KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2-METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ELİF GÜNER

KOCAELİ 2017

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2-METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ELİF GÜNER

Prof.Dr. Halis AYGÜN
Danışman, Kocaeli Üniv. ....

Doç.Dr. İsmet ALTINTAŞ
Jüri Üyesi, Sakarya Üniv. ....

Yrd.Doç.Dr. Vildan ÇETKİN
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. ....

Tezin Savunulduğu Tarih: 20.12.2017

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması, literatürde mevcut olan 2-metrik uzay yapılarını, bu yapıların topolojik özelliklerini, bu yapılar üzerindeki sabit nokta teoremlerini tanıtmak ve esnek noktalar kullanılarak 2-metrik uzay tanımlayıp, bu tanımlanan uzayda sabit nokta teoremlerini ispatlamak amacıyla gerçekleştirilmiştir.

Tez çalışmamda desteğini esirgemeyen, çalışmalarıma yön veren, bana güvenen ve yüreklendiren, disiplinli ve titiz bir şekilde çalışmayı aşılamasının yanı sıra ahlaki ve insani değerler ile örnek edindiğim danışmanım Prof.Dr. Halis AYGÜN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezin konu seçiminde ve çalışmaların yürütülmesinde destek olan, bilgi ve tecrübeleriyle katkıda bulunan hocam Yrd.Doç.Dr. Vildan ÇETKİN'e teşekkür ederim.

Lisans eğitimim boyunca bizleri yetiştiren, mesleki anlamda bilgilerini paylaşan Matematik Bölümü'ndeki kıymetli hocalarıma ve araştırma görevlilerine teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana güç veren, attığım her adımda destekçim olan, her aşamada sıkıntılarımı ve mutluluklarımı paylaşan sevgili annem Emel ÇAKIR'a ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kasım – 2017 Elif GÜNER

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\subseteq$	: Alt küme
$\cap(\cup)$	: Arakesit (Birleşim)
Φ	: Boş esnek küme
$\emptyset$	: Boş küme
X, Y	: Boştan farklı klasik kümeler
E, E_1, E_2	: Boştan farklı parametre kümesi
M	: Bulanık 2-metrik
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
A, B, C	: E’nin boştan farklı alt kümeleri
$\in$	: Eleman
$\tilde{\subseteq}$	: Esnek alt küme
$\tilde{\cap}(\tilde{\cup})$	: Esnek arakesit (Birleşim)
$\tilde{\in}$	: Esnek eleman
φ_ψ	: Esnek fonksiyon
F, G, H	: Esnek kümeler
P_λ^x, P_μ^y	: Esnek noktalar
$\tilde{r}, \tilde{s}$	: Esnek reel sayılar
$\tilde{\tau}_d$	: Esnek 2-metrik topoloji
$\tilde{X}$	: Evrensel esnek küme
$\forall$	: Evrensel niceleyici, her
$\mathbb{R}(E)^*$	: Negatif olmayan esnek reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^*$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
(M, N)	: Sezgisel bulanık 2-metrik
$:\Leftrightarrow$	: Tanım olarak ancak ve ancak
$:=$	: Tanım olarak eşittir
$\diamondsuit$	: t-conorm
$*$	: t-norm
$\exists$	: Varlıksal niceleyici, en az bir
P(X)	: X’in kuvvet kümesi
$SP(\tilde{X})$	: $\tilde{X}$’ya ait esnek noktalar kümesi
τ_d	: 2-metrik topoloji

2-METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ÖZET

Bu tezin amacı; 2-metrik uzay, bulanık 2-metrik uzay ve sezgisel bulanık 2-metrik uzay yapılarını sabit nokta teoremleri ile birlikte incelemek ve esnek 2-metrik uzay yapısını tanımlayarak bu uzaydaki temel sabit nokta teoremlerini vermektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, üçgensel normlar, esnek kümeler, esnek noktalar ve esnek fonksiyonlar gibi temel kavramlar özellikleri ile birlikte verilmiştir.

İkinci bölümde, 2-metrik uzay tanımı çeşitli örneklerle birlikte verilmiştir. Ayrıca topoloji ve fonksiyonel analizde kullanışlı bir araç olan 2-metrik uzaydaki Cantor Teoremi ve Baire Kategori Teoremine yer verilmiştir. Daha sonra 2-metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, bulanık 2-metrik uzay yapısının tanımı verildikten sonra, her 2-metriğin uygun bir t-norm ile bir bulanık 2-metrik ürettiği gözlemlenmiştir. Dahası, bu uzayın bazı topolojik özellikleri ve bu uzaydaki sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, sezgisel bulanık 2-metrik uzay tanımı verilerek her bulanık 2-metrik uzayın bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay ürettiği gösterilmiştir. Buna ek olarak topolojik özellikleri ile sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, esnek noktalar kullanılarak 2-metrik uzay tanımı yapılmıştır. Esnek 2-metrik uzay olarak isimlendirilen bu uzayda topolojik özellikler incelendikten sonra sabit nokta teoremlerinin ispatında kullanacak olduğumuz Cantor Teoremi ve Baire Kategori teoremi verilmiştir. Bunlara ilave olarak, esnek 2-metrik uzaylar üzerinde bazı temel sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık 2-Metrik Uzay, Esnek 2-Metrik Uzay, Sabit Nokta Teoremleri, Sezgisel Bulanık 2-Metrik Uzay, 2-Metrik Uzay.

2-METRIC SPACES AND FIXED POINT THEOREMS

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to study the notions of 2-metric space, fuzzy 2-metric space, intuitionistic fuzzy 2-metric space with fixed point theorems in these spaces and to give fundamental fixed point theorems in soft 2-metric space by defining this notion.

This thesis includes five chapters. In the first chapter, some fundamental concepts such as triangular norms, soft sets, soft points and soft functions were recalled with their properties.

In the second chapter, the definition of 2-metric space with various examples was given. Moreover, Cantor's Theorem and Baire Category Theorem which are useful tools in general topology and functional analysis, were presented in 2-metric spaces. Besides this, some fixed point theorems in 2-metric spaces were investigated.

In the third chapter, after giving the definition of fuzzy 2-metric space, it was observed that every 2-metric induces a fuzzy 2-metric with a compatible t-norm. Also, some topological properties of this space and fixed point theorems in this space were given.

In the fourth chapter, by giving the definition of intuitionistic fuzzy 2-metric space, it was denoted that every fuzzy 2-metric space induces an intuitionistic fuzzy 2-metric space. Also, some topological properties and fixed point theorems were investigated.

In the fifth chapter, the definition of 2-metric space was introduced by using soft points. After investigating the topological properties of this space, called by soft 2-metric space, Cantor's Theorem and Baire Category Theorem were given, which will be used in the proof of the fixed point theorems. Furthermore, some fundamental fixed point theorems in this space was obtained.

