KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DOĞRUSAL OLMAYAN GERÇEKLEME METODU KULLANILARAK AYAR TEORİLERİNİN KURULMASI

AHMET SABAN

KOCAELİ 2014

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DOĞRUSAL OLMAYAN GERÇEKLEME METODU KULLANILARAK AYAR TEORİLERİNİN KURULMASI

AHMET SABAN

Yrd.Doç.Dr. Oktay CEBECİOĞLU
Danışman, Kocaeli Üniv. ....

Yrd.Doç.Dr. Abdurrahman ANDİÇ
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. ....

Yrd.Doç.Dr. Mustafa ERKOVAN
Jüri Üyesi, Sakarya Üniv. ....

Tezin Savunulduğu Tarih: 03.02.2014

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Daha önce farklı metotlar kullanılarak kurulan ayar teorileriyle kütle çekimine yeni katkılarda bulunulmuş, Lagranjiyene katkılar elde edilmiştir. Bu çalışmada, çeşitli grupların ayar teorilerinin kurulmasında doğrusal olmayan gerçekleme metodunun kullanılmasını inceledik.

Çalışma sürecinde desteklerinden dolayı danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Oktay Cebecioğlu, Yrd. Doç. Dr. Abdurrahman Andiç ve Salih Kibaroğlu'na teşekkür ederim.

Ocak - 2014 Ahmet SABAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

$a, b, c\ldots$	: Tanjant uzay indisleri (Küçük Latin harfleri)
$\alpha, \beta, \gamma\ldots$	: Uzay-zaman indisleri (Küçük Yunan harfleri)
a^a	: Momentum üreticisine bağlı sonsuz küçük parametre
D	: Ölçekleme üreticisi
$e^a{}_\mu$	: Momentum üreticisine bağlı ayar alanı
F^a	: Momentum üreticisine bağlı eğrilik
F^{ab}	: Tensör üreticisine bağlı eğrilik
F	: Ölçekleme üreticisine bağlı eğrilik
f^C_{AB}	: Yapı sabiti
G	: Bir Lie grubu
g	: Grup elemanı
$g_{\mu\upsilon}$	: Metrik tensör
h	: Alt grup
K	: Eş küme (Koset)
L	: Lie cebri
L	: Lagranjiyen
$\mathcal{L}$	: Lagranjiyen yoğunluğu
M^{ab}	: Açısal momentum üreticisi
P^a	: Momentum üreticisi
$R^\delta{}_{\mu\upsilon\gamma}$	: Riemann eğrilik tensörü
$R_{\mu\upsilon}$	: Ricci tensörü
R	: Ricci skaleri
R^{ab}	: Açısal momentum üreticisine bağlı eğrilik
S	: Eylem
u^{ab}	: Açısal momentum üreticinse bağlı sonsuz küçük parametre
x^a	: Momentum üreticisine bağlı alan
Z^{ab}	: Tensör üretici
λ	: Ölçekleme üreticisine bağlı sonsuz küçük parametre
θ^{ab}	: Tensör üreticisine bağlı alan
σ	: Ölçekleme üreticisine bağlı alan
ε^{ab}	: Tensör üreticisine bağlı sonsuz küçük parametre
φ	: Herhangi bir alan
ω^{ab}	: Açısal momentum üreticisine bağlı alan
δ	: Değişim
$\eta_{\mu\upsilon}$	: Minkowski metriği
$[,]$	: Komütasyon
$\cdot$	: Skaler çarpım operatörü
∂	: Kısmi türev operatörü
$\vert$	: İndis ayracı

DOĞRUSAL OLMAYAN GERÇEKLEME METODU KULLANILARAK AYAR TEORİLERİNİN KURULMASI

ÖZET

Bin dokuz yüz elli ve altmışlı yıllarda özellikle aralarında Utiyama, Sciama ve Kibble'ın bulunduğu fizikçiler uzay-zaman simetrisine karşılık gelen grupları yerel inceleyerek kütle çekimi için Einstein alan denklemlerine ulaşılabileceğini gösterdiler. Daha sonra çeşitli gruplar genişletilerek ayar teorileri kuruldu ve kütle çekimine yeni katkılar elde edildi.

Biz bu tezde doğrusal olmayan gerçekleme metodunu kullanarak ayar teorisinin kurulmasını inceledik ve kütle çekimi için yeni eğrilikler elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Ayar Alan Teorisi, Doğrusal Olmayan Gerçekleme, Grup Teori, Kütle Çekimi, Lagranjiyen.

CONSTRUCTING GAUGE THEORIES BY USING NONLINEAR REALIZATION METHOD

ABSTRACT

In 1950's and 1960's, physicists among them especially Utiyama, Sciama and Kibble showed that the Einstein Field Equations for the gravity can be obtained by making space-time symmetry groups local. After that gauge theories of various groups are established by extending them and new contributions to the gravitation are found.

In this thesis we discussed the nonlinear realization method to construct gauge theories of gravity and from there we obtained new curvatures for the gravitation.

Keywords: Gauge Field Theory, Nonlinear Realization, Group Theory, Gravitation, Lagrangian.

GİRİŞ

Utiyama (1956) Lorentz grubunu yerel dönüşümler altında inceleyerek Einstein kütle çekim alan denklemini elde etti. Bu sayede Utiyama uzay-zaman simetrilerinin yerel incelenmesiyle kütle çekim teorisinin elde edilebileceğini ilk olarak göstermiş oldu. Kibble (1961), Utiyamanın sonuçlarını genelleştirdi ve uzay-zaman simetrisi olarak Poincare grubunu kullandı. Kibble bu grubu yerel inceleyerek; Einstein-Cartan denklemi olarak da bilinen uzay-zamanda burulmayı içeren kütle çekimini elde etti. İlerleyen yıllarda ise diğer simetri grupları (DeSitter, Weyl, Konformal…) için de benzer çalışmalar (Charap ve Tait, 1974), (Ogievetsky, 1974), (Hori ve diğ., 1974), (Kasuya, 1975), (Hehl, 1979), (Ivanov ve Niederle, 1982a), (Ivanov ve Niederle, 1982b), (Blagojevic, 2002a), (Blagojevic, 2002b), (Ali ve diğ., 2009) yapıldı. Bu çalışmalar geometrik yollardan türetilmiş olan kütle çekimi denklemlerinin ayar teorisi ile tekrar elde edilebileceğini göstermiştir.

D. V. Soroka ve V. A. Soroka (2005) tarafından Poincare grubu bir antisimetrik tensör üretici ile genişletildi ve buna bağlı ayar teorisi oluşturulup (D. V. Soroka ve V. A. Soroka, 2012) yeni bir Lagranjiyen yazıldı. Tensör üreticinin kullanılmasındaki motivasyon daha önceden bilinen Maxwell grubuydu. Maxwell grubu, Poincare grubunun genişletilmiş halidir ve uzay-zamana bağlı antisimetrik bir tensör üretici içerir. Bu üretici elektromanyetik gerilme tensörüne karşılık gelmektedir. Ayrıca bu grubun incelenmesiyle (Bacry ve diğ., 1970), (Schrader, 1972) sabit bir elektromanyetik alan içinde hareket eden yüklü bir parçacığa ait hareket denklemi elde edilmişti.

Bu çalışmanın birinci bölümde Grup Teoriye kısa bir giriş yapılarak çeşitli fizikçilerin (Callan ve diğ., 1969), (Coleman ve diğ., 1969), (Salam ve Strathdee, 1969a) katkılarıyla geliştirilen doğrusal olmayan gerçekleme (non-linear realization) metodu için gerekli eş küme kavramı tanıtıldı. Daha sonra çeşitli çalışmalarda (Salam ve Strathdee, 1969b), (Okabayashi ve Watanabe, 1970), (Isham ve diğ., 1971), (Srivastava, 1973) irdelenen uzay-zaman simetrilerinden özellikle Poincare ve Conformal grupları ele alarak eş küme kavramının nasıl kullanılacağı üzerinde duruldu. Buradan hareketle Conformal grup için Maurer-Cartan Formları eş küme kavramı yardımıyla bulundu. Daha sonra Ivanov ve Niederle (1982) tarafından yayınlanan “Gauge formulation of gravitation theories. I. The Poincare, de Sitter, and conformal cases” başlıklı makale üzerinden ara işlemler açılarak sırasıyla Poincare ve Conformal grupların ayar teorileri incelendi ve buradaki üreticilere karşılık gelen eğrilikler ve bunların ayar alan altındaki dönüşümleri bulundu.

İkinci bölümde; birinci bölümde tanıtılan doğrusal olmayan gerçekleme metodunu kullanarak, çeşitli çalışmalarla (Azcarraga ve diğ., 2011), (Durka ve diğ., 2011), (Fedoruk ve Lukierski, 2012), (Gomis ve diğ., 2013) gerçekleştirilen tensor-extended uygulamalara paralel olarak Poincare ve Weyl gruplarının antisimetrik bir tensörle genişletilmesiyle elde edilen grupların ayar teorisini oluşturduk ve bu genişletilmiş uzay-zamanın üreticilerine karşılık gelen eğrilikleri ve bunların dönüşümlerini elde ettik.

1. DOĞRUSAL OLMAYAN GERÇEKLEME

1.1. Kısaca Grup Teori

Herhangi $g_1, g_2 \in G$ için $g_1.g_2 = g \in G$ biçiminde tanımlanabilecek çarpım kuralını sağlayan G kümesi için;

1) $g_1, g_2, g_3 \in G$ olmak üzere tüm g_1, g_2, g_3 elemanları için $(g_1.g_2).g_3 = g_1.(g_2.g_3)$ (birleşme özelliği),
2) $g \in G$ olmak üzere herhangi bir g için $e.g = g.e = g$ olacak şekilde bir $e \in G$ (birim eleman özelliği),
3) Herhangi bir $g \in G$ için $e \in G$ birim eleman olmak üzere $g.g^{-1} = g^{-1}.g = e$ (ters eleman özelliği)

şartlarını sağlayan G kümesine grup denir. $H \subset G$ için H kümesi de kendi içinde yukarıdaki özellikleri sağlıyorsa H için de G'nin bir alt grubudur denir.

g, H alt grubunu içeren bir G grubunun elemanı olsun. Bu G grubu elemanlarının denklik sınıflarını tanımlayalım: $h \in H$ olmak üzere g ve g' gibi iki eleman $g' = g.h$ veya $g^{-1}.g' \in H$ gibi bir sağdan çarpımla ilişkilendirilebiliyorsa bu iki eleman denktir denilir. Bu denklik sınıfına g'nin (sol) eş kümesi denir. Tüm eş kümelerin dizisi bir manifolddur ve G/H ile gösterilir.

1.2. Eş Küme Kavramının Kullanılmasıyla Doğrusal Olmayan Gerçeklemenin İncelenmesi

Eğer her eş küme bir L elemanı içeriyorsa, gerekli olduğu kadar parametreyle etiketlenmiş $L(x)$ elemanları kümesi eş küme uzayını parametrize eder. $L(x)$ parametrizasyonunu seçtiğimizde her g grup elemanı $g = L(x)h$ şeklinde ifade edilebilir. Burada $L(x)$, g'nin ait olduğu eş kümenin temsilci elemanıdır ve h eş küme içerisinde $L(x)$'i g'ye bağlar.

$L(x)$'in keyfi bir g ile çarpımı; $gL(x) = L(x')h$ şeklinde ifade edilebilir. Burada x' ve h; x ve g'nin $x' = x'(x,g)$ ve $h = h(x,g)$ şeklinde tanımlanabilecek genel fonksiyonlarıdır.

Örneğin; Poincare/Lorentz eş küme uzayı tipik bir dört boyutlu uzay-zamandır. Bu eş küme uzayını $L(x) = e^{ix\cdot P}$ ile parametrize edelim.

$g = e^{ia\cdot P}$ için;

$$gL(x) = e^{ia\cdot P} e^{ix\cdot P} = e^{i(x+a)\cdot P} \equiv L(x')h \tag{1.1}$$

$$x' = x + a\ ; \tag{1.2}$$

$$h = 1 \tag{1.3}$$

$g = e^{-\frac{i}{2}\omega M} \in H$ için;

$$\begin{aligned} gL(x) &= e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} e^{ix\cdot P} \\ &= \left(e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} e^{ix\cdot P} e^{\frac{i}{2}\omega\cdot M} \right) e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \\ &= \exp\left\{ e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} ix\cdot P e^{\frac{i}{2}\omega\cdot M} \right\} e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{2}\omega M} e^{ixP} e^{\frac{i}{2}\omega M} &= U(\Lambda) ix^{\mu} P_{\mu} U^{+}(\Lambda) = ix^{\mu} U(\Lambda) P_{\mu} U^{+}(\Lambda) \\ &= ix^{\mu} \Lambda^{\mu}_{\ \nu} P^{\nu} = ix(\Lambda P) = i(\Lambda x)P \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$gL(x) = e^{i(\Lambda x)\cdot P} e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \equiv L(x')h \tag{1.6}$$

$$x' = \Lambda x\ ; \tag{1.7}$$

$$h = e^{-\frac{i}{2}\omega M} \tag{1.8}$$

Poincare grup elemanının $L(x)$ eş kümesi üzerindeki etkisi;

$$e^{ia\cdot P}e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M}L(x)=L(x')e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{1.9}$$

$$x'=\Lambda x+a \tag{1.10}$$

1.3. Conformal Gruba Uygulanması

Genel grup elemanı exponansiyel olarak aşağıdaki şekilde parametrize edilirse;

$$g=e^{ix\cdot P}e^{ib\cdot K}e^{i\lambda\cdot D}e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{1.11}$$

sabit bir grup elemanı için de;

$$g'=e^{ia\cdot P}e^{i\beta\cdot K}e^{i\sigma\cdot D}e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{1.12}$$

ifadesi kullanılabilir. Kararlılık grubu olarak Lorentz grubu seçilirse eş küme elemanı aşağıdaki yapıdadır;

$$L(x,b,\lambda)=e^{ix\cdot P}e^{ib\cdot K}e^{i\lambda\cdot D} \tag{1.13}$$

Sonsuz küçük öteleme dönüşümü altında;

