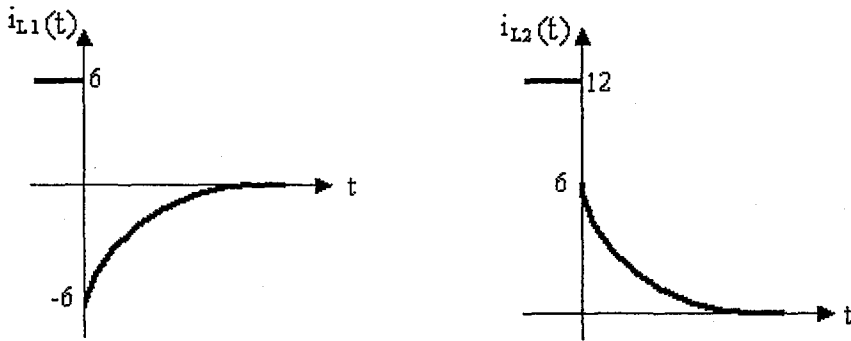
$$i_{L2}(0^+) = -i_{L1}(0^+) = -(-6) = 6A$$

olarak elde edilir.

Görüldüğü gibi $t = 0^+$ Kırchoff Akım Kanunu sağlanıyor. $t > 0$ için bu devreye ait tam çözümler ve grafikler aşağıda verilmiştir.

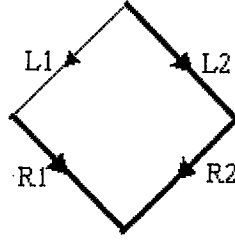
$$\frac{di_{L1}}{dt} = -\underbrace{\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}}_A i_{L1} \rightarrow i_{L1}(t) = i_{L1}(0^+) \cdot e^{-A \cdot t}$$

$$i_{L2}(t) = J_s - i_{L1}(t) = -i_{L1}(0^+) \cdot e^{-a \cdot t} = i_{L2}(0^+) \cdot e^{-a \cdot t}$$



Şekil 5.15. i_{L1} ve i_{L2} 'nin zamana bağlı değişimleri

s-domeni :



Şekil 5.16. s-domeni çözümü için devre grafi

$$U_{L1}(s) = U_{L2}(s) - U_{R1}(s) + U_{R2}(s)$$

$$sL_1 I_1(s) - L_1 i_{L1}(0^-) = sL_2 [-I_1(s)] - L_2 i_{L2}(0^-) - R_1 I_1(s) + R_2 [-I_1(s)]$$

$L = L_1 + L_2$ ve $R = R_1 + R_2$ olarak alırsak;

$$I_1(s) = \frac{L_1}{sL + R} i_{L1}(0^-) - \frac{L_2}{sL + R} i_{L2}(0^-)$$

Denklem 5.12' deki Başlangıç Değer Teoremi' ne göre;

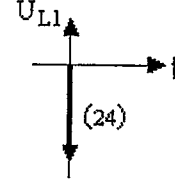
$$i_{L1}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s I_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{sL_1}{sL + R} i_{L1}(0^-) - \frac{sL_2}{sL + R} i_{L2}(0^-) \right]$$

$$i_{L1}(0^+) = \frac{L_1}{L} i_{L1}(0^-) - \frac{L_2}{L} i_{L2}(0^-) = \frac{L_1}{(L_1 + L_2)} \frac{E}{R_1} - \frac{L_2}{(L_1 + L_2)} \frac{E}{R_2}$$

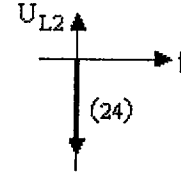
$$i_{L1}(0^+) = \frac{E}{L_1 + L_2} \left[\frac{L_1}{R_1} - \frac{L_2}{R_2} \right] = -6A$$

Gerilimler :

$$U_{L1} = L_1 \cdot (i_{L1}(0^+) - i_{L1}(0^-)) \cdot \delta(t) = -24 \cdot \delta(t)$$



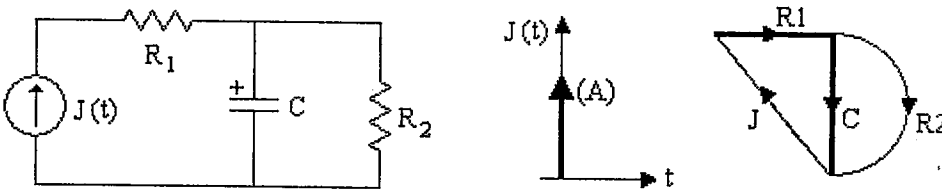
$$U_{L2} = L_2 \cdot (i_{L2}(0^+) - i_{L2}(0^-)) \cdot \delta(t) = -24 \cdot \delta(t)$$



5.3. İmpulsif Kaynak İçeren Devreler

Devrede impulsif kaynaklar olması durumunda, Bölüm 5.1' deki Teorem' in sonuçları doğrudan doğruya kullanılamaz. Çünkü teorem, kaynak fonksiyonlarının parçalı sürekli fonksiyonlar olması durumunda geçerliydi. Bu nedenle süreksizlik özelliğine sahip olan impulsif kaynaklar ($\delta(t)$), parçalı sürekli fonksiyon olan birim basamak fonksiyonunun ($u(t)$) türevi olduğu (Bölüm 1' de Denklem 1.10) gözönüne alınarak teorem uygulanabilir.

