KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

NİLAY AKYIL

KOCAELİ 2017

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

NİLAY AKYIL

Doç.Dr. Çiğdem GÜNDÜZ ARAS
Danışman, Kocaeli Üniversitesi ....

Prof.Dr. Halis AYGÜN
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi ....

Doç.Dr. Ayşe SÖNMEZ
Jüri Üyesi, Gebze Teknik Üniversitesi ....

Tezin Savunulduğu Tarih: 14.12.2017

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Son yıllarda pek çok araştırmacının çalıştığı esnek küme teorisi mühendislikte, sosyal bilimlerde, tıp biliminde ve daha pek çok alanda karşılaşılan problemlerin içerdiği belirsizliklerin çözümünde iyi bir araç olarak Molodtsov tarafından 1999 yılında ortaya atılmıştır. Esnek küme teorisi matematiğin topoloji alanına parametreler yardımı ile başarıyla uygulanıp ivme kazanmıştır.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca değerli destek ve yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarımda bana yol gösteren değerli hocam Sayın Doç. Dr. Çiğdem ARAS GÜNDÜZ' e teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Çalışmadaki önerilerinden ötürü Sayın Prof. Dr. Halis Aygün ve Sayın Doç. Dr. Ayşe SÖNMEZ' e ve ayrıca bu önemli günlerde benden sevgisini ve desteğini esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Aralık-2017 Nilay AKYIL

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

$\forall$	: Evrensel niceleyici, her
$\exists$	: Varlıksal niceleyici, en az bir
$\tilde{\cup}$	: Esnek birleşim
$\tilde{\cap}$	: Esnek arakesit
$\in$	: Eleman
$\notin$	: Elemanı değildir
$\tilde{\subseteq}$	: Esnek alt küme
$\tilde{\supseteq}$	:Esnek üst küme
$\tilde{\setminus}$	: Esnek fark operatörü
X	: Evrensel küme
E	: Parametre kümesi
$P(X)$	: X 'in kuvvet kümesi
(F, E)	: Esnek küme
$(F, E)^c$	: Esnek kümenin tümleyeni
Φ	: Boş esnek küme
$\tilde{X}$	: Evrensel esnek küme
(X, τ, E)	: Esnek topolojik uzay
(Y, τ_Y, E)	: Esnek alt uzay
(x_e, E)	: Esnek nokta
$U(x_e, E)$	: Esnek komşuluk sistemi
f	: Esnek fonksiyon
$(F, E)^o$	: Esnek iç küme
$\overline{(F, E)}$	: Esnek kapanış kümesi

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde esnek küme tanımı verilerek daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve önermeler ele alınmıştır.

İkinci bölümde esnek topolojik uzay, esnek komşuluk, esnek iç nokta ve esnek değme noktası tanımları verilmiş ve kavramlar örneklerle desteklenmiştir.

Üçüncü bölümde esnek topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları, $i = 0,1,2$ için, tanımlanmış ve bu aksiyomların önemli özellikleri detaylı olarak araştırılmıştır.

Tezin son bölümünde de sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek Ayırma Aksiyomları, Esnek Komşuluk, Esnek Küme, Esnek Nokta, Esnek Topolojik Uzay.

SEPARATION AXIOMS IN SOFT TOPOLOGICAL SPACES

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, definition a soft set is introduced, some basic definitions and propositions that will be used in the next chapters are considered.

In the second chapter, the definitions of soft topological spaces, soft neighborhood, soft interior point and soft tangency point are given and this definitions are investigated with examples.

In the third chapter, soft separation axioms in soft topological spaces, for $i = 0,1,2$, are defined and their important properties are investigated in detail.

In the last part of thesis, results and suggestions were given.

Keywords: Soft Separation Axioms, Soft Neighborhood, Soft Set, Soft Point, Soft Topological Space.

GİRİŞ

Mühendislikte, ekonomide, sosyal bilimlerde, tıp biliminde ve daha pek çok alanda karşılaşılan problemlerin içerdiği belirsizlikler genellikle karar verme ile ilgili olduğundan, bu problemlerin çözümünde klasik metotlar yeterli olmadığı için, belirsizlikleri içeren bu tarz problemlerin çözümünde sezgisel bulanık kümeler teorisi, olasılık teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, aralık matematiği gibi birçok teori geliştirilmiştir. Bu teoriler birçok araştırmacı tarafından matematiğin pek çok alanına uygulanan güncel konulardır.

Bu teorilerden en önemlisi Zadeh tarafından 1965 yılında verilen bulanık küme teorisidir. Bulanık küme, klasik anlamda verilen bir kümedeki her elemanı $[0,1]$ kapalı aralığındaki bir reel sayıya götüren dönüşüm olarak tanımlanır. Bu teori birçok alanda uygulanmasına rağmen, bazı yapısal zorluklara sahiptir. Bir bulanık küme üyelik fonksiyonu ile tanımlandığından, bu üyelik fonksiyonunun oluşturulması zor olabilir.

Son yıllarda çok gelişme gösteren ve diğer ülkelerdeki gelişmelere paralel olarak ülkemizde de pek çok araştırmacının çalıştığı esnek küme teorisi, bu alanda karşılaşılan problemlerin içerdiği belirsizliklerin çözümünde klasik metotlar yeterli olmadığı için iyi bir araç olarak Molodtsov tarafından 1999 yılında ortaya atılmıştır. Dolayısıyla Molodtsov bulanık ve sezgisel bulanık küme teorisinden farklı olarak esnek küme teorisindeki belirsizlikleri reel değerli bir fonksiyon ile değil, bir seçim fonksiyonu ile ortadan kaldırmaya çalışmış, bu seçimi de parametreler yardımıyla yapmıştır. 1999 yılında yapmış olduğu çalışmasında esnek küme teorisini Perron integrasyonu, Riemann integrasyonu, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, ölçüm teorisi, olasılık teorisi gibi pek çok alana uygulamıştır.

Daha sonra mühendislikte, bilgi sistemlerinde, karar verme mekanizmaları gibi birçok alanda esnek kümeler ile birlikte bulanık esnek kümelerin uygulamaları önem kazanmıştır. Bu yüzden Molodtsov'un çalışmasından sonra başlangıçta bu alanda hem teorik açıdan hem de uygulama açısından pek çok çalışma yapılmıştır.

Maji ve diğ. (2002, 2003) esnek kümeler üzerindeki temel işlemleri vererek, parametre indirgeme yöntemini içeren bir yöntemle esnek küme teorisinin karar verme problemlerinde uygulamasını vermişlerdir. Ali ve diğ. (2009) esnek kümeler üzerinde verilen birleşme ve kesişim işlemlerini yeniden tanımlamış, Gunduz Aras ve diğ. (2016) bu işlemleri olasılıklı esnek kümelere taşımışlardır. Bu alanda birçok araştırmacı yapmış oldukları çalışmalar ile esnek küme teorisine katkıda bulunmuşlardır. Enginoğlu ve diğ. (2009, 2011) bilgi sistemlerindeki esnek bilgi tabanı ile ilgili esnek matris teorisini kurarak optimal değeri bulma problemlerinde karar verme algoritmasını esnek küme teorisinde ele almışlardır.

Teorik alanda yapılan çalışmalar önce cebir alanına uygulanmıştır. Aktaş ve diğ. (2007) esnek küme tanımından yararlanarak esnek grup tanımını vermiş ve esnek grupların temel özelliklerini incelemişlerdir. Daha sonra esnek küme teorisinde cebirsel alanda yapılan pek çok çalışma bulanık ve sezgisel bulanık kümelere taşınmıştır. Feng ve diğ. (2008) esnek yarı-halkayı, Acar ve diğ. (2010) esnek halka kavramlarını tanımlayarak teorinin cebir alanında çalışmasına katkı sağlamışlardır. Esnek kümeler ve bulanık kümelerin kullanıldığı bulanık esnek kümeler Maji ve diğ. (2001) tarafından tanımlanmış, Ahmad ve Kharal (2009) bulanık esnek kümenin bir esnek dönüşüm altındaki görüntü ve ters görüntüsünü, Aygünoğlu ve Aygün (2009) bulanık esnek grubu tanımlayarak özelliklerini incelemişlerdir.

Esnek kümenin fonksiyonel analiz konularına da taşınması güncel olduğundan bu alanda da pek çok çalışma yapılmıştır.

Esnek kümeler topolojik alana ilk olarak Shabir ve Naz (2011) tarafından esnek topolojik uzayın tanımlanmasıyla taşınmış, bu uzayları esnek açık kümelere göre ortak özellikler yönünden sınıflara ayırarak incelemek pek çok açıdan hem kolay hem de amaca daha uygun olduğundan bu alandaki çalışmalar bulanık ve sezgisel bulanık kümelere de taşınarak ivme kazanmıştır. Shabir ve Naz (2011) bu çalışmasında esnek nokta tanımını vererek, esnek kapalı küme, bir noktanın esnek komşuluğu, esnek ayırma aksiyomları gibi önemli kavramların temel özelliklerini incelemişlerdir. Birçok araştırmacı esnek topolojik uzaylarla ilgili pek çok çalışma yapmış fakat bu çalışmalarda esnek nokta kavramı ile ilgili çeşitli yaklaşımlar esnek nokta kavramının farklı tanımlanmasına sebep olmuştur. Bayramov ve Gunduz (Aras) (2013) ile Das ve Samanta (2013) esnek topolojik uzaylarda esnek nokta tanımını yeniden tanımlamışlardır. Bu tanımdan yararlanarak Gunduz (Aras) ve diğ. (2017) esnek topolojik uzaylarda esnek açık, esnek kapalı dönüşüm ve esnek homeomeorfizm kavramlarını, Ozturk ve diğ. (2017) esnek topolojik uzayların genelleştirilmesi olan esnek ikili topolojik uzaylarda esnek parçalı süreklilik tanımını vermiş, önemli teorem ve örneklerle bu kavramı detaylı bir şekilde incelemişlerdir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde esnek küme tanımı verilerek daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve önermeler ele alınmıştır.

İkinci bölümde ilk olarak esnek topolojik uzay tanımı verilerek bu kavramla ilgili temel özellikler incelenmiştir. İkinci kısımda ise esnek topolojik uzaylarda esnek nokta, esnek komşuluk, esnek iç nokta ve esnek değme noktası tanımları verilmiş ve kavramlar örneklerle incelenmiştir.

Üçüncü bölümde esnek topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları, $i = 0,1,2$ için, tanımlanmış ve bu aksiyomların özellikleri detaylı olarak araştırılmıştır.

Tezin son bölümünde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

1. ESNEK KÜMELER

Bu bölümde esnek küme tanımı verilerek daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve önermelere yer verilmiştir.

Tanım 1.1. $X \neq \emptyset$ evrensel küme ve E parametreler kümesi olsun. $F : E \to P(X)$ dönüşümü ile verilen (F, E) ikilisine X kümesi üzerinde bir esnek küme denir (Molodtsov, 1999).

Diğer bir ifadeyle, X evrensel kümesi üzerinde verilen bir esnek küme bu evrensel kümenin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesini verir ve bir (F, E) esnek kümesi;

$$(F, E) = \{(e, F(e)) : e \in E\}$$

şeklinde ifade edilir.

Açıktır ki, her bir esnek kümeden her bir parametresine bağlı olarak klasik anlamda bir küme elde edilir.

Örnek 1.1. Bir (F, E) esnek kümesi, bir X kişisinin çocuğunun okul seçiminde dikkat edeceği özellikleri tanımlasın. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dört okuldan oluşsun ve parametrelerin bir kümesi;

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{array}{l} \text{evden uzaklık, fiziki yapısı, ders programı içeriği, psikolojik rehberlik hizmeti,} \\ \text{maliyeti, kültürel faaliyetleri} \end{array} \right\} \\ &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \end{aligned}$$

şeklinde olsun. $(.), e_i \in E$ parametrelerin birini göstermek üzere F dönüşümü "okul $(.)$" şeklinde tanımlandığı düşünülsün. $F(e_1)$, "okulun eve uzaklığı" anlamındadır ve onun fonksiyonel değeri;

$\{x \in X : x \text{ okulun eve uzaklığı}\}$

kümesidir. Buradan $F(e)$ kümeleri keyfi olduğundan onlardan bazıları boş, bazılarının arakesitleri de boştan farklı olabilir. $F : E \to P(X)$ küme değerli fonksiyonunu,

$$F(e_1)=\{x_2, x_4\},\ F(e_2)=\{x_1, x_3\},\ F(e_3)=\{x_1\},$$
$$F(e_4)=\{x_1, x_4\},\ F(e_5)=\{x_4\},\ F(e_6)=\{x_3\}$$

şeklinde tanımladığımızda;

$$\begin{aligned}(F,E)=\{&(\text{okulun evden uzaklığı, }\{x_2, x_4\}), (\text{okulun fiziki yapısı, }\{x_1, x_3\}),\\ &(\text{okulun ders programı içeriği, }\{x_1\}),\\ &(\text{okulun psikolojik rehberlik hizmeti, }\{x_1, x_4\}),\\ &(\text{okulun maliyeti, }\{x_4\}), (\text{okulun kültürel faaliyetleri, }\{x_3\})\}\end{aligned}$$

kümesi X üzerinde bir esnek kümedir.

Esnek kümeleri bilgisayar dilinde de ifade etmek mümkündür. Yukarıdaki Örnek 1.1.'i ele aldığımızda bir (F,E) esnek kümesi aşağıdaki tablo yardımıyla da gösterilebilir:

Tablo 1.1. Esnek kümenin bilgisayar dilinde gösterilmesi

X	Evden Uzaklık	Fiziki Yapı	Ders Programının içeriği	Psikolojik Rehberlik Hizmetleri	Maliyet	Kültürel Faaliyetler
x_1	0	1	1	1	0	0
x_2	1	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	0	0	1
x_4	1	0	0	1	1	0

Tanım 1.2. $(\mathrm{F},\ \mathrm{E})$ ve (G,E) X kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer her $\mathrm{e}\in\mathrm{E}$ için $\mathrm{F}(\mathrm{e})\subseteq\mathrm{G}(\mathrm{e})$ ise, o zaman (F,E)'ye (G,E) esnek kümesinin esnek alt kümesidir denir ve $(\mathrm{F},\mathrm{E})\tilde{\subset}(\mathrm{G},\mathrm{E})$ ile gösterilir (Ali ve diğ., 2009).