Keywords: Fuzzy 2-Metric Space, Soft 2-Metric Space, Fixed Point Theorems, Intuitionistic Fuzzy 2-Metric Space, 2-Metric Space.

GİRİŞ

Analiz, topoloji ve geometrinin doğal bir sentezi olan sabit nokta teorisi ilk kez 1912 yılında Brouwer tarafından literatüre kazandırılmıştır. Sabit nokta teorisi sadece matematiğin çeşitli alanlarında değil aynı zamanda fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi çeşitli disiplinlerde de geniş bir uygulama alanına sahiptir. Sabit nokta teorisinin temel teoremlerinden birisi olan ve varlık ve teklik problemlerinin ispatında önemli bir rol oynayan Banach Daralma Prensibi(İlkesi) ise 1922 yılında Banach tarafından verilmiştir. Akabinde yapılan çalışmalarda birçok araştırmacı gerek ele alınan uzayın yapısını değiştirerek gerekse fonksiyonun sahip olduğu özellikleri değiştirerek Banach Daralma Prensibi'ni genelleştirmişler ve bu prensibin farklı versiyonlarını kullanarak sabit nokta teorisine çeşitli katkılarda bulunmuşlardır.

2-metrik kavramı ilk olarak 1963'de Gähler tarafından verilmiştir. Gähler'in verdiği 2-metrik tanımına göre d(x, y, z) değeri hepsi birden aynı doğru üzerinde olmayan x, y, z noktalarını köşeleri kabul eden üçgenin alanını vermektedir. Gähler, 2-metrik kavramının metriğin bir genellemesi olduğunu iddia etmiştir. Fakat birçok yazar 2-metrik ile metrik arasında herhangi bir ilişki olmadığını öne sürmüştür. Gähler, 2-metrik fonksiyonunun yalnız bir değişkene göre sürekli olduğunu ispatlamıştır. Bütün değişkelerine göre sürekli olan 2-metrik ise sürekli 2-metrik olarak isimlendirilmiştir. Metrik ise her iki değişkenine göre de sürekli olan bir fonksiyondur. Bu yönüyle ve sabit nokta teoremlerindeki daralma dönüşümlerinin birbiriyle ilgili olmamaları, 2-metrik fonksiyonu ile metrik fonksiyonunun birbirinden bağımsız olduğuna dair yapılan yorumları desteklemektedir.

2-metrik uzaylar üzerinde sabit nokta çalışmaları ilk olarak Iseki (1975) ile başlamaktadır. Daha sonra Rhoades (1979), Khan (1980), Sharma (1980), Naidu (1986), Saha ve Dey (2009), Lahiri ve diğ. (2011), Singh (2016) gibi yazarlar tarafından 2-metrik uzaylarda sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri üzerine çalışmalar yapılmıştır.

1999 yılında matematikteki belirsizliklerle başa çıkabilmek için Molodtsov tarafından esnek küme teorisi ortaya konmuştur. Esnek küme teorisi birçok alana uygulanmıştır. Esnek kümelerin karar verme problemlerine uygulanması Maji ve diğ. (2003), cebirsel özellikleri ise Aktaş ve Çağman (2007) tarafından verilmiştir. Esnek kümelerin topolojisi ilk olarak Shabir ve Naz (2011) tarafından verilmiştir. Aygünoğlu ve Aygün (2012) ise esnek topolojik uzaylarda bazı temel kavramları tanımlamıştır. Daha sonra, Zorlutuna ve diğ. (2012) klasik noktaların esnek komşuluk sistemlerini tanımlamışlardır. Pazar Varol ve Aygün (2013) esnek topolojik uzaylarda klasik noktaları kullanarak Hausdorff aksiyomunu incelemiştir. Esnek topolojik uzaylarda ağların yakınsaklığı ise Çetkin ve Aygün (2016) tarafından verilmiştir. Esnek düzgün uzay yapısı ilk kez Çetkin ve Aygün (2013) tarafından tanımlanmış ve önemli özellikleri incelenmiştir. Bunlara ek olarak, esnek topolojik uzayların kategorik ilişkileri de Çetkin ve diğ. (2016) tarafından verilmiştir. Esnek kümeler ile bulanık kümelerin bir genellemesi olan bulanık esnek kümeler ise Maji ve diğ. (2001) tarafından tanımlanmıştır. Bulanık esnek kümelerin cebirsel uygulaması ilk kez Aygünoğlu ve Aygün (2009) tarafından incelenmiştir. Bulanık esnek kümelerin topolojisi Tanay ve Kandemir (2011) tarafından tanımlanmıştır. Bulanık esnek topolojik uzaylar ise Aygünoğlu ve diğ. (2014) tarafından verilmiş ve akabinde bu topolojik uzaylara ilişkin yapılar Çetkin ve Aygün'ün (2013, 2014, 2016) bir dizi çalışmasında incelenmiştir.

Das ve Samanta (2012) esnek reel sayı, esnek eleman ve esnek nokta tanımlarını vermişlerdir ve esnek metrik kavramını tanımlamışlardır. Ayrıca her esnek metriğin bir esnek topoloji ürettiğini göstermişlerdir. Das ve Samanta (2013) yapmış oldukları diğer bir çalışmada ise esnek nokta yerine esnek elemanları kullanarak esnek metrik kavramı tanımlamışlardır. Nazmul ve Samanta (2012) esnek elemanların komşuluk sistemini tanımlamışlardır ve bazı özelliklerini incelemişlerdir. Esnek fonksiyonların sabit noktaları ilk kez 2013 yılında Wardowski tarafından ele alınmıştır. Esnek metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ise ilk olarak Abbas ve diğ. (2015) tarafından incelenmiştir. Esnek metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri ise Aydoğdu ve diğ. (2017) tarafından çalışılmıştır.

Bulanık metrik uzay kavramı Kramosil ve Michalek (1975) ile Kaleva (1985) tarafından iki farklı şekilde tanımlanmıştır. Daha sonra George ve Veeramani (1994) tarafından Kramosil ve Michalek (1975) anlamındaki bulanık metrik tanımı, Hausdorff topoloji üretebilmek için yeniden verilmiştir. Sezgisel bulanık metrik uzay tanımı ise Park (2004) tarafından verilmiştir. Bulanık 2-metrik uzay kavramı Sharma (2002) tarafından ve sezgisel bulanık 2-metrik uzay kavramı ise Mursaleen ve Lohani (2009) tarafından verilmiştir. Daha sonra Singh ve diğ. (2007), Han (2010), Das ve Saha (2013), Ansari ve diğ. (2011), Dersanambika ve Aswathy (2011), Yadav ve Thakur (2013), Joshi (2013), Shrivastava (2016) gibi yazarlar tarafından bulanık 2-metrik uzaylar üzerinde (ortak) sabit nokta teoremleri verilmiştir. Shrivastava ve diğ. (2014) ile Bakry (2015) tarafından da sezgisel bulanık 2-metrik uzaylar üzerinde ortak sabit nokta çalışmaları yapılmıştır.