Örnek 5.4. Devredeki kaynak impulsifdir ($J(t) = A \cdot \delta(t)$). Buna göre $t \geq 0$ için $U_C(0^+)$ ve $U_C(t)$ elde edilecektir. $U_C(0^-) \neq 0$



Şekil 5.17. İmpulsif kaynak içeren devre, devreye ait impulsif kaynağın zamana bağlı değişimi ve devrenin t-domeni için çizilmiş grafi

t-domeni :

$$J(t) = A.\delta(t) = A \frac{du}{dt} \quad \text{olmak üzere;}$$

$$i_C = -i_{R_2} + j(t) \Rightarrow C \frac{dU_C}{dt} = -\frac{U_C}{R_2} + J(t) \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} = -\frac{U_C}{R_2 \cdot C} + \underbrace{\frac{A}{C}}_{\frac{1}{B_2}} \frac{du}{dt}$$

Denklem 5.7' ye göre;

$$U_C(0^+) = U_C(0^-) + B_2 \cdot [U(0^+) - U(0^-)] = U_C(0^-) + \frac{A}{C} [1 - 0] \Rightarrow U_C(0^+) = U_C(0^-) + \frac{A}{C}$$

s-domeni :

$$I_C(s) = -I_{R_2}(s) + J_s \Rightarrow s \cdot C \cdot U_C(s) - C \cdot U_C(0^-) = -\frac{1}{R_2} U_C(s) + A$$

$$U_C(s) \left[s \cdot C + \frac{1}{R_2} \right] = A + C \cdot U_C(0^-) \Rightarrow U_C(s) = \frac{R_2}{s \cdot R_2 \cdot C + 1} A + \frac{R_2 \cdot C}{s \cdot R_2 \cdot C + 1} U_C(0^-)$$

Denklem 5.12' deki Başlangıç Değer Teoremi' ne göre;

$$U_C(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot U_C(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s \cdot R_2}{s \cdot R_2 \cdot C + 1} A + \frac{s \cdot R_2 \cdot C}{s \cdot R_2 \cdot C + 1} U_C(0^-) \right\}$$

$$U_C(0^+) = U_C(0^-) + \frac{A}{C}$$

$t > 0$ için :

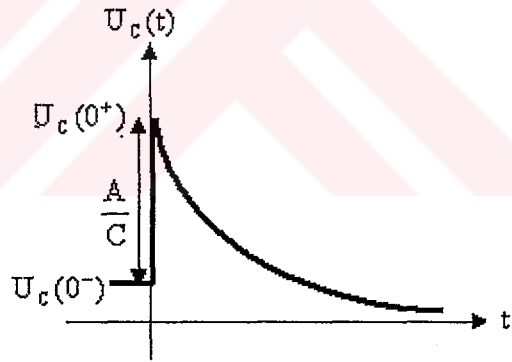
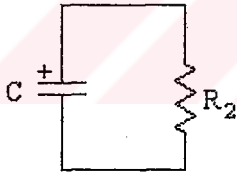
Kaynak $J(t) = A\delta(t)$ olduğundan yalnızca $t=0$ anında etkilidir. $t > 0$ için kaynaksız devre denklemleri (serbest davranış) geçerlidir.

Serbest davranışın genel gösterimi :

$$U_C(t) = U_C(0^+)e^{-t/\tau} \quad (U_C(0^+) \neq 0 \text{ için})$$

Buna göre;

$$U_C(t) = \left[U_C(0^-) + \frac{A}{C} \right] e^{-t/\tau} \quad \tau = R_2 \cdot C$$



Şekil 5.18. (a) $t > 0$ için devre şeması (b) $U_C(t)$ ' nin zamana bağlı değişimi

BÖLÜM 6. ANAHTARLAMALI DEVRELERİN KONTROL EDİLEBİLİRLİK VE GÖZLEMLENEBİLİRLİK YÖNÜNDEN İNCELENMESİ

Kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirliğin elektrik devreleri için önemi büyüktür. Kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirliğinin incelenmesi için öncelikle devreye ait durum denklemleri sistemini oluşturmak gerekir. Durum denklemleri sisteminde, sistem bilinmeyenleri (durum değişkenleri) olarak kapasite gerilimlerinin ve endüktans akımlarının seçilme zorunluluğu vardır. Bunun nedeni; kapasite üzerindeki gerilim değişiminin ve endüktansın üzerinden geçen akım değişiminin sürekli olmasıdır. Buna karşılık kapasiteden geçen akım değişimi ile endüktans üzerindeki gerilim değişimi süreksiz ve kontrolsüz artışlar içerir. Dolayısıyla durum değişkeni olarak seçilmezler. Bazı devrelerde kapasitelerin bazılarının gerilim değişimleri de akım değişimlerinde olduğu gibi peak bir değişim içerebilir. Bu durum devreye ait grafta kırıta kalan kapasiteler olması halinde söz konusu olur. Benzer durum, devre için çizilen grafta dala giren endüktansların akım değişimlerinde de görülür. Bu tür kapasite gerilimleri ve endüktans akımları, kapasite akım değişimi ve endüktans gerilim değişimlerinde olduğu gibi; süreksiz ve kontrol edilemeyen durumlardır. Bu değerler bazen çok büyük genlikli olabileceğinden tehlikeli olabilir. İşte bu nedenle; bir sistemin analizine geçmeden önce, o sistemin tam olarak kontrol edilip edilmediğine bakmak gerekir. Gözlemlenebilirlik ise sistemin istenen (incelenen) çıkışının durum değişkenlerine bağlı olarak değişip değişmediğini göstermesi açısından önemlidir.

6.1. Kontrol Edilebilirlik

Bir sistemde, sistemin herhangi bir $x(t)$ durum değişkeni, $u(t)$ kontrol vektörü yardımıyla sonlu bir t_x zamanı sürecinde belirli bir hedefe ulaştırılabiliyorsa sistem o $x(t)$ durumu

için ‘ kontrol edilebilir ’ denilmektedir. Eğer kontrol edilebilirlik sistemdeki tüm durum değişkenleri için mevcutsa, bu durumda sistem tam olarak kontrol edilebilirlik demektir.