$$\begin{aligned}
&e^{ia\cdot P}L(x,b,\lambda)=L(x',b',\lambda')h\\
&e^{ia\cdot P}e^{ix\cdot P}e^{ib\cdot K}e^{i\lambda\cdot D}=e^{ix'\cdot P}e^{ib'\cdot K}e^{i\lambda'\cdot D}h\\
&e^{i(x+a)\cdot P}e^{ib\cdot K}e^{i\lambda\cdot D}=e^{ix'\cdot P}e^{ib'\cdot K}e^{i\lambda'\cdot D}h
\end{aligned} \tag{1.14}$$

eş küme parametreleri aşağıdaki şekilde dönüşür;

$$\begin{aligned}
&\delta x^a=x^{a\prime}-x^a=a^a\\
&\delta b^a=b^{a\prime}-b^a=0\\
&\delta\lambda=\lambda'-\lambda=0\\
&h=1
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Sonsuz küçük özel conformal dönüşüm altında ise eş küme parametrelerinin değişimi Denklem (1.16) ile verilir;

$$
\begin{aligned}
&e^{i\beta\cdot K}L(x,b,\lambda) = L(x',b',\lambda')h \\
&e^{i\beta\cdot K}e^{ix\cdot P}e^{ib\cdot K}e^{i\lambda\cdot D} = e^{ix'\cdot P}e^{ib'\cdot K}e^{i\lambda'\cdot D}h
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Burada;

$$
\begin{aligned}
\tilde{g} &= e^{-ix\cdot P}e^{i\beta\cdot K}e^{ix\cdot P} \\
&= \exp\left(e^{-ix\cdot P}i\beta\cdot K e^{ix\cdot P}\right)
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Denklem (1.17) kulanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

$$
\begin{aligned}
&\delta x^a = 2(\beta\cdot x)x^a - x^2\beta^a \\
&\delta b^a = \beta^a + 2(\beta\cdot x)b^a + 2(x\cdot b)\beta^a - 2(\beta\cdot b)x^a \\
&\delta\lambda = -2(\beta\cdot x) \\
&\delta\omega^{ab} = 2\left(\beta^a x^b - \beta^b x^a\right)
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Sonsuz küçük ölçekleme dönüşümü altında eş küme parametrelerindeki değişim ise;

$$
\begin{aligned}
&e^{i\sigma.D}L(x,b,\lambda) = L(x',b',\lambda')h \\
&e^{i\sigma.D}e^{ix.P}e^{ib.K}e^{i\lambda.D} = e^{ix'.P}e^{ib'.K}e^{i\lambda'.D}h \\
&\left(e^{i\sigma.D}e^{ix.P}e^{-i\sigma.D}\right)\left(e^{i\sigma.D}e^{ib.K}e^{-i\sigma.D}\right)\left(e^{i\sigma.D}e^{i\lambda.D}\right) = e^{ix'.P}e^{ib'.K}e^{i\lambda'.D}h
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

şeklinde olup buradan aşağıdaki katkılar bulunur;

$$
\begin{aligned}
&\delta x^a = \sigma x^a \\
&\delta b^a = -\sigma b^a \\
&\delta\lambda = \sigma \\
&h = 1
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Lorentz dönüşümü altındaki değişim ise;

$$
\begin{aligned}
&e^{-\frac{i}{2}u.M}L(x,b,\lambda) = L(x',b',\lambda')h \\
&e^{-\frac{i}{2}u.M}e^{ix.P}e^{ib.K}e^{i\lambda.D} = L(x',b',\lambda')h \\
&\left(e^{-\frac{i}{2}u.M}e^{ix.P}e^{\frac{i}{2}u.M}\right)\left(e^{-\frac{i}{2}u.M}e^{ib.K}e^{\frac{i}{2}u.M}\right)e^{i\lambda.D}e^{-\frac{i}{2}u.M}e^{-\frac{i}{2}\omega.M} = e^{ix'.P}e^{ib'.K}e^{i\lambda'.D}h
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

şeklinde olup buradan sonsuz küçük etkiler için Denklem (1.22)'ye varılır;

$$\begin{aligned} \delta x^a &= u^a{}_c x^c \\ \delta b^a &= u^a{}_c b^c \\ \delta \omega^{ab} &= u^{ab} + u^{ca}\omega^b{}_c - u^{cb}\omega^a{}_c \end{aligned} \tag{1.22}$$

Sonuç olarak sonsuz küçük dönüşümlerin uzay zamana toplam katkısı şu ifadeyle verilir;

$$x^{a\prime} = x^a + a^a + 2(\beta \cdot x)x^a - x^2\beta^a + \sigma x^a + u^a{}_c x^c \tag{1.23}$$

Denklem (1.23)'teki dönüşüme bağlı olarak herhangi bir skaler alanın değişimi aşağıdaki şekildedir;

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \phi\left(x^a - a^a - 2(\beta x)x^a + x^2\beta^a - \sigma x^a - u^a{}_c x^c\right) \\ &= \phi(x) + \left(x^a - a^a - 2(\beta x)x^a + x^2\beta^a - \sigma x^a - u^a{}_c x^c\right)\partial_a\phi(x) \end{aligned} \tag{1.24}$$

Buradan skaler alandaki değişim;

$$\begin{aligned} \delta\phi(x) &= \left(ia \cdot P + i\beta \cdot K + i\sigma \cdot D - \frac{i}{2}u \cdot M\right)\phi(x) \\ &= \left(\begin{array}{l} a^a(-\partial_a) + \beta^a\left(-2x_a(x \cdot \partial) + x^2\partial_a\right) \\ +\sigma\left(-x^a\partial_a\right) - \frac{1}{2}u^{ab}\left[-(x_a\partial_b - x_b\partial_a)\right] \end{array}\right)\phi(x) \end{aligned} \tag{1.25}$$

şeklinde Denklem (1.25) ile verilir ve aşağıdaki grup üreticilerine ulaşmamızı sağlar;

$$\begin{aligned} P_a &= i\partial_a \\ K_a &= i\left(2x_a(x \cdot \partial) - x^2\partial_a\right) \\ D &= ix^a\partial_a \\ M_{ab} &= i\left(x_a\partial_b - x_b\partial_a\right) \end{aligned} \tag{1.26}$$

Eşitlik (1.26)'daki grup üreticilerinin aşağıdaki cebri sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

$$
\begin{aligned}
&\left[M_{ab}, M_{cd}\right] = i\left(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - (c \leftrightarrow d)\right)\\
&\left[M_{ab}, P_{c}\right] = i(\eta_{bc}M_{bc} - \eta_{ac}P_{b})\\
&\left[P_{a}, P_{b}\right] = 0\\
&\left[D, D\right] = 0\\
&\left[D, P_{a}\right] = iP_{a}\\
&\left[D, M_{ab}\right] = 0\\
&\left[M_{ab}, K_{c}\right] = i(\eta_{bc}K_{a} - \eta_{ac}K_{b})\\
&\left[P_{a}, K_{b}\right] = -2i(\eta_{ab}D + M_{ab})\\
&\left[D, K_{a}\right] = -iK_{a}\\
&\left[K_{a}, K_{b}\right] = 0
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

Ayrıca bu eş küme seçimine karşılık gelen Maurer-Cartan Formlarını yukarıdaki cebir kullanılarak aşağıdaki yoldan hesaplanır. Bunun için herhangi bir grup elemanı;

$$g = e^{ixP}e^{ibK}e^{i\lambda D}e^{-\frac{i}{2}\omega M} \tag{1.28}$$

ile, alt grubun herhangi bir elemanı ise;

$$h = e^{-\frac{i}{2}\omega M} \tag{1.29}$$

ile verilir. Buna bağlı olarak eş küme elemanı;

$$K = e^{ixP}e^{ibK}e^{i\lambda D} \tag{1.30}$$

olarak ve tersi de;

$$K^{-1} = e^{-i\lambda D}e^{-ibK}e^{-ixP} \tag{1.31}$$

şeklinde seçilir. Buradan da Maurer-Cartan Formlarını aşağıdaki ifadeden buluruz:

$$
\begin{aligned}
K^{-1}dK &= e^{-i\lambda D}e^{-ibK}e^{-ixP}\left\{\begin{array}{l} de^{ixP}e^{ibK}e^{i\lambda D} + e^{ixP}de^{ibK}e^{i\lambda D}\\ +e^{ixP}e^{ibK}de^{i\lambda D}\end{array}\right\}\\
&= \left(\begin{array}{l} e^{-i\lambda D}e^{-ibK}\left(e^{-ixP}de^{ixP}\right)e^{ibK}e^{i\lambda D}\\ +e^{-i\lambda D}\left(e^{-ibK}de^{ibK}\right)e^{i\lambda D} + e^{-i\lambda D}de^{i\lambda D}\end{array}\right)
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

Denklem (1.32)'de bulunan terimler aşağıda ayrı ayrı hesaplanmıştır.

Birinci terim;

$$e^{-i\lambda D} d e^{i\lambda D} = i d\lambda D + \frac{1}{2!}\left[i d\lambda D, i\lambda D\right] + \frac{1}{3!}\left[\left[i d\lambda D, i\lambda D\right], i\lambda D\right] + \ldots \tag{1.33}$$

şeklinde açılır.

$$\left[i d\lambda D, i\lambda D\right] = 0 \tag{1.34}$$

olduğundan;

$$e^{-i\lambda D} d e^{i\lambda D} = i d\lambda D \tag{1.35}$$

bulunur. İkinci terim;

$$e^{-ibK} d e^{ibK} = i d b K + \frac{1}{2!}\left[i d b K, i b K\right] + \frac{1}{3!}\left[\left[i d b K, i b K\right], i b K\right] + \ldots \tag{1.36}$$

$$\left[i d b K, i b K\right] = 0 \tag{1.37}$$

olduğundan

$$e^{-ibK} d e^{ibK} = i d b K \tag{1.38}$$

şeklinde kolayca yazılır.

$$e^{-i\lambda D} i d b K e^{i\lambda D} = i d b K + \left[i d b K, i\lambda D\right] + \frac{1}{2!}\left[\left[i d b K, i\lambda D\right], i\lambda D\right] + \ldots \tag{1.39}$$

Eşitlik (1.39)'daki terimi hesaplamak için;

$$\begin{pmatrix} \left[i d b K, i\lambda D\right] = -d b^{\mu}\lambda\left[K_{\mu}, D\right] = i d b K\lambda \\ \left[i d b K\lambda, i\lambda D\right] = -\lambda^{2} d b^{\mu}\left[K_{\mu}, D\right] = i d b K\lambda^{2} \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

ifadeleri kullanılır ise Eşitlik (1.41)'deki sonuca ulaşılır.

$$e^{-i\lambda D} i d b K e^{i\lambda D} = i d b K + i\lambda d b K + \frac{1}{2!} i\lambda^2 d b K + \ldots$$
$$= i d b K \left(1 + \lambda + \frac{1}{2!}\lambda^2 + \ldots \right) \tag{1.41}$$
$$= i e^{\lambda} d b K$$

Benzer şekilde aşağıdaki ifade rahatlıkla yazılır;

$$e^{-ixP} d e^{ixP} = i d x P \tag{1.42}$$

$$e^{-ibK} i d x P e^{ibK} = \begin{pmatrix} i d x P + [i d x P, i b K] + \frac{1}{2!}\left[[i d x P, i b K], i b K\right] \\ + \frac{1}{3!}\left[\left[[i d x P, i b K], i b K\right], i b K\right] + \ldots \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

Eşitlik (1.43)'ü hesaplamak için Eşitlik (1.44) ve Eşitlik (1.45) ifadeleri kullanılarak Eşitlik (1.46) ifadesine ulaşılır.

$$\begin{aligned} [i d x P, i b K] &= -d x^{\mu} b^{\nu}\left[P_{\mu}, K_{\nu}\right] = -2 i d x^{\mu} x^{\nu}\left(\lambda_{\mu\nu} D - M_{\mu\nu}\right) \\ &= -2 i d x \cdot b D + 2 i d x^{\mu} b^{\nu} M_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned} \left[-2 i d x \cdot b D + 2 i d x^{\mu} b^{\nu} M_{\mu\nu}, i b K\right] &= \begin{pmatrix} 2 d x \cdot b b^{\mu}\left[D, K_{\mu}\right] \\ -2 d x^{\mu} b^{\nu} b^{\tau}\left[M_{\mu\nu}, K_{\tau}\right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 i (d x \cdot b)(b \cdot K) \\ +2 i d x^{\mu} b^{\nu} b^{\tau}\left(\eta_{\tau\mu} K_{\nu} - \eta_{\tau\nu} K_{\mu}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 i (d x \cdot b)(b \cdot K) \\ +2 i (d x \cdot b)(b \cdot K) - 2 i b^2 (d x \cdot K) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.45}$$

$$e^{-ibK} i d x P e^{ibK} = \begin{pmatrix} i d x P - 2 i (d x \cdot b) D + 2 i d x^{\mu} b^{\nu} M_{\mu\nu} \\ + \frac{2i}{2!}\left[2 (d x \cdot b) b^{\mu} - b^2 d x^{\mu}\right] K_{\mu} \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

$$e^{-i\lambda D} e^{-ibK}\left(e^{-ixP} e^{ixP}\right) e^{ibK} e^{i\lambda K} = e^{-i\lambda D} \begin{Bmatrix} i d x P - 2 i (d x \cdot b) D \\ +2 i d x^{\mu} b^{\nu} M_{\mu\nu} \\ +i\left[2 (d x \cdot b) b^{\mu} - b^2 d x^{\mu}\right] K_{\mu} \end{Bmatrix} e^{i\lambda D} \tag{1.47}$$

Denklem (1.47)'yi hesaplamak için Eşitlik (1.48), Eşitlik (1.49), Eşitlik (1.50) ve Eşitlik (1.51) kullanılır.