Bu çalışmada, öncelikle literatürde mevcut olan 2-metrik uzaylar ve sabit nokta teoremleri, bulanık 2-metrik uzaylar ve sabit nokta teoremleri ile sezgisel bulanık 2-metrik uzaylar ve sabit nokta teoremleri verilmiştir. Son bölümde ise esnek noktaların kullanılmasıyla esnek 2-metrik uzaylar tanımlanmıştır ve bu uzaylara ilişkin temel özellikler incelenmiştir. Ayrıca esnek 2-metrik uzaylar arasında tanımlı esnek fonksiyonların sabit nokta teoremleri verilmiştir ve bu teoremler ispatlanmıştır.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ileriki kısımlarında kullanılacak olan üçgensel norm, esnek küme, esnek nokta ve esnek fonksiyon kavramlarına yer verilecektir.

1.1. Üçgensel Normlar

Tanım 1.1.1: $[0, 1]$ üzerinde bir ikili işlem olan $* : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna bir üçgensel norm (kısaca, t-norm) adı verilir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in [0, 1]$ için aşağıdaki koşullar sağlanır.

(T1) $x * y = y * x$.

(T2) $x * (y * z) = (x * y) * z$.

(T3) $y \leq z \Longrightarrow x * y \leq x * z$.

(T4) $x * 1 = x$ (Klement ve diğ, 2000).

Örnek 1.1.2: Aşağıdaki şekilde tanımlanan $[0, 1]$ üzerindeki ikili işlemler bilinen en temel t-norm örnekleridir:

$x *_M y = \min\{x, y\}$,

$x *_P y = x.y$,

$x *_L y = \max\{x + y - 1, 0\}$,

$x *_D y = \begin{cases} 0, & \text{eğer } (x, y) \in [0, 1)^2 \text{ ise} \\ \min\{x, y\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ (Klement ve diğ, 2000).

Uyarı 1.1.3: (1) Tanım 1.1.1'den açıkça görülmektedir ki, her $x \in [0, 1]$ için

$0 * x = x * 0 = 0$ ve $1 * x = x$

eşitlikleri sağlanır.

(2) Tanım 1.1.1'deki (T1) ve (T3) özelliği birlikte göz önüne alınırsa, her t-norm her iki bileşene göre de monotondur. Yani, aşağıdaki ifade sağlanır (Klement ve diğ,2000).

$x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2 \Longrightarrow x_1 * y_1 \leq x_2 * y_2$.

Tanım 1.1.4: [0, 1] üzerinde bir ikili işlem olan $\diamond : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna bir üçgensel eşnorm (kısaca, s-norm veya t-conorm) adı verilir : ⇔ Her $x, y, z \in [0, 1]$ için aşağıdaki koşullar sağlanır.

(S1) $x \diamond y = y \diamond x$.

(S2) $x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z$.

(S3) $y \leq z \Longrightarrow x \diamond y \leq x \diamond z$.

(S4) $x \diamond 0 = x$ (Klement ve diğ, 2000).

Örnek 1.1.5: Aşağıdaki şekilde tanımlanan [0, 1] üzerindeki ikili işlemler bilinen en temel t-conorm örnekleridir:

$x \diamond_M y = \max\{x, y\}$,

$x \diamond_P y = x + y - x.y$,

$x \diamond_L y = \min\{ x + y, 1\}$,

$$x \diamond_D y = \begin{cases} 1, & \text{eğer } (x, y) \in (0, 1]^2 \text{ ise} \\ \max\{x, y\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$ (Klement ve diğ, 2000).

Önerme 1.1.6: $\diamond : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu bir t-conormdur ⇔ Her $x, y \in [0, 1]$ için

$x \diamond y = 1 - \big((1 - x) * (1 - y)\big)$

olacak şekilde bir $*$ t-normu mevcuttur (Klement ve diğ, 2000).

Tanım 1.1.7: Bir $*$ t-normu (benzer şekilde $\diamond$ t-conormu) [0, 1] ve $[0, 1]^2$ üzerindeki standart topolojilere göre bir fonksiyon olarak sürekli ise bu $*$ t-normuna (benzer şekilde $\diamond$ t-conormuna) süreklidir denir (Klement ve diğ, 2000).

Örnek 1.1.8: Örnek 1.1.2'de verilen $*_M$, $*_P$, $*_L$ t-normları ile Örnek 1.1.5'de verilen ve bunların dualleri olan $\diamond_M$, $\diamond_P$, $\diamond_L$ t-conormları süreklidirler (Klement ve diğ, 2000).

Uyarı 1.1.9: (1) t-norm (benzer şekilde t-conorm) tanımlarındaki ilk özelliklerinden (değişme özelliğinden) görülmektedir ki, $*$ fonksiyonunun (benzer şekilde $\diamond$ fonksiyonunun) sürekliliği ilk bileşene göre sürekliliğe denktir.

(2) Özel olarak, bir t-normun veya bir t-conormun alttan (üstten) yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul fonksiyonunun ilk bileşene göre soldan sürekli (sağdan sürekli) olmasıdır (Klement ve diğ, 2000).

Örnek 1.1.10: (1) Aşağıdaki şekilde tanımlanan $*_N$ nilpotent t-norm alttan yarı süreklidir, fakat üstten yarı sürekli olmadığından sürekli değildir.

$$x *_N y = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x + y \leq 1 \text{ ise} \\ \min\{x, y\}, & \text{eğer } x + y > 1 \text{ ise} \end{cases}.$$

(2) Aşağıdaki şekilde tanımlanan $*_D$ drastik çarpım t-norm üstten yarı süreklidir, fakat alttan yarı sürekli olmadığından sürekli değildir.

$$x *_D y = \begin{cases} 0, & \text{eğer } (x, y) \in [0, 1)^2 \text{ ise} \\ \min\{x, y\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$ (Klement ve diğ, 2000).

1.2. Esnek Kümeler

Bu kısımda X evrensel küme, E boştan farklı parametre kümesi ve $A, B, C \subseteq E$ olarak alınacaktır.

Tanım 1.2.1: $P(X)$, X'in kuvvet kümesi olmak üzere, her $F: E \to P(X)$ dönüşümüne X üzerinde bir esnek küme adı verilir ve (F, E) ikilisi ile gösterilir.