6.2. Kontrol Edilebilirlik Kriterleri

6.2.1. Kalman kontrol edilebilirlik kriteri

Dinamik denklemleri;

$$\frac{dx(t)}{dt} = A.x(t) + B.u(t) \quad (6.1)$$

$$y(t) = C.x(t) + D.u(t) \quad (6.2)$$

olarak verilen lineer bir sistemi ele alalım. Denklem 6.1 ve Denklem 6.2’ de durum denklemleri ve çıkış denklemleri ile ifade edilmiş bir sistemin kontrol edilebilirliğini incelemek için pek çok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemlerinden biri Kalman tarafından ortaya konulmuştur. Kalman kriterine göre; söz konusu sistemin kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter koşul Denklem 6.3’ te “ K ” ile gösterilen kontrol edilebilirlik matrisinin rankının “ n ” olmasından ibarettir. n durum değişken sayısını ifade eder.

$$K = [B \quad A.B \quad A^2.B \quad . \quad . \quad . \quad A^{n-1}.B] \quad (6.3)$$

Kalman kriteri, görüldüğü gibi kontrol edilebilirlik tayini için çok açık ve kolay anlaşılır bir yöntemdir. Fakat buna karşın yüksek mertebeden ya da çok girişli sistemlere uygulamak kolay değildir. Bu nedenle kısıtlı ve yaygın olmayan bir kullanıma sahiptir. Dolayısıyla kontrol edilebilirlik için daha farklı metodların kullanılmasına gereksinim duyulmuştur. Bu amaçla geliştirilen yöntemlerden biri de benzerlik teoreminden yararlanılarak ortaya çıkarılmıştır. Bu yöntemin kullanım alanı Kalman Kriteri’ne oranla

daha geniş olmasına karşın dezavantajları da yok değildir. Özellikle de Benzerlik Dönüşümü sırasında yapılan matrissel işlemler Kalman Kriteri' ne göre dezavantaj gibi görünse de, Kalman Kriteri' ndeki gibi sınırlı kullanımın olmaması bu dezavantajı ortadan kaldırmaktadır.

6.2.2. Benzerlik dönüşümü ile kontrol edilebilirlik tayini

Benzerlik dönüşümü yardımıyla gerçekleştirilen bu yöntemde birincil amaç; Denklem 6.1' deki A matrisini köşegen matrisi haline getirecek $x = T.r$ dönüşümü yapılarak yeni r durum değişkenine göre

$$\frac{dr}{dt} = E.r(t) + F.u(t) \quad (6.4)$$

$$y = C.T.r + D.u \quad (6.5)$$

denklemlerini elde etmektir. Burada $E = T^{-1}.A.T$ ve $F = T^{-1}.B$ dir. T matrisi özdeğerlere bağlı olarak elde edilen özvektörlerden oluşan dönüştürme matrisidir. Benzerlik dönüşümü ile elde edilen F matrisinden sistemin kontrol edilebilirliği belirlenebilmektedir. Şöyle ki; F matrisinin hiç bir satırının sıfır olmaması sistemin tüm durumları için kontrol edilebilirliğini gösteren yeter ve gerek koşuldur. F matrisinde sıfır olan satır olması durumunda ise, o satıra ait durumun kontrol edilemediği, dolayısıyla sistemin tam olarak kontrol edilemediği anlaşılmaktadır.

6.3. Gözlemlenebilirlik

Kontrol sistemlerinde genellikle çıkış ve giriş ölçümlerinden durum değişkenleri hakkında bilgi edinilmek istenmektedir. Bunun için kontrol sisteminin durumlarının çıkış ile bağlantılı olması gerekmektedir. Kontrol sisteminin durumlarının çıkış ile

bağılantılı olması halinde, böyle bir sistem durum değişkenlerinin gözlemlenebilir olduğunu göstermektedir [8], [9], [10].

6.4. Gözlemlenebilirlik Kriterleri

6.4.1. Kalman gözlemlenebilirlik kriteri

Kontrol sistemlerinde kontrol edilebilirliğin belirlenebilmesi için kullandığımız kriterler, sistem çıkışına uygulanmak şartıyla gözlemlenebilirlik için de kullanılabilir. Bu kriterlerden ilki olan Kalman Kriteri' ne göre, bir kontrol sisteminin gözlemlenebilir olması için sistemin gözlemlenebilirlik matrisi G_k ' nin rankının n olması yeter ve gerek koşuldur [8], [9], [10].

$$G_k = [C \quad C.A \quad C.A^2 \quad . \quad . \quad C.A^{n-1}]^T \quad (6.6)$$

6.4.2. Benzerlik dönüşümü ile gözlemlenebilirlik tayini

Gözlemlenebilirlik tayini için diğer bir yöntem de, kontrol edilebilirlik tayininde de kullandığımız benzerlik dönüşümünden yararlanmak suretiyle elde edilmiştir.

y sistemin çıkışı olmak üzere,

$$y = C.x \quad \text{ve} \quad x = T.r$$

ise

$$y = C.T.r \quad (6.7)$$

elde edilir. Burada C.T matrisine bakılarak gözlemlenebilirlik belirlenebilmektedir. Bu kriterlere göre $C.T = M$ dersek, çıkışın gözlemlenebilir olması için M matrisinin hiçbir sütununun sıfır olmaması gerekmektedir.