$$
\begin{aligned}
e^{-i\lambda D} idxP\, e^{i\lambda D} &= idxP + \left[idxP, i\lambda D\right] + \frac{1}{2!}\left[\left[idxP, i\lambda D\right], i\lambda D\right] + \ldots \\
&= idxP - i\lambda dx \cdot P + \frac{1}{2!}\left[-i\lambda dx \cdot P, i\lambda D\right] + \ldots \\
&= idxP - i\lambda\left(dx \cdot P\right) + \frac{i}{2!}\lambda^2\left(dx \cdot P\right) + \ldots \\
&= idxP\left(1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} - \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right) \\
&= ie^{-\lambda} dx \cdot P
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

$$
e^{-i\lambda D}\left\{-2i\left(dx \cdot b\right)D\right\} e^{i\lambda D} = -2i\left(dx \cdot b\right)D \tag{1.49}
$$

$$
e^{-i\lambda D}\, 2idx^{\mu} \cdot b^{\nu} M_{\mu\nu} e^{i\lambda D} = 2idx^{\mu} b^{\nu} M_{\mu\nu} \tag{1.50}
$$

$$
e^{-i\lambda D}\left\{-i\left[2\left(dx \cdot b\right)b^{\mu} - b^2 dx^{\mu}\right]K_{\mu}\right\} e^{i\lambda D} = ie^{\lambda}\left(2\left(dx \cdot b\right)\left(b \cdot K\right) - b^2\left(dx \cdot K\right)\right) \tag{1.51}
$$

Tüm sonuçlar toplanırsa Eşitlik (1.53)’teki Maurer-Cartan Formları bulunur.

$$
\begin{aligned}
K^{-1}dK &= \begin{pmatrix} ie^{-\lambda} dx \cdot P - 2i\left(dx \cdot b\right)D + 2idx^{\mu} b^{\nu} M_{\mu\nu} \\ +ie^{\lambda}\left(2dx \cdot bb \cdot K - b^2 dx \cdot K\right) + ie^{\lambda} dbK + id\lambda D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ie^{-\lambda} dx^{\mu} P_{\mu} + ie^{\lambda}\left(db^{\mu} + 2b^{\mu}\left(dx \cdot b\right) - b^2 dx^{\mu}\right)K_{\mu} \\ +i\left(d\lambda - 2dx \cdot b\right)D + i\left(dx^{\mu} b^{\nu} - dx^{\nu} b^{\mu}\right)M_{\mu\nu} \end{pmatrix} \\
&= i\omega_P{}^{\mu} P_{\mu} + i\omega_K{}^{\mu} K_{\mu} + i\omega_D D - \frac{i}{2}\omega_M{}^{\mu\nu} M_{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_P{}^{\mu} &= e^{-\lambda} dx^{\mu} \\
\omega_K{}^{\mu} &= e^{\lambda}\left(db^{\mu} + 2b^{\mu} dx \cdot b - b^2 dx^{\mu}\right) \\
\omega_D &= d\lambda - 2dx \cdot b \\
\omega_M{}^{\mu\nu} &= -2\left(dx^{\mu} b^{\nu} - dx^{\nu} b^{\mu}\right)
\end{aligned}
\tag{1.53}
$$

Maurer-Cartan Formları grup dönüşümü altında değişmez nicelikler olduklarından grup dönüşümü altında invaryant kalan lagrange yoğunlukları oluşturabilmek için kullanılmaktadırlar.

1.4. Grupların Ayar Teorileri Olarak Kütle Çekimi

1.4.1. Poincare grubunun ayar teorisi

Eğer G grubu P (Poincare grubu)'ye izomorfik ise G'nin M_{ab} ve P_a üreticileri aşağıdaki bilinen komütasyon bağıntılarını sağlar.

$$
\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{ab}] = i(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{bd}M_{ac} - \eta_{ac}M_{bd}) \\
&[M_{ab}, P_d] = i(\eta_{bd}P_a - \eta_{ad}P_b) \\
&[P_a, P_b] = 0
\end{aligned}
\tag{1.54}
$$

Burada $\eta_{ab} = (1, -1, -1, -1)$ uzay-zaman metriğidir, uzaysal (holonomik) indisler Yunan harfleriyle, vierbein (anholonomik) indisler Latin harfleriyle gösterilir ve tekrarlanan indisler üzerinden toplama yapıldığı farzedilir. Şimdi $\varphi_t(x)$ madde alanları G^{loc} ve $DiffR^4$ altındaki sırasıyla;

$$
\begin{aligned}
&\delta_M \varphi_t(x) = -\frac{1}{2} a^{ab}(x)(M_{ab})_{tm}\, \varphi^m(x) \\
&\delta_P \varphi_t(x) = 0
\end{aligned}
\tag{1.55}
$$

ve

$$
\delta_R \varphi_t(x) = \lambda^\mu(x)\partial_\mu \varphi_t(x) \tag{1.56}
$$

ile belirtilen dönüşüm özellikleriyle uzaysal skalerlerdir. Burada $\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$ ve $a^{ab}(x)$, $\lambda^\mu(x)$ keyfi fonksiyonlardır.

Fiziksel Poincare grubunun $\varphi_t(x)$ üzerindeki eylemi,

ve $\lambda_\nu{}^\mu$ 'ler sabit olmak üzere;

$$
\lambda^\mu(x) = c^\mu + \lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{1.57}
$$

$$
a^{ab}(x) = \delta^a_\mu \delta^b_\nu \lambda^{\mu\nu} \tag{1.58}
$$

ifadeleri ile elde edilir. Böylece fiziksel Poincare grubu için uzaysal ve vierbein indisler ayırt edilmezler.

G üzerindeki ayar alanlar,

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= e'_\mu{}^a(x)P_a - \frac{1}{2}\omega'_\mu{}^{ab}(x)M_{ab} \\ &= h(x)A_\mu(x)h^{-1}(x) - \frac{i}{g}h(x)\partial_\mu h^{-1}(x) \end{aligned} \tag{1.59}$$

dönüşüm özellikleriyle her zamanki gibi

$$\begin{aligned} &M_{ab} \to \omega_\mu{}^{ab}(x) \\ &P_a \to e_\mu{}^a(x) \end{aligned} \tag{1.60}$$

şeklinde ifade edilir. Sonsuz küçük dönüşümler altında;

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= e^{-\frac{i}{2}a^{ab}M_{ab}}\left(e_\mu{}^aP_a - \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab} - \frac{i}{g}\partial_\mu\right)e^{\frac{i}{2}a^{ab}M_{ab}} \\ &= \left(\begin{aligned} &e^{-\frac{i}{2}a^{ab}M_{ab}}e_\mu{}^aP_ae^{\frac{i}{2}a^{ab}M_{ab}} - e^{-\frac{i}{2}a^{ab}M_{ab}}\frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab}e^{\frac{i}{2}a^{ab}M_{ab}} \\ &-e^{-\frac{i}{2}a^{ab}M_{ab}}\frac{i}{g}\partial_\mu e^{\frac{i}{2}a^{ab}M_{ab}} \end{aligned}\right) \end{aligned} \tag{1.61}$$

$$\delta_M\omega_\mu{}^{ab}(x) = a^{an}(x)\omega_\mu{}^b{}_n(x) + a^{bn}(x)\omega_\mu{}^a{}_n(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu a^{ab}(x) \tag{1.62}$$

$$\delta_M e_\mu{}^a(x) = a^{an}(x)e_{\mu n}(x) \tag{1.63}$$

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= e^{ic^aP_a}\left(e_\mu P - \frac{1}{2}\omega_\mu M_{ab} - \frac{i}{g}\partial_\mu\right)e^{-ic^aP_a} \\ &= e^{ic^aP_a}e_\mu{}^aP_ae^{-ic^aP_a} - e^{ic^aP_a}\frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab}e^{-ic^aP_a} - e^{ic^aP_a}\frac{i}{g}\partial_\mu e^{-ic^aP_a} \\ &= -\frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab} - \left[ic^cP_c, \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab}\right] - \frac{1}{g}\partial_\mu c^a(x)P_a + e_\mu{}^aP_a \\ &= -\frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab} + \left(\omega_\mu{}^{ac} - \frac{1}{g}\partial_\mu c^a + e_\mu{}^a\right)P_a \end{aligned} \tag{1.64}$$

$$\delta_P\omega_\mu{}^{ab}(x) = 0 \tag{1.65}$$

$$\delta_P e_\mu{}^a(x) = \omega_\mu{}^{am}(x)c_m(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu c^a(x) \tag{1.66}$$

Eşitlik (1.66)'da $c^a(x)$; P_a ile genelleştirilen dönüşümleri karakterize eder. Ayar alanlar kovaryant uzaysal vektörler gibi (∂_μ gibi) sırasıyla $\mathrm{Diff}R^4$ 'e dönüşürler.

$$\delta_R e_\mu^{\ a}(x) = \lambda^\rho(x)\partial_\rho e_\mu^{\ a}(x) + \partial_\mu\lambda^\rho(x) e_\rho^{\ a}(x) \quad (1.67)$$

$$\delta_R \omega_\mu^{\ ab}(x) = \lambda^\rho(x)\partial_\rho \omega_\mu^{\ ab}(x) + \partial_\mu\lambda^\rho(x)\omega_\rho^{\ ab}(x) \tag{1.68}$$

$\varphi_a(x)$ 'in kovaryant türevi olan

$$D_\rho\varphi_a(x) = \partial_\rho\varphi_a(x) - \frac{i}{2}g\omega_\rho^{\ mn}(x)\left(M_{mn}\right)_a^{\ b}\varphi_b(x) \tag{1.69}$$

ifadesinin, $\varphi_a(x)$ alanı gibi sırasıyla G^{loc} 'a dönüşeceğini kontrol etmek kolay olacaktır.

Şimdi ayar alanların kovaryant eğriliklerini oluşturalım. Öncelikle $A_\mu(x)$ alanının Eşitlik (1.59)'daki değerler ile tanımlanmasıyla

$$A_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - ig\left[A_\mu(x), A_\nu(x)\right]$$
$$= \begin{pmatrix} \partial_\mu\left(e_\nu^{\ a}P_a - \frac{1}{2}\omega_\nu^{\ ab}M_{ab}\right) - \partial_\nu\left(e_\mu^{\ a}P_a - \frac{1}{2}\omega_\mu^{\ ab}M_{ab}\right) \\ -ig\left[e_\mu^{\ a}P_a - \frac{1}{2}\omega_\mu^{\ ab}M_{ab}, e_\nu^{\ c}P_c - \frac{1}{2}\omega_\nu^{\ cd}M_{cd}\right] \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

$$A_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu}^{\ \ a}(x)P_a - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}^{\ \ ab}(x)M_{ab} \tag{1.71}$$

dönüşümlerin sırasıyla homojen olarak dönüştüğünü dikkate alalım,

$$A'_{\mu\nu}(x) = h(x)A_{\mu\nu}(x)h^{-1}(x) \tag{1.72}$$

$e_\mu^{\ a}(x)$ ve $\omega_\mu^{\ mn}(x)$ ifadelerinin kovaryant eğrilikleri, $A_{\mu\nu}(x)$'in P_a ve M_{cd} üreticileri üzerindeki izdüşümleri olarak tanımlanır, sırasıyla;

$$R_{\mu\nu}^{\ \ ab}(x) = \begin{pmatrix} \partial_\mu\omega_\nu^{\ ab}(x) - \partial_\nu\omega_\mu^{\ ab}(x) \\ -g\left[\omega_{\mu m}^{\ \ a}(x)\omega_\nu^{\ mb}(x) - \omega_{\nu m}^{\ \ a}(x)\omega_\mu^{\ mb}(x)\right] \end{pmatrix} \tag{1.73}$$

$$C^a_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \mu - \partial_\nu e^a_\mu(x) - g\omega_\mu{}^{ab}(x)e_{\nu b}(x) + g\omega_\nu{}^{ab}(x)e_{\mu b}(x)$$
$$= D_\mu e^a_\nu(x) - D_\nu e^a_\mu(x) \tag{1.74}$$

Bunların dönüşüm özelliklerini artık bulabiliriz. Burada söz konusu $c_\mu(x)$ ile karakterize edilen "çeviriler" olduğunda;

$$A'_{\mu\nu}(x) = h(x)A_{\mu\nu}h^{-1}(x) \tag{1.75}$$

$$h(x) = e^{ic^a(x)P_a} \tag{1.76}$$

$$A'_{\mu\nu}(x) = e^{ic^a(x)P_a}\left(C_{\mu\nu}{}^aP_a - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{ab}M_{ab}\right)e^{-ic^aP_a}$$
$$= e^{icP}C_{\mu\nu}{}^aP_a e^{-icP} - e^{icP}\frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{ab}M_{ab}e^{-icP}$$
$$= C_{\mu\nu}{}^aP_a - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{ab}M_{ab} - \left[ic^dP_d, \frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{ab}M_{ab}\right]$$
$$= \left(C_{\mu\nu}{}^a + R_{\mu\nu}{}^{ad}c_d\right)P_a - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{ab}M_{ab} \tag{1.77}$$

$A'_{\mu\nu}(x) = F'_{\mu\nu}{}^aP_a + \frac{1}{2}R'_{\mu\nu}{}^{ab}M_{ab}$ ise;

$$\delta_p R_{\mu\nu}{}^{ab}(x) = 0 \tag{1.78}$$

$$\delta_p F^a{}_{\mu\nu}(x) = R^{am}_{\mu\nu}(x)F_m(x) \tag{1.79}$$

şeklinde eğriliklerin dönüşümlerini elde etmiş oluruz.

Fizikçiler genelde $e_\mu{}^a(x)$'i "vierbein" ve $\omega_\mu{}^{ab}(x)$'i "bağıntı" olarak ifade ederler ve $\omega_\mu{}^{ab}(x)$'i $e_\mu{}^a(x)$'e veya onun $e_\mu{}^a{}_\nu(x) = 0$ alındığındaki eşdeğerine dayanarak açıklarlar.

Bazı yazarlar şu terminolojiyi kullanırlar; $e^a(x)$; vierbein, $\omega^{ab}(x)$; bağıntı, $e_\mu{}^a(x)$; çeviri ayar potansiyeli. Bu bağıntıda iki şeye dikkat etmeliyiz.

Herhangi bir $e_\mu{}^a(x)$ vierbein eşdeğerini elde etmek için fizikçiler 4x4'lük $e_\mu{}^a(x)$ matrisinin $-\delta_\mu{}^a$ sabit terimini içerdiğini kabul etmelidirler. Her ne kadar $e_\mu{}^a(x)$ tanım olarak bir alan olsa da buna karşılık gelen hareket denklemlerinin çözülmesiyle karar verilir. Bundan dolayı baştan itibaren $e_\mu^{\ a}(x)$ ifadesinin özel bir formunu esas almak uygun olmaz.