Diğer bir deyişle, esnek küme X'in alt kümelerinin parametrelerle ifade edilen bir ailesidir. Her $e \in E$ için F(e) değer kümesine esnek kümenin e-elemanı adı verilir. Bir (F, E) esnek kümesi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$(F, E) = \{ (e, F(e)) \mid e \in E, F(e) \in P(X) \}$ (Molodtsov, 1999).

Örnek 1.2.2: (F, E) esnek kümesi bir kişinin almayı düşündüğü evin özelliklerini tanımlasın. $X=\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evlerin kümesi ve $E=\{$pahalı, güzel, ahşap, ucuz, bahçeli$\}=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerin kümesi olsun. $F : E \rightarrow P(X)$ dönüşümü

$F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \emptyset$, $F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$, $F(e_5) = \{h_1\}$

olarak tanımlasın. Bu durumda (F, E) esnek kümesi,

$(F, E) = \{($pahalı ev, $\{h_2, h_4\})$, $($güzel ev, $\{h_1, h_3\})$, $($ahşap ev, $\emptyset)$,

$($ucuz ev, $\{h_1, h_3, h_5\})$,$($bahçeli ev,$\{h_1\})\}$ olarak tanımlanır (Aktaş ve Çağman, 2007).

Tanım 1.2.3: (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun.

(1) Her $e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ ise (F, E) esnek kümesine boş esnek küme denir. Boş esnek küme Φ ile gösterilir.

(2) Her $e \in E$ için $F(e) = X$ ise (F, E) esnek kümesine mutlak esnek küme denir. Mutlak esnek küme $\tilde{X}$ ile gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Tanım 1.2.4: (F, E) X üzerinde bir esnek küme olsun. Her $e \in E$ için $F^c(e) = X \backslash F(e)$ şeklinde tanımlanan $F^c : E \rightarrow P(X)$ dönüşümüne (F, E) esnek kümesinin tümleyeni denir ve $(F, E)^c = (F^c, E)$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 1.2.5: (F, A) ve (G, B) X üzerinde iki esnek küme olsun.

(1) (F, A)'ya (G, B)'nin alt kümesi denir $:\Leftrightarrow$ (i) $A \subseteq B$

(ii) Her $e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$

Bu durum $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ile gösterilir.

(2) $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ve $(G, B) \tilde{\subseteq} (F, A)$ sağlanıyorsa (F, A) ve (G, B) esnek kümeleri eşittir denir.

(3) (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin birleşimi bir (H, C) esnek kümesidir ve bu esnek küme aşağıdaki şekilde tanımlanır. Her $e \in C$ için

$$H(e)=\begin{cases} F(e), & e\in A\setminus B \\ G(e), & e\in B\setminus A \\ F(e)\cup G(e), & e\in A\cap B \end{cases}.$$

Bu durum $(F, A)\ \tilde{\cup}\ (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir. (Burada $C = A \cup B$ dir.)

(4) (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin arakesiti bir (H, C) esnek kümesidir ve burada $H(e) = F(e)\cap G(e),\ \forall e \in C = A \cap B$ dir. Bu durum $(F, A)\tilde{\cap}(G, B) = (H, C)$ ile gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Önerme 1.2.6: (F, A), (G, B) ve (H, C), X üzerinde esnek kümeler olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $(F, A)\ \tilde{\cup}\ (F, A)=(F, A)$.

(2) $(F, A)\ \tilde{\cup}\ (G, B)=(G, B)\ \tilde{\cup}\ (F, A)$.

(3) $(F, A)\ \tilde{\cup}\ \big((G, B)\ \tilde{\cup}\ (H, C)\big)=\big((F, A)\ \tilde{\cup}\ (G, B)\big)\ \tilde{\cup}\ (H, C)$.

(4) $(F, A)\ \tilde{\subseteq}\ (F, A)\ \tilde{\cup}\ (G, B)$ ve $(G, B)\ \tilde{\subseteq}\ (F, A)\ \tilde{\cup}\ (G, B)$.

(5) $(F, A)\ \tilde{\subseteq}\ (G, B)$ ise $(F, A)\ \tilde{\cup}\ (G, B)=(G, B)$.

(6) $(F, A)\ \tilde{\cap}\ (F, A)=(F, A)$.

(7) $(F, A)\ \tilde{\cap}\ (G, B) = (G, B)\ \tilde{\cap}\ (F, A)$.

(8) $(F, A)\ \tilde{\cap}\ \big((G, B)\ \tilde{\cap}\ (H, C)\big)=\big((F, A)\ \tilde{\cap}\ (G, B)\big)\ \tilde{\cap}\ (H, C)$.

(9) $(F, A)\ \tilde{\cap}\ (G, B)\ \tilde{\subseteq}\ (F, A)$ ve $(F, A)\ \tilde{\cap}(G, B)\ \tilde{\subseteq}\ (G, B)$.

(10) $(F, A)\ \tilde{\subseteq}\ (G, B)$ ise $(F, A)\ \tilde{\cap}\ (G, B)=(F, A)$ (Maji ve diğ., 2003).

Uyarı 1.2.7: X evrensel küme, E parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. (F, A), X üzerinde bir esnek küme olmak üzere

$$\bar{F} : E \to P(X),\ \ \bar{F}(e) = \begin{cases} F(e), & e\in A \text{ ise} \\ \emptyset, & e\notin A \text{ ise} \end{cases}$$

dönüşümü ile birlikte (F, A) esnek kümesi $(\overline{F}, E)$ esnek kümesi olarak düşünülebilir. Yani parametre kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlı her esnek küme parametre kümesine genişletilebilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Bu nedenle, tezin geri kalan kısmında aksi belirtilmedikçe (F, E) yerine kısaca F yazılacaktır.

Tanım 1.2.8: $\varphi : X \to Y$, $\psi : E_1 \to E_2$ iki fonksiyon ve E_1, E_2 sırasıyla X ve Y için evrensel parametre kümeleri olmak üzere, φ_ψ fonksiyonuna X'den Y'ye bir esnek fonksiyon denir.

(1) (F,E_1), X üzerinde bir esnek küme ve φ_ψ, X'den Y'ye bir esnek fonksiyon olmak üzere $\varphi_\psi\big((F,E_1)\big)$, Y üzerinde bir esnek kümedir ve bu küme aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varphi_\psi\big((F,E_1)\big)(k) = \bigcup_{\psi(e)=k} \varphi\big(F(e)\big),\ \forall k \in E_2.$$

(2) (G, E_2), Y üzerinde bir esnek küme ve φ_ψ, X'den Y'ye bir esnek fonksiyon olmak üzere, $\varphi_\psi^{-1}\big((G,E_2)\big)$, X üzerinde bir esnek kümedir ve bu küme aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varphi_\psi^{-1}\big((G,E_2)\big)(e) = \varphi^{-1}\Big(G\big(\psi(e)\big)\Big),\ \forall e \in E_1.$$

Eğer φ ve ψ bire-bir (örten) ise φ_ψ esnek fonksiyonu da bire-bir (örten) dir (Kharal ve Ahmad, 2011).