Örnek 1.2. $\mathrm{X}=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evrensel küme, $\mathrm{E}=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. X üzerindeki (F,E) ve (G,E) esnek kümeleri,

$\mathrm{F}(e_1)=\{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathrm{F}(e_2)=\{x_2, x_4\}$, $\mathrm{F}(e_3)=\mathrm{F}(e_4)=\{x_5\}$,

$G(e_1)=\{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathrm{G}(e_2)=\{x_1, x_2, x_4\}$, $\mathrm{G}(e_3)=\{x_5, x_6\}$, $\mathrm{G}(e_4)=\mathrm{X}$

şeklinde verilsin. O halde her $\mathrm{e}\in\mathrm{E}$ için $F(e)\subseteq G(e)$ olduğundan $(F,E)\tilde{\subset}(G,E)$ elde edilir.

Uyarı 1.1. Klasik altküme tanımının aksine, $(F,E)\tilde{\subset}(G,E)$ olması , (F,E) esnek kümesinin her elemanının (G,E) esnek kümesinin bir elemanı olması anlamına gelmez (Enginoglu, 2008).

Örnek 1.3. $\mathrm{X}=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evrensel küme, $\mathrm{E}=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi,

$\mathrm{F}(e_1)=\{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathrm{F}(e_2)=\{x_2, x_4\}$, $\mathrm{F}(e_3)=\{x_2, x_6\}$, $\mathrm{F}(e_4)=\{x_5\}$,

$\mathrm{G}(e_1)=\{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathrm{G}(e_2)=\{x_2, x_4\}$, $\mathrm{G}(e_3)=\{x_2, x_6\}$, $\mathrm{G}(e_4)=\{x_3, x_5\}$

şeklinde verilsin. O halde;

$(e_4, \mathrm{F}(e_4))\in(\mathrm{F},\mathrm{E})$ fakat $(e_4, \mathrm{F}(e_4))\notin(\mathrm{G},\mathrm{E})$ dir.

Tanım 1.3. (F,E) ve (G,E) X kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. (G,E) esnek kümesi (F,E) esnek kümesinin esnek alt kümesi ise (F,E)'ye (G,E)'nin bir esnek üst kümesidir denir ve $(\mathrm{F},\mathrm{E})\tilde{\supset}(\mathrm{G},\mathrm{E})$ ile gösterilir. Eğer $(\mathrm{F},\mathrm{E})\tilde{\subset}(\mathrm{G},\mathrm{E})$ ve $(\mathrm{G},\mathrm{E})\tilde{\subset}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ ise o zaman X üzerindeki (F,E) ve (G,E) esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir ve $(\mathrm{F},\mathrm{E})=(\mathrm{G},\mathrm{E})$ ile gösterilir (Enginoglu, 2008).

Tanım 1.4. (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $e \in E$ için $F(e) = \varnothing$ ise (F, E) esnek kümesine boş esnek küme denir ve Φ ya da $(\varnothing, E)$ ile gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Tanım 1.5. (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $e \in E$ için $F(e) = X$ ise (F, E) esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve $\tilde{X}$ ile gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Tanım 1.6. (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. Her $e \in E$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ şeklinde tanımlanan (H, E) esnek kümesine (F, E) ve (G, E) esnek kümelerinin kesişimi denir ve $(H, E) = (F, E) \tilde{\cap} (G, E)$ ile gösterilir(Ali ve diğ., 2009).

Tanım 1.7. (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. Her $e \in E$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$ şeklinde tanımlanan (H, E) esnek kümesine (F, E) ve (G, E) esnek kümelerinin birleşimi denir ve $(H, E) = (F, E) \tilde{\cup} (G, E)$ ile gösterilir(Ali ve diğ., 2009).

Örnek 1.4. $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel küme ve $E=\{e_1, e_2, e_3\}$ parametre kümesi olsun. X üzerindeki (F, E) ve (G, E) esnek kümeleri,

$F(e_1)=\{x_1, x_2\}$, $F(e_2)=\{x_1\}$, $F(e_3)=X$,
$G(e_1)=\{x_2\}$, $G(e_2)=X$, $G(e_3)=\{x_3\}$
şeklinde tanımlansın. O zaman (F, E) ve (G, E) esnek kümelerinin esnek kesişimi,

$$(H, E) = (F, E) \tilde{\cap} (G, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\}), (e_3, \{x_3\})\}$$

ve (F, E) ve (G, E) esnek kümelerinin esnek birleşimi,

$$(H, E) = (F,E) \tilde{\cup} (G,E) = \{(e_1, \{x_1,x_2\}), (e_2, X), (e_3, X)\}$$ dir.

Açıktır ki iki esnek kümenin birleşimi ya da kesişimindeki ikililer bu esnek kümelerdeki ikililer olmayabilir.

Tanım 1.8. (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. Her $e \in E$ için,

$$H(e) = F(e) \setminus G(e)$$

şeklinde tanımlanan (H, E) esnek kümesine (F, E) ve (G, E) esnek kümelerinin esnek farkı denir ve $(H, E) = (F, E) \tilde{\setminus} (G, E)$ ile gösterilir (Shabir ve Naz, 2011).

Örnek 1.5. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerin kümesi olsun. X üzerindeki (F, E) ve (G, E) esnek kümeleri,

$$(F,E) = \{(e_1, \{x_3,x_4\}), (e_3, X), (e_4, \{x_2,x_3,x_5\})\}$$

ve

$$(G,E) = \{(e_1, \{x_2,x_3\}), (e_3, \{x_1,x_2\}), (e_4, \{x_3,x_4\})\}$$

olacak şekilde seçilirse bu durumda esnek fark kümesi,

$$(F, E) \tilde{\setminus} (G, E) = \{(e_1, \{x_4\}), (e_3, \{x_3,x_4,x_5,x_6\}), (e_4, \{x_2,x_5\})\}$$

olarak elde edilmiş olur.

Tanım 1.9. (F, E), X üzerinde bir esnek küme olsun. (F, E) esnek kümesinin esnek tümleyeni $(F, E)^c$ ile gösterilir ve $(F, E)^c = (F^c, E)$ dir. Burada $F^c : E \to P(X)$ dönüşümü her $e \in E$ için $F^c(e) = X \setminus F(e)$ ile tanımlanır (Shabir ve Naz, 2011). Açıktır ki her $e \in E$ için,

$$(\Phi)^c = \tilde{X} \text{ ve } (\tilde{X})^c = \Phi$$

dir.

Örnek 1.6. Örnek 1.1 de verilen,

$$\begin{aligned}(\mathrm{F, E})=\{&(\text{okulun evden uzaklığı, } \{x_2,x_4\}),(\text{okulun fiziki yapısı, } \{x_1,x_3\}),\\ &(\text{okulun ders programı içeriği, } \{x_1\}),\\ &(\text{okulun psikolojik rehberlik hizmeti, } \{x_1,x_4\}),\\ &(\text{okulun maliyeti, } \{x_4\}),(\text{okulun kültürel faaliyetleri, } \{x_3\})\}\end{aligned}$$

esnek kümesini ele alalım. Bu durumda bu esnek kümenin esnek tümleyeni;

$$\begin{aligned}(\mathrm{F, E})^c=\{&(\text{okulun evden uzaklığı, } \{x_1,x_3\}),(\text{okulun fiziki yapısı, } \{x_2,x_4\}),\\ &(\text{okulun ders programı içeriği, } \{x_2,x_3,x_4\}),\\ &(\text{okulun psikolojik rehberlik hizmeti, } \{x_2,x_3\}),\\ &(\text{okulun maliyeti, } \{x_1,x_2,x_3\}),(\text{okulun kültürel faaliyetleri, } \{x_1,x_2,x_4\})\}\end{aligned}$$

dir.

Önerme 1.1. X evrensel küme, E parametrelerin bir kümesi ve (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. O zaman (F, E) esnek kümesi için aşağıdaki özellikler sağlanır (Enginoglu, 2008);

1) $(F, E)\tilde{\cup}(F, E)=(F, E)$,

2) $(F, E)\tilde{\cup}\Phi=(F, E)$,

3) $(F, E)\tilde{\cup}\tilde{X}=\tilde{X}$,

4) $(F, E)\tilde{\cup}(F, E)^c=\tilde{X}$.

İspat. (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. O zaman,

1) Her $e\in E$ için $F(e)\cup F(e)=F(e)$ olduğundan $(F, E)\tilde{\cup}(F, E)=(F, E)$ eşitliği elde edilir.

2) Her $e\in E$ için $F(e)\cup\varnothing=F(e)$ olduğundan $(F, E)\tilde{\cup}\Phi=(F, E)$ elde edilir.

3) Her $e\in E$ için $F(e)\cup X=X$ olduğundan $(F, E)\tilde{\cup}\tilde{X}=\tilde{X}$ elde edilir.

4)Her $e \in E$ için $F(e) \cup (F(e))^c = F(e) \cup (X \setminus F(e)) = X$ olduğundan $(F, E) \tilde{\cup} (F, E)^c = \tilde{X}$ eşitliği elde edilir.

Önerme 1.2. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. O zaman (F, E) esnek kümesi için aşağıdaki özellikler sağlanır (Enginoglu, 2008);

1) $(F, E) \tilde{\cap} (F, E) = (F, E)$,

2) $(F, E) \tilde{\cap} \Phi = \Phi$,

3) $(F, E) \tilde{\cap} \tilde{X} = (F, E)$,

4) $(F, E) \tilde{\cap} (F, E)^c = \Phi$.

İspat. (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. O zaman

1) Her $e \in E$ için $F(e) \cap F(e) = F(e)$ olduğundan $(F, E) \tilde{\cap} (F, E) = (F, E)$ eşitliği elde edilir.

2) Her $e \in E$ için $F(e) \cap \varnothing = \varnothing$ olduğundan $(F, E) \tilde{\cap} \Phi = \Phi$ eşitliği elde edilir.

3) Her $e \in E$ için $F(e) \cap X = F(e)$ olduğundan $(F, E) \tilde{\cap} \tilde{X} = (F, E)$ eşitliği elde edilir.

4) Her $e \in E$ için $F(e) \cap (F(e))^c = F(e) \cap (X \setminus F(e)) = \varnothing$ olduğundan $(F, E) \tilde{\cap} (F, E)^c = \Phi$ eşitliği elde edilir.

Önerme 1.3. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $(F, E), (G, E), (H, E)$ X üzerinde esnek kümeler olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Enginoglu, 2008);

1) $(F, E) \tilde{\cup} ((G, E) \tilde{\cap} (H, E)) = ((F, E) \tilde{\cup} (G, E)) \tilde{\cap} ((F, E) \tilde{\cup} (H, E))$

2) $(F, E) \tilde{\cap} ((G, E) \tilde{\cup} (H, E)) = ((F, E) \tilde{\cap} (G, E)) \tilde{\cup} ((F, E) \tilde{\cap} (H, E))$

İspat. $(F, E), (G, E), (H, E)$ X üzerinde esnek kümeler olsun. O zaman,

1) Her $e \in E$ için kümelerdeki birleşme işleminin kesişim işlemi üzerine dağılma özelliğinden,

$$F(e)\cup\left(G(e)\cap H(e)\right)=\left(F(e)\cup G(e)\right)\cap\left(F(e)\cup H(e)\right)$$

sağlanır. Buradan,

$$(F, E)\tilde{\cup}\left((G, E)\tilde{\cap}(H, E)\right)=\left((F, E)\tilde{\cup}(G, E)\right)\tilde{\cap}\left((F, E)\tilde{\cup}(H, E)\right)$$

eşitliği elde edilir.

2) Her $e\in E$ için kümelerdeki kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine dağılma özelliğinden,

$$F(e)\cap\left(G(e)\cup H(e)\right)=\left(F(e)\cap G(e)\right)\cup\left(F(e)\cap H(e)\right)$$

sağlanır. Buradan,

$$(F, E)\tilde{\cap}\left((G, E)\tilde{\cup}(H, E)\right)=\left((F, E)\tilde{\cap}(G, E)\right)\tilde{\cup}\left((F, E)\tilde{\cap}(H, E)\right)$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 1.4. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $(F, E),(G, E)$ X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Enginoglu, 2008);

1) $\left((F, E)\tilde{\cup}(G, E)\right)^c=(F, E)^c\,\tilde{\cap}(G, E)^c$

2) $\left((F, E)\tilde{\cap}(G, E)\right)^c=(F,E)^c\,\tilde{\cup}(G, E)^c$

İspat. $(F, E),(G, E)$ X üzerinde iki esnek küme olsun.

1) $(H, E)=(F, E)\tilde{\cup}(G, E)$ olsun. Buradan her $e\in E$ için,

$$H(e)=F(e)\cup G(e)$$

dir. Kümeler teorisindeki De Morgan kuralından,

$$\left(H(e)\right)^c=\left(F(e)\cup G(e)\right)^c$$

$$\left(H(e)\right)^c=\left(F(e)\right)^c\cap\left(G(e)\right)^c$$

sağlanır. Buradan,

$$(H, E)^c=(F, E)^c\,\tilde{\cap}(G, E)^c$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\left((F, E)\tilde{\cup}(G, E)\right)^c=(F, E)^c\,\tilde{\cap}(G, E)^c$$

dir.

2) $(H, E) = (F, E)\tilde{\cap}(G, E)$ olsun. Buradan her $e \in E$ için,

$$H(e) = F(e) \cap G(e)$$

dir. Kümeler teorisindeki De Morgan kuralından,

$$(H(e))^c = (F(e) \cap G(e))^c$$

$$(H(e))^c = (F(e))^c \cup (G(e))^c$$

sağlanır. Buradan,

$$(H, E)^c = (F, E)^c \tilde{\cup} (G, E)^c$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$((F, E)\tilde{\cap}(G, E))^c = (F, E)^c \tilde{\cup} (G, E)^c$$

dir.

Önerme 1.5. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $(F, E), (G, E), (H, E)$ X üzerinde üç esnek küme olsun. O zaman,

$$((F, E)\tilde{\cup}(G, E))\tilde{\setminus}(H, E) = ((F, E)\tilde{\setminus}(H, E))\tilde{\cup}((G, E)\tilde{\setminus}(H, E))$$

eşitliği sağlanır (Enginoğlu, 2008).