$C_{\mu\ \nu}^{\ a}(x)=0$ koşulu $c_m(x)$ parametreleri ile gerçekleşen ayar dönüşümlerine göre açıkça nonkovaryanttır. Sonuç olarak eğer P dönüşümlerini gerçekleştirirsek $C_{\mu\ \nu}^{\ a}(x)=0$ ifadesini korumak amacıyla $e_\mu^{\ a}(x)$ ve $\omega_\mu^{\ ab}(x)$ ifadelerini salt ayara indirgemek için $R_{\mu\nu}^{\ \ ab}(x)=0$ almalıyız.

Dönüşüm kurallarını modifiye etmek yerine doğru ve daha doğal işlem G=P grubunun doğal biçimde kırılması ve kendi Lorentz alt grubu olan $SO(3,1)$'e indirgenmesidir. Bu işlem yukarıda zikredilen her iki zorluğu da otomatik olarak çözer.

Poincare grubunun $SO_0(3,1)$'e indirgenmesinin asgari yolu $P/SO_0(3,1)$ bölüm-uzayında P'nin doğrusal olmayan gerçeklemesidir. Konumuz için bu durum P dönüşümlerine göre;

$$\delta_p y^a(x)=c^a(x) \tag{1.80}$$

biçiminde dönüşen dört adet $y^a(x)$ Goldstone alanının ortaya konmasını sağlar. $y^a(x)$ alanları Minkowski uzayına homomorfik olan $P/SO_0(3,1)$ bölüm-uzayında koordinatların rolünü oynar. Böylece herhangi bir x^μ için bir iç Minkowski uzayını $y^a(x)$ koordinatları ve P hareket grubuyla ilişkilendiririz.

Şimdi $\omega_\mu^{\ a}(x)$ Cartan formu ve $\omega_\mu^{\ ab}(x)$'i standart yolla ifade edelim:

$$e^{-iy^a(x)P_a}\left[\partial_\mu-igA_\mu(x)\right]e^{iy^a(x)P_a}=i\omega_\mu^a(x)P_a-\frac{i}{2}\omega_\mu^{\ ab}(x)M_{ab} \tag{1.81}$$

Eşitlik (1.16)-Eşitlik (1.20) ve Eşitlik(1.21)'i kullanarak $\omega_\mu^{\ a}(x)$ ve $\omega_\mu^{\ ab}(x)$ formlarının dönüşüm özelliklerini kolayca bulabiliriz. Örneğin P dönüşümlerine göre değişmez olduklarını bulabiliriz;

$$\begin{aligned}&\delta_P\omega_\mu^a(x)=0\\&\delta_P\omega_\mu^{ab}(x)=0\end{aligned} \tag{1.82}$$

$\omega_\mu{}^a(x)$ ve $\omega_\mu{}^{ab}(x)$'in, $e_\mu{}^a(x)$ ve $\omega_\mu{}^{ab}(x)$ cinsinden açık formları;

$$\omega_\mu{}^{ab}(x) = g\omega_\mu{}^{ab}(x) \tag{1.83}$$

$$\omega_\mu^a(x) = \partial_\mu y^a(x) + g e_\mu^a(x) - g\omega_\mu^{ab}(x)y_b(x) \tag{1.84}$$

ile verilir.

$e_\mu{}^a(x)$ yerine

$$\delta_P \tilde{e}_\mu^a(x) = -\frac{1}{g}\partial_\mu c^a(x) \tag{1.85}$$

$$\delta_M \tilde{e}_\mu^a(x) = -a^{an}(x)\tilde{e}_{\mu n}(x) + \partial_\mu a^{an}(x)y_n(x) \tag{1.86}$$

dönüşüm özellikleriyle birlikte yeniden tanımlanmış olan $\tilde{e}_\mu{}^a(x)$ ayar alanını kullanırsak,

$$\tilde{e}_\mu^a(x) = e_\mu^a(x) - \omega_\mu^{an}(x)y_n(x) \tag{1.87}$$

$\omega_\mu{}^a(x)$ ifadesi daha basit hale gelir:

$$\omega_\mu^a(x) = \partial_\mu y^a(x) + g\tilde{e}_\mu^a(x) \tag{1.88}$$

Aynı zamanda

$$\tilde{C}_{\mu\nu}^a(x)P_a - \frac{1}{2}\tilde{R}_{\mu\nu}{}^{ab}(x)M_{ab} = e^{-iy^a(x)P_a}\left[C_{\mu\nu}^a(x)P_a - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{ab}(x)M_{ab}\right]e^{iy^a(x)P_a} \tag{1.89}$$

ifadesini kullanarak yeni $\tilde{C}_{\mu\nu}^a$ ve $\tilde{R}_{\mu\nu}{}^{ab}(x)$ kovaryant eğriliklerini tanımlayabiliriz. Buradan Eşitlik (1.90) ve Eşitlik (1.91) elde edilir.

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{\mu\nu}^a(x) &= C_{\mu\nu}^a(x) - R_{\mu\nu}^{an}(x)y_n(x)\\ &= D_\mu\omega_\nu^a(x) - D_\nu\omega_\mu^a(x)\end{aligned} \tag{1.90}$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu}{}^{ab}(x) = R_{\mu\nu}{}^{ab}(x) \tag{1.91}$$

Bu yeni eğriliklerin P dönüşümleri altında değişmez olduğu kolayca kontrol edilebilir.

$\omega_{\mu}^{\ a}(x)$ formu dönüşüm özellikleri nedeniyle [yalnızca $SO_0^{loc}(3,1)$ dönüşümleri altında μ simgesine göre bir uzaysal dört-vektör ve a simgesine göre dönüşüm] bir vierbein olarak yorumlanabilir. $y^a(x)$ ifadesi dört bağımsız alanı temsil ettiğinden $\det \partial y^a(x)/\partial x^\mu \neq 0$ olur ve $\omega^{\mu a}(x)$ ters vierbeini bulunur:

$$
\begin{aligned}
\omega_\mu^a(x)\,\omega^{\mu b}(x) &= \eta^{ab} \\
\omega_\mu^a(x)\,\omega_a^\rho(x) &= \delta_\mu^\rho
\end{aligned}
\tag{1.92}
$$

$g_{\mu\nu}(x)$ metriği her zamanki gibi yazılır;

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(x) &= \omega_\mu^a(x)\,\omega_{\nu a}(x) \\
g^{\mu\nu}(x) &= \omega^{\mu a}(x)\,\omega_a^\nu(x)
\end{aligned}
\tag{1.93}
$$

Kolayca görülebilir ki,

$$
\tilde{C}_{\mu\nu}^a(x) = 0 \tag{1.94}
$$

şartı teorinin tüm simetrilerine göre değişmezdir ve dolayısıyla;

$$
\omega_\mu^{mn}(x) = \frac{1}{2g}\left\{
\begin{array}{l}
\omega^{\rho n}(x)\left[\partial_\mu \omega_\rho^m(x) - \partial_\rho \omega_\mu^m(x)\right] \\
+\omega_\mu^b(x)\,\omega^{\rho n}(x)\,\omega^{\nu m}(x)\,\partial_\nu \omega_{\rho b}(x) - (m \leftrightarrow n)
\end{array}
\right\}
\tag{1.95}
$$

çözümü doğru dönüşüm özelliklerine sahiptir.

Geometrik olarak $\tilde{C}_{\mu\nu}^{\ \ a}(x)$ ve $\tilde{R}_{\mu\nu}^{\ \ ab}(x)$ ifadeleri, sırasıyla, $\{x^\mu\}$ ifadesinin Minkowski uzayına baz homomorfik olduğu ve lif $P/SO_0(3,1)$ ifadesinin iç Minkowski uzayına homomorfik olduğu lif demet uzayında burulma ve eğriliktir. Eşitlik (1.35) koşulu, burulmanın sıfıra eşit olduğu ve bize bağıntıyı vierbeinler cinsinden ifade etme imkanı veren lif demet uzayında bağlı değişmez alt grupları tanımlar. Bu nedenle aslında teoride yalnızca bir tane ayar alanımız olduğunu görürüz-$\omega^{\mu a}(x)$ alanı (veya $\tilde{e}_\mu^{\ a}(x)$ alanı).

$K = P^{loc} \otimes DiffR^4$ grubunun $\tilde{e}_{\mu}^{\ a}(x)$ için ikinci dereceden hareket denklemi veren en basit değişmezi Eşitlik (1.96) skaler eğriliğidir.

$$R = \omega^{\mu a}(x)\,\omega^{\rho b}(x)\,R_{\mu\rho ba}(x) \tag{1.96}$$

Buna karşılık gelen eylem vierbein formalizminde, κ'nın Newton sabiti olduğu, bilinen Einstein eylemidir:

$$S = \frac{1}{16\pi\kappa}\int L\,dv \tag{1.97}$$

$$\begin{aligned} dv &= \omega_0\omega_1\omega_2\omega_3 \\ &= \det\omega\, dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \tag{1.98}$$

$$S = \frac{1}{16\pi\kappa}\int L\left(\det\omega\, d^4x\right) \tag{1.99}$$

$$S = \frac{1}{16\pi\kappa}\int d^4x\,\det\omega\, R \tag{1.100}$$

Einstein denklemleri Eşitlik (1.100)'ün $\tilde{e}_{\mu}^{\ a}(x)$'ya göre varyasyonuyla elde edilir:

$$\begin{aligned} R_{\mu a} &= \omega^{\rho b}(x)\,R_{\mu\rho ba} \\ R &= \omega^{\mu a}R_{\mu a} \\ R_{\mu\nu} &= \omega_{\nu}^{a}R_{\mu a} \end{aligned} \tag{1.101}$$

iken;

$$R_{\mu a} - \frac{1}{2}\omega_{\mu a}R = 0 \tag{1.102}$$

veya

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \tag{1.103}$$

$K = P^{loc} \otimes DiffR^4$ grubuyla ilgili olarak gördüğümüz minimal dinamikleri özetlemek gerekirse bu bilinen Einstein gravitasyon teorisinin dinamikleridir.

Sonuç olarak birkaç hususa işaret edelim:

i. Lorentz bağıntısı için kullanılan ifade bir bağımsız değişken olan $\omega_\mu^{ab}(x)$ ifadesine göre varyasyon ile de elde edilebilir. Her halükarda eğer düşünülen madde alanları spine sahip iseler $\omega_\mu^{ab}(x)$ ifadesinin bu yollarla çıkarılması-hariç tutulması eşdeğer olmayan teorileri netice verir (çünkü eylemin varyasyonu aynı zamanda kovaryant türevin Ω bağımsızlığı nedeniyle madde alanından gelen katkıları da içerecek. Sonuç olarak $\omega_\mu^{ab}(x)$ ifadesi salt gravitasyonun madde alanında kuadratik olan terimleri de içerir, böylece $\tilde{C}_{\mu\nu}{}^a(x) \neq 0$ olur. Baştaki lagranjiyene $\omega_\mu{}^{ab}$ için ifade eklenmesiyle bu yeni terimler minimal olmayan etkileşimleri netice verir ve Einstein-Cartan gravitasyon teorisini elde ederiz. Her halükarda $\omega_\mu{}^{ab}$ ifadesinin yok edilmesi işlemi teorinin simetri özellikleri bunu dikte etmediğinden gerekli değildir. Gördüğümüz gibi teori burulmasız kalmakta ve minimal etkileşimler görünmemektedir.

ii. $y^a(x)$ alanlarının rolünü netleştirelim. Bunları bağımsız değişkenler olarak alırsak $\tilde{e}_\mu{}^a(x)$ üzerinde herhangi bir yan koşul yoktur. Lagranjiyende ve hareket denklemlerinde, kendiliğinden kırılan Yang-Mills teorilerinde olduğu gibi, $y^a(x)$ alanları yoktur. Her halükarda bilinen Yang-Mills teorilerine zıt olarak $y^a(x)$ alanları, teorinin genel kovaryansından dolayı Higgs etkisini ($\tilde{e}_\mu{}^a$ kütlesi) netice vermemiştir. Ayar dönüşümleri ve genel koordinat dönüşümlerine göre vierbeinlerin sabit ve değişmezlerden farklı olan bilinear kombinasyonları yoktur. Yaklaşımımızdaki y^a Goldstone alanları, vierbeinlerin dönüşüm özelliklerini yalnızca $\omega_\mu{}^{ab}(x)$ Lorentz bağıntısını $\tilde{e}_\mu{}^a(x)$ cinsinden ifade etmemize izin veren ayar grubuna göre yeniden tanımlayabilmemiz için kullanılır.

Aslında $y^a(x)$ alanlarını bağımsız olarak ele almak şart değildir. $y^a(x)$'i her x^μ için;

$$y^a(x) = \delta_\mu^a x^\mu \tag{1.104}$$

şartına dahil edebiliriz. Bu koşul uzay-zaman ile birlikte iç Minkowski uzayını tanımlar, $K = P^{loc} \otimes DiffR^4$ tam grubuna göre simetriyi kırar ve bir ayar seçimi olarak düşünülebilir. Fiziksel Poincare alt grubu K_0'ın sonlu alt gruplarından biridir. Şu ifadeyi elde ederiz;

$$\lambda^\mu(x) = \delta_a^\mu c^a(x) - \delta_a^\mu a^{am}(x)\delta_{\rho m} x^\rho \tag{1.105}$$

Böylece parametrelerine uyguladığımızda genel koordinat dönüşümleri ve tanjant uzayındaki dönüşümler artık bağımsız olmazlar: x^{μ}'nün $\delta^{\mu}{}_{a} a^{am}(x)\delta_{\rho m} x^{\rho}$ parametreleriyle dönüşümleri, SO(3,1) alanlarının dış indislerini-$a^{am}(x)$ parametreleriyle gerçekleşen ayar rotasyonlarını çıkarmayı sağlar. φ_a'nın K_0'a göre dönüşüm özellikleri;

$$\delta\varphi_a(x) = c^m(x)\partial_m\varphi_a(x) - \frac{i}{2}a^{mn}(x)\left[i(x_m\partial_n - x_n\partial_m) + M_{mn}\right]_a^b \varphi_b(x) \qquad (1.106)$$

ile verilir (burada $x_m \equiv \eta_{m\mu}x^{\mu}$). Buradan net olarak görülür ki K_0 bilinen fiziksel Poincare grubu dönüşümlerinin yerelleştirilmesiyle elde edilir. Bu, Kibble tarafından düşünülmüş yerel bir gruptur. İlgili yeni dönüşümü hesaba katarsak vierbeinler;

$$\omega_{\mu}^{a}(x) = \delta_{\mu}^{a} + g\tilde{e}_{\mu}^{a}(x) \qquad (1.107)$$

şeklini alır. $\tilde{e}_{\mu}{}^{a}(x)$ alanı $\lambda^{\nu}(x)$ ile K_0'a göre;

$$\delta\tilde{e}_{\mu}^{a}(x) = \frac{1}{g}\lambda^{\nu}(x)\partial_{\nu}\omega_{\mu}^{a}(x) + \frac{1}{g}\partial_{\mu}\lambda^{\nu}(x)\omega_{\nu}^{a}(x) - \frac{1}{g}a^{an}(x)\omega_{\mu n}(x) \qquad (1.108)$$

kuralına göre dönüşür. Bu basitçe K_0'ın tensörler için üç denk realizasyonu olduğunu ifade eder. Birinden diğerine geçiş denklik realizasyonudur ve bir vektör indeksin vierbein veya onun tersiyle daraltılmasıyla verilir.