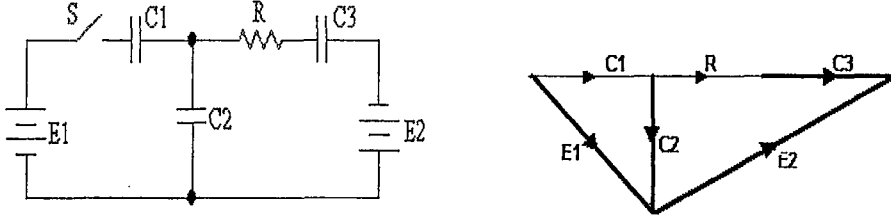
6.5. Anahtarlama Devrelerinde Kontrol Edilebilirlik ve Gözlemlenebilirlik

Anahtarlama devrelerinde, anahtarlama anlarında peak akım/gerilimler (Dirac impuls) görülmektedir. Anahtarlama elemanlarının ilk ve son konumlarına göre yapılacak bir incelemede, $t < 0$ için sorunsuz görünen bir devrede anahtarın konum değiştirmesiyle $t > 0$ durumunda anlık ve çok büyük genlikli değişimler olabilir. Bu değişimler devrelerin kararsız ve kontrolsüz olmasına yol açabilir. Açıklanan kriterler, anahtarlama devrelerinin kontrol edilebilirliği ve gözlemlenebilirliğinin belirlenmesinde bize yardımcı olmaktadır. Dolayısıyla sistemin zaman domeni çözümünü yapmadan sistem denklemleri üzerinde bu kriterleri uygulayarak, devrede Dirac impuls'ın olup olmadığını görebiliriz.

Elektrik devrelerinin kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik yönünden incelenmesinde görüldüğü gibi, öncelikle o devreye ait durum değişkenleri sistemi elde edilip sistemin parametrelerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bölüm 4' te Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri sisteminden Durum Değişkenleri sistemine geçiş yapıldı. Böylece değişken indirgenmesiyle elde edilen anahtarlama devrenin dinamik denklemleri üzerinde sözü edilen kriterler uygulanabilir.

Örnek 6.1. Şekil 6.1' deki devrenin Kalman Kriteri ve Benzerlik Dönüşümü yardımıyla kontrol edilebilirliği ve gözlemlenebilirliği incelenecektir. Anahtar $t > 0$ için kapalı konumdadır.

($R=1K$, $C_1 = C_2 = C_3 = 1000 \mu F$, $E_1 = E_2 = 10 V$).



Şekil 6.1. Anahtarlamalı bir elektrik devresi ve devre grafi

$t > 0$ için sistem denklemleri;

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_{C2} \\ U_{C3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R(C_1 + C_2)} & \frac{1}{R(C_1 + C_2)} \\ \frac{1}{RC_3} & -\frac{1}{RC_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C2} \\ U_{C3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} \\ 0 & \frac{1}{RC_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_1}{C_1 + C_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_{C2} \\ U_{C3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} U_{C2} \\ U_{C3} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_1} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_2} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1 u + B_2 \frac{du}{dt} \quad (6.10)$$

Denklem 6.9' da görüldüğü gibi sistem denklemlerinde kaynağın türevli bileşeni bulunmaktadır. Bu durum sistem değişkenlerinin peak akım ve gerilimler içerdiğini gösterir. Bu peak değişimler kontrol edilemeyen değişimlerdir. Sistemin kontrol edilebilirliğinin incelenmesi için öncelikle sistem denklemleri Denklem 6.1 formatına getirilmelidir. Bu amaçla, değişken dönüşümü yardımıyla sistem denklemlerinden kaynağın türevli bileşenleri yok edilir.

$$x = z + B_2 \cdot u \quad (6.11)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} + B_2 \cdot \frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = A \cdot z + (A \cdot B_2 + B_1) \cdot u \quad (6.12)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}}_B \cdot u \quad (6.13)$$

Böylece yukarıda açıklanan kontrol edilebilirlik metodları uygulanabilir.

1. Kalman Kontrol edilebilirlik Kriteri ile kontrol edilebilirlik tayini için öncelikle Kalman matrisi Denklem 6.14' teki gibi elde edilir.

$$K = [B \quad A \cdot B] = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 & 0.375 & 0.75 \\ 0.5 & 1 & -0.75 & -1.5 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Elde edilen K matrisinin rankı 1' dir. Bu durum sistem değişkenlerinin tam olarak kontrol edilemediğini gösterir.

2. Benzerlik dönüşümü yardımıyla kontrol edilebilirlik tayini için ilk olarak sistemin özdeğerleri ve özvektörler bulunur.

$$[sI - A] = 0 \Rightarrow s_1 = 0, \quad s_2 = -1.5 \Rightarrow x_{1öz} = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}, \quad x_{2öz} = \begin{bmatrix} -0.447 \\ 0.894 \end{bmatrix}$$

Bulunan bu özvektörlere göre benzerlik matrisi ;

$$T = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.447 \\ 0.707 & 0.894 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$E = T^{-1}.A.T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$F = T^{-1}.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.559 & 1.118 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

olarak bulunur. Denklem 6.16' daki E matrisi esas köşegen elemanları sistemin özdeğerleri olan matristir. Denklem 6.17' deki F matrisi ise sistemin kontrol edilebilirliğini gösteren matristir. Sistemin tam olarak kontrol edilebilir olması için F matrisinin hiçbir satırının sıfır olmaması gerekir. Oysa Denklem 6.17' deki matrisin 1. satırın tümüyle sıfır olduğu görülmektedir. Bu da sistemin tam olarak kontrol edilemediğini gösterir.

Sonuç olarak her iki kontrol edilebilirlik yöntemi de örnekteki anahtarlamalı devrede sistem değişkenlerinin tam olarak kontrol edilemediğini ve Dirac impuls içerdiğini göstermektedir.

Sistemin $y = \begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_R \end{bmatrix}$ çıkışı için gözlemlenebilirliğini inceleyelim.