Teorem 1.2.9: φ_ψ , X'den Y'ye bir esnek fonksiyon, (F, E_1), (F_1, E_1), (F_2, E_1), (F_i, E_1) (i∈J, burada J bir indis kümesidir.) X üzerinde ve (G, E_2), (G_1, E_2), (G_2, E_2), (G_i, E_2) Y üzerinde esnek kümeler olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $(F_1, E_1) \,\tilde{\subseteq}\, (F_2, E_1) \Rightarrow \varphi_\psi\big((F_1, E_1)\big) \,\tilde{\subseteq}\, \varphi_\psi\big((F_2, E_1)\big)$.

(2) $(G_1, E_2) \,\tilde{\subseteq}\, (G_2, E_2) \Rightarrow \varphi_\psi^{-1}\big((G_1, E_2)\big) \,\tilde{\subseteq}\, \varphi_\psi^{-1}\big((G_2, E_2)\big)$.

(3) $(F, E_1) \tilde{\subseteq} \varphi_{\psi}^{-1}\left(\varphi_{\psi}\left((F,E_1)\right)\right)$, eğer φ_{ψ} bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(4) $\varphi_{\psi}\left(\varphi_{\psi}^{-1}\left((G,E_2)\right)\right) \tilde{\subseteq} (G,E_2)$ eğer φ_{ψ} örten ise eşitlik sağlanır.

(5) $\varphi_{\psi}\left(\tilde{\bigcap}_{i\in J}(F_i, E_1)\right) \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcap}_{i\in J}\varphi_{\psi}\left((F_i, E_1)\right)$, eğer φ_{ψ} bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(6) $\varphi_{\psi}\left(\tilde{\bigcup}_{i\in J}(F_i, E_1)\right) = \tilde{\bigcup}_{i\in J}\varphi_{\psi}\left((F_i, E_1)\right)$.

(7) $\varphi_{\psi}^{-1}\left(\tilde{\bigcup}_{i\in J}(G_i, E_2)\right) = \tilde{\bigcup}_{i\in J}\varphi_{\psi}^{-1}\left((G_i, E_2)\right)$, $\varphi_{\psi}^{-1}\left(\tilde{\bigcap}_{i\in J}(G_i, E_2)\right) = \tilde{\bigcap}_{i\in J}\varphi_{\psi}^{-1}\left((G_i, E_2)\right)$.

(8) $\varphi_{\psi}^{-1}(\tilde{Y}) = \tilde{X}$, $\varphi_{\psi}^{-1}(\Phi_Y) = \Phi_X$, $\varphi_{\psi}(\Phi_X) = \Phi_Y$.

(9) $\varphi_{\psi}(\tilde{X}) \tilde{\subseteq} \tilde{Y}$, φ_{ψ} örten ise ise eşitlik sağlanır (Kharal ve Ahmad, 2011).

Tanım 1.2.10: Her bir $\varepsilon : E \rightarrow X$ fonksiyonuna X'in bir esnek elemanı adı verilir. F, X üzerinde bir esnek küme olmak üzere her $e \in E$ için $\varepsilon(e) \in F(e)$ ise ε esnek elemanı F esnek kümesine aittir denir ve $\varepsilon \tilde{\in} F$ ile gösterilir. F bir esnek küme olmak üzere $F(e)=\{\varepsilon(e) \mid \varepsilon \tilde{\in} F\}$ dir.

Her tek noktalı esnek küme bir esnek eleman olarak ifade edilebilir (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 1.2.11: $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$'nin boştan farklı sınırlı alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere, $F : E \rightarrow \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ dönüşümüne esnek reel sayılar kümesi denir ve F ile gösterilir. Eğer F tek noktalı esnek küme ise bu kümeye esnek reel sayı adı verilir ve $\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}$ ile gösterilir. Özel olarak $\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$ ile her $e \in E$ için $\bar{r}(e) = r$ şeklindeki esnek reel sayısı gösterilir. Örneğin $e \in E$ için $\bar{0}(e) = 0$ olan $\bar{0}$ bir esnek reel sayıdır.

$\tilde{r}$ bir esnek reel sayı olmak üzere, her $e \in E$ için $\tilde{r}(e) \in \mathbb{R}^*$ ise $\tilde{r}$'ya negatif olmayan esnek reel sayı adı verilir. Bütün negatif olmayan esnek reel sayıların ailesi $\mathbb{R}(E)^*$ ile gösterilir (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 1.2.12: $\tilde{r}$ ve $\tilde{s}$ iki esnek reel sayı olmak üzere esnek reel sayılar arasındaki sıralama bağıntıları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

(1) Her $\lambda \in E$ için $\tilde{r}(\lambda) \leq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \tilde{\leq} \tilde{s}$ dir.

(2) Her $\lambda \in E$ için $\tilde{r}(\lambda) \geq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \tilde{\geq} \tilde{s}$ dir.

(3) Her $\lambda \in E$ için $\tilde{r}(\lambda) < \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \tilde{<} \tilde{s}$ dir.

(4) Her $\lambda \in E$ için $\tilde{r}(\lambda) > \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \tilde{>} \tilde{s}$ dir (Das ve Samanta, 2013).

Tanım 1.2.13: P, X üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer bir $\lambda \in E$ için $P(\lambda) = \{x\}$, $x \in X$, diğer tüm parametreler $\mu \in E \setminus \{\lambda\}$ için $P(\mu) = \emptyset$ oluyorsa P'ye X üzerinde bir esnek nokta denir ve P_λ^x ile gösterilir.

X üzerindeki bütün esnek noktaların ailesi $SP(\widetilde{X})$ ile gösterilir (Das ve Samanta, 2013).

Örnek 1.2.14: $X = \{x, y, z\}$, $E = \{\lambda, \mu\}$ olsun. $P(\lambda) = \{z\}$, $P(\mu) = \emptyset$ şeklinde tanımlanan esnek küme bir esnek noktadır (Nazmul ve Samanta, 2012) (Das ve Samanta, 2013).

Not 1.2.15: φ_ψ , X'den Y'ye bir esnek fonksiyon ve $P_\lambda^x \in SP(\widetilde{X})$ olmak üzere, esnek fonksiyon tanımından $\varphi_\psi(P_\lambda^x) = P_{\psi(\lambda)}^{\varphi(x)}$ olduğu görülmektedir.

Tanım 1.2.16: F, X üzerinde bir esnek küme ve P_λ^x, P_μ^y iki esnek nokta olsun.

(1) Eğer $\lambda \in E$ ve $P(\lambda) = \{x\} \subseteq F(\lambda)$ ise P_λ^x esnek noktası F esnek kümesine aittir denir ve $P_\lambda^x \tilde{\in} F$ ile gösterilir.