$y^{a}(x)$ alanları en baştan beri x^{μ} ile tanımlanır. Biz yaklaşımımızda bilinen Yang-Mills teorilerindeki paralelliği takip etmek ve Einstein gravitasyon teorisindeki ayar yapısını daha net görebilmek için ayar ve genel koordinat dönüşümlerini ayırmayı tercih ettik.

iii. Son olarak K_0'dan daha küçük diğer bir doğal simetri grubunu ortaya koyabileceğimizi belirtelim. Bu, şu durum ile bağlantılıdır; $\tilde{e}_{\mu}{}^{a}(x)$ alanının K_0 varyasyonu homojen olmayan antisimetrik $-a^{an}(x)\delta_{\mu n}$ katkısını içerir. Bu terimi kullanarak $\tilde{e}_{\mu}{}^{a}(x)$ ifadesinin antisimetrik kısmını ayar alanı seçimiyle yok ederiz. Bu ayarın değişmezlik grubu dört bağımsız $c^{a}(x)$ parametre fonksiyonunu kapsar ancak bunun dönüşümleri $\tilde{e}_\mu{}^a(x)$ ifadesi içinde doğrusal değildir. Bu grup Einstein grubunun minimal grubu olarak nitelendirilebilir. Bu doğal olarak Einstein teorisinin, afin ve conformal grupların eş zamanlı doğrusal olmayan gerçeklemesi gibi davrandığını gösterir.

1.4.2. Conformal grubun ayar teorisi

Conformal grubun grup elemanı şöyle tanımlanabilir;

$$g = e^{ix\cdot P} e^{ib\cdot K} e^{i\lambda\cdot D} e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{1.109}$$

Grubunun komütasyon bağıntıları;

$$\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}] = i\left(\eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad} - (c \leftrightarrow d)\right) \\
&[M_{ab}, P_c] = i(\eta_{bc} M_{bc} - \eta_{ac} P_b) \\
&[P_a, P_b] = 0 \\
&[D, D] = 0 \\
&[D, P_a] = iP_a \\
&[D, M_{ab}] = 0 \\
&[M_{ab}, K_c] = i(\eta_{bc} K_a - \eta_{ac} K_b) \\
&[P_a, K_b] = -2i(\eta_{ab} D + M_{ab}) \\
&[D, K_a] = -iK_a \\
&[K_a, K_b] = 0
\end{aligned} \tag{1.110}$$

cebriyle verilir. Bu cebre ait ayar alanını;

$$A_\mu(x) = e_\mu{}^a P_a + f_\mu{}^a K_a + g_\mu D + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab} M_{ab} \tag{1.111}$$

şeklinde seçerek grup parametrelerinin bu ayar alanı altındaki dönüşümlerini aşağıdaki ifadeyi kullanarak bulabiliriz;

$$A_\mu'(x) = h(x)\left(A_\mu(x) + \frac{1}{ig}\partial_\mu\right)h^{-1}(x) \tag{1.112}$$

Şimdi sırası ile ayrı ayrı bütün dönüşümleri inceleyelim.

Öteleme dönüşümü için $h(x) = e^{ia^c P_c}$ ise;

$$A'_\mu(x) = e^{ia^c P_c}(e_\mu{}^c P_c + f_\mu{}^c K_c + g_\mu D - \frac{1}{2}\omega_\mu M)e^{-ia^c P_c} + e^{ia^c P_c}\frac{1}{ig}\partial_\mu e^{-ia^c P_c}$$

$$= \begin{pmatrix} (e_\mu{}^c + g_\mu a^c + \omega_\mu{}^{cb} a_b - \frac{1}{g}\partial_\mu a^c)P_c + f_\mu{}^c K_c \\ \\ +(g_\mu + 2a_c f_\mu{}^c)D - \frac{1}{2}(\omega_\mu{}^{cb} + 2(a^c f_\mu{}^b - a^b f_\mu{}^c))M_{cb} \end{pmatrix} \qquad (1.113)$$

$$\begin{aligned} \delta_p \omega_\mu{}^{cb} &= -2(a^c f_\mu{}^b - a^b f_\mu{}^c) \\ \delta_p e_\mu{}^c &= \omega_\mu{}^{cb} a_b + a^c g_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu a^c \\ \delta_p f_\mu{}^c &= 0 \\ \delta_p g_\mu &= 2a_c f_\mu{}^c \end{aligned} \qquad (1.114)$$

K_c ve P_c ’nın komütasyonlarındaki benzerlik kullanıldığında;

$$A'_\mu = e^{ib^c K_c}(e_\mu P_c + f_\mu K_c + g_\mu D - \frac{1}{2}\omega_\mu M)e^{ib^c K_c} + e^{ib^c K_c}\frac{1}{ig}\partial_\mu e^{-ib^c K_c} \qquad (1.115)$$

$$\begin{aligned} \delta_k \omega_\mu{}^{cb} &= -2(b^c e_\mu{}^b - b^b e_\mu{}^c) \\ \delta_k e_\mu{}^c &= 0 \\ \delta_k f_\mu{}^c &= \omega_\mu{}^{cb} b_b - g_\mu b^c - \frac{1}{2}\partial_\mu b^c \\ \delta_k g_\mu &= -2b_c e_\mu{}^c \end{aligned} \qquad (1.116)$$

Ölçekleme simetrisi $h(x) = e^{i\lambda D}$ ise;

$$A'_\mu = e^{i\lambda D}(e_\mu P + f_\mu K + g_\mu D - \frac{1}{2}\omega_\mu M + \frac{1}{ig}\partial_\mu)e^{-i\lambda D}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\lambda D} e_\mu P e^{-i\lambda D} + e^{i\lambda D} f_\mu K e^{-i\lambda D} + e^{i\lambda D} g_\mu D e^{-i\lambda D} \\ \\ -\frac{1}{2} e^{i\lambda D}\omega_\mu M e^{-i\lambda D} + e^{i\lambda D}\frac{1}{ig}\partial_\mu e^{-i\lambda D} \end{pmatrix} \qquad (1.117)$$

$$= e^{-\lambda} e_\mu{}^c P_c + e^{\lambda} P_\mu{}^c K_c + g_\mu D - \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{cb} M_{cb} - \frac{1}{g}\partial_\mu + g_\mu D$$

Aşağıdaki tanımı yaparsak;

$$e^{\lambda(x)} \cong (1+\lambda(x)) \tag{1.118}$$

İlgili dönüşümler şu şekli alır;

$$\begin{aligned}
&\delta_D \omega_\mu{}^{cb} = 0 \\
&\delta_D e_\mu{}^c = -\lambda e_\mu{}^c \\
&\delta_D f_\mu{}^c = \lambda e_\mu{}^c \\
&\delta_D g_\mu = -\frac{1}{ig} \partial_\mu \lambda
\end{aligned} \tag{1.119}$$

Üreticilere karşılık gelen eğrilikler aşağıdaki şekillerde ifade edilebilir;

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig\left[A_\mu, A_\nu\right] \\
&= R_{\mu\nu}{}^c [P] P_c + R_{\mu\nu}{}^c [K] K_c + R_{\mu\nu} [D] D - \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{cb} [M] M_{cb}
\end{aligned} \tag{1.120}$$

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \partial_\mu \left(e_\nu P + f_\nu K + g_\nu D - \frac{1}{2}\omega_\nu M \right) - \partial_\nu \left(e_\mu P + f_\mu K + g_\mu D - \frac{1}{2}\omega_\mu M \right) \\ -ig\left[e_\mu P + f_\mu K + g_\mu D - \frac{1}{2}\omega_\nu M \right] \end{pmatrix} \tag{1.121}$$

Bu iki ifadenin sonuçlarını karşılaştırdığımızda eğrilikleri aşağıdaki şekilde elde edebiliriz;

$$\begin{aligned}
&R_{\mu\nu}{}^{cb}[M] = R_{\mu\nu}{}^{cb} + 2g\left(e_\mu{}^c f_\nu{}^b - e_\mu{}^b f_\nu{}^c\right) - 2g\left(e_\nu{}^c f_\mu{}^b - e_\nu{}^b f_\mu{}^c\right) \\
&R_{\mu\nu}{}^c[P] = C_{\mu\nu}{}^c + g\left(e_\mu{}^c g_\nu - e_\nu{}^c g_\mu\right) \\
&R_{\mu\nu}{}^c[K] = \partial_\mu f_\nu{}^c - \partial_\nu f_\mu{}^c - g\left(\omega_\mu{}^{cb} f_{\nu b} - \omega_\nu{}^{cb} f_{\mu b}\right) - g\left(f_\mu{}^c g_\nu - f_\nu{}^c g_\mu\right) \\
&R_{\mu\nu}[D] = \partial_\mu g_\nu - \partial_\nu g_\mu + 2g\left(e_\mu{}^c f_{\nu c} - e_\nu{}^c f_{\mu c}\right)
\end{aligned} \tag{1.122}$$

Bu eğriliklerin istenilen simetri altındaki dönüşümünü bulabilmek için aşağıdaki ifade kullanılır;

$$A'_{\mu\nu}(x) = h(x) A_{\mu\nu}(x) h^{-1}(x) \tag{1.123}$$

$$A'_{\mu\nu}(x) = e^{ia^c P_c} \begin{pmatrix} R_{\mu\nu}{}^{c}[P]P_c + R_{\mu\nu}{}^{c}[K]K_c \\ +R_{\mu\nu}[D]D - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{cb}[M]M_{cb} \end{pmatrix} e^{-ia^c P_c} \qquad (1.124)$$

Öteleme simetrisi altında eğriliklerin dönüşümü;

$$\begin{aligned} &\delta_p R_{\mu\nu}{}^{cb}[M] = 2\left(a^c R_{\mu\nu}{}^{b}[K] - c^b R_{\mu\nu}{}^{c}[K]\right) \\ &\delta_p R_{\mu\nu}{}^{c}[P] = R_{\mu\nu}{}^{cb}[M]c_b + c^c R_{\mu\nu}[D] \\ &\delta_p R_{\mu\nu}{}^{c}[K] = 0 \\ &\delta_p R_{\mu\nu}[D] = 2c_c R_{\mu\nu}{}^{c}[K] \end{aligned} \qquad (1.125)$$

biçiminde ifade edilir.

2. TENSÖREL GENİŞLETİLMİŞ GRUPLARIN AYAR TEORİSİ

Bu bölümde önce Maxwell grubunun, daha sonra Genişletilmiş Weyl grubunun yerel incelemesini yapacağız.

2.1. Maxwell Grubunun Ayar Teorisi

Grubun komütasyon bağıntıları;

$$
\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}] = i(\eta_{cd} M_{bc} + \eta_{bc} M_{cd} - (c \leftrightarrow d)) \\
&[P_a, P_b] = iZ_{ab} \\
&[M_{ab}, P_c] = i(\eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b) \\
&[Z_{ab}, Z_{cd}] = 0 \\
&[M_{ab}, Z_{cd}] = i(\eta_{ad} Z_{bc} + \eta_{bc} Z_{cd} - (c \leftrightarrow d)) \\
&[Z_{ab}, P_c] = 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Ayar alanı;

$$
A_\mu(x) = e_\mu{}^a P_a + \theta_\mu{}^{ab} Z_{ab} - \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab} M_{ab}
\tag{2.2}
$$

Ayar alanının simetri grubunun etkisi altındaki dönüşümü aşağıdaki ifade kullanılarak bulunabilir;

$$
\begin{aligned}
A_\mu{}'(x) &= h(x)\left(A_\mu(x) + \frac{1}{ig}\partial_\mu\right)h^{-1}(x) \\
&= e'_\mu{}^a P_a + \theta'_\mu{}^{ab} Z_{ab} - \frac{1}{2}\omega'_\mu{}^{ab} M_{ab}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Şimdi sırasıyla Lorentz, öteleme ve yeni tensör üreticiden kaynaklanan simetri için birtakım dönüşümler elde edilecek. Öncelikle Lorentz için $h(x) = e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}}$ alırsak buradan Eşitlik (2.4) elde edilir.

$$A'_\mu = e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}}\left(e_\mu{}^aP_a + \theta_\mu{}^{ab}Z_{ab} - \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab} + \frac{1}{ig}\partial_\mu\right)e^{\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}}e_\mu{}^aP_a e^{\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} + e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}}\theta_\mu{}^{ab}Z_{ab}e^{\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab}e^{\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} + e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}}\frac{1}{ig}\partial_\mu e^{\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \delta_\mu\omega_\mu{}^{ab} &= u^{ac}\Omega_\mu{}^b{}_c - u^{bc}\omega_\mu{}^a{}_c - \frac{1}{g}\partial_\mu u^{ab} \\ \delta_\mu e_\mu{}^a &= -u^{ab}e_{\mu b} \\ \delta_\mu\theta_\mu{}^{ab} &= u^{ac}\theta_\mu{}^b{}_c - u^{bc}\theta_\mu{}^a{}_c \end{aligned} \tag{2.5}$$

Öteleme için $h(x) = e^{ia^cP_c}$ alınırsa;

$$A'_\mu = e^{a^cP_c}\left(e_\mu{}^cP_c + \theta_\mu{}^{cb}Z_{cb} - \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{cb}M_{cb} + \frac{1}{ig}\partial_\mu\right)e^{-a^cP_c} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \delta_p\omega_\mu{}^{cb} &= 0 \\ \delta_p e_\mu{}^c &= \omega_\mu{}^c{}_b a^b - \frac{1}{g}\partial_\mu a^c \\ \delta_p\theta_\mu{}^{cb} &= -a^{[c}e_\mu{}^{b]} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Tensör dönüşümü için $h(x) = e^{i\varepsilon Z}$ alınırsa;

$$\begin{aligned} A_\mu' &= e^{i\varepsilon\cdot Z}\left(e_\mu{}^aP_a + \theta_\mu{}^{ab}Z_{ab} - \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab} + \frac{1}{ig}\partial_\mu\right)e^{-i\varepsilon\cdot Z} \\ &= e^{i\varepsilon\cdot Z}e_\mu^aP_a e^{-i\varepsilon\cdot Z} + e^{i\varepsilon\cdot Z}\theta_\mu{}^{ab}Z_{ab}e^{-i\varepsilon\cdot Z} - e^{i\varepsilon\cdot Z}\frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab}e^{-i\varepsilon\cdot Z} \\ &= e_\mu^aP_a + \left(\theta_\mu{}^{ab} - \left(\varepsilon^{ac}\omega_\mu{}^b{}_c - \varepsilon^{bc}\omega_\mu{}^a{}_c\right)\right)Z_{ab} - \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab} \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \delta_z\omega_\mu{}^{ab} &= 0 \\ \delta_z e_\mu{}^a &= 0 \\ \delta_z\theta_\mu{}^{ab} &= -\left(\varepsilon^{ac}\omega_\mu{}^b{}_c - \varepsilon^{bc}\omega_\mu{}^a{}_c\right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

olur.