1) Kalman Gözlemlenebilirlik Kriteri ile gözlemlenebilirlik tayini için öncelikle Kalman Gözlemlenebilirlik matrisi Denklem 6.18' deki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} U_{C1} \\ U_R \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} U_{C2} \\ U_{C3} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

$$G_k = [C \quad CA]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \\ -1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

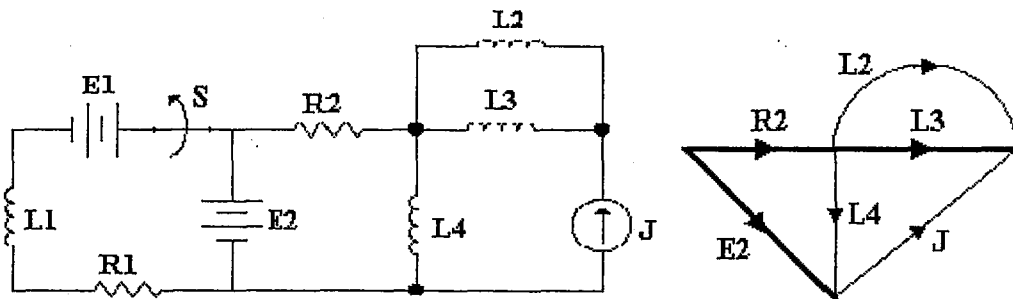
Matrisin rank' ı ikidir. Rankının iki olması $y = \begin{bmatrix} U_{Cl} \\ U_R \end{bmatrix}$ çıkışı için sistemin iki durum değişkeninin de gözlemlenebilir olduğunu gösterir.

2. Benzerlik dönüşümü yardımıyla gözlemlenebilirlik tayini için ilk olarak $x = T.r$ dönüşümü ile yapılır. T benzerlik matrisi, sistemin özvektörlerinden oluşan matristir. Denklem 6.15' te T marisi bulunmuştu. Bu durumda;

$$M = C.T = \begin{bmatrix} -0.707 & 0.447 \\ 0 & -1.341 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

M matrisinin sütunlarının hiçbiri sıfır değildir. Bu da sistemin durum değişkenlerinin seçilen çıkış için gözlemlenebilir olduğunu gösterir.

Örnek 2. Şekil 6.2' deki devrenin kontrol edilebilirliği ve gözlemlenebilirliği incelenecektir. Anahtar $t > 0$ için açık durumdadır. $R = 1 \text{ K}$, $L = 1 \text{ mH}$, $E = 10 \text{ V}$, $J = 6 \text{ A}$



Şekil 6.2 : Örnek 2 için çizilmiş devre şeması ve $t > 0$ için devre grafi

$$U_{L2} = U_{L3} \Rightarrow L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = L_3 \frac{d}{dt}(-J - i_{L2}) \Rightarrow \frac{di_{L2}}{dt} = \frac{-L_3}{L_2 + L_3} \frac{dJ}{dt} \quad (6.21)$$

$$U_{L4} = E_2 - U_{R2} \Rightarrow L_4 \frac{di_{L4}}{dt} = E_2 - R_2(i_{L4} - J) \Rightarrow \frac{di_{L4}}{dt} = \frac{E_2}{L_4} - \frac{R_2}{L_4} i_{L4} + \frac{R_2}{L_4} J \quad (6.22)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L2} \\ i_{L4} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L_4} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} i_{L2} \\ i_{L4} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L_4} & \frac{R_2}{L_4} \end{bmatrix}}_{B1} \begin{bmatrix} E_2 \\ j \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{L_3}{L_2 + L_3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B2} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E_2 \\ J \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Denklem 6.23' te görüldüğü gibi devre denklemlerinde kaynağın türevli bileşeni vardır. Denklem 6.11 yardımıyla, öncelikle bu bileşenler yok edilir ve eleman değerleri yerine konulursa

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1.10^6 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1000 & 1.10^6 \end{bmatrix}}_B u \quad (6.24)$$

elde edilir. Bu durumda Kalman kriterine göre;

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & 1.10^6 & 1.10^9 & 1.10^{12} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

ve $\text{rank}(K)=1$ dir. Sistem kontrol edilememektedir.

Benzerlik dönüşümüne göre;

Sistemin özdeğerleri $s_1=0$ ve $s_2=-1000000$

Öz vektörler $x_{1öz} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $x_{2öz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ise dönüşüm matrisi

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

şeklinde elde edilir.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1000000 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1000 & 1000000 \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

Denklem 6.28' de F matrisinin sıfır olan satır içerdiği görülmektedir. Bu da sistemin benzerlik dönüşümüne göre de kontrol edilemediğini ve Dirac Impuls içerdiğini göstermektedir.

Sistemin $y = \begin{bmatrix} i_{L3} \\ i_{R2} \end{bmatrix}$ çıkışı için gözlemlenebilirliğini inceleyelim.

$$y = \begin{bmatrix} i_{L3} \\ i_{R2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} i_{L2} \\ i_{L4} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} E_2 \\ J \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Kalman kriterine göre;

$$G_k = [C \quad C.A]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1.10^6 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Matrisin rank' ı ikidir. $y = \begin{bmatrix} i_{L3} \\ i_{R2} \end{bmatrix}$ çıkışı için sistemin iki durum değişkeni de gözlemlenebilmektedir.

Benzerlik dönüşümü yardımıyla;

$$M = C.T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

M matrisinin sütunlarının hiçbiri sıfır değildir. Bu da sistemin durum değişkenlerinin seçilen çıkış için gözlemlenebilir olduğunu gösterir.