(2) Eğer $\lambda = \mu$ ve $P(\lambda) = P(\mu)$ (yani $x = y$) ise P_λ^x, P_μ^y esnek noktaları eşittir denir. Bu durumda, $P_\lambda^x \neq P_\mu^y \Leftrightarrow \lambda \neq \mu$ veya $x \neq y$ dir (Nazmul ve Samanta, 2012) (Das ve Samanta, 2013).

Önerme 1.2.17: Esnek noktaların herhangi bir ailesinin birleşimi bir esnek küme oluşturur. Ayrıca her bir esnek küme kendisine ait olan esnek noktaların birleşimi olarak ifade edilebilir (Das ve Samanta, 2013).

Önerme 1.2.18: F ve G, X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda,

$F \ \widetilde{\subseteq} \ G \Leftrightarrow (P_\lambda^x \widetilde{\in} F \Longrightarrow P_\lambda^x \widetilde{\in} G)$

sağlanır. O halde $F = G \Leftrightarrow (P_\lambda^x \widetilde{\in} F \Leftrightarrow P_\lambda^x \widetilde{\in} G)$ dir (Das ve Samanta, 2013).

Önerme 1.2.19: F ve G, X üzerinde iki esnek küme ve P_λ^x bir esnek nokta olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $P_\lambda^x \widetilde{\in} F \Leftrightarrow P_\lambda^x \widetilde{\notin} F^c$.

(2) $P_\lambda^x \widetilde{\in} (F \widetilde{\cup} G) \Leftrightarrow P_\lambda^x \widetilde{\in} F$ veya $P_\lambda^x \widetilde{\in} G$.

(3) $P_\lambda^x \widetilde{\in} \left(F \widetilde{\cap} \ G\right) \Leftrightarrow P_\lambda^x \widetilde{\in} F$ ve $P_\lambda^x \widetilde{\in} G$ (Das ve Samanta, 2013).

Not 1.2.20: $\mathfrak{B}$ esnek noktaların bir koleksiyonu olmak üzere $\mathfrak{B}$'nin elemanları ile oluşturulan esnek küme $SS(\mathfrak{B})$ ile gösterilir. Bir F esnek kümesine ait olan esnek noktaların koleksiyonu ise $SP(F)$ ile gösterilir (Das ve Samanta, 2013).

Önerme 1.2.21: $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ esnek nokta koleksiyonları ve F, G X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $SP\left(SS(\mathfrak{B})\right) = \mathfrak{B}$, $SS\left(SP(F)\right) = F$.

(2) $SP(F \widetilde{\cup} G) = SP(F) \cup SP(G)$.

(3) $SP\left(F \widetilde{\cap} G\right) = SP(F) \cap SP(G)$.

(4) $SS(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) = SS(\mathfrak{B}_1) \widetilde{\cup} SS(\mathfrak{B}_2)$, $SS(\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2) = SS(\mathfrak{B}_1) \widetilde{\cap} SS(\mathfrak{B}_2)$ (Das ve Samanta, 2013).

2. 2-METRİK UZAYLAR

Bu bölümde Gähler tarafından 1963 yılında tanımlanan 2-metrik kavramı tanıtılarak, temel özellikleri ile birlikte incelenecektir. Daha sonra 2-metrik uzaylar üzerinde Lahiri ve diğ. (2011), Singh ve diğ.(2016), Saha ve Dey (2009, 2010), Iseki (1976), Khan (1980) tarafından elde edilen bazı sabit nokta teoremleri verilecektir.

2.1. 2-Metrik Uzay Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 2.1.1: X boştan farklı bir küme olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $d: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir 2-metrik adı verilir.

(2M1) Her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $d(x, y, z) \neq 0$ olacak şekilde bir $z \in X$ mevcuttur.

(2M2) $x, y, z \in X$ noktalarınan en az ikisi birbirine eşit ise $d(x, y, z) = 0$ dır.

(2M3) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y, z) = d(z, y, x) = d(z, x, y)$ dir.

(2M4) Her $x, y, z, w \in X$ için $d(x, y, z) \leq d(x, y, w) + d(x, w, z) + d(w, y, z)$ dir.

Üzerinde tanımlanan d 2-metriği ile birlikte X kümesine 2-metrik uzay adı verilir ve (X, d) ikilisi ile gösterilir. Yukarıdaki Koşul (2M2) ve (2M4) den görülmektedir ki her $x, y, z \in X$ için $d(x, y, z) \geq 0$ dır (Gähler, 1963) (Khan, 1980).

Örnek 2.1.2: (1) Her $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir 2-metriktir.

$$d(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i<j}\begin{vmatrix} x_i & x_j & 1 \\ y_i & y_j & 1 \\ z_i & z_j & 1 \end{vmatrix}^2\right)^{1/2}$$

Bu şekilde tanımlanan $(\mathbb{R}^n, d)$ ikilisine Öklid 2-metrik uzayı adı denir. Dikkat edilirse, $n = 3$ olması halinde $d(x, y, z)$ değerinin köşeleri x, y, z olan üçgenin alanını gösterdiği açıkça görülmektedir (Iseki, 1976).

(2) X boştan farklı bir küme olmak üzere her $x, y, z \in X$ için

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{x, y, z noktalarından en az ikisi birbirine eşit ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü X üzerinde bir 2-metriktir. Bu 2-metriğe ayrık (diskret) 2-metrik adı verilir (Farhangdoost, 2012).

(3) Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$d(x, y, z) = |(x - y)(y - z)(z - x)|$$

şeklinde tanımlanan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir 2-metriktir (Farhangdoost, 2012).

(4) Her $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan $d: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir 2-metriktir.

$$d(x, y, z) = \left|x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)\right|$$ (Farhangdoost, 2012).

(5) Her $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir 2-metriktir.

$$d(x, y, z) = \max_{1 \leq i \leq n}\left\{|x_i - y_i||x_i - z_i||y_i - z_i|\right\}$$ (Farhangdoost, 2012).

(6) Her $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ için

$$d(x, y, z) = \min\{|x - y|, |y - z|, |z - x|\}$$

şeklinde tanımlanan $d: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\mathbb{R}^*$ üzerinde bir 2-metriktir (Naidu, 2001).

(7) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 0, & x = y \text{ veya } y = z \text{ veya } z = x \text{ veya } \{x, y, z\} = \{1, 2, 3\} \text{ ise} \\ \frac{1}{2}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü X üzerinde bir 2-metriktir (Naidu ve Prasad, 1986).