İspat. Her $e \in E$ için klasik küme teorisinde,

$$(F(e) \cup G(e)) \setminus H(e) = (F(e) \setminus H(e)) \cup (G(e) \setminus H(e))$$

eşitliği sağlanır. Buradan,

$$((F, E)\tilde{\cup}(G, E))\tilde{\setminus}(H, E) = ((F, E)\tilde{\setminus}(H, E))\tilde{\cup}((G, E)\tilde{\setminus}(H, E))$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 1.10. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $i \in I$ olmak üzere $L = \{(F_i, E) : i \in I\}$ esnek kümelerin bir ailesi olsun. O halde keyfi sayıdaki esnek kümenin birleşimi her $e \in E$ için,

$$H(e) = \bigcup_{i \in I} F_i(e)$$

olmak üzere,

$$(H, E) = \tilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i, E)$$

esnek kümesidir (Zorlutuna ve diğ., 2012).

Tanım 1.11. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $i \in I$ olmak üzere $L = \{(F_i, E) : i \in I\}$ esnek kümelerin bir ailesi olsun. O halde, keyfi sayıdaki esnek kümenin kesişimi her $e \in E$ için,

$$M(e) = \bigcap_{i\in I} F_i(e)$$

olmak üzere,

$$(M, E) = \tilde{\bigcap_{i\in I}}(F_i, E)$$

esnek kümesidir (Zorlutuna ve diğ., 2012).

Önerme 1.6. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $\{F_i : i \in I\}$ ailesi X üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun. O zaman,

1) $\left(\tilde{\bigcap_{i\in I}}(F_i, E)\right)^c = \tilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i, E)^c$

2) $\left(\tilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i, E)\right)^c = \tilde{\bigcap_{i\in I}}(F_i, E)^c$

eşitlikleri sağlanır (Zorlutuna ve diğ., 2012).

İspat. $\{F_i : i \in I\}$ ailesi X üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun.

1) Her $e \in E$ için klasik küme teorisinde,

$$\left(\bigcap_{i\in I} F_i(e)\right)^c = \bigcup_{i\in I} F_i^c(e)$$

olduğundan,

$$\left(\tilde{\bigcap_{i\in I}}(F, E_i)\right)^c = \tilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i, E)^c$$

sağlanır.

2) Her $e \in E$ için klasik küme teorisinde,

$$\left(\bigcup_{i\in I} F_i(e)\right)^c = \bigcap_{i\in I} F_i^c(e)$$

olduğundan,

$$\left(\tilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i, E)\right)^c = \tilde{\bigcap_{i\in I}}(F_i, E)^c$$

sağlanır.

Tanım 1.12. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve Y, X' in boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman her $e \in E$ için $F(e) = Y$ ise X üzerindeki (F, E) esnek kümesi $\tilde{Y}$ ile gösterilir (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 1.13. X evrensel küme, E parametreler kümesi, Y, X' in boştan farklı bir alt kümesi ve (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. O zaman Y üzerindeki (F, E) esnek alt kümesi her $e \in E$ için,

$${}^{Y}F(e) = Y \cap F(e)$$

olarak tanımlanır ve $({}^{Y}F, E)$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle,

$$({}^{Y}F, E) = \tilde{Y} \tilde{\cap} (F, E)$$

dir (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 1.14. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $x \in X$ olsun. O zaman her $e \in E$ için $x(e) = \{x\}$ şeklinde tanımlanan (x, E) esnek kümesine X üzerinde bir esnek nokta denir (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 1.15. X evrensel küme, E parametreler kümesi, (F, E) X üzerinde bir esnek küme ve $x \in X$ olsun. Her $e \in E$ için $x \in F(e)$ ise (x, E) esnek noktası,

(F, E) esnek kümesine aittir denir ve $(x, E) \in (F, E)$ şeklinde gösterilir. Eğer bazı $e \in E$ için $x \notin F(e)$ ise (x, E) esnek noktasına, (F, E) esnek kümesine ait değildir denir ve $(x, E) \notin (F, E)$ şeklinde gösterilir (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 1.16. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $A \subset E$ olsun. Eğer bir $e \in A$ için $F(e) \neq \emptyset$ ve her $e' \in A - \{e\}$ için $F(e') = \emptyset$ ise (F, A) esnek kümesine X de bir esnek nokta denir (Zorlutuna ve diğ., 2012).

Tanım 1.17. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $A \subset E$ olsun. Eğer her $e \in A$ için $F(e) = \{x\}$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası ve her $e' \notin A$ için $F(e') = \emptyset$ ise (F, A) esnek kümesine esnek nokta denir (Aygünoğlu ve Aygün., 2012).

Tanım 1.18. X evrensel küme, E parametreler kümesi ve (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $e \in E$ elemanı için $F(e) = \{x\}$ ve her bir $e' \in E - \{e\}$ için $F(e') = \emptyset$ ise (F, E) esnek kümesine bir esnek nokta denir ve (x_e, E) ile gösterilir(Bayramov ve Gunduz(Aras), 2013; Das ve Samanta, 2013).

Uyarı 1.2. Yukarıda verilen esnek noktalar bir esnek küme olduğu için bu esnek kümeleri Tanım 1.18'de verilen esnek nokta tanımından yararlanarak esnek noktaların birleşimi şeklinde yazabiliriz. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 1.7. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel küme, $E = \{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi ve (F, E),

$$F(e_1) = \{x_1, x_2\}, \quad F(e_2) = \{x_3\}$$

şeklinde verilen bir esnek küme olsun. X üzerindeki tüm esnek noktalar $\{x_{1_{e_1}}, x_{1_{e2}}, x_{2_{e_1}}, x_{2_{e2}}, x_{3_{e_1}}, x_{3_{e2}}\}$ olmak üzere,

$$x_{1_{e_1}}(e_1) = \{x_1\},\ x_{1_{e_1}}(e_2) = \emptyset \quad \text{ve} \quad x_{1_{e_2}}(e_1) = \emptyset,\ x_{1_{e_2}}(e_2) = \{x_1\}$$

$$x_{2_{e_1}}(e_1) = \{x_2\},\ x_{2_{e_1}}(e_2) = \emptyset \quad \text{ve} \quad x_{2_{e_2}}(e_1) = \emptyset,\ x_{2_{e_2}}(e_2) = \{x_2\}$$

$x_{3_{e_1}}(e_1)=\{x_3\}$, $x_{3_{e_1}}(e_2)=\varnothing$ ve $x_{3_{e_2}}(e_1)=\varnothing$, $x_{3_{e_2}}(e_2)=\{x_3\}$

şeklindedir. O halde (F, E) esnek kümesi,

$$\begin{aligned}F(e_1)&=x_{1_{e_1}}(e_1)\cup x_{2_{e_1}}(e_1)\cup x_{3_{e_2}}(e_1)\\&=\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup\varnothing\\&=\{x_1, x_2\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}F(e_2)&=x_{1_{e_1}}(e_2)\cup x_{2_{e_1}}(e_2)\cup x_{3_{e_2}}(e_2)\\&=\varnothing\cup\varnothing\cup\{x_3\}\\&=\{x_3\}\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(F, E)=\left(x_{1_{e_1}}, E\right)\tilde{\cup}\left(x_{2_{e_1}}, E\right)\tilde{\cup}\left(x_{3_{e_2}}, E\right)$$

dir. Dolayısıyla her esnek küme esnek noktaların birleşimi şeklinde yazılır.

Tanım 1.19. (x_e, E) ve $(y_{e'}, E)$ X üzerinde iki esnek nokta olsun. Eğer,

$$x\neq y \text{ veya } e\neq e'$$

ise o zaman bu esnek noktalara farklı esnek nokta denir (Bayramov ve Gunduz(Aras), 2013; Das ve Samanta, 2013).

Tanım 1.20. (F, E), X üzerinde bir esnek küme ve (x_e, E) X üzerinde bir esnek nokta olsun. Eğer $e\in E$ elemanı için $\{x\}\tilde{\subseteq}F(e)$ ise o zaman (x_e, E) esnek noktası (F, E) esnek kümesine aittir denir;

$$(x_e, E)\in(F, E)$$

ile gösterilir (Bayramov ve Gunduz(Aras), 2013; Das ve Samanta, 2013).

Önerme 1.7. (F, E), X üzerinde bir esnek küme olsun. O zaman her (F, E) esnek kümesi kendisine ait esnek noktaların birleşimi şeklinde yazılır, yani;

$$(F, E) = \tilde{\bigcup_{e \in E}} \tilde{\bigcup_{x \in F(e)}} (x_e, E)$$

dir (Bayramov ve Gunduz(Aras), 2013).

İspat. Açıktır.

Tanım 1.21. X ve Y boştan farklı iki küme, E parametreler kümesi, $(F, E), (G, E)$ sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek küme ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. O zaman,

1) f dönüşümü altında X üzerindeki bir (F, E) esnek kümesinin görüntüsü her $e \in E$ için $[f(F)](e) = f[F(e)]$ şeklinde tanımlanır ve $f(F, E) = (f(F), E)$ ile gösterilir.

2) f dönüşümü altında Y üzerindeki (G, E) esnek kümesinin ters görüntüsü her $e \in E$ için $[f^{-1}(G)](e) = f^{-1}[G(e)]$ şeklinde tanımlanır ve $f^{-1}(G, E) = (f^{-1}(G), E)$ ile gösterilir (Nazmul ve Samanta, 2013; Bayramov ve Gunduz(Aras), 2013).

2. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

2.1. Esnek Topolojik Uzaylar

Topoloji elde etmenin pek çok yöntemi olduğu için bu bölümde esnek açık kümelerden yararlanarak esnek topolojik uzay tanımı verilmiş ve esnek topolojik uzaylarda kapanış, bağıl kapanış ve esnek komşuluk tanımları verilerek bu tanımlara ait bazı özellikler incelenmiştir.

Tanım 2.1.1. $X \neq \varnothing$ bir küme ve τ, X üzerindeki esnek kümelerin bir alt ailesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan τ ailesine X üzerindeki esnek kümelerin topolojisi denir;

1) $\Phi, \tilde{X} \in \tau$

2) $(F, E),(G, E) \in \tau \Rightarrow (F, E) \tilde{\cap} (G, E) \in \tau$

3) $\forall\ i \in I$ için, $(F_i, E) \in \tau \Rightarrow \tilde{\bigcup_{i \in I}} (F_i, E) \in \tau$

Üzerinde esnek topoloji tanımlanmış olan X kümesine bir esnek topolojik uzay denir ve (X, τ, E) ile gösterilir (Shabir ve Naz, 2011).

(X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. O zaman τ ailesinin her bir elemanına bir esnek açık küme denir (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 2.1.2. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $(F, E)^c$ esnek kümesi (X, τ, E) esnek topolojik uzayında esnek açık küme ise o zaman (F, E) ye bu uzayda esnek kapalı küme denir (Shabir ve Naz, 2011).

Önerme 2.1.1. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. Bu taktirde,

1) $\Phi, \tilde{X}$ (X, τ, E) esnek topolojik uzayında esnek kapalı kümelerdir.

2) X üzerinde ki keyfi sayıdaki esnek kapalı kümelerin kesişimi, esnek kapalı kümedir.

3) Herhangi iki esnek kapalı kümenin birleşimi esnek kapalı kümedir (Shabir ve Naz, 2011).

İspat.

1) $\Phi = \tilde{X} \tilde{\setminus} \tilde{X}$ ve $\tilde{X} = \tilde{X} \tilde{\setminus} \Phi$ olduğundan esnek kapalı küme tanımına göre $\Phi, \tilde{X}$ esnek kümeleri (X, τ, E) topolojik uzayında esnek kapalı kümelerdir.

2) $\{(F_i, E): i \in I\}$ esnek kapalı kümelerin bir ailesi olsun. Her $i \in I$ için,

$(F_i, E)^c \in \tau$ olduğundan esnek topoloji tanımına göre $\tilde{\bigcup\limits_{i\in I}}(F_i, E)^c \in \tau$ dir. O halde,

$\left(\tilde{\bigcap\limits_{i\in I}}(F_i, E)\right)^c = \tilde{\bigcup\limits_{i\in I}}(F_i, E)^c \in \tau$ olduğundan $\tilde{\bigcap\limits_{i\in I}}(F_i, E)$ esnek kapalı kümedir.

3) $(F, E), (G, E)$ iki esnek kapalı küme olsun. O halde $(F, E)^c$ ve $(G, E)^c$ esnek açık kümelerdir ve $(F, E)^c \tilde{\cap} (G, E)^c \in \tau$ dir. Buradan,

$(F, E)^c \tilde{\cap} (G, E)^c = ((F, E) \tilde{\cup} (G, E))^c$ olduğundan $(F, E) \tilde{\cup} (G, E)$ esnek kapalı kümedir.

Önerme 2.1.2. (X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. O zaman her $e \in E$ için,

$$\tau_e = \{F(e): (F, E) \in \tau\}$$

ailesi X üzerinde bir topoloji tanımlar (Shabir ve Naz, 2011).

İspat. $\tau_e = \{F(e): (F, E) \in \tau\}$ olmak üzere,

1) $\Phi, \tilde{X} \in \tau$ olduğundan her $e \in E$ için $\emptyset, X \in \tau_e$ elde edilir.

2) $F(e), G(e) \in \tau_e$ olsun. O zaman $(F, E), (G, E) \in \tau$ dur. τ' nun tanımından $(F, E) \tilde{\cap} (G, E) \in \tau$ dur. Her $e \in E$ için $F(e) \cap G(e) \in \tau_e$ elde edilir.

3) $\{F_i(e):\ i \in I\}$ ailesi, τ_e üzerinde kümelerin keyfi bir ailesi olsun. Her $i \in I$ için, $(F_i, E) \in \tau$ olduğundan $\tilde{\bigcup\limits_{i \in I}}(F_i, E) \in \tau$ elde edilir. Buradan $\bigcup\limits_{i \in I} F_i(e) \in \tau_e$ eşitliği sağlanır.

Böylece her $e \in E$ için τ_e, X üzerinde bir topoloji tanımlar.