BÖLÜM 7. BİR GÜÇ ELEKTRONİĞİ UYGULAMA DEVRESİ

Yarı iletken anahtarlama elemanlarının bulunduğu devrelerde, özellikle anahtarlama anlarında devrede impulsif (peak) akım ve gerilimler (Dirac İmpuls) görülebilir. Kapasite gerilimi ve endüktans akımlarının süreksiz olduğu bazı anahtarlama anlarında, Kirchoff Kanunlarının sağlanması için yük ve akımların yeniden dengelenmesi veya bölüşülmesi söz konusudur.

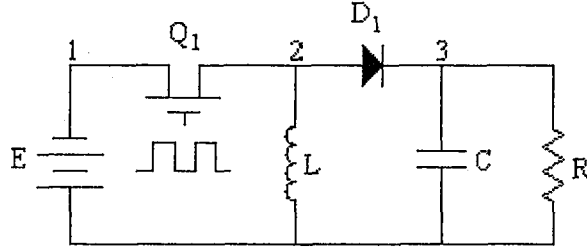
Anahtarlama devrelerinin analizinde, Dirac impulsları süreksizlik durumlarındaki akım ve gerilimleri ifade etmek için kullanılır [4]. Burada bir güç elektroniği uygulama devresinin zaman domeni analizinde, Dirac impulslarının nasıl ele alınacağı gösterilmiştir. Anahtarlama anlarında devrenin cevabı $x(t)$ iki parçaya ayrılır. İmpulsif bileşen $x_s(t)\delta(t)$ ve impulsif olmayan bileşen $x(t^+)$.

$$x(t) = x(t^+) + x_s(t)\delta(t) \quad (7.1)$$

Sistem cevabının ikiye ayrılması yalnızca anahtarlama anları için geçerlidir. İmpulsif olmayan bileşen $x(t^+)$, her zaman sonlu ve anahtarlama sonrası devrenin uygun başlangıç koşuludur. İmpulsif bileşen $x_s(t)\delta(t)$ sınırsızdır, fakat impulsun alanını gösteren impuls çarpanı $x_s(t)$ sonludur ve devre üzerinden belirlenebilir. Bu çarpan Dirac impuls' u ifade eder.

Anahtarlama devrelerinin analizinde, her bir anahtarlama durumu ayrı ayrı incelenir. Anahtar sayısı n ise, toplam 2^n adet topoloji olur. Anahtarlar ideal olarak kabul edilmiştir. Yani iletimde sıfır değerli gerilim kaynağı U_s , kesimde sıfır değerli akım kaynağı J_s ile modellenmiştir.

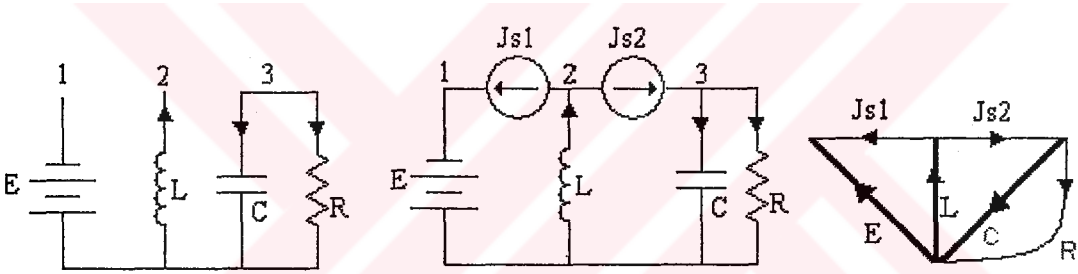
Örnek 7.1. Şekil 7.1’deki konvertör devresinin analizi yapılacaktır.



Şekil 7.1. İdeal flyback anahtarlamaalı konvertörün devre şeması

Devrede iki anahtar bulunduğuna göre $2^2 = 4$ topoloji mevcuttur.

Durum 1 : Q_1 ve D_1 kesimde



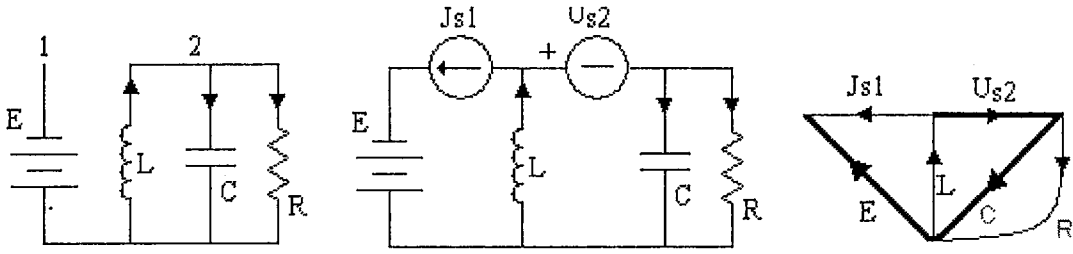
Şekil 7.2. Q_1 ve D_1 kesimdeyken devre şemaları ve devre grafi

Şekil 7.2’deki devreye ait grafta endüktans dalda yer aldığı için, bu durumda devrede impulsif bir değer görülür. Denklem 7.1’ e ilişkin düğüm denklemleri:

$$x(0) = \begin{bmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ U_3(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \\ 0 \\ U_C(0^-) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Li_L(0^-) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (7.2)$$

2 numaralı düğümde impulsif bir gerilim görülmektedir.