Tanım 2.1.3: (X, d) bir 2-metrik uzay olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için $d(x, y, z) \leq k$ olacak şekilde bir $k > 0$ reel sayısı mevcut ise (X, d) 2-metrik uzayına sınırlı 2-metrik uzay denir (Gähler, 1963) (Lal ve Singh, 1978).

Örnek 2.1.4: (X, d) bir 2-metrik uzay olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$\bar{d}(x, y, z) = \min\{d(x, y, z), 1\}$$

şeklinde tanımlanan $\bar{d}: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü X üzerinde bir 2-metriktir. Ayrıca $(X, \bar{d})$ 2-metrik uzayı sınırlı bir 2-metrik uzaydır (Farhangdoost, 2012).

Tanım 2.1.5: (X, d) bir 2-metrik uzay, $x, y \in X$ ve $r > 0$ olsun. Bu durumda,

(1) $B_r(x, y) = \{ z \in X \mid d(x, y, z) < r \}$ şeklinde tanımlanan kümeye x ve y merkezli r yarıçaplı 2-açık yuvar denir.

(2) $B_r[x, y] = \{ z \in X \mid d(x, y, z) \leq r \}$ şeklinde tanımlanan kümeye x ve y merkezli r yarıçaplı 2-kapalı yuvar denir (Gähler, 1963) (Lahiri ve diğ., 2011).

Not 2.1.6: (X, d) bir 2-metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki 2-açık yuvarların ailesi olan $\delta = \{ B_r(x, y) \mid r > 0, x, y \in X\}$ kümesini alttaban kabul eden X üzerinde bir topoloji mevcuttur. Bu şekilde üretilen topolojiye 2-metrik topoloji adı verilir ve τ_d ile gösterilir. Yani $\tau_d = \ll\delta\gg$ dir. Bu durumda (X, τ_d) ikilisine de 2-metrik topolojik uzay denir. τ_d'nin elemanlarına 2-açık küme ve bu kümelerin tümleyenlerine 2-kapalı küme adı verilir (Lahiri ve diğ., 2011).

Lemma 2.1.7: (X, τ_d) bir 2-metrik topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. G'nin 2-açık küme olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $x \in G$ için $x \in B_{r_1}(x,a_1) \cap B_{r_2}(x,a_2) \cap \ldots \cap B_{r_n}(x,a_n) \subseteq G$ olacak şekilde sonlu sayıda $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$, $r_1, r_2, \ldots, r_n > 0$ mevcut olmasıdır (Lahiri ve diğ., 2011).

Tanım 2.1.8: (X, τ_d) bir 2-metrik topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

(1) $\overline{A} = \bigcap \{ K \subseteq X \mid K \text{ 2-kapalı ve } A \subseteq K\}$

kümesine A'nın 2-kapanışı denir.

(2) $A^o = \bigcup \{ G \subseteq X \mid G \text{ 2-açık ve } G \subseteq A\}$

kümesine A'nın içi denir (Lahiri ve diğ., 2011).

Tanım 2.1.9: (X, τ_d) bir 2-metrik topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. $x \in G$ olan her G 2-açık kümesi için $A \cap (G \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ oluyorsa x noktasına A'nın 2-yığılma noktası denir. A'nın 2-yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir ve bu kümeye A'nın türev kümesi adı verilir.

Genel topolojik uzaylarda olduğu gibi $\overline{A} = A \cup A'$ eşitliğinin 2-metrik topolojik uzaylarda da sağlandığı tanımlardan görülmektedir. Bunun sonucu olarak, $\overline{A}$ kümesinin 2-kapalı bir küme olduğu aşikardır (Lahiri ve diğ., 2011).

Lemma 2.1.10: (X, τ_d) bir 2-metrik topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesinin 2-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $A = \overline{A}$ olmasıdır (Lahiri ve diğ., 2011).

Teorem 2.1.11: Her 2-metrik topolojik uzay T_1-uzayıdır (Lahiri ve diğ., 2011).

İspat: (X, τ_d) 2-metrik topolojik uzay ve $x, y \in X$ $(x \neq y)$ olsun. Bu durumda $d(x, y, z) \neq 0$ olacak şekilde bir $z \in X$ mevcuttur. O halde $d(x, y, z) > 0$ dır. $d(x, y, z) = r$ diyelim. $s = \frac{r}{2}$ olarak seçilirse $B_s(x, z)$ ve $B_s(y, z)$ kümeleri iki 2-açık yuvar olup $\left(x \in B_s(x, z), y \notin B_s(x, z)\right)$ ve $\left(x \notin B_s(y, z), y \in B_s(y, z)\right)$ sağlanmaktadır.

Theorem 2.1.12: 2-metrik topolojik uzaylarda her 2-kapalı yuvar bi 2-kapalı kümedir (Lahiri ve diğ., 2011).

İspat: (X, τ_d) 2-metrik topolojik uzayda $B_r[x, y]$ x ve y merkezli r yarıçaplı bir 2-kapalı yuvar olsun. $B_r[x, y]$'nin bütün 2-yığılma noktalarının $B_r[x, y]$'nin içinde olduğunu göstereceğiz. $z \in X$, $z \notin B_r[x, y]$ olacak şekilde $B_r[x, y]$'nin bir 2-yığılma noktası olsun. Bu durumda $d(x, y, z) > r$ dır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $B_\varepsilon(x, z) \cap B_\varepsilon(y, z)$ 2-açık küme olup z noktasını içerdiğinden $B_r[x, y] \cap \{[B_\varepsilon(x,z) \cap B_\varepsilon(y,z)] \setminus \{z\}\} \neq \Phi$ dir. Bu durumda $a \in B_r[x, y] \cap \{[B_\varepsilon(x,z) \cap B_\varepsilon(y,z)] \setminus \{z\}\}$ olacak şekilde bir $a \in X$ noktası vardır. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanmaktadır.

$$d(x, y, z) \leq d(x, y, a) + d(x, a, z) + d(a, y, z) < r + 2\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $d(x, y, z) \leq r$ ifadesi varsayımımız ile çelişmektedir. O halde z noktası $B_r[x, y]$ kümesinin 2-yığılma noktası olmamaktadır. Dolayısıyla $B_r[x, y]$ kümesi bütün 2-yığılma noktalarını içermektedir. O halde $B_r[x, y]$ 2-kapalı kümedir.

Uyarı 2.1.13: Metrik uzayların birinci sayılabilir uzay (A_1-uzayı) olduğu bilinmektedir, ancak bir 2-metrik uzayın herzaman birinci sayılabilir uzay olması gerekmez (Lahiri ve diğ., 2011).

Tanım 2.1.14: (X, d) bir 2-metrik uzay ve $F \subseteq X$ olsun.

(1) $\bar{F} = X$ ise F kümesine (X, d) 2-metrik uzayında heryerde yoğundur denir.