Örnek 2.1.1. $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel küme, $E=\{e_1, e_2\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. X üzerindeki $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)$ esnek kümeleri,

$F_1(e_1) = \{x_1, x_2\}$, $\quad F_1(e_2) = \{x_3\}$,

$F_2(e_1) = \{x_1\}$, $\quad F_2(e_2) = \{x_1, x_3\}$,

$F_3(e_1) = \{x_1, x_2\}$, $\quad F_3(e_2) = \{x_1, x_3\}$,

$F_4(e_1) = \{x_1\}$, $\quad F_4(e_2) = \{x_3\}$

şeklinde verilsin. O halde;

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$$

ailesi X üzerinde bir esnek topoloji, (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzaydır.

Ayrıca,

$$\tau_{e_1} = \{\varnothing, X, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} \text{ ve } \tau_{e_2} = \{\varnothing, X, \{x_3\}, \{x_1, x_3\}\}$$

aileleri X üzerinde birer topolojidir.

Uyarı 2.1.1. Önerme 2.1.2'nin tersi genel olarak doğru değildir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 2.1.2. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel küme , $E=\{e_1, e_2\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. O halde X üzerindeki $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)$ esnek kümeleri,

$F_1(e_1) = \{x_1, x_2\}$, $\quad F_1(e_2) = \{x_3\}$,

$F_2(e_1)=\{x_1\}$, $F_2(e_2)=\{x_1, x_3\}$,

$F_3(e_1)=\{x_1\}$, $F_3(e_2)=\{x_2, x_3\}$,

$F_4(e_1)=\{x_1, x_2\}$, $F_4(e_2)=\{x_1, x_3\}$

şeklinde verilsin. O halde;

$$\tau_{e_1}=\{\varnothing, X, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} \quad \text{ve} \quad \tau_{e_2}=\{\varnothing, X, \{x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$$

X üzerinde birer topolojidir. Fakat, $(F_2, E)\tilde{\cup}(F_3, E)=(G, E)$ esnek kümesi,

$$G(e_1)=\{x_1\} \text{ ve } G(e_2)=X$$

dir. $(G, E)\notin\tau$ olduğundan τ ailesi X üzerinde bir esnek topoloji değildir.

Önerme 2.1.3. (X, τ_1, E) ve (X, τ_2, E) X kümesi üzerinde iki esnek topolojik uzay olsun. O zaman $(X, \tau_1\tilde{\cap}\tau_2, E)$ de X üzerinde bir esnek topolojik uzaydır (Shabir ve Naz, 2011).

İspat.

1) $\Phi, \tilde{X}\in\tau_1\tilde{\cap}\tau_2$ dir.

2) $(F, E), (G, E)\in\tau_1\tilde{\cap}\tau_2$ olsun. Buradan $(F, E), (G, E)\in\tau_1$ ve $(F, E), (G, E)\in\tau_2$ dir. τ_1 ve τ_2 esnek topoloji olduğundan, $(F, E)\tilde{\cap}(G, E)\in\tau_1$ ve $(F, E)\tilde{\cap}(G, E)\in\tau_2$ dir. Bu ise,

$$(F, E)\tilde{\cap}(G, E)\in\tau_1\tilde{\cap}\tau_2$$

dir.

3) $\{(F_i, E) : i\in I\}$ $\tau_1\tilde{\cap}\tau_2$ deki esnek kümelerin bir ailesi olsun. Her $i\in I$ için, $(F_i, E)\in\tau_1$ ve $(F_i, E)\in\tau_2$ dir. τ_1 ve τ_2 esnek topoloji olduğundan,

$$\tilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i, E)\in\tau_1 \quad \text{ve} \quad \tilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i, E)\in\tau_2$$

dir. O halde,

$$\tilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i, E)\in\tau_1\tilde{\cap}\tau_2$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\tau_1 \tilde{\cap} \tau_2$, X üzerinde bir esnek topoloji ve $(X, \tau_1 \tilde{\cap} \tau_2, E)$ de X üzerinde bir esnek topolojik uzaydır.

Uyarı 2.1.2. X üzerinde iki esnek topolojinin birleşimi bir esnek topoloji olmayabilir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 2.1.3. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ olmak üzere $E = \{e_1, e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun. O halde;

$F_1(e_1) = \{x_1, x_2\}, \quad F_1(e_2) = \{x_3\},$

$F_2(e_1) = \{x_1, x_2\}, \quad F_2(e_2) = \{x_1, x_3\},$

$F_3(e_1) = \{x_1\}, \quad F_3(e_2) = \{x_3\}$

ve

$G_1(e_1) = \{x_1, x_3\}, \quad G_1(e_2) = \{x_3\},$

$G_2(e_1) = \{x_1\}, \quad G_2(e_2) = \{x_1, x_3\},$

$G_3(e_1) = \{x_1\}, \quad G_3(e_2) = \{x_3\},$

$G_4(e_1) = \{x_1, x_3\}, \quad G_4(e_2) = \{x_1, x_3\}$

olmak üzere $\tau_1 = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$ ve $\tau_2 = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$ X üzerinde iki esnek topolojik uzay olsun.

Şimdi,

$\tau = \tau_1 \tilde{\cup} \tau_2 = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$

olarak tanımlayalım. Eğer $(F_2, E) \tilde{\cup} (G_4, E) = (H, E)$ olarak alırsak,

$$H(e_1) = F_2(e_1) \cup G_4(e_1) = \{x_1, x_2\} \cup \{x_1, x_3\} = X$$

ve

$$H(e_2) = F_2(e_2) \cup G_4(e_2) = \{x_1, x_3\} \cup \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_3\}$$

dir. Ancak $(H, E) \notin \tau$ olduğundan τ, X üzerinde bir esnek topoloji değildir.

Tanım 2.1.3. (X, τ, E) X üzerinde esnek topolojik uzay ve (F, E) bir esnek küme olsun. (F, E) esnek kümesini kapsayan bütün esnek kapalı kümelerin kesişimine (F, E) esnek kümesinin kapanışı denir ve $\overline{(F, E)}$ şeklinde gösterilir (Shabir ve Naz, 2011).

Açık olarak $\overline{(F, E)}$, X üzerinde (F, E)'yi kapsayan en küçük esnek kapalı kümedir.

Teorem 2.1.1. (X, τ, E), X üzerinde esnek topolojik uzay, (F, E) ve (G, E) X üzerinde esnek kümeler olsun. Bu durumda,

1) $\overline{\Phi} = \Phi$ ve $\overline{\tilde{X}} = \tilde{X}$,

2) $(F, E) \tilde{\subseteq} \overline{(F, E)}$,

3) (F, E) esnek kapalı kümedir ancak ve ancak $(F, E) = \overline{(F, E)}$,

4) $\overline{\overline{(F, E)}} = \overline{(F, E)}$,

5) $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$ ise $\overline{(F, E)} \tilde{\subseteq} \overline{(G, E)}$,

6) $\overline{(F, E) \tilde{\cup} (G, E)} = \overline{(F, E)} \tilde{\cup} \overline{(G, E)}$,

7) $\overline{(F, E) \tilde{\cap} (G, E)} \tilde{\subseteq} \overline{(F, E)} \tilde{\cap} \overline{(G, E)}$

dir (Shabir ve Naz, 2011).

İspat.

1) (X, τ, E), X üzerinde esnek topolojik uzay olduğundan Φ ve $\tilde{X}$ esnek kapalıdır. Φ esnek kapalı olduğundan $\overline{\Phi} = \Phi$ olur. Benzer şekilde $\tilde{X}$ esnek kapalı olduğundan $\overline{\tilde{X}} = \tilde{X}$ elde edilir.

2) $\overline{(F, E)}$, (F, E) esnek kümesini kapsayan en küçük esnek küme olduğundan $(F,E) \tilde{\subseteq} \overline{(F,E)}$ olduğu açıktır.

3) Eğer (F, E), X de bir esnek kapalı küme ise (F, E) nin kendisi (F, E)' yi kapsayan en küçük esnek kapalı küme olduğundan $(F, E) = \overline{(F, E)}$ dir.

Tersine olarak $(F, E) = \overline{(F, E)}$ olsun. $\overline{(F, E)}$ bir esnek kapalı küme olduğundan (F, E), X üzerinde bir esnek kapalı kümedir.

4) $\overline{(F, E)}$ esnek kapalı küme olduğundan esnek kapanış tanımından $\overline{\overline{(F, E)}} = \overline{(F, E)}$ dir.

5) $(F, E) \tilde{\subset} (G, E)$ olsun. (G, E)'yi kapsayan her esnek kapalı küme (F, E)'yi de kapsar. Bu nedenle (F, E)'yi kapsayan bütün esnek kapalı kümelerin kesişimi, (G, E)' yi kapsayan bütün esnek kapalı kümelerin esnek kesişimleri tarafından da kapsanır. Yani $\overline{(F, E)} \tilde{\subset} \overline{(G, E)}$ dir.

6) $(F, E) \tilde{\subset} (F, E) \tilde{\cup} (G, E)$ ve $(G, E) \tilde{\subset} (F, E) \tilde{\cup} (G, E)$ olduğundan bu teoremin 5. maddesinden dolayı $\overline{(F, E)} \tilde{\subset} \overline{(F, E) \tilde{\cup} (G, E)}$ ve $\overline{(G, E)} \tilde{\subset} \overline{(F, E) \tilde{\cup} (G, E)}$ dir. Buradan da $\overline{(F, E)} \tilde{\cup} \overline{(G, E)} \tilde{\subset} \overline{(F, E) \tilde{\cup} (G, E)}$ elde edilir.

Tersine olarak $(F, E) \tilde{\subset} \overline{(F, E)}$ ve $(G, E) \tilde{\subset} \overline{(G, E)}$ olup, buradan $(F, E) \tilde{\cup} (G, E) \tilde{\subset} \overline{(F, E)} \tilde{\cup} \overline{(G, E)}$ elde edilir. $\overline{(F, E)} \tilde{\cup} \overline{(G, E)}$ iki esnek kapalı kümenin birleşimi olduğundan yine bir esnek kapalı küme olduğu açıktır. Böylece $\overline{(F, E) \tilde{\cup} (G, E)} \tilde{\subset} \overline{(F, E)} \tilde{\cup} \overline{(G, E)}$ ve $\overline{(F, E) \tilde{\cup} (G, E)} = \overline{(F, E)} \tilde{\cup} \overline{(G, E)}$ elde edilir.

7) $(F, E) \tilde{\cap} (G, E) \tilde{\subset} (F, E)$ ve $(F, E) \tilde{\cap} (G, E) \tilde{\subset} (G, E)$ dir. Bu teoremin 5. maddesinden dolayı $\overline{(F, E) \tilde{\cap} (G, E)} \tilde{\subset} \overline{(F, E)}$ ve $\overline{(F, E) \tilde{\cap} (G, E)} \tilde{\subset} \overline{(G, E)}$ dir. Buradan da $\overline{(F,E) \tilde{\cap} (G, E)} \tilde{\subset} \overline{(F, E)} \tilde{\cap} \overline{(G, E)}$ elde edilir.

Tanım 2.1.4. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve (F, E), X üzerinde bir esnek küme olsun. Her $e \in E$ için, $\overline{F(e)}$, $F(e)$'nin τ_e'deki kapanışı olmak üzere $\overline{F(e)} = \overline{F}(e)$ ile tanımlı $(\overline{F}, E)$ esnek kümesi (F, E)'nin bağıl kapanışı (relative closure) olarak adlandırılır (Shabir ve Naz, 2011).

Önerme 2.1.4. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve (F, E) bir esnek küme olsun. Bu durumda,

$$\left(\bar{F}, E\right) \tilde{\subset} \overline{(F, E)}$$

dir (Shabir ve Naz, 2011).

İspat. Keyfi bir $e \in E$ için, $\overline{F(e)}$ (X, τ_e) de $F(e)$'yi kapsayan en küçük kapalı kümedir. Eğer $\overline{(F, E)} = (H, E)$ ise $H(e)$ kümesi $F(e)$'yi kapsayan bir kapalı kümedir. Bu da demektir ki $\bar{F}(e) = \overline{F(e)} \tilde{\subset} H(e)$. O halde, $\left(\bar{F}, E\right) \tilde{\subset} \overline{(F, E)}$ dir.

Sonuç 2.1.1. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve (F, E) bir esnek küme olsun. $\left(\bar{F}, E\right) = \overline{(F, E)}$ olması için gerek ve yeter şart $\left(\bar{F}, E\right)^c \in \tau$ olmasıdır (Shabir ve Naz, 2011).

İspat. $\left(\bar{F}, E\right) = \overline{(F, E)}$ olsun. O zaman $\left(\bar{F}, E\right)$ bir esnek kapalı kümedir. Dolayısıyla $\left(\bar{F}, E\right)^c \in \tau$ elde edilir.

Tersine olarak $\left(\bar{F}, E\right)^c \in \tau$ olsun. Bu durumda $\left(\bar{F}, E\right)$, (F, E)'yi kapsayan bir esnek kapalı kümedir. Önerme 2.1.4 den $\left(\bar{F}, E\right) \tilde{\subset} \overline{(F, E)}$ olup (F, E)'yi kapsayan herhangi bir esnek kapalı küme $\overline{(F, E)}$' nı da kapsar. Böylece $\overline{(F, E)} \tilde{\subset} \left(\bar{F}, E\right)$ dir. Dolayısıyla $\left(\bar{F}, E\right) = \overline{(F, E)}$ elde edilir.