Ayar alanlarına bağlı eğrilikleri aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz;

$$A_{\mu\upsilon}(x) = F_{\mu\upsilon}{}^{a}(x)P_a + F_{\mu\upsilon}{}^{ab}(x)Z_{ab} - \frac{1}{2}R_{\mu\upsilon}{}^{ab}(x)M_{cb} \tag{2.10}$$

Eğrilikleri bulmak için;

$$\begin{aligned} A_{\mu\upsilon}(x) &= \partial_\mu A_\upsilon(x) - \partial_\upsilon A_\mu(x) - ig\left[A_\mu(x), A_\upsilon(x)\right] \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\mu \theta_\upsilon{}^{ab} Z_{ab} + \partial_\upsilon \theta_\mu{}^{ab} Z_{ab} - g(\theta_\mu{}^{ac}\omega_\upsilon{}^{b}{}_{c} - \theta_\mu{}^{bc}\omega_\upsilon{}^{a}{}_{c})Z_{ab} \\ -\frac{1}{2}g\left(e_\mu^a e_v^b - e_\mu^b e_\upsilon^a\right)Z_{ab} + g\left(\omega_\mu{}^{ac}\theta_\upsilon{}^{b}{}_{c} - \omega_\mu{}^{bc}\theta_\upsilon{}^{a}{}_{c}\right)Z_{ab} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Elde edilen eğrilikler aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} F_{\mu\upsilon}{}^{a} &= \left(\partial_\mu e_\upsilon{}^{a} - \partial_\upsilon e_\mu{}^{a}\right) + g\left(\omega_\upsilon{}^{a}{}_{b} e_\mu{}^{b} - \omega_\mu{}^{a}{}_{b} e_\upsilon{}^{b}\right) \\ F_{\mu\upsilon}{}^{ab} &= \begin{pmatrix} \left(\partial_\mu \theta_\upsilon{}^{ab} - \partial_\upsilon \theta_\mu{}^{ab}\right) + 2g\left(g_\mu \theta_v^{ab} - g_\upsilon \theta_\mu^{ab}\right) - g\left(\theta_\mu{}^{ac}\omega_\upsilon{}^{b}{}_{c} - \theta_\mu{}^{bc}\omega_\upsilon{}^{a}{}_{c}\right) \\ -\frac{1}{2}g\left(e_\mu{}^{a} e_\upsilon{}^{b} - e_\mu{}^{b} e_\upsilon{}^{a}\right) + g\left(\omega_\mu{}^{ac}\theta_\upsilon{}^{b}{}_{c} - \omega_\mu{}^{bc}\theta_\upsilon{}^{a}{}_{c}\right) \end{pmatrix} \\ R_{\mu\upsilon}{}^{ab} &= \left(\partial_\mu \omega_\upsilon{}^{ab} - \partial_\upsilon \omega_\mu{}^{ab}\right) - g\left(\omega_\mu{}^{a}{}_{c}\omega_\upsilon{}^{cb} - \omega_\upsilon{}^{a}{}_{c}\omega_\mu{}^{cb}\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Tanımlanan bu eğriliklerin dönüşümünü aşağıdaki ifadeden bulabiliriz;

$$A_{\mu\upsilon}{}' = h(x)A_{\mu\upsilon}(x)h^{-1}(x) \tag{2.13}$$

Öteleme simetrisi altında eğrilikler aşağıdaki şekilde değişim göstermektedirler;

$$\begin{aligned} \delta_p F_{\mu\upsilon}{}^{a} &= R_{\mu\upsilon}{}^{ab} C_b - C^a F_{\mu\upsilon} \\ \delta_p F_{\mu\upsilon}{}^{ab} &= -\frac{1}{2}\left(C^a R_{\mu\nu}{}^{b} - C^b R_{\mu\upsilon}{}^{a}\right) \\ \delta_p R_{\mu\upsilon}{}^{ab} &= 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Eğriliklerin yeni tensör üreticiden kaynaklanan simetri altındaki dönüşümü;

$$\begin{aligned} \delta_Z F_{\mu\upsilon}{}^{a} &= 0 \\ \delta_Z F_{\mu\upsilon}{}^{ab} &= -\left(\varepsilon^{ac} R_{\mu\upsilon}{}^{b}{}_{c} - \varepsilon^{bc} R_{\mu\upsilon}{}^{a}{}_{c}\right) \\ \delta_Z R_{\mu\upsilon}{}^{ab} &= 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

şeklinde olur.

Ayar alanları eşitlersek;

$$A = i\omega_\mu^{\ a}P_a + i^{(Z)}\omega_\mu^{\ ab}Z_{ab} + i^{(M)}\omega_\mu^{\ ab}M_{ab} = h^{-1}(x)\left(\partial_\mu + igA_\mu(x)\right)h(x) \tag{2.16}$$

$h(x) = e^{ia^aP_a}e^{i\varepsilon^{ab}Z_{ab}}$ ise;

$$A = e^{-i\varepsilon\cdot Z}e^{-ia\cdot P}\left(\partial_\mu + ig\left(e_\mu^{\ a}P_a + \theta_\mu^{\ ab}Z_{ab} - \frac{1}{2}\omega_\mu^{\ ab}M_{ab}\right)\right)e^{ia\cdot P}e^{i\varepsilon\cdot Z}$$

$$= e^{-i\varepsilon\cdot Z}\begin{pmatrix} i\left(\partial_\mu a^a + ge_\mu^{\ a} - g\omega_\mu^{\ ab}a_b\right)P_a \\ +ig\left(\theta_\mu^{\ ab} - e_\mu^{\ [a}y^{b]}\right)Z_{ab} \\ -\frac{i}{2}g\omega_\mu^{\ ab}M_{ab}\end{pmatrix}e^{i\varepsilon\cdot Z} \tag{2.17}$$

$$= \begin{pmatrix} i\left(\partial_\mu a^a + ge_\mu^{\ a} - g\omega_\mu^{\ ab}a_b\right)P_a \\ +\left(g\theta_\mu^{\ ab} - ge_\mu^{\ [a}a^{b]} + g\left(\varepsilon^{ac}\omega_\mu^{\ \ a}{}_c\right)\right)Z_{ab} \\ -\frac{i}{2}g\omega_\mu^{\ ab}M_{ab}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \omega_\mu^{\ a} &= \left(\partial_\mu y^a + ge_\mu^{\ a} - g\omega_\mu^{\ ab}y_b\right) \\ \omega^{(Z)}{}_\mu^{\ ab} &= g\left(\theta_\mu^{\ ab} - e_\mu^{\ [a}y^{b]} + \left(\varepsilon^{ac}\omega_\mu^{\ \ b}{}_c - \varepsilon^{bc}\omega_\mu^{\ \ a}{}_c\right)\right) \\ \omega^{(M)}{}_\mu^{\ ab} &= g\omega_\mu^{\ ab} \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \delta_p a^a &= c^a \\ \delta_z a^a &= 0 \\ \delta_M a^a &= -u^{ab}a_b \end{aligned} \tag{2.19}$$

$\tilde{e}_\mu^{\ a} = e_\mu^{\ a} - \omega_\mu^{\ ab}a_b$ ise,

$$\begin{aligned} \delta_p \tilde{e}_\mu^{\ a} &= -\frac{1}{g}\partial_\mu c^a \\ \delta_M \tilde{e}_\mu^{\ a} &= -u^{ab}\tilde{e}_{\mu b} + \frac{1}{g}\partial_\mu u^{ab}a_b \end{aligned} \tag{2.20}$$

Z^{ab} dönüşümü altında ise Eşitlik (2.21) ve Eşitlik (2.22) elde edilir;

$$
\begin{aligned}
&\delta_Z e_\mu{}^a = 0 \\
&\delta_Z \left(\tilde{e}_\mu{}^a + \omega_\mu{}^{ab} a_b \right) = 0 \\
&\delta_Z \tilde{e}_\mu{}^a = -\delta_Z \omega_\mu{}^{ab} a_a - \omega_\mu{}^{ab} \delta_Z a_b \\
&\delta_Z \tilde{e}_\mu{}^a = 0
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

$$
\tilde{\omega}_\mu{}^a = \left(\partial_\mu a^a + g \tilde{e}_\mu{}^a \right) \tag{2.22}
$$

Yeni eğriliklerin ayar dönüşümü altındaki değişimleri aşağıdaki yapıda bulunur;

$$
A'_{\mu\upsilon}{}^c \chi_c = e^{-ia^a P_a} A_{\mu\upsilon}{}^c \chi_c e^{ia^a P_a} \tag{2.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{F}_{\mu\upsilon}{}^a = R_{\mu\upsilon}{}^a - R_{\mu\upsilon}{}^{ab} a_b \\
&\tilde{F}_{\mu\upsilon}{}^{ab} = F_{\mu\upsilon}{}^{ab} - R_{\mu\upsilon}{}^a a^b \\
&\tilde{R}_{\mu\upsilon}{}^{ab} = R_{\mu\upsilon}{}^{ab}
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

2.2. Genişletilmiş Weyl Grubunun Ayar Teorisi

Genişletilmiş Weyl grubunun komütasyon bağıntıları;

$$
\begin{aligned}
&\left[M_{ab}, M_{cd} \right] = i(\eta_{cd} M_{bc} + \eta_{bc} M_{cd} - (c \leftrightarrow d)) \\
&\left[P_a, P_b \right] = iZ_{ab} \\
&\left[M_{ab}, P_c \right] = i(\eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b) \\
&\left[D, D \right] = 0 \\
&\left[P_a, D \right] = iP_a \\
&\left[Z_{ab}, Z_{cd} \right] = 0 \\
&\left[Z_{ab}, D \right] = 2iZ_{ab} \\
&\left[M_{ab}, Z_{cd} \right] = i(\eta_{ad} Z_{bc} + \eta_{bc} Z_{cd} - (c \leftrightarrow d)) \\
&\left[Z_{ab}, P_c \right] = 0
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Ayar alanı tanımlanır;

$$
A_\mu(x) = e_\mu{}^a P_a + \theta_\mu{}^{ab} Z_{ab} + g_\mu D - \frac{1}{2} \omega_\mu{}^{ab} M_{ab} \tag{2.26}
$$

Grup parametrelerinin bu ayar alanı altındaki dönüşümlerini bulabilmek için Eşitlik (2.27) kullanılabilir;

$$A_\mu{}'(x) = h(x)\left(A_\mu(x) + \frac{1}{ig}\partial_\mu\right)h^{-1}(x)$$
$$= e'_\mu{}^a P_a + \theta'_\mu{}^{ab} Z_{ab} + g'_\mu D - \frac{1}{2}\omega'_\mu{}^{ab} M_{ab} \tag{2.27}$$

Şimdi sırası ile ayrı ayrı olarak bütün üreticiler için inceleyelim.