Durum 2 : Q_1 kesimde, D_1 iletimde



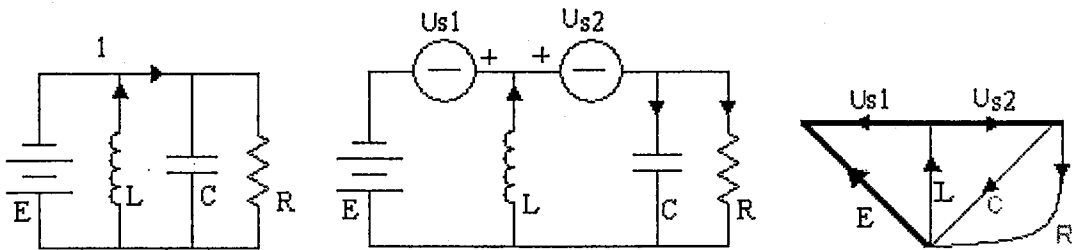
Şekil 7.3. Q_1 kesimde, D_1 iletimdeyken devre şemaları ve devre grafi

Şekil 7.3' deki devre grafında endüktans kirişte, kapasite dalda yer aldığı için, bu durumda devrede impulsif bir değer görülmez. Denklem 7.1' e ilişkin düğüm denklemleri:

$$x(0) = \begin{bmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ i_L(0) \\ i_{D1}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \\ U_C(0^-) \\ i_L(0^-) \\ i_L(0^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (7.3)$$

Bu durumda, önceki durumun değerleri anahtarlama sonrası da geçerlidir.

Durum 3 : Q_1 ve D_1 iletimde



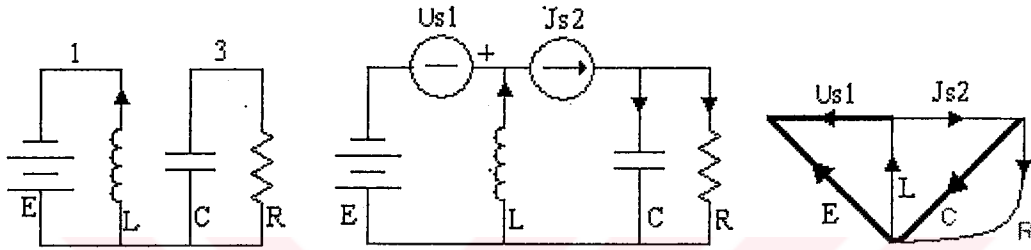
Şekil 7.4. Q_1 ve D_1 iletimdeyken devre şemaları ve devre grafi

Şekil 7.4 ' deki devre grafında kapasite kirişte yer aldığı için, bu durumda devrede impulsif bir değer görülür. Denklem 7.1' e ilişkin düğüm denklemleri :

$$x(0) = \begin{bmatrix} U_1(0) \\ i_L(0) \\ i_D(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \\ i_L(0^-) \\ -E/R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -C[E + U_C(0^-)] \end{bmatrix} \delta(t) \quad (7.4)$$

Kapasite akımında impulsif bir değişim görülmektedir.

Durum 4 : Q_1 iletimde, D_1 kesimde



Şekil 7.5. Q_1 iletimde, D_1 kesimdeyken devre şemaları ve devre grafi

Şekil 7.5' deki devre grafında endüktans kirişte, kapasite dalda yer aldığı için, bu durumda devrede impulsif bir değer görülmez. Denklem 7.1' e ilişkin düğüm denklemleri :

$$x(0) = \begin{bmatrix} U_1(0) \\ U_3(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \\ U_C(0^-) \\ i_L(0^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (7.5)$$

Bu durumda, önceki durumun değerleri anahtarlama sonrasında da geçerlidir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Elektrik devrelerinin doğru şekilde analizinin yapılabilmesi için ilk koşulların mutlaka belirlenmesi gerekir. Anahtarlanmamış lineer devrelerde kapasite ve endüktansların başlangıç değerleri doğrudan sistemin ilk koşulu olarak alınır. Anahtarlama veya impulsif kaynak içeren devrelerde ise başlangıç koşullarını belirlemek biraz daha zordur. Bu gibi durumlarda sistem denklemlerinde kaynağın türevli bileşenleri görülebilir. Bu da devrede peak akım ve gerilim olduğunu gösterir. Bu nedenle başlangıç değerlerinin bu durumlar dikkate alınarak yeniden hesaplanması gerekir. Aksi takdirde başlangıç şartları yanlış alınmış olacağından devrenin analizi de hatalı yapılmış olacaktır. Bu çalışmada; hangi durumlarda başlangıç koşullarının yeniden hesaplanması gerektiği ve bu hesaplamaların nasıl yapıldığı anlatılmıştır. Bu amaçla, öncelikle sistem denklemlerinin kolayca elde edilmesine imkan tanıyan ve Özellikle bilgisayar destekli devre analizi programlarında yaygın olarak kullanılan Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri Yöntemi kullanılmıştır. G.D.D. yöntemi Anahtarlama devrelerin analizinde de oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Sistem denklemlerinin çok kolay bir şekilde elde edilmesine imkan tanır ve böylece sistem denklemlerinin oluşturulma süresinde indirgeme elde edilir. Daha sonra dönüşüm yöntemi uygulanarak Durum Denklemleri Sistemi' ne geçilmiştir. Çünkü G.D.D. yönteminde bilinmeyen sayısı çoktur ve büyük boyutlu matrisel işlemlere gereksinim duyar. D.D. yönteminde ise bilinmeyen sayısı minimumdur. Bu denklem sistemi üzerinden $t=0^+$ daki başlangıç değerleri $t=0^-$ 'deki (anahtarlama öncesi) değerler cinsinden belirlenmiştir.

Ayrıca anahtarlama devreler kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik yönünden incelenmiştir. Bu incelemedeki amaç; peak akım ya da gerilim içeren devrelerde bu anlık peak değişimlerin, devre çözdürülmeden de tespit edilebileceğini göstermektir.

Çalışmanın amacı anahtar modelleme olmadığı için anahtar modeli üzerinde durulmamış ve anahtarlama devrelerinin analizi yapılırken ideal anahtar modeli kullanılmıştır. Fakat farklı anahtar modelleri ile analizler gerçekleştirilebilir.



KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER

- [1] DEMİR, M. and YILDIZ, A.B., 2004. "Defining of the Initial Conditions in the Switching Circuits ", IEEE MELECON 2004 Conf., Dubrovnik-Croatia, May 12-15



KAYNAKLAR

- [1] SUDHA, S.A., et al., 1993. " New Approach to Switch Modelling in the Analysis of Power Electronic Systems ", IEE Proc.-B, Vol.140, No.2, pp.115-123
- [2] MIDDLEBROOK, R.D. and CUK, S., 1976. " A General Unified Approach to Modelling Switching-Convertor Power Stages ", IEEE Power Electronic Spec. Conf. Record. USA
- [3] CHUNG, H. and IOINOVICI, A., 1994. "Fast Computer-Aided Simulation of Switching Power Regulators Based on Progressive Analysis of the Switches' State", IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 9, No. 2, March
- [4] VLACH, J. and BEDROSIAN, D., 1992. "Time-Domain Analysis of Networks with Internally Controlled Switch", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 39, No. 3, March
- [5] TOKAD, Y., 1987. " Devre Analizi Dersleri ", II. Baskı, Cilt 4. Çağlayan Yay., İstanbul
- [6] YILDIZ, A.B., 1998, "Lineer Anahtar Modeli Kullanılarak Güç Elektroniği Devrelerinin Zaman Domeni Analizi", Doktora Tezi, KOÜ
- [7] NATARAJAN, S. 1991. " A Systematic Method for Obtaining State Equations Using MNA ", IEE Proc.-G, Vol. 138, No.3, June
- [8] DEMİR, M., 2003. " Anahtarlama Devrelerinde Kontrol Edilebilirlik ve Gözlemlenebilirlik ", KOÜ Seminer, Mayıs
- [9] KUO , B.C. , 2002. " Otomatik Kontrol Sistemleri ", İstanbul
- [10] SARIOĞLU, M. K., 1999. "Otomatik Kontrol 2", Birsen Yayınevi, İstanbul
- [11] CHUA, L. And LIN, P. , 1975. " Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits, Algorithm and Computational Technique. " , Prentice Hall, New Jersey
- [12] EDMINSTER, J., 1980. "Schaum's Outline Series", Çeviri Güven Kitabevi, Ankara

- [13] ERK, Ş., 1989. "Fizik Ders Notları-Elektrik ve Magnetizma", Cilt III, İstanbul Üni. Fen Fk. Basımevi, İstanbul
- [14] HALLIDAY, D., RESNICK, R. and WALKER, J., 1993. "Fundamental of Physics", Fourth Edition, John Wiley & Sons Inc.
- [15] HO C.-W, et al, 1975. "The Modified Nodal Approach to Network Analysis", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.22, No.6
- [16] KÖKSAL, M., 1975. "Lineer Sistemlerin Analizinde Kullanılan ve İçinde Kaynak Fonksiyonlarının Türevleri de Bulunan Durum Denklemleri İçin Yeni Bir Durum Vektörü", T.B.T.A.K. V. Bilim Kongresi
- [17] KÖKSAL, M. and TOKAD Y., 1978. "Determination of Initial Conditions in Active RLC Networks", Circuit Theory and Applications, Vol. 6, 5-11
- [18] MATHEWS, J.H., 1992. "Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering", Prentice Hall, 2nd Edition, USA.
- [19] OPAL, A. and VLACH, J., 1990. "Consistent Initial Conditions of Linear Switched Networks", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.37, No.3, March
- [20] OPAL, A. and VLACH, J., 1991. "Consistent Initial Conditions of Nonlinear Networks with Switches", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 38, No.7, July
- [21] ÖZAY, H. YURDAKUL, C., PEMBEÇİ, S., KHALDUN, A., 1976. "Electrical Systems Analysis", ODTÜ Yayınları, ANKARA
- [22] URAL, O., 1992. "Fizik 2", Oran Yayıncılık ve San. Ltd. Şti., II. Baskı, İzmir
- [23] VLACH, J. and SINGHAL, K., 1983. "Computer Methods for Circuit Analysis and Design." Van Nostrand, New York
- [24] YILDIZ, A.B., 2001. "Elektrik Devreleri, Teori ve Çözümlü Örnekler", Kısım I (Ders Notu), Kocaeli Üniversitesi. Yayınları, No:42, Mart
- [25] YILDIZ, A.B., 2003. "Elektrik Devrelerinin Bilgisayar Yardımıyla Analizi", KOÜ Y.L.- Doktora Ders Notları
- [26] YILDIZ, A.B., 2003. "Güç Elektronik Devrelerinin Analizi ve Modellenmesi", KOÜ Y.L.-Doktora Ders Notları
- [27] YILDIZ, A.B. and ABUT, N., 1998. "An Efficient Approach to Modelling and Analysis of Power Electronic Circuits", Proceedings of IEEE, 13th Annual Applied Power Electronic Conference (APEC'98). Vol.1, pp. 344-349 California.

- [28] YILDIZ , A.B., ÇAKIR, B., İNANÇ N., ABUT N., 1999. “A Fast Simulation Technique for the Power Electronic Converters”, IEEE Proc., 14th Annual Applied Power Electronic Conf. (APEC’ 99). March 1999, Dallas-USA
- [29] YUAN, F. and OPAL, A., 2003. “Computer Methods for Switched Circuits ”, IEEE Transactions on Circuits and Systems-1: Fundamental Theory and Applications, Vol.50, No.8, August



ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında İstanbul' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul' da tamamladı. 1995 yılında başladığı Kocaeli Üniversitesi Elektrik Mühendisliği Bölümü' nden 2000 yılında mezun oldu. 2002 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Mühendisliği Bölümü' nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır..