Tanım 2.1.5. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay, Y, X'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $\left({}^{Y}F, E\right) = (Y, E) \tilde{\cap} (F, E)$ şeklinde tanımlanan,

$$\tau_Y = \left\{\left({}^{Y}F, E\right) : (F, E) \in \tau\right\}$$

ailesi Y üzerinde bir esnek topolojidir ve (Y, τ_Y, E)'ye (X, τ, E) esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı denir. Burada τ_Y ailesinin Y üzerinde bir esnek topoloji olduğu kolayca görülebilir (Shabir ve Naz, 2011**).**

Tanım 2.1.6. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay, (G, E) X üzerinde bir esnek küme ve $x \in X$ olsun. Eğer,

$$x \in (F, E) \tilde{\subset} (G, E)$$

olacak şekilde bir (F, E) esnek açık kümesi varsa (G, E)'ye x'in bir esnek komşuluğu denir (Shabir ve Naz, 2011**).**

Tanım 2.1.7. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay, (G, E) X üzerinde bir esnek küme ve $x \in X$ olsun. Eğer,

$$x \in (F, E) \tilde{\subset} (G, E)$$

olacak şekilde bir (F, E) esnek komşuluğu varsa bu x noktasına, (G, E) esnek kümesinin bir iç noktası denir (Shabir ve Naz, 2011**).**

Önerme 2.1.5. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay, (G, E) bir esnek küme ve $x \in X$ olsun. Eğer x, (G, E)'nin bir esnek iç noktası ise x aynı zamanda bir $e \in E$ için (X, τ_e) de $G(e)$'nin bir iç noktasıdır (Shabir ve Naz, 2011**).**

İspat. Herhangi bir $e \in E$ için $G(e) \subseteq X$ dir. Eğer $x \in X$, (G, E)' nin bir esnek iç noktası ise $x \in (F, E) \tilde{\subset} (G, E)$ olacak şekilde $(F, E) \in \tau$ vardır. Bu ise $x \in F(e) \subseteq G(e)$ olmasıdır. Bu da τ_e topolojisinde x'in, $G(e)$'nin bir iç noktası olması demektir.

2.2. Esnek Topolojik Uzaylarda Komşuluk Özellikleri

Tanım 2.2.1. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay, $(x_e, E) \in X$ ve (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer,

$$(x_e, E) \in (G, E) \tilde{\subset} (F, E)$$

sağlanacak şekilde bir (G, E) esnek açık kümesi varsa, bu (F, E) esnek kümesine bu uzayda (x_e, E) esnek noktasının bir esnek komşuluğu denir (Nazmul ve Samanta, 2013).

$(x_e, E) \in X$ esnek noktasının tüm esnek komşuluklar ailesi $U(x_e, E)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.1. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve $(x_e, E) \in X$ ise o zaman $U(x_e, E)$ esnek komşuluk ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir;

1) Eğer $(F, E) \in U(x_e, E)$ ise $(x_e, E) \in (F, E)$,
2) Eğer $(F, E) \in U(x_e, E)$ ve $(F, E) \tilde{\subset} (G, E)$ ise $(G, E) \in U(x_e, E)$,
3) Eğer $(F_1, E), (F_2, E) \in U(x_e, E)$ ise $(F_1, E) \tilde{\cap} (F_2, E) \in U(x_e, E)$,
4) Eğer $(F, E) \in U(x_e, E)$ ise, her bir $(y_{e'}, E) \in (G, E)$ için $(F, E) \in U(y_{e'}, E)$ sağlanacak şekilde bir $(G, E) \in U(x_e, E)$ vardır (Nazmul ve Samanta, 2013).

İspat. 1) $(F, E) \in U(x_e, E)$ olsun. O zaman esnek komşuluk tanımından,

$$(x_e, E) \in (G, E) \tilde{\subset} (F, E)$$

olacak şekilde bir (G, E) esnek açık kümesi vardır. Bu ise,

$$(x_e, E) \in (F, E)$$

dir.

2) $(F, E) \in U(x_e, E)$ ve $(F, E) \tilde{\subset} (G, E)$ olsun. $(F, E) \in U(x_e, E)$ olduğundan,

$$(x_e, E) \in (H, E) \tilde{\subset} (F, E)$$

sağlanacak şekilde (H, E) esnek açık kümesi vardır. Buradan,

$$(x_e, E) \in (H, E) \tilde{\subset} (F, E) \tilde{\subset} (G, E)$$

olduğundan $(G, E) \in U(x_e, E)$ elde edilir.

3) $(F_1, E), (F_2, E) \in U(x_e, E)$ olsun. $(F_1, E) \in U(x_e, E)$ olduğundan,

$\left(x_e, E\right) \in \left(G_1, E\right) \tilde{\subseteq} \left(F_1, E\right)$

olacak şekilde $\left(G_1, E\right)$ esnek açık kümesi ve $\left(F_2, E\right) \in U\left(x_e, E\right)$ olduğundan,

$\left(x_e, E\right) \in \left(G_2, E\right) \tilde{\subseteq} \left(F_2, E\right)$

olacak şekilde $\left(G_2, E\right)$ esnek açık kümesi vardır. Buradan,

$\left(x_e, E\right) \in \left(G_1, E\right) \tilde{\cap} \left(G_2, E\right) \tilde{\subseteq} \left(F_1, E\right) \tilde{\cap} \left(F_2, E\right)$

dir. $\left(G_1, E\right) \tilde{\cap} \left(G_2, E\right) \in \tau$ olduğundan esnek komşuluk tanımına göre,

$\left(F_1, E\right) \tilde{\cap} \left(F_2, E\right) \in U\left(x_e, E\right)$

elde edilir.

4) $\left(F, E\right) \in U\left(x_e, E\right)$ olsun. $\left(F, E\right) \in U\left(x_e, E\right)$ olduğundan,

$\left(x_e, E\right) \in \left(H, E\right) \tilde{\subseteq} \left(F, E\right)$

sağlanacak şekilde $\left(H, E\right)$ esnek açık kümesi vardır. $\left(G, E\right) = \left(H, E\right)$ alalım. O zaman her $(y_{e'}, E) \in \left(G, E\right)$ için,

$(y_{e'}, E) \in \left(G, E\right) \tilde{\subseteq} \left(F, E\right)$

dir. Buradan $\left(F, E\right) \in U\left(y_{e'}, E\right)$ elde edilir.

Tanım 2.2.2. $\left(X, \tau, E\right)$ ve $\left(Y, \tau', E\right)$ iki esnek topolojik uzay, $\left(x_e, E\right) \in X$ ve $f : \left(X, \tau, E\right) \rightarrow \left(Y, \tau', E\right)$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\left(f\left(x\right)_e, E\right)$ esnek noktasının her $\left(H, E\right)$ esnek komşuluğuna karşılık $\left(f\left(F, E\right)\right) \tilde{\subseteq} \left(H, E\right)$ olacak şekilde $\left(x_e, E\right)$ esnek noktasının içeren bir $\left(F, E\right)$ esnek komşuluğu bulunabiliyorsa f fonksiyonuna $\left(x_e, E\right)$ esnek noktasında esnek süreklidir denir (Gunduz (Aras) ve diğ., 2013; Nazmul ve Samanta, 2013).

Eğer f fonksiyonu X üzerindeki tüm $\left(x_e, E\right)$ esnek noktaları için esnek sürekli ise f fonksiyonuna X üzerinde esnek sürekli fonksiyon denir.

Örnek 2.2.1. $X = \left\{x_1, x_2, x_3\right\}$ evrensel küme ve $E = \left\{e_1, e_2\right\}$ parametrelerin kümesi olsun. O halde;

$F_1\left(e_1\right) = \left\{x_1, x_2\right\}, \; F_1\left(e_2\right) = \left\{x_3\right\},$

$F_2(e_1) = X$, $\quad F_2(e_2) = \{x_3\}$

ve

$G_1(e_1) = \{x_1\}$, $\quad G_1(e_2) = \{x_3\}$,

$G_2(e_1) = \{x_1, x_3\}$, $\quad G_2(e_2) = \{x_2, x_3\}$

olmak üzere $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E)\}$ ve $\tau' = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E)\}$ ailesi X üzerinde iki esnek topoloji olsun. O zaman (X, τ, E) ve (X, τ', E) iki esnek topolojik uzaydır.

$f(x_1) = f(x_2) = x_1$, $f(x_3) = x_3$

şeklinde tanımlanan $f : (X, \tau, E) \to (X, \tau, E)$ esnek fonksiyonu esnek sürekli fonksiyondur (Gunduz (Aras) ve diğ., 2013).

Örnek 2.2.2. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun. O halde;

$F_1(e_1) = \{x_2\}$, $\quad F_1(e_2) = \{x_1\}$,

$F_2(e_1) = \{x_2, x_3\}$, $\quad F_2(e_2) = \{x_1, x_2\}$,

$F_3(e_1) = \{x_3\}$, $\quad F_3(e_2) = \{x_1, x_2\}$,

$F_4(e_1) = \varnothing$, $\quad F_4(e_2) = \{x_1\}$,

$F_5(e_1) = X$, $\quad F_5(e_2) = \{x_1, x_2\}$,

ve

$G_1(e_1) = \{x_2\}$, $\quad G_1(e_2) = \{x_1\}$,

$G_2(e_1) = \{x_2, x_3\}$, $\quad G_2(e_2) = \{x_1, x_2\}$,

$G_3(e_1) = \{x_1, x_2\}$, $\quad G_3(e_2) = X$,

$G_4(e_1) = \{x_2\}$, $\quad G_4(e_2) = \{x_1, x_2\}$,

olmak üzere $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E)\}$ ve $\tau' = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$ X üzerinde iki esnek topoloji olsun.

O zaman (X, τ, E) ve (X, τ', E) iki esnek topolojik uzaydır ve $f = 1_x : (X, \tau, E) \to (X, \tau, E)$ bu topolojik uzaylar arasında esnek sürekli fonksiyon değildir (Gunduz (Aras) ve diğ., 2013).

Tanım 2.2.3. (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki esnek topolojik uzay ve $f : (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E)$ bir fonksiyon olsun.

1)Eğer X üzerindeki her (F, E)esnek açık kümesinin $f\left[(F, E)\right]$ görüntüsü, Y üzerinde bir esnek açık küme ise o zaman f fonksiyonuna açık fonksiyon denir.
2) Eğer X üzerindeki her (H, E) esnek kapalı kümesinin $f\left[(H, E)\right]$ görüntüsü, Y üzerinde bir esnek kapalı küme ise o zaman f fonksiyonuna kapalı fonksiyon denir.
3) Eğer f birebir, örten, sürekli ve açık (kapalı) bir fonksiyon ise f fonksiyonuna bu uzaylar arasında esnek homeomorfizma denir.
Eğer iki esnek topolojik uzay arasında en az bir esnek homeomorfizma varsa bu uzaylara esnek homeomorf uzaylar denir (Gunduz (Aras) ve diğ., 2013; Nazmul ve Samanta, 2013).

Tanım 2.2.4. (X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve (F, E) bir esnek küme olsun. Eğer,

$$(x_e, E) \in (G, E) \tilde{\subset} (F, E)$$

sağlanacak şekilde bir $(G, E) \in U(x_e, E)$ esnek açık kümesi varsa, $(x_e, E) \in (F, E)$ esnek noktasına (F, E) esnek kümesinin bir esnek iç noktasıdır denir (Nazmul ve Samanta, 2013).

(X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve (F, E) bir esnek küme olsun. O zaman (F, E)'nin esnek içi (F, E)'nin tüm esnek açık alt kümelerinin birleşimidir ve $(F, E)^{o}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.2. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve (F, E) bir esnek küme olsun. O zaman,

$$(F, E)^{\circ} = \tilde{\bigcup_{e \in E}} \{ (x_e, E) : \ (x_e, E) \text{ her bir } e \in E \text{ için } (F, E)\text{'nin keyfi bir esnek iç noktasıdır.} \}$$

dir (Nazmul ve Samanta, 2013).

İspat. $(x_e, E) \in (F, E)^{\circ}$ olsun. O zaman Tanım 2.2.4. den, $(x_e, E) \in (G, E) \tilde{\subset} (F, E)$ olacak şekilde $(G, E) \in \tau$ vardır. O halde;

$$(x_e, E) \in \tilde{\bigcup_{e \in E}} \left\{ \begin{array}{c} (x_e, E) : \ (x_e, E) \text{her bir } e \in E \text{ için } \ (F, E) \text{ nin herhengi bir esnek} \\ \text{iç noktasıdır.} \end{array} \right\}$$

dir.

Tersine,

$$(x_e, E) \in \tilde{\bigcup_{e \in E}} \left\{ \begin{array}{c} (x_e, E) : \ (x_e, E) \text{her bir } e \in E \text{ için } \ (F, E) \text{ nin herhengi bir esnek} \\ \text{iç noktasıdır} \end{array} \right\}$$

ise $(x_e, E) \in (G, E) \tilde{\subset} (F, E)$ olacak şekilde bir $(G, E) \in \tau$ bulunduğundan $(x_e, E) \in (F, E)^{\circ}$ dir.

Önerme 2.2.1. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve (F, E) bir esnek küme olsun. O zaman (F, E) bir esnek açık kümedir ancak ve ancak (F, E) kendisinin esnek noktalarının bir esnek komşuluğudur (Nazmul ve Samanta, 2013).

İspat. $\Rightarrow$: (F, E) bir esnek açık küme ve $(x_e, E) \in (F, E)$ olsun. O zaman $(G, E) = (F, E)$ alınırsa (F, E) kümesi (x_e, E) esnek noktasının bir esnek komşuluğudur.

$\Leftarrow$: (F, E) kendisinin esnek noktalarının bir esnek komşuluğu olsun. O zaman her $(x_e, E) \in (F, E)$ için,

$$\left(x_e, E\right) \in \left(G, E\right) \tilde{\subseteq} \left(F, E\right)$$

olacak şekilde bir $\left(G, E\right)$ esnek açık kümesi vardır. O halde;

$$\left(F, E\right) = \tilde{\bigcup_{i \in I}} \left\{\left(G_i, E\right) : \left(G_i, E\right) \tilde{\subseteq} \left(F, E\right)\right\}$$

dir. Esnek açık kümelerin keyfi birleşimleri de esnek açık küme olduğundan $\left(F, E\right)$ esnek açık kümedir.

Tanım 2.2.5. $\left(X, \tau, E\right)$ X üzerinde bir esnek topolojik uzay, $\left(F, E\right)$ bir esnek küme ve $\left(x_e, E\right)$ bir esnek nokta olsun. Eğer keyfi $\left(G, E\right) \in U\left(x_e, E\right)$ için,

$$\left(F, E\right) \tilde{\cap} \left(G, E\right) \neq \Phi$$

ise $\left(x_e, E\right)$ esnek noktasına $\left(F, E\right)$esnek kümesinin bir esnek değme noktasıdır denir (Nazmul ve Samanta, 2013).