Lorentz simetrisi için $h(x) = e^{\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}}$ ise;

$$A'_\mu = e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}}\left(e_\mu{}^a P_a + \theta_\mu{}^{ab} Z_{ab} + g_\mu D - \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab} M_{ab} + \frac{1}{ig}\partial_\mu\right)e^{+\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} e_\mu{}^a P_a e^{\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} + e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} \theta_\mu{}^{ab} Z_{ab} e^{\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} + e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} g_\mu D e^{\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} \\ -\frac{1}{2} e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} \omega_\mu{}^{ab} M_{ab} e^{\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} + e^{-\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} \frac{1}{ig}\partial_\mu e^{\frac{i}{2}u^{ab}M_{ab}} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Lorentz dönüşümü altında grup parametreleri aşağıdaki davranışı gösterirler;

$$\delta_M \omega_\mu{}^{ab} = u^{ac}\omega_\mu{}^b{}_c - u^{bc}\omega_\mu{}^a{}_c - \frac{1}{g}\partial_\mu u^{ab}$$
$$\delta_M e_\mu{}^a = -u^{ab} e_{\mu b} \tag{2.29}$$
$$\delta_M \theta_\mu{}^{ab} = u^{ac}\theta_\mu{}^b{}_c - u^{bc}\theta_\mu{}^a{}_c$$
$$\delta_M g_\mu = 0$$

Öteleme simetrisi için $h(x) = e^{ia^c P_c}$ ise;

$$\delta_p \omega_\mu{}^{cb} = 0$$
$$\delta_p e_\mu{}^c = -a^c g_\mu + \omega_\mu{}^c{}_b a^b - \frac{1}{g}\partial_\mu a^c \tag{2.30}$$
$$\delta_p \theta_\mu{}^{cb} = -a^{[c} e_\mu{}^{b]}$$
$$\delta_p g_\mu = 0$$

Ölçekleme simetrisi $h(x) = e^{i\lambda . D}$ ise;

$$\delta_D \omega_\mu{}^{ab} = 0$$
$$\delta_D e_\mu{}^a = \lambda e_\mu{}^a$$
$$\delta_D \theta_\mu{}^{ab} = -2\lambda\theta_\mu{}^{ab} \tag{2.31}$$
$$\delta_D g_\mu = -\frac{1}{g}\partial_\mu \lambda$$

Tensör üreticiden kaynaklanan yeni simetri için $h(x)=e^{i\varepsilon .Z}$ ise;

$$A_{\mu}{}' = e^{i\varepsilon\cdot Z}\left(e_{\mu}{}^{a}P_{a} + \theta_{\mu}{}^{ab}Z_{ab} + g_{\mu}D - \frac{1}{2}\omega_{\mu}{}^{ab}M_{ab} + \frac{1}{ig}\partial_{\mu}\right)e^{-i\varepsilon\cdot Z}$$

$$= \left(\begin{array}{l} e_{\mu}^{a}P_{a} + \left(\theta_{\mu}{}^{ab} - 2\varepsilon^{ab}g_{\mu} + \left(\varepsilon^{ac}\omega_{\mu}{}^{b}{}_{c} - \varepsilon^{bc}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{c}\right)\right)Z_{ab} \\ -\frac{1}{2}\omega_{\mu}{}^{ab}M_{ab} + g_{\mu}D \end{array} \right) \tag{2.32}$$

Grup parametrelerinin bu simetriye bağlı dönüşümü ise aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} &\delta_{z}\omega_{\mu}{}^{ab} = 0 \\ &\delta_{z}e_{\mu}{}^{ab} = 0 \\ &\delta_{z}\theta_{\mu}{}^{ab} = -2\varepsilon^{ab}g_{\mu} + \left(\varepsilon^{ac}\theta_{\mu}{}^{b}{}_{c} - \varepsilon^{bc}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{c}\right) \\ &\delta_{z}g_{\mu} = 0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Üreticilere bağlı eğrilikler aşağıdaki şekillerde ifade edilebilir;

$$A_{\mu\upsilon}(x) = F_{\mu\upsilon}{}^{a}(x)P_{a} + F_{\mu\upsilon}{}^{ab}(x)Z_{ab} + F_{\mu\upsilon}(x)D - \frac{1}{2}R_{\mu\upsilon}{}^{ab}(x)M_{cb} \tag{2.34}$$

$$A_{\mu\upsilon}(x) = \partial_{\mu}A_{\upsilon}(x) - \partial_{\upsilon}A_{\mu}(x) - ig\left[A_{\mu}(x), A_{\upsilon}(x)\right] \tag{2.35}$$

Bu iki ifadenin sonuçlarını karşılaştırdığımızda eğrilikleri aşağıdaki şekilde elde edebiliriz;

$$\begin{aligned} F_{\mu\upsilon}{}^{a} &= \left(\partial_{\mu}e_{\upsilon}{}^{a} - \partial_{\upsilon}e_{\mu}{}^{a}\right) + g\left(g_{\mu}e_{v}^{a} - g_{\upsilon}e_{\mu}^{a}\right) + g\left(\omega_{\upsilon}{}^{a}{}_{b}e_{\mu}{}^{b} - \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}e_{\upsilon}{}^{b}\right) \\ F_{\mu\upsilon}{}^{ab} &= \left(\begin{array}{l} \left(\partial_{\mu}\theta_{\upsilon}{}^{ab} - \partial_{\upsilon}\theta_{\mu}{}^{ab}\right) + 2g\left(g_{\mu}\theta_{v}^{ab} - g_{\upsilon}\theta_{\mu}^{ab}\right) \\ -g\left(\theta_{\mu}{}^{ac}\omega_{\upsilon}{}^{b}{}_{c} - \theta_{\mu}{}^{bc}\omega_{\upsilon}{}^{a}{}_{c}\right) \\ -\frac{1}{2}g\left(e_{\mu}{}^{a}e_{\upsilon}{}^{b} - e_{\mu}{}^{b}e_{\upsilon}{}^{a}\right) + g\left(\omega_{\mu}{}^{ac}\theta_{\upsilon}{}^{b}{}_{c} - \omega_{\mu}{}^{bc}\theta_{\upsilon}{}^{a}{}_{c}\right) \end{array} \right) \\ F_{\mu\upsilon} &= \left(\partial_{\mu}g_{\upsilon} - \partial_{\upsilon}g_{\mu}\right) \\ R_{\mu\upsilon}{}^{ab} &= \left(\partial_{\mu}\omega_{\upsilon}{}^{ab} - \partial_{\upsilon}\omega_{\mu}{}^{ab}\right) - g\left(\omega_{\mu}{}^{a}{}_{c}\omega_{\upsilon}{}^{cb} - \omega_{\upsilon}{}^{a}{}_{c}\omega_{\mu}{}^{cb}\right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Bu eğriliklerin istenilen simetri altındaki dönüşümünü bulabilmek için Eşitlik (2.37) kullanılır;

$$A_{\mu\upsilon}{}' = h(x)A_{\mu\upsilon}(x)h^{-1}(x) \tag{2.37}$$

Öteleme simetrisi için $h(x) = e^{ic^a P_a}$ ise eğriliklerin dönüşümü;

$$
\begin{aligned}
&\delta_p F_{\mu\upsilon}{}^{a} = R_{\mu\upsilon}{}^{ab} C_b - C^a F_{\mu\upsilon} \\
&\delta_p F_{\mu\upsilon}{}^{ab} = -\frac{1}{2}\left(C^a R_{\mu\nu}{}^{b} - C^b R_{\mu\upsilon}{}^{a}\right) \\
&\delta_p F_{\mu\upsilon} = 0 \\
&\delta_p R_{\mu\upsilon}{}^{ab} = 0
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Ölçekleme simetrisi için $h(x) = e^{i\lambda.D}$ ise;

$$
\begin{aligned}
&\delta_D F_{\mu\upsilon}{}^{a} = \lambda F_{\mu\upsilon}{}^{a} \\
&\delta_D F_{\mu\upsilon}{}^{ab} = 2\lambda F_{\mu\upsilon}{}^{ab} \\
&\delta_D F_{\mu\upsilon} = 0 \\
&\delta_D R_{\mu\upsilon}{}^{ab} = 0
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Yeni tensör üretici kaynaklı simetri için $h(x) = e^{i\varepsilon^{ab} Z_{ab}}$ ise;

$$
\begin{aligned}
&\delta_Z F_{\mu\upsilon}{}^{a} = 0 \\
&\delta_Z F_{\mu\upsilon}{}^{ab} = -2\varepsilon^{ab} F_{\mu\upsilon} + \left(\varepsilon^{ac} R_{\mu\upsilon}{}^{b}{}_{c} - \varepsilon^{bc} R_{\mu\upsilon}{}^{a}{}_{c}\right) \\
&\delta_Z F_{\mu\upsilon} = 0 \\
&\delta_Z R_{\mu\upsilon}{}^{ab} = 0
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

$$
\begin{aligned}
A_\mu &= \omega_\mu^a (P) P_a + \omega_\mu{}^{ab} (Z) Z_{ab} + \omega_\mu (D) D + {}^{(M)}\omega_\mu{}^{ab} (M) M_{ab} \\
&= h^{-1}(x)\left(\partial_\mu - igA_\mu(x)\right)h(x)
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

$h(x) = e^{ia^a P_a} e^{i\varepsilon^{ab} Z_{ab}} e^{i\lambda D}$ ise;

$$A = e^{-i\lambda D} e^{-i\varepsilon Z} e^{-iaP} \left(\partial_\mu - ig \begin{pmatrix} e_\mu{}^a P_a + \theta_\mu{}^{ab} Z_{ab} \\ + g_\mu D + \frac{1}{2} \omega_\mu{}^{ab} M_{ab} \end{pmatrix} \right) e^{iaP} e^{i\varepsilon Z} e^{i\lambda D}$$

$$= e^{-i\lambda D} e^{-i\varepsilon Z} \begin{pmatrix} i\left(\partial_\mu a^a - g e_\mu{}^a + g\omega_\mu{}^{ab} a_b - g g_\mu a^a\right) P_a \\ -ig\left(\theta_\mu{}^{ab} - e_\mu{}^{[a} a^{b]}\right) Z_{ab} - igg_\mu D \\ -\frac{i}{2} g\omega_\mu{}^{ab} M_{ab} \end{pmatrix} e^{i\varepsilon Z} e^{i\lambda D}$$

$$= e^{-i\lambda D} \begin{bmatrix} i\left(\partial_\mu a^a - g e_\mu{}^a + g\omega_\mu{}^{ab} a_b - g g_\mu a^a\right) P_a \\ -\left(g\theta_\mu{}^{ab} - g e_\mu{}^{[a} a^{b]} + g g_\mu \varepsilon^{ab} + g\left(\varepsilon^{ac} \omega_\mu{}^a{}_c\right)\right) Z_{ab} \\ -igg_\mu D - \frac{i}{2} g\omega_\mu{}^{ab} M_{ab} \end{bmatrix} e^{i\lambda D}$$

$$= \begin{pmatrix} ie^{-\lambda}\left(\partial_\mu a^a - g e_\mu{}^a + g\omega_\mu{}^{ab} a_b - g g_\mu a^a\right) P_a \\ -ie^{-2\lambda}\left(g\theta_\mu{}^{ab} - g e_\mu{}^{[a} a^{b]} + g g_\mu \varepsilon^{ab} + g\left(\varepsilon^{ac} \omega_\mu{}^b{}_c - \varepsilon^{bc} \omega_\mu{}^a{}_c\right)\right) Z_{ab} \\ -igg_\mu D - \frac{i}{2} g\omega_\mu{}^{ab} M_{ab} \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} \omega_\mu{}^a(P) &= e^{-\lambda}\left(\partial_\mu a^a - g e_\mu{}^a + g\omega_\mu{}^{ab} a_b - g g_\mu a^a\right) \\ \omega_\mu{}^{ab}(Z) &= -e^{-2\lambda} g\left(\theta_\mu{}^{ab} - e_\mu{}^{[a} a^{b]} - g_\mu \varepsilon^{ab} + \left(\varepsilon^{ac} \omega_\mu{}^b{}_c - \varepsilon^{bc} \omega_\mu{}^a{}_c\right)\right) \\ \omega_\mu(D) &= -g g_\mu \\ \omega_\mu{}^{ab}(M) &= -g\omega_\mu{}^{ab} \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} \delta_p a^a &= c^a \\ \delta_z a^a &= 0 \\ \delta_D a^a &= -\lambda a^a \\ \delta_M a^a &= -u^{ab} a_b \end{aligned} \tag{2.44}$$

$\omega_\mu{}^a$ 'ya tensör katkısı gelmediğinden dönüşümler Weyl grubundaki gibi olur.

$\tilde{e}_\mu{}^a = e_\mu{}^a - \omega_\mu{}^{ab} a_b + g_\mu a^a$ ise;

$$\begin{aligned}
\delta_P \tilde{e}_\mu{}^a &= -\frac{1}{g}\partial_\mu c^a \\
\delta_M \tilde{e}_\mu{}^a &= -u^{ab}\tilde{e}_{\mu b} + \frac{1}{g}\partial_\mu u^{ab} a_b \\
\delta_D e_\mu{}^a &= \tilde{e}_\mu{}^a - \frac{1}{g}\partial_\mu \lambda a^a
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Z^{ab} dönüşümü altında ise;

$$\begin{aligned}
&\delta_Z e_\mu{}^a = 0 \\
&\delta_Z \left(\tilde{e}_\mu{}^a + \omega_\mu{}^{ab} a_b - g_\mu a^a\right) = 0 \\
&\delta_Z \tilde{e}_\mu{}^a = -\delta_Z \omega_\mu{}^{ab} a_a - \omega_\mu{}^{ab}\delta_Z a_b + \delta_Z g_\mu a^a + g_\mu \delta_Z a^a \\
&\delta_Z \tilde{e}_\mu{}^a = 0
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\tilde{\omega}_\mu{}^a = e^{-\lambda}\left(\partial_\mu a^a + g\tilde{e}_\mu{}^a\right) \tag{2.47}$$

Yeni eğriliklerin dönüşümü ise;

$$A'_{\mu\upsilon}{}^c \chi_c = e^{-ia^a P_a} A_{\mu\upsilon}{}^c \chi_c e^{ia^a P_a} \tag{2.48}$$

$[Z_{ab}, P_c] = 0$ olduğundan Weyl grubundaki dönüşümlere katkı yoktur.

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}_{\mu\upsilon}{}^a = R_{\mu\upsilon}{}^a + R_{\mu\upsilon} a^a - R_{\mu\upsilon}{}^{ab} a_b \\
&\tilde{F}_{\mu\upsilon}{}^{ab} = F_{\mu\upsilon}{}^{ab} - R_{\mu\upsilon}{}^a a^b \\
&\tilde{F}_{\mu\upsilon} = R_{\mu\upsilon} \\
&\tilde{R}_{\mu\upsilon}{}^{ab} = R_{\mu\upsilon}{}^{ab}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

S. Colemann ve B. Zumino ile yaptığı birtakım çalışmalardan sonra Wess (1969) doğrusal ve doğrusal olmayan dönüşümler arasındaki ilişkileri incelediği çalışmasını yayınladı. Bu çalışma, özellikle iç simetri grupları için doğrusal olmayan gerçekleme konusunda literatürde ilk olma özelliği gösteriyordu. Daha sonra bu üçlünün (Colemann, Wess, Zumino) yanı sıra Salam ve Strathdee (1969a, 1969b), Ogievetsky (1974), Ivanov ve Niederle (1982a, 1982b), Gronwald ve Hehl (1995) uzay-zaman simetri grupları için doğrusal olmayan gerçekleme metodunu geliştirerek Poincare, de Sitter, Conformal, Special Conformal vs. gruplara uyguladılar.