Teorem 2.2.3. $\left(X, \tau, E\right)$ X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve $\left(F, E\right)$ bir esnek küme olsun. O zaman $\left(F, E\right)$, X'de esnek kapalı kümedir ancak ve ancak $\left(F, E\right)$'nin her esnek değme noktası kendisine aittir (Nazmul ve Samanta, 2013).

İspat. $\Rightarrow$: $\left(F, E\right)$ esnek kapalı küme, $\left(x_e, E\right)$ esnek değme noktası ve $\left(x_e, E\right) \notin \left(F, E\right)$ olsun. O zaman $\left(x_e, E\right) \in \left(F, E\right)^c$ dir. $\left(F, E\right)^c$, τ' da esnek açık küme olduğundan $\left(x_e, E\right)$'nin bir esnek komşuluğudur. O zaman,

$$\left(F, E\right)^c \tilde{\cap} \left(F, E\right) = \Phi$$

dir. Buradan $\left(x_e, E\right) \in \left(F, E\right)$ dir.

$\Leftarrow$: $\left(x_e, E\right) \in \left(F, E\right)^c$ herhangi esnek nokta olsun. O zaman $\left(x_e, E\right) \notin \left(F, E\right)$ dir. $\left(x_e, E\right)$, $\left(F, E\right)$'nin bir esnek değme noktası olmadığından,

$$\left(F, E\right) \tilde{\cap} \left(G, E\right) = \Phi$$

olacak şekilde $\left(x_e, E\right)$'nin bir $\left(G, E\right)$ esnek komşuluğu vardır. $\left(x_e, E\right) \in \left(G, E\right) \tilde{\subset} \left(F, E\right)^c$ olduğundan $\left(F, E\right)^c$ bir esnek açık kümedir, yani $\left(F, E\right)$ esnek kapalı kümedir.

Önerme 2.2.2. $\left(X, \tau, E\right)$ X üzerinde bir esnek topolojik uzay, $\left(F, E\right)$ bir esnek küme ve $x \in X$ olsun. Eğer $\left(x_e, E\right)$, $\left(F, E\right)$'nin bir esnek iç noktası ise o zaman $\left(X, \tau_e\right)$'de x noktası $F\left(e\right)$'nin bir iç noktasıdır.

İspat. $\left(x_e, E\right)$, $\left(F, E\right)$'nin bir esnek iç noktası olsun. O zaman,

$$\left(x_e, E\right) \in \left(G, E\right) \tilde{\subset} \left(F, E\right)$$

olacak şekilde $\left(G, E\right)$ esnek açık kümesi vardır. Buradan,

$$x \in G\left(e\right) \subset F\left(e\right) \text{ ve } G\left(e\right) \in \tau_e$$

elde edilir, yani x noktası $F\left(e\right)$'nin bir iç noktasıdır.

Önerme 2.2.3. $\left(X, \tau, E\right)$ X üzerinde bir esnek topolojik uzay, $\left(F, E\right)$ bir esnek küme ve $x \in X$ olsun. Eğer x noktası $\left(X, \tau_e\right)$ topolojik uzayında $F\left(e\right)$ kümesinin bir değme noktası ise $\left(x_e, E\right)$ esnek noktası $\left(F, E\right)$ esnek kümesinin bir esnek değme noktasıdır.

İspat. Tanım 2.2.5.' den hemen elde edilir.

Uyarı 2.2.1. Önerme 2.2.2. ve Önerme 2.2.3.' ün tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 2.2.3. $X = \left\{x_1, x_2, x_3\right\}$ evrensel küme ve $E = \left\{e_1, e_2\right\}$ parametreler kümesi olsun. O halde;

$$F_1\left(e_1\right) = \left\{x_1, x_2\right\}, \ F_1\left(e_2\right) = \left\{x_1, x_3\right\},$$

$F_2(e_1)=\{x_2\}, \quad F_2(e_2)=\{x_2, x_3\},$

$F_3(e_1)=\{x_1, x_2\}, \ F_3(e_2)=X,$

$F_4(e_1)=\{x_2\}, \quad F_4(e_2)=\{x_3\}$

olmak üzere $\tau=\{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ ailesi X üzerinde bir esnek topoloji ve (X, τ, E) bir esnek topolojik uzaydır. Eğer (F, E) esnek kümesi,

$$F(e_1)=\{x_1, x_3\}, \ F(e_2)=\{x_1, x_3\}$$

şeklinde tanımlanırsa, o zaman (F, E) esnek kümesinin esnek iç noktası yoktur. Fakat x_1 ve x_3 noktaları τ_{e_2} topolojisinde $F(e_2)$ kümesinin iç noktalarıdır. Burada $\tau_{e_2}=\{\varnothing, X, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3\}\}$ dir.

Örnek 2.2.4. $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel küme ve $E=\{e_1, e_2\}$ parametreler kümesi olsun. O halde;

$F_1(e_1)=\{x_1, x_2\}, \ F_1(e_2)=\{x_1, x_2\},$

$F_2(e_1)=\{x_2\}, \quad F_2(e_2)=\{x_1, x_3\},$

$F_3(e_1)=\{x_2, x_3\}, \ F_3(e_2)=\{x_1\},$

$F_4(e_1)=\{x_2\}, \quad F_4(e_2)=\{x_1\},$

$F_5(e_1)=\{x_1, x_2\}, \ F_5(e_2)=X,$

$F_6(e_1)=X, \quad F_6(e_2)=\{x_1, x_2\},$

$F_7(e_1)=\{x_2, x_3\}, \ F_7(e_2)=\{x_1, x_3\}$

olmak üzere $\tau=\{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E), (F_6, E), (F_7, E)\}$ ailesi X üzerinde bir esnek topoloji ve (X, τ, E) bir esnek topolojik uzaydır. O zaman (F, E) esnek kümesi,

$$F(e_1)=\{x_1, x_3\}, \ F(e_2)=\varnothing \ .$$

şeklinde tanımlanırsa, $\overline{(F,\, E)} = (F_2,\, E)^c$ dir. $\left(x_{2e_2},\, E\right)$ esnek noktası, $(F,\, E)$ esnek kümesinin bir esnek değme noktasıdır. Fakat x_2 noktası τ_{e_2} topolojisinde $F(e_2)$'nin bir değme noktası değildir.

3. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

Esnek topolojik uzayları esnek açık kümelere göre içerdikleri ortak özellikler bakımından sınıflara ayırarak incelemek pek çok açıdan önemlidir. Bu yüzden bu bölümde esnek topolojik uzaylarda esnek ayırma aksiyomları adı verilen esnek T_0- uzayı, esnek T_1- uzayı ve esnek T_2- uzayı incelenecek ve bu aksiyomların önemli özellikleri araştırılacaktır.

Tanım 3.1. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve (x_e, E), $(y_{e'}, E)$ farklı iki esnek nokta olsun. Eğer bu uzaydaki her (x_e, E), $(y_{e'}, E)$ esnek noktaları için,

$$((x_e, E) \in (F, E) \text{ ve } (y_{e'}, E) \notin (F, E)) \text{ veya } ((x_e, E) \notin (F, E) \text{ ve } (y_{e'}, E) \in (F, E))$$

sağlanacak şekilde (F, E) esnek açık kümesi varsa (X, τ, E) esnek topolojik uzayına esnek T_0- uzayı denir (Tantawy ve diğ., 2016).

Örnek 3.1. $X = \{x_1, x_2\}$ evrensel küme, $E = \{e_1, e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun. O halde;

$F_1(e_1) = \{x_1\}$, $\quad F_1(e_2) = \{x_2\}$,

$F_2(e_1) = \varnothing$, $\quad F_2(e_2) = \{x_2\}$,

$F_3(e_1) = \varnothing$, $\quad F_3(e_2) = \{x_1\}$,

$F_4(e_1) = \{x_1\}$, $\quad F_4(e_2) = X$,

$F_5(e_1) = \varnothing$, $\quad F_5(e_2) = X$

esnek kümeler olmak üzere $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E)\}$ X üzerinde bir esnek topoloji ve (X, τ, E), X üzerinde bir esnek T_0- uzayıdır.

Önerme 3.1. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) bir esnek T_0- uzayı ise o zaman her $e \in E$ için (X, τ_e) bir T_0- uzayıdır.

İspat. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. O zaman esnek nokta tanımından (x_e, E), $(y_{e'}, E)$ esnek noktaları farklıdır. (X, τ, E) bir esnek T_0- uzayı olduğundan,

$((x_e, E) \in (F, E)$ ve $(y_{e'}, E) \notin (F, E))$ veya $((x_e, E) \notin (F, E)$ ve $(y_{e'}, E) \in (F, E))$

olacak şekilde (F, E) esnek açık kümesi vardır. Genelliği bozmayacağı için,

$(x_e, E) \in (F, E)$ ve $(y_{e'}, E) \notin (F, E)$ ise her $e \in E$ için $x \in F(e)$ ve $y \notin F(e)$ elde edilir. Böylece (X, τ_e) bir T_0- uzayıdır.

Örnek 3.2. Örnek 3.1.' deki esnek T_0- uzayını ele alalım. O halde;

$\tau_{e_1} = \{\varnothing, X, \{x_1\}\}$ ve $\tau_{e_2} = \{\varnothing, X, \{x_1\}, \{x_2\}\}$

dir. Buradan (X, τ_{e_1}) ve (X, τ_{e_2}) birer T_0- uzaylarıdır.

Önerme 3.2. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve Y, X'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer (X, τ, E) bir esnek T_0- uzayı ise (Y, τ_Y, E) de bir esnek T_0- uzayıdır.

İspat. $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ farklı iki esnek nokta ve $(x_e, E), (y_{e'}, E) \in Y$ olsun. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek T_0- uzayı olduğundan,

$((x_e, E) \in (F, E)$ ve $(y_{e'}, E) \notin (F, E))$ veya $((x_e, E) \notin (F, E)$ ve $(y_{e'}, E) \in (F, E))$

olacak şekilde (F, E) esnek açık kümesi vardır. Buradan $(x_e, E) \in (F, E)$ olduğundan, $(x_e, E) \in Y \tilde{\cap} (F, E) = ({}^{Y}F, E)$ dir. $(y_{e'}, E) \notin (F, E)$ olduğundan bazı $e \in E$ için $y \notin F(e)$ dir. O halde bazı $e \in E$ için $y \notin F(e) \cap Y$ dir. Buradan

$(y_{e'}, E) \notin Y \tilde{\cap} (F, E) = ({}^{Y}F, E)$ olur. $(F, E) \in \tau$ olduğundan $({}^{Y}F, E) \in \tau_Y$ dir. Benzer şekilde $(y_{e'}, E) \in (F, E)$ ve $(x_e, E) \notin (F, E)$ için $(y_{e'}, E) \in ({}^{Y}F, E)$ ve $(x_e, E) \notin ({}^{Y}F, E)$ elde edilir. Buradan (Y, τ_Y, E) de bir esnek T_0- uzayıdır.

Örnek 3.3. Örnek 3.1. deki esnek T_0- uzayını ele alalım ve $Y = \{x_1\}$ olsun. O halde;

$G_1(e_1) = \{x_1\}$, $G_1(e_2) = \varnothing$,

$G_2(e_1) = \varnothing$, $G_2(e_2) = \{x_1\}$,

$G_3(e_1) = \{x_1\}$, $G_3(e_2) = \{x_1\}$

olmak üzere $\tau_Y = \{\Phi, \tilde{Y}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)\}$ olur. Bu durumda (Y, τ_Y, E) bir esnek T_0- uzayıdır.

Teorem 3.1. τ_1 ve τ_2 bir X kümesi üzerinde $\tau_1 \tilde{\subset} \tau_2$ özelliğine sahip iki esnek topoloji olsun. Bu durumda eğer (X, τ_1, E) bir esnek T_0- uzayı ise o zaman (X, τ_2, E) de bir esnek T_0- uzayıdır.

İspat. $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ esnek noktaları X üzerinde farklı iki esnek nokta olsun. (X, τ_1, E) bir esnek T_0- uzayı olduğundan,

$((x_e, E) \in (F, E)$ ve $(y_{e'}, E) \notin (F, E))$ veya $((x_e, E) \notin (F, E)$ ve $(y_{e'}, E) \in (F, E))$

olacak şekilde $(F, E) \in \tau_1$ vardır. $\tau_1 \tilde{\subset} \tau_2$ olduğundan $(F, E) \in \tau_2$ dir. Böylece (X, τ_2, E) de bir esnek T_0- uzayıdır.

Teorem 3.2. (X, τ_1, E) ve (Y, τ_2, E) iki esnek topolojik uzay ve $f : (X, \tau_1, E) \to (Y, \tau_2, E)$ esnek homeomorfizma olsun. O zaman (X, τ_1, E) nin bir esnek T_0- uzayı olması için gerek ve yeter koşul (Y, τ_2, E) esnek topolojik uzayının da bir esnek T_0- uzayı olmasıdır.

İspat. $\left(x_{1_e}, E\right) \neq \left(y_{1_{e'}}, E\right)$ sağlanacak şekilde $\left(Y, \tau_2, E\right)$ de farklı iki esnek nokta olsun. f esnek örten fonksiyon olduğundan,

$$f\left(x_e, E\right) = \left(x_{1_e}, E\right) \text{ ve } f\left(y_{e'}, E\right) = \left(y_{1_{e'}}, E\right)$$

olacak şekilde $\left(x_e, E\right)$, $\left(y_{e'}, E\right) \in X$ vardır. f esnek fonksiyonu birebir olduğundan $\left(x_e, E\right) \neq \left(y_{e'}, E\right)$ dir. $\left(X, \tau_1, E\right)$ esnek T_0- uzayı olduğundan,

$$(\left(x_e, E\right) \in \left(F, E\right) \text{ ve } \left(y_{e'}, E\right) \notin \left(F, E\right)) \text{ veya } (\left(x_e, E\right) \notin \left(F, E\right) \text{ ve } \left(y_{e'}, E\right) \in \left(F, E\right))$$

sağlanacak şekilde $\left(F, E\right) \in \tau_1$ vardır. f fonksiyonu esnek homeomorfizma olduğundan, $f(\left(F, E\right)) \in \tau_2$ dir. Böylece;

$$\left(x_{1_e}, E\right) \in f(\left(F, E\right)) \text{ ve } \left(y_{1_{e'}}, E\right) \notin f(\left(F, E\right))$$

veya

$$\left(x_{1_e}, E\right) \notin f(\left(F, E\right)) \text{ ve } \left(y_{1_{e'}}, E\right) \in f(\left(F, E\right))$$

sağlanır. O halde $\left(Y, \tau_2, E\right)$ bir esnek T_0- uzayıdır.

Tersinin ispatı açıktır.

Uyarı 3.1. τ_1 ve τ_2 X kümesi üzerinde iki esnek topoloji ve $\tau = \tau_1 \tilde{\cap} \tau_2$ olsun. $\left(X, \tau_1, E\right)$ ve $\left(X, \tau_2, E\right)$ birer esnek T_0-uzayı olduğu halde $\left(X, \tau, E\right)$ bir esnek T_0- uzayı değildir.

Bununla ilgili olarak aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.4. X=$\left\{x_1, x_2\right\}$ evrensel küme, $E = \left\{e_1\right\}$ parametre kümesi olsun. O halde;

$$F_1\left(e_1\right) = \left\{x_1\right\}, \quad F_2\left(e_1\right) = \left\{x_2\right\},$$

$G_1(e_1)=\{x_2\}$, $G_2(e_1)=\{x_1\}$

esnek kümeler olmak üzere,

$\tau_1=\{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E)\}$ ve $\tau_2=\{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E)\}$

aileleri X üzerinde birer esnek topolojidir ve (X, τ_1, E) ile (X, τ_2, E) de X üzerinde bir esnek T_0- uzayıdır.

Fakat $\tau=\tau_1 \tilde{\cap} \tau_2=\{\Phi, \tilde{X}\}$ olduğundan (X, τ, E) X üzerinde bir esnek T_0- uzayı değildir.

Tanım 3.2. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ farklı iki esnek nokta olsun. Eğer,

$$((x_e, E) \in (F, E),\ (y_{e'}, E) \notin (F, E)) \text{ ve } ((y_{e'}, E) \in (G, E),\ (x_e, E) \notin (G, E))$$

olacak şekilde (F, E) ve (G, E) esnek açık kümeleri varsa (X, τ, E) esnek topolojik uzayına esnek T_1-uzayı denir (Bayramov ve Gunduz (Aras), 2013).

Örnek 3.5. $X=\{x_1, x_2\}$ evrensel küme, $E=\{e_1, e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun. O halde;

$F_1(e_1)=\{x_1\}$, $F_1(e_2)=\{x_2\}$,

$F_2(e_1)=\varnothing$, $F_2(e_2)=\{x_1\}$,

$F_3(e_1)=\{x_2\}$, $F_3(e_2)=\varnothing$,

$F_4(e_1)=\varnothing$, $F_4(e_2)=\{x_2\}$,

$F_5(e_1)=\{x_1\}$, $F_5(e_2)=X$,

$F_6(e_1)=X$, $F_6(e_2)=\{x_2\}$,

$F_7(e_1)=\{x_2\}$, $F_7(e_2)=\{x_1\}$,

$F_8(e_1)=\varnothing$, $F_8(e_2)=X$,

$F_9(e_1)=\{x_2\}$, $F_9(e_2)=\{x_2\}$,

$F_{10}(e_1)=\{x_2\}$, $F_{10}(e_2)=X$

esnek kümeler olmak üzere,

$$\tau=\begin{Bmatrix} \Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E), (F_6, E), \\ (F_7, E), (F_8, E), (F_9, E), (F_{10}, E) \end{Bmatrix}$$

X üzerinde bir esnek topoloji ve (X, τ, E) X üzerinde bir esnek T_1-uzayıdır.

Önerme 3.3. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) bir esnek T_1-uzayı ise her $e \in E$ için (X, τ_e) bir T_1-uzayıdır.

İspat. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. O zaman esnek nokta tanımından $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ esnek noktaları farklıdır. (X, τ, E) bir esnek T_1-uzayı olduğundan,

$$((x_e, E) \in (F,E),\ (y_{e'}, E) \notin (F, E)) \text{ ve } ((y_{e'}, E) \in (G, E),\ (x_e, E) \notin (G, E))$$

olacak şekilde (F, E) ve (G, E) esnek açık kümeleri vardır. Buradan,

$$(x \in F(e),\ y \notin F(e)) \text{ ve } (y \in G(e), x \notin G(e))$$

elde edilir. O zaman (X, τ_e) bir T_1-uzayıdır.

Örnek 3.6. Örnek 3.5. deki esnek T_1-uzayını ele alalım. O halde;

$$\tau_{e_1} = \{\varnothing, X, \{x_1\}, \{x_2\}\} \text{ ve } \tau_{e_2} = \{\varnothing, X, \{x_1\}, \{x_2\}\}$$

olur. Bu durumda (X, τ_{e_1}) ve (X, τ_{e_2}) birer T_1-uzaylarıdır.

Önerme 3.4. (X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve Y, X'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer (X, τ, E) bir esnek T_1-uzayı ise o zaman (Y, τ_Y, E) de bir esnek T_1-uzayıdır.

İspat. $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ farklı iki esnek nokta ve $(x_e, E), (y_{e'}, E) \in Y$ olsun. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek T_1-uzayı olduğundan,

$$((x_e, E) \in (F, E), (y_{e'}, E) \notin (F, E)) \text{ ve } ((y_{e'}, E) \in (G, E), (x_e, E) \notin (G, E))$$

sağlanacak şekilde (F, E) ve (G, E) esnek açık kümeleri vardır. Buradan,

$$((x_e, E) \in ({}^{Y}F, E), (y_{e'}, E) \notin ({}^{Y}F, E)) \text{ ve } ((x_e, E) \notin ({}^{Y}G, E), (y_{e'}, E) \in ({}^{Y}G, E))$$

elde edilir. Böylece (Y, τ_Y, E) bir esnek T_1-uzayıdır.

Örnek 3.7. Örnek 3.5. deki esnek T_1-uzayını ele alalım ve $Y = \{x_1\}$ olsun. O halde;

$G_1(e_1) = \{x_1\}$, $G_1(e_2) = \varnothing$,

$G_2(e_1) = \varnothing$, $G_2(e_2) = \{x_1\}$,

$G_3(e_1) = \{x_1\}$, $G_3(e_2) = \{x_1\}$

olmak üzere $\tau_Y = \{\Phi, \tilde{Y}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)\}$ olur. Bu durumda (Y, τ_Y, E) bir esnek T_1-uzayıdır.

Önerme 3.5. (X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) bir esnek T_1-uzayı ise o bir esnek T_0-uzayıdır (Tantawy ve diğ., 2016).

İspat. (X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ şeklinde X üzerinde farklı iki esnek nokta olsun. (X, τ, E) bir esnek T_1-uzayı olduğundan,

$$((x_e, E) \in (F, E), (y_{e'}, E) \notin (F, E)) \text{ ve } ((y_{e'}, E) \in (G, E), (x_e, E) \notin (G, E))$$

sağlanacak şekilde (F, E) ve (G, E) esnek açık kümeleri vardır. Açıktır ki,

$$((x_e, E) \in (F, E), (y_{e'}, E) \notin (F, E)) \text{ veya } ((y_{e'}, E) \in (G, E), (x_e, E) \notin (G, E))$$

dir. O halde (X, τ, E) bir esnek T_0-uzayıdır.

Teorem 3.3. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. (X, τ, E) esnek T_1-uzayıdır ancak ve ancak her esnek nokta bir esnek kapalı kümedir.

İspat. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun.

$\Rightarrow$: (X, τ, E) bir esnek T_1-uzayı ve (x_e, E) herhangi bir esnek nokta olsun. (x_e, E) esnek noktasının bir esnek kapalı küme olduğunu göstermek için $(x_e, E)^c$ ' nin bir esnek açık küme olduğunu göstermeliyiz. Her $(y_{e'}, E) \in (x_e, E)^c$ için $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ dir. (X, τ, E) bir esnek T_1-uzayı olduğundan,

$$(y_{e'}, E) \in (G, E) \text{ ve } (x_e, E) \notin (G, E)$$

sağlanacak şekilde bir (G, E) esnek açık kümesi vardır. Buradan $(y_{e'}, E) \in (G, E) \tilde{\subset} (x_e, E)^c$ elde edilir, yani (x_e, E) bir esnek kapalı kümedir.

$\Leftarrow$: $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ X üzerinde farklı iki esnek nokta olsun. Hipotez gereğince $(x_e, E)^c$ ve $(y_{e'}, E)^c$ esnek açık kümelerdir ve buradan;

$$(y_{e'}, E) \in (x_e, E)^c \text{ ve } (x_e, E) \notin (x_e, E)^c$$

dir. Benzer şekilde,

$$(x_e, E) \in (y_{e'}, E)^c \text{ ve } (y_{e'}, E) \notin (y_{e'}, E)^c$$

sağlanır. Böylece (X, τ, E), X üzerinde bir esnek T_1-uzayıdır.

Sonuç 3.1. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir;

1) (X, τ, E) esnek topolojik uzayı bir esnek T_1-uzayıdır.

2) X ' in sonlu her esnek alt kümesi esnek kapalıdır.

İspat. Teorem 3.3. ten elde edilir.

Teorem 3.4. (X, τ_1, E) ve (Y, τ_2, E) esnek topolojik uzaylar ve $f:(X, \tau_1, E) \to (Y, \tau_2, E)$ esnek kapalı(esnek açık) ve esnek örten bir fonksiyon olsun. Eğer (X, τ_1, E) bir esnek T_1-uzayı ise o zaman (Y, τ_2, E) de bir esnek T_1-uzayıdır.

İspat. $(y_{e'}, E)$, Y üzerinde herhangi bir esnek nokta olsun. O zaman f esnek örten fonksiyon olduğundan $f(x_e, E) = (y_{e'}, E)$ olacak şekilde $(x_e, E) \in X$ esnek noktası vardır. (X, τ_1, E) bir esnek T_1-uzayı olduğundan (x_e, E) esnek noktası bu uzayda esnek kapalıdır. f esnek kapalı fonksiyon olduğundan $f(x_e, E) = (y_{e'}, E)$ esnek kümesi de (Y, τ_2, E) esnek topolojik uzayında kapalıdır. Buradan (Y, τ_2, E) bir esnek T_1-uzayıdır.

Sonuç 3.2. (X, τ_1, E) ve (Y, τ_2, E) iki esnek topolojik uzay ve $f:(X, \tau_1, E) \to (Y, \tau_2, E)$ bir esnek homeomorfizma olsun. O zaman (X, τ_1, E) esnek topolojik uzayının bir esnek T_1-uzayı olması için gerek ve yeter şart (Y, τ_2, E) esnek topolojik uzayının da bir esnek T_1-uzayı olmasıdır.

İspat. Teorem 3.4 ten elde edilir.

Tanım 3.3. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ koşulunu sağlayan iki esnek nokta olsun. Eğer,

$$(x_e, E) \in (F, E),\ (y_{e'}, E) \in (G, E) \text{ ve } (F, E) \tilde{\cap} (G, E) = \Phi$$

sağlanacak şekilde (F, E) ve (G, E) esnek açık kümeleri varsa (X, τ, E) esnek topolojik uzayına esnek T_2- uzayı denir (Gunduz (Aras) ve diğ., 2013).

Örnek 3.8. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel küme ve $E = \{e_1\}$ parametre kümesi olsun. O halde;

$$F_1(e_1) = \{x_1\}, \qquad F_2(e_1) = \{x_2\}, \qquad F_3(e_1) = \{x_3\},$$

$F_4(e_1)=\{x_1, x_2\}$, $F_5(e_1)=\{x_1, x_3\}$, $F_6(e_1)=\{x_2, x_3\}$

olmak üzere $\tau=\{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E), (F_6, E)\}$ ailesi X üzerinde bir esnek topoloji ve (X, τ, E) X üzerinde bir esnek T_2- uzayıdır.

Önerme 3.6. (X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) bir esnek T_2- uzayı ise her $e\in E$ için (X, τ_e) bir T_2- uzayıdır.

İspat. Her $x, y\in X$ için $x\neq y$ olsun. O zaman esnek nokta tanımından (x_e, E), $(y_{e'}, E)$ esnek noktaları farklıdır. (X, τ, E) bir esnek T_2- uzayı olduğundan,

$$(x_e, E)\in(F, E),\ (y_{e'}, E)\in(G, E) \text{ ve } (F, E)\tilde{\cap}(G, E)=\Phi$$

sağlanacak şekilde (F, E) ve (G, E) esnek açık kümeleri vardır. Buradan her $e\in E$ için,

$$x\in F(e),\ y\in G(e) \text{ ve } F(e)\cap G(e)=\varnothing$$

dir. Dolayısıyla (X, τ_e) bir T_2- uzayıdır.

Örnek 3.9. Örnek 3.8. deki esnek T_2- uzayını ele alalım. O halde; $\tau_{e_1}=\{\varnothing, X, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$

dir. Bu durumda (X, τ_{e_1}) topolojik uzayı T_2- uzayıdır.

Önerme 3.7. (X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve Y, X ' in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer (X, τ, E) bir esnek T_2- uzayı ise o zaman (Y, τ_Y, E) bir esnek T_2- uzayıdır.

İspat. $(x_e, E)\neq(y_{e'}, E)$ farklı iki esnek nokta ve $(x_e, E), (y_{e'}, E)\in Y$ olsun. (X, τ, E) X üzerinde bir esnek T_2- uzayı olduğundan,

$$(x_e, E)\in(F, E),\ (y_{e'}, E)\in(G, E) \text{ ve } (F, E)\tilde{\cap}(G, E)=\Phi$$

koşulunu sağlayan (F, E) ve (G, E) esnek açık kümeleri vardır. Buradan,

$$(x_e, E) \in Y \tilde{\cap} (F, E) = ({}^{Y}F, E) \in \tau_Y,$$

$$(y_{e'}, E) \in Y \tilde{\cap} (G, E) = ({}^{Y}G, E) \in \tau_Y$$

ve

$$({}^{Y}F, E) \tilde{\cap} ({}^{Y}G, E) = \Phi$$

elde edilir, yani (Y, τ_Y, E) bir esnek T_2- uzayıdır.