Biz çalışmamızda Ivanov ve Niederle (1982) tarafından yayınlanan "Gauge formulation of gravitation theories. I. The Poincare, de Sitter, and conformal cases" başlıklı makale üzerinden doğrusal olmayan gerçeklemenin Poincare ve Conformal gruplara uygulanarak kütle çekimi ayar teorisinin kurulmasını birinci bölümde ara işlemlerini açık biçimde yaparak inceledik ve göstermeye çalıştık. Daha sonra ikinci bölümde bu makaleye paralel olarak Poincare grubunun antisimetrik bir tensör üreticiyle genişletilmesiyle (Bacry, 1970) elde edilen Maxwell grubunu ve yine antisimetrik bir tensörle genişletilmiş olan Weyl grubunu ele alarak ayar teorilerini inceledik ve bilinen ifadelere ek yeni katkılar elde ettik. Elde edilen bu yeni sonuçlardan yola çıkılarak genişletilmiş uzay-zaman simetrilerine ait eğrilikleri bulduk. Buradan hareketle lagranjiyen yoğunluğunu, hareket denkleminin elde edilmesini ve bunun fiziksel yorumunu sonraki aşamalara bıraktık.

KAYNAKLAR

Ali S. A., Cafaro C., Capoziello S., Corda C., On the Poincare Gauge Theory of Gravitation, *Int.J.Theor.Phys*, 2009, **48**, 3426-3448.

Azcarraga J. A., Kamimura K., Lukierski J., Maxwell Symmetries and Some Applications, *XV. International Conf. on 'Symmetry Methods in Physics'*, Dubna, Russia, 12-16 July 2011.

Bacry H., Combe P., Richard J. L., Group-Theoretical Analysis of Elementary Particles in an External Electromagnetic Field, *Il Nuovo Cimento A*, 1970, **67**, 267-299.

Blagojevic M., Three Lectures on Poincare Gauge Theory, *II. Summer School in Modern Mathematical Physics*, Kopaonik, Yugoslavia, 1-12 September 2002.

Blagojevic M., *Gravitation and Gauge Symmetries*, 1st ed., IOP, London, 2002.

Callan C. G., Coleman S., Wess J., Zumino B., Structure of Phenomenological Lagrangians. II, *Physical Review,* 1969, **177**, 2247-2250.

Charap J. M., Tait W., A Gauge Theory of Weyl Group, *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 1974, **340**, 249-262.

Coleman S., Wess J., Zumino B., Structure of Phenomenological Lagrangians. I, *Physical Review,* 1969, **177**, 2239-2247.

Durka R., Kowalski-Glikman, Szczachor M., Gauged AdS–Maxwell Algebra and Gravity, *Mod.Phys.Lett. A*, 2011, **26**, 2689-2696.

Fedoruk S., Lukierski J., New Particle Model in Extended Space-Time and Covariantization of Planar Landau Dynamics, *Phys.Lett.B*, 2012, **718**, 646-652.

Gomis J., Kamumira K., Pons J. M., Non-Linear Realizations, Goldstone bosons of broken Lorentz rotations and effective actions for p-branes, *Nucl.Phys.B, 2013,* **871***,* 420-451*.*

Gronwald F., Hehl F. W., On the Gauge Aspects of Gravity, *14th Course of the School of International School of Cosmology and Gravitation on Quantum Gravity*, Erice, Italy, 11-19 May 1995.

Hehl F. W., Four Lectures on Poincare Gauge Field Theory, *6th Course of the International School of Cosmology and Gravitation on "Spin, Torsion, Rotation and Supergravity"*, Erice, Italy, 1979.

Hori S., Sakamoto J., Sato A., Nonlinear Realisation of Conformal Symmetry, *Progress of Theoretical Physics*, 1974, **52**, 1647-1651.

Isham C. J., Salam A., Strathdee J., Non-Linear Realizations-III: Space-Time Symmetries, *Ann.Phys.*, 1971, **62**, 98-119.

Ivanov E. A., Niederle J., Gauge Formulation of Gravitation Theories, I. The Poincare, de Sitter and Conformal Cases, *Phys.Rev.D*, 1982, **25**, 976-987.

Ivanov E. A., Niederle J., Gauge Formulation of Gravitation Theories, II. Special Conformal Cases, *Phys.Rev.D*, 1982, **25**, 988-994.

Kasuya M., On The Gauge Theory in the Einstein-Cartan-Weyl Space-Time, *II. Nuovo.Cim.B*, 1975, **28**, 127-137.

Kibble T. W. B., Lorentz Invariance and the Gravitational Field, *Journal of Mathematical Physics*, 1961, **2**, 212-221.

Ogievetsky V. I., Nonlinear Realizations of Internal and Space-Time Symmetries, *in Proceedings of X-th Winter School of Theoretical Physics,* Karpacz, Poland, 1974.

Okabayashi T., Watanabe T., Formal Theory of Non-Linear Realization of a Group on Its Sub-group, *Progress of Theoretical Physics*, 1970, **43**, 1085-1104.

Salam A., Strathdee J., Nonlinear Realizations I. The Role of Goldstone Bosons*, Physical Review,* 1969*,* **184**, 1750-1759.

Salam A., Strathdee J., Nonlinear Realizations II. Conformal Symmetry*, Physical Review,* 1969*,* **184**, 1760-1768.

Schrader R., The Maxwell Group and the Quantum Theory of Particles in Classical Homogeneous Electromagnetic Field, *Fortschritte der Physik*, 1972, **20**, 701-734.

Soroka D. V., Soroka V. A., Tensor Extension of the Poincare Algebra, *Physics Letters B*, 2005, **607**, 302–305.

Soroka D. V., Soroka V. A., Poincare Algebra Extension with Tensor Generator, *6th International Conference on Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics*, Kiev, Ukraine, 20-26 June 2005.

Soroka D. V., Soroka V. A., Gauge Semi-Simple Extension of the Poincare Group, *Physics Letters B*, 2012, **707**, 160-162.

Srivastava P. P., Conformal Symmetry in Lagrangian Field Theory, *Revista Brasileira de Fisica*, 1973, **3**, 577-599.

Utiyama R., Invariant Theoretical Interpretation of Interaction, *Physical Review*, 1956, **101**, 1597-1607.

Wess J., Realisations of a compact, connected, semisimple Lie group, Editors: Höhler G., *Current Algebra and Phenomenological Lagrange Functions*, 1th ed., Springer, New York, 132-142, 1969.

EKLER

EK-A: NOTASYON

$\mathrm{diag}\left(\eta_{\mu\upsilon}\right) = (+,-,-,-)$	: Düz uzay metriği
$\partial_{\mu\upsilon}\theta^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\eta}^{\sigma} - \delta_{\upsilon}^{\rho}\delta_{\mu}^{\sigma}\right)$	: Tensör türevi
$A_{[\mu}B_{\upsilon]} = A_{\mu}B_{\upsilon} - A_{\upsilon}B_{\mu}$	: Anti-simetrik gösterim
$A_{[\mu}B_{\rho\vert\upsilon]} = A_{\mu}B_{\rho\upsilon} - A_{\upsilon}B_{\rho\mu}$	: İndis ayracının kullanımı

EK-B: GENİŞLETİLMİŞ WEYL GRUBUNUN ARA İŞLEMLERİ

Koset parametreleri:

Tensörel öteleme dönüşümü altında;

$$
\begin{aligned}
e^{ix'\cdot P} e^{i\theta'\cdot Z} e^{i\sigma'\cdot D} h &= e^{i\varepsilon\cdot Z} e^{ix\cdot P} e^{i\theta\cdot Z} e^{i\sigma\cdot D} \\
&= e^{ix\cdot P} e^{i\left(\theta^{ab}+\varepsilon^{ab}\right)Z_{ab}} e^{i\sigma\cdot D}
\end{aligned}
$$

ölçekleme dönüşümü altında;

$$
\begin{aligned}
e^{ix'\cdot P} e^{i\theta'\cdot Z} e^{i\sigma'\cdot D} h &= e^{i\lambda\cdot D} e^{ix\cdot P} e^{i\theta\cdot Z} e^{i\sigma\cdot D} \\
&= \left(e^{i\lambda\cdot D} e^{ix\cdot P} e^{-i\lambda\cdot D}\right)\left(e^{i\lambda\cdot D} e^{i\theta\cdot Z} e^{-i\lambda\cdot D}\right) e^{i\lambda\cdot D} e^{i\sigma\cdot D} \\
&= \exp\left\{e^{i\lambda\cdot D} ix\cdot P e^{-i\lambda\cdot D}\right\} \exp\left\{e^{i\lambda\cdot D} i\theta\cdot Z e^{-i\lambda\cdot D}\right\} e^{i(\sigma+\lambda)D} \\
&= \exp\left\{ix\cdot P - \left[ix\cdot P, i\lambda\cdot D\right]\right\} \exp\left\{i\theta\cdot Z - \left[i\theta\cdot Z, i\lambda\cdot D\right]\right\} e^{i(\sigma+\lambda)D} \\
&= \exp\left\{ix\cdot P + \lambda x\cdot P\right\} \exp\left\{i\theta\cdot Z + 2i\lambda\,\theta\cdot Z\right\} e^{i(\sigma+\lambda)D} \\
&= e^{i\left(x^a+\lambda x^a\right)P_a} e^{i\left(\theta^{ab}+2\lambda\theta^{ab}\right)Z_{ab}} e^{i(\sigma+\lambda)D}
\end{aligned}
$$

Lorentz dönüşümü altında;

$$
\begin{aligned}
e^{ix'\cdot P} e^{i\theta'\cdot Z} e^{i\sigma'\cdot D} h &= e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} e^{ix\cdot P} e^{i\theta\cdot Z} e^{i\sigma\cdot D} \\
&= \left(e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} e^{ix\cdot P} e^{\frac{i}{2}u\cdot M}\right)\left(e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} e^{i\theta\cdot Z} e^{\frac{i}{2}u\cdot M}\right) e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} e^{i\sigma\cdot D} \\
&= \exp\left\{e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} ix\cdot P e^{\frac{i}{2}u\cdot M}\right\} \exp\left\{e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} i\theta\cdot Z e^{\frac{i}{2}u\cdot M}\right\} e^{i\sigma\cdot D} e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} \\
&= \exp\left\{ix\cdot P + \left[ix\cdot P, \tfrac{i}{2}u\cdot M\right]\right\} \exp\left\{i\theta\cdot Z + \left[i\theta\cdot Z, \tfrac{i}{2}u\cdot M\right]\right\} e^{i\sigma\cdot D} e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} \\
&= \exp\left\{ix\cdot P + iu^a{}_b x^b P_a\right\} \exp\left\{i\theta\cdot Z + \left(u_c{}^a\theta^{bc} - u_c{}^b\theta^{ac}\right) Z_{ab}\right\} e^{i\sigma\cdot D} e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} \\
&= e^{i\left(x^a+u^a{}_b x^b\right)P_a} e^{i\left(\theta^{ab}+u_c{}^a\theta^{bc}-u_c{}^b\theta^{ac}\right)Z_{ab}} e^{i\sigma\cdot D} e^{-\frac{i}{2}u\cdot M}
\end{aligned}
$$

şeklinde dönüşürler.

EK-C: GRUP TEORİDE KULLANILAN BAZI AÇILIMLAR

Baker-Hausdorff-Campell formülü:

- $$e^A e^B = \exp\begin{pmatrix} A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\big[A,[A,B]\big] \\ -\frac{1}{12}\big[B,[A,B]\big] - \frac{1}{24}\Big[B,\big[A,[A,B]\big]\Big] \\ -\frac{1}{720}\left(\Big[\big[[A,B],B\big],B\Big] + \Big[\big[[B,A],A\big],A\Big]\right) + \dots \end{pmatrix}$$

Hadamard formülü:

- $$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}\big[A,[A,B]\big] + \frac{1}{3!}\Big[A,\big[A,[A,B]\big]\Big] + \dots$$
  $$e^{-A} B e^{A} = B + [B,A] + \frac{1}{2!}\big[[B,A],A\big] + \frac{1}{3!}\Big[\big[[B,A],A\big],A\Big] + \dots$$

Zassenhaus açılımı:

- $$e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} e^{\frac{t^3}{3}\left(2\big[B,[A,B]\big] + \big[A,[A,B]\big]\right)} e^{\frac{-t^4}{24}\left(\Big[\big[[A,B],A\big],A\Big] + 3\Big[\big[[A,B],A\big],B\Big] + 3\Big[\big[[A,B],B\big],B\Big]\right)} \dots$$

  $[A,B] = sY$ ise;

- $$e^A e^B = e^{\exp(s)B} e^A$$
  $$e^A e^B e^{-A} = e^{\exp(s)B}$$

- $$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]} \quad \left([A,B] = 0 \text{ ve } \big[A,[A,B]\big] = \big[B,[A,B]\big] = 0 \text{ ise}\right)$$

Diğer açılımlar:

- $$e^A e^B e^{-A} = \exp\left(e^A B e^{-A}\right)$$
  $$= \exp\left(B + [A,B] + \frac{1}{2!}\big[A,[A,B]\big] + \frac{1}{3!}\Big[A,\big[A,[A,B]\big]\Big] + \dots\right)$$

- $$e^{-cA} d e^{cA} = cdA - \frac{1}{2!}[cA, cdA] + \frac{1}{3!}\big[cA,[cA,cdA]\big] + \dots$$
  $$e^{-cA} \delta e^{cA} = c\delta A - \frac{1}{2!}[cA, c\delta A] + \frac{1}{3!}\big[cA,[cA,c\delta A]\big] + \dots$$
  $$e^{-cA} \partial_a e^{cA} = c\partial_a A - \frac{1}{2!}[cA, c\partial_a A] + \frac{1}{3!}\big[cA,[cA,c\partial_a A]\big] + \dots$$

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Samsun'un Alaçam ilçesinde dünyaya geldi. İlk ve ortaöğrenimini Alaçam'da tamamladı. 2006 yılında Kırıkkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümünden mezun oldu. 2007 yılı itibariyle TSK'da görev yapmaktadır. Halen Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Bölümü Matematiksel Fizik Ana Bilim Dalı'nda lisansüstü eğitimine devam etmektedir.