Teorem 3.5. (X, τ, E), X üzerinde bir esnek T_1-uzayı, $(G, E) \in \tau$ ve $(x_e, E) \in (G, E)$ olsun. Eğer,

$$(x_e, E) \in (F, E) \tilde{\subset} \overline{(F, E)} \tilde{\subset} (G, E)$$

sağlanacak şekilde (F, E) esnek açık kümesi varsa o zaman (X, τ, E) bir esnek T_2- uzaydır.

İspat. $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ koşulunu sağlayan X üzerinde farklı iki esnek nokta olsun. (X, τ, E) esnek T_1-uzayı olduğundan (x_e, E) ve $(y_{e'}, E)$ esnek noktaları esnek kapalıdır ve $(x_e, E) \in (y_{e'}, E)^c$ dir. O zaman,

$$(x_e, E) \in (F, E) \tilde{\subset} \overline{(F, E)} \tilde{\subset} (y_{e'}, E)^c$$

olacak şekilde bir (F, E) esnek açık kümesi vardır. Buradan $(y_{e'}, E) \in \left(\overline{(F, E)}\right)^c$ elde edilir. Bu ise,

$$(x_e, E) \in (F, E),\ (y_{e'}, E) \in \left(\overline{(F, E)}\right)^c \text{ ve } (F, E) \tilde{\cap} \left(\overline{(F, E)}\right)^c = \Phi$$

dur, yani (X, τ, E) bir esnek T_2- uzaydır.

Önerme 3.8. (X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) bir esnek T_2- uzayı ise o zaman (X, τ, E) bir esnek T_1-uzayıdır.

İspat. (X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzay ve $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ farklı iki esnek nokta olsun. (X, τ, E) bir esnek T_2- uzayı olduğundan,

$$(x_e, E) \in (F, E),\ (y_{e'}, E) \in (G, E) \text{ ve } (F, E) \tilde{\cap} (G, E) = \Phi$$

sağlanacak şekilde (F, E) ve (G, E) esnek açık kümeler vardır. $(F, E) \tilde{\cap} (G, E) = \Phi$ olduğundan,

$$(x_e, E) \notin (G, E) \text{ ve } (y_{e'}, E) \notin (F, E)$$

dir, yani (X, τ, E) bir esnek T_1-uzayıdır.

Uyarı 3.2. Bu önermelerin tersleri doğru değildir, yani her esnek T_1-uzayı bir esnek T_2- uzayı ve her esnek T_0- uzayı da bir esnek T_1-uzayı olmak zorunda değildir.

Örnek 3.10. $X = \{x_1, x_2\}$ evrensel küme , $E = \{e_1, e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun. O halde;

$$F(e_1) = \{x_1\},\ F(e_2) = X$$

esnek küme olmak üzere $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F, E)\}$ ailesi X üzerinde esnek topolojidir. Açıktır ki (X, τ, E), X üzerinde bir esnek T_0- uzayı, fakat bir esnek T_1-uzayı değildir.

Örnek 3.11. $X = \{x_1, x_2\}$ evrensel küme, $E = \{e_1, e_2\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. O halde;

$$F_1(e_1) = X, \quad F_1(e_2) = \{x_2\},$$

$$F_2(e_1) = \{x_1\},\ F_2(e_2) = X,$$

$F_3(e_1)=\{x_1\},\ F_3(e_2)=\{x_2\}$

olmak üzere $\tau=\{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$ olsun. Bu durumda (X, τ, E), X üzerinde bir esnek topolojik uzaydır. Ayrıca (X, τ, E) bir esnek T_1-uzayıdır fakat bir esnek T_2-uzayı değildir. Çünkü $x_1, x_2 \in X$ olmak üzere,

$$(x_1, E)\in(F, E), (x_2, E)\in(G, E) \text{ ve } (F, E)\tilde{\cap}(G,E)=\Phi$$

olacak şekilde hiçbir (F, E) ve (G, E) esnek açık küme yoktur.

Teorem 3.6. X sonlu bir küme olsun O zaman (X, τ, E) esnek topolojik uzayı bir esnek T_2- uzayıdır ancak ve ancak (X, τ, E) esnek topolojik uzayındaki her esnek nokta esnek açık kümedir.

İspat. $X=\{x_1, x_2,..., x_n\}$ sonlu bir küme ve (X, τ, E) esnek topolojik uzayı esnek T_2- uzayı olduğundan, $(x_1, E)\neq(x_2, E)$ esnek noktaları için, $(x_1, E)\in(F_{x_1,x_2}, E)$, $(x_2, E)\in(F_{x_2,x_1}, E)$ ve $(F_{x_1,x_2}, E)\tilde{\cap}(F_{x_2,x_1}, E)=\Phi$ olacak şekilde $(F_{x_1,x_2}, E),(F_{x_2,x_1}, E)\in\tau$ vardır. O zaman $(x_1, E)\neq(x_3, E)$ ve $(x_2, E)\neq(x_3, E)$ esnek noktaları için,

$$(x_1, E)\in(F_{x_1,x_3}, E),\ (x_3, E)\in(F_{x_3,x_1}, E),\ (F_{x_1,x_3}, E)\tilde{\cap}(F_{x_3,x_1}, E)=\Phi$$

ve

$$(x_2, E)\in(F_{x_2,x_3}, E),\ (x_3, E)\in(F_{x_3,x_2}, E),\ (F_{x_2,x_3}, E)\tilde{\cap}(F_{x_3,x_2}, E)=\Phi$$

olacak şekilde $(F_{x_1,x_3}, E),(F_{x_3,x_1}, E),(F_{x_2,x_3}, E),(F_{x_3,x_2}, E)\in\tau$ elde ederiz. O zaman,

$$(F_{x_1,x_2,x_3}, E)=(F_{x_1,x_2}, E)\tilde{\cap}(F_{x_1,x_3}, E),$$
$$(F_{x_2,x_1,x_3}, E)=(F_{x_2,x_1}, E)\tilde{\cap}(F_{x_2,x_3}, E)$$

ve

$$(F_{x_3,x_2,x_1}, E)=(F_{x_3,x_1}, E)\tilde{\cap}(F_{x_3,x_2}, E)$$

esnek açık kümeleri için,

$$(x_1, E)\in(F_{x_1,x_2,x_3}, E),(x_2, E)\in(F_{x_2,x_1,x_3}, E),(x_3, E)\in(F_{x_3,x_2,x_1}, E)$$

ve

$\left(F_{x_1,x_2,x_3}, E\right)\tilde{\cap}\left(F_{x_2,x_1,x_3}, E\right)=\Phi$,

$\left(F_{x_1,x_2,x_3}, E\right)\tilde{\cap}\left(F_{x_3,x_2,x_1}, E\right)=\Phi$,

$\left(F_{x_2,x_1,x_3}, E\right)\tilde{\cap}\left(F_{x_3,x_2,x_1}, E\right)=\Phi$

koşulları sağlanır, yani $\left(x_1, E\right),\left(x_2, E\right),\left(x_3, E\right)$ esnek noktaları esnek ayrık komşuluklara sahiptir. O halde her $i \neq j$ ve $\left(x_1, E\right),...,\left(x_n, E\right)$ esnek noktaları için, $\left(x_i, E\right) \in \left(F_i, E\right)$, $\left(x_j, E\right) \in \left(F_j, E\right)$ ve $\left(F_i, E\right)\tilde{\cap}\left(F_j, E\right)=\Phi$ olacak şekilde $\left(F_i, E\right) \in \tau$ esnek kümesi bulabiliriz. Açıktır ki eğer $i \neq j$ ise o zaman $\left(x_i, E\right) \notin \left(F_j, E\right)$ dir. Buradan $\left(x_j, E\right)=\left(F_j, E\right)$ elde edilir.

Teoremin tersinin ispatı açıktır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada esnek kümeler ve esnek topoloji ile ilgili temel kavramlar tanıtılmış, bu kavramlarla ilgili önermeler ve örnekler verilmiştir.

Daha sonra esnek nokta tanımı verilerek, bu esnek noktanın esnek komşuluğu, esnek iç nokta ve esnek değme noktası kavramları verilerek bu kavramlar teoremlerle incelenmiştir.

En son bölümde de esnek topolojik uzaylarda esnek ayırma aksiyomları adı verilen esnek T_0-uzayı, esnek T_1-uzayı ve esnek T_2-uzayı tanımları verilerek onların önemli özellikleri detaylı bir şekilde araştırılmıştır.

KAYNAKLAR

Acar U., Koyuncu F., Tanay B., Soft sets and soft rings, *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, **59**, 3458-3463.

Ahmad B., Kharal A., On fuzzy soft sets, *Hindawi Publishing Corporation Advances in Fuzzy Systems*, 2009, 1-6.

Aktaş H., Çağman N., Soft sets and soft groups, *Information Sciences*, 2007, **177**, 2726-2735.

Ali M. I., Feng F., Liu X., Min W. K., Shabir M., On some new operations in soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, **57**(9), 1547-1553.

Aygünoğlu A., Aygün H., Introduction to fuzzy soft groups, *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, **58**, 1279-1286.

Aygünoğlu A., Aygün H., Some notes on soft topological spaces, *Neural Computing and Applications*, 2012, **21**(1), 113-119.

Aygünoğlu A., Çetkin V., Aygün H., An introduction to fuzzy soft topological spaces, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statics*, 2014, **43(**2), 197-208.

Atanassov K., Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, **20**, 87-96.

Bayramov S., Gündüz Aras C., *Genel Topoloji*, ISBN:975-436-056-1, Çağlayan Basımevi, İstanbul, 2004.

Bayramov S., Gunduz Aras C., Soft locally compact and soft paracompact spaces, *Journal of Mathematics and System Science*, 2013, **3**, 122-130.

Chen D., The parametrization reduction of soft sets and its applications, *Computers and Mathematics with Applications*, 2005, **49**,757-763.

Çağman N., Enginoglu S., Soft set theory and uni–int decision making, *European Journal of Operational Research*, 2010, **207**, 848–855.

Çağman N., Karataş S., Enginoğlu S., Soft topology, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **62**, 351-358.

Çetkin V., Aygün H., On Convergence of Soft Nets, *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing*, 2016, **26**, 3-5, 175-187.

Das S., Samanta S.K., Soft metric, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013, **6**(1), 77-94.

Enginoglu S., Esnek Kümeler ve Esnek Karar Verme Metotları, Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat, 2008, 245455.

Feng F., Jun Y. B., Zhao X.Z., Soft semirings, *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, **56**, 2621-2628.

Gunduz Aras C., Sonmez A., Çakallı H., On soft functions, *Proc.13th Int. Conf. Comput. And Math. Methods in Science and Eng*., Almeria, Spain, 24-27 June 2013.

Gunduz Aras C., Sonmez A., Çakallı H., An approach to soft functions, *Journal of Mathematical Analysis*, 2017, **8**(2), 129-138.

Gunduz Aras C., Bayramov S., On the Tietze extension theorem in soft topological spaces, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, 2017, **43**(1), 105-115.

Gunduz Aras C., Ozturk T.Y., Bayramov S., Soft ideal extension, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2017, **13**(5), 629-640.

Gunduz Aras C., Yazar M.I., Bayramov S., Some notes on compact sets in soft metric spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2017, **14**(4), 331-341.

Gunduz Aras C., Bayramov S., Fuzzy soft modules, *International Mathematical Forum*, 2011, **6**(11), 517-527.

Gunduz Aras C., Bayramov S., Intuitionistic fuzzy soft modules, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **62**, 2480-2486.

Gunduz Aras C., Bayramov S., Some results on fuzzy soft topological spaces, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1-10.

Gunduz Aras C., Posul H., On some new operations in probabilistic soft set theory, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2016, **9**(3), 333-339.

Hussain S., Ahmad B., Some properties of soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **62**(11), 4058-4067.

Jun Y. B., Soft BCK/BCI-algebras, *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, **56**, 1408–1413.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., Fuzzy soft sets, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 2001, **9**(3), 589-602.

Maji P. K., Roy A. R., Biswas R., An application of soft sets in a decision making problem, *Computers and Mathematics with Applications*, 2002, **44**, 1077-1083.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 2003, **45**, 555-562.

Min W. K., A note on soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **62**, 3524-3528

Molodtsov D., Soft set theory-first results, *Computers and Mathematics with Applications*, 1999, **37**, 19-31.

Nazmul Sk., Samanta S.K., Neighbourhood properties of soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013, **6**(1), 1-15.

Ozturk T. Y., Gunduz Aras C., Bayramov S., Inverse and direct systems of soft modules, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013, **5**(1), 73-85.

Ozturk T. Y., Gunduz Aras C., Soft pairwise continuity in soft bitopological spaces, *CBU J. of Sci*., 2017, **13**(2), 413-422.

Ozturk T. Y., A new approach to soft uniform spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 2016, **40**, 1071-1084.

Pawlak, Z., Rough sets, *International Journal of Information and Computer Sciences*, 1982, **11**(1), 341-356.

Pazar Varol B., Aygün H., On soft Hausdorff spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013, **1**, 15-24.

Shabir M., M. Naz. On soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **61**, 1786–1799.

Sun Q. M., Zhang Z. L., Liu J., Soft sets and soft modules, *Lecture Notes in Computer Science*, 2008, **5009**, 403-409.

Tanay B., Kandemir M. B., Topological structure of fuzzy soft sets, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **61**, 2952–2957.

Tantawy O., El-Sheikh S. A., Hamde S., Separation axioms on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2016, **11**(4), 511-525.

Yazar M. I., Gunduz Aras C., Bayramov S., Fixed point theorems of soft contractive mappings, *Filomat*, 2016, **30**(2), 269-279.

Zadeh L. A., Fuzzy Sets, *Information and Control*, 1965, **8**, 338-353.

Zorlutuna I., Aktağ M., Min W. K., Atmaca S., Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2012, **3**(2), 171-185.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Gunduz Aras C., **AKYIL N.**, A study on separability in soft topological spaces, *International Conference On Mathematics and Engineering*, Istanbul, Turkey, 10-12 May 2017.

ÖZGEÇMİŞ

Nilay Akyıl 1989’da Kocaeli’nde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kocaeli’nde tamamladı. 2007 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2012 yılında fakülte birincisi olarak mezun oldu. 2015 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.