(2) $(\bar{F})^o = \emptyset$ ise F kümesine (X, d) 2-metrik uzayında hiçbir yerde yoğun değildir denir (Lahiri ve diğ., 2011).

Tanım 2.1.15: (Yakınsak Dizi) (X, d) bir 2-metrik uzay, $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her $z \in X$ için $d(x_n, x, z) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine x noktasına yakınsaktır denir. Yani her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyleki her $n \geq N$ ve her $z \in X$ için $d(x_n, x, z) < \varepsilon$ sağlanır. Bu durum $x_n \to x$ veya $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ile gösterilir (Naidu ve Prasad, 1986).

Lemma 2.1.16: 2-metrik uzaylarda yakınsak her dizinin bir tek limit noktası vardır (Lahiri ve diğ., 2011).

Lemma 2.1.17: 2-metrik uzaydaki yakınsaklık ile 2-metriğin ürettiği topolojik uzaydaki yakınsaklık denktir. Yani,

$x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_d} x$ (Lahiri ve diğ., 2011).

İspat: ($\Leftarrow$) (X, τ_d) 2-metrik topolojik uzayda $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olsun. $z \in X$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olarak verilsin. $B_\varepsilon(x, z)$ 2-açık küme olup x noktasını içerdiğinden $n \geq m$ iken $x_n \in B_\varepsilon(x, z)$ olacak şekilde bir m doğal sayısı mevcuttur. Yani $n \geq m$ iken $d(x_n, x, z) < \varepsilon$ olur ki bu ifade de $d(x_n, x, z) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ olduğunu ifade eder. O halde (X, d) 2-metrik uzayda $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsaktır.

($\Rightarrow$) (X,d) 2-metrik uzayda $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olsun. $x \in G$ olacak şekilde G bir 2-açık küme olsun. Lemma 2.2.3 'den $a_1, a_2, \ldots, a_k \in X$, $r_1, r_2, \ldots, r_k > 0$ için

$$x \in B_{r_1}(x, a_1) \cap B_{r_2}(x, a_2) \cap \ldots \cap B_{r_k}(x, a_k) \subseteq G$$

olur. $d(x_n, x, a_i) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ olduğundan $n \geq m_i$ iken $d(x_n, x, a_i) < r_i$ olacak şekilde m_i doğal sayıları mevcuttur. Yani her i=1,2, … ,k için $n \geq m_i$ iken $x_n \in B_{r_i}(x, a_i)$ dir. $m = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ alınırsa, her $n \geq m$ için

$$x_n \in B_{r_1}(x, a_1) \cap B_{r_2}(x, a_2) \cap \ldots \cap B_{r_k}(x, a_k) \subseteq G$$

sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.18: (Cauchy Dizisi) (X, d) bir 2-metrik uzay ve $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi olsun. Her $z \in X$ için $d(x_n, x_m, z) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi adı verilir. Yani her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N=N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyleki her $n, m \geq N$ ve her $z \in X$ için $d(x_n, x_m, z) < \varepsilon$ sağlanır (Naidu ve Prasad, 1986).

Tanım 2.1.19: (Tam 2-Metrik Uzay) (X, d) bir 2-metrik uzay olsun. Eğer X'deki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ise (X, d) 2-metrik uzayına bir tam 2-metrik uzay adı verilir (Naidu ve Prasad, 1986).

Uyarı 2.1.20: 2-metrik uzaylarda, metrik uzaylardan farklı olarak, yakınsak her dizinin bir Cauchy dizisi olması gerekmez (Naidu ve Prasad, 1986).

Örnek 2.1.21: $X = \left\{0,\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ olsun. Her x, y, z ∈ X için

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 1, & x \neq y \neq z \text{ ve } \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right\} \subseteq \{x, y, z\} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad ,(\forall\, n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanan $d: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü X üzerinde bir 2-metriktir. Ayrıca kolaylıkla görülebilirki, (X, d) 2-metrik uzayı bir tam 2-metrik uzaydır. Bu uzayda $\left\{\frac{1}{n}\right\} \subseteq X$ dizisi 0 noktasına yakınsar, fakat bu dizi bir Cauchy dizisi değildir (Naidu ve Prasad, 1986).

Tanım 2.1.22: (X, d) ve (Y, ρ) iki 2-metrik uzay, $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ bir fonksiyon ve x ∈ X olsun. Eğer her f(x) ∈ V 2-açık kümesi için f(U)⊆ V olacak şekilde bir x ∈ U 2-açık kümesi mevcut ise f fonksiyonuna x noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu her x ∈ X noktasında sürekli ise bu f fonksiyonuna X üzerinde süreklidir denir (Lahiri ve diğ., 2011).

Tanım 2.1.23: (X, d) ve (Y, ρ) iki 2-metrik uzay, $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ bir fonksiyon ve x ∈ X olsun. Eğer (X, d)'deki $x_n \to x$ koşulunu sağlayan her $\{x_n\}$ dizisi için (Y, ρ)'da $f(x_n) \to f(x)$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonuna x noktasında dizisel süreklidir denir.

Lemma 2.1.24: 2-metrik uzaylar arasındaki her sürekli fonksiyon dizisel süreklidir (Lahiri ve diğ., 2011).

Tanım 2.1.25: d, X üzerinde bir 2-metrik olmak üzere $d: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü X'de süreklidir denir :⇔ d herhangi iki değişkenine göre dizisel süreklidir (Naidu ve Prasad, 1986).

Uyarı 2.1.26: (X, d) bir 2-metrik uzay olsun. Eğer d dönüşümü X üzerinde sürekli ise bu uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir. Fakat bu ifadenin tersinin doğru olması gerekmez (Naidu ve Prasad, 1986).

Örnek 2.1.27: a = (1,0), b = (0,0), $a_n = \left(1+\frac{1}{n}, 0\right)$, $b_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, n = 1, 2, … olmak üzere $X = \{a\} \cup \{a_n \mid n=1, 2, \ldots\} \cup \{b\} \cup \{b_n \mid n=1, 2, \ldots\}$ olsun. Her x, y, z ∈ X için Δxyz, x, y ve z köşe noktaları olan üçgenin alanı olmak üzere d: $X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlasın.

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \{x, y, z\} = \{a_n, b_n, a\} \text{ veya } \{a_n, b_n, b\} \ (n \in \mathbb{N}) \\ & \text{veya } \{a_n, b_n, a_m\} \text{ veya } \{a_n, b_n, b_m\} \ (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n) \text{ ise} \\ \Delta xyz, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Buna göre (X, d) ikilisi bir tam 2-metrik uzaydır. Ayrıca (X, d) 2-metrik uzayındaki yakınsak her dizinin bir Cauchy dizisi olduğu fakat d dönüşümünün sürekli olmadığı görülür (Naidu ve Prasad, 1986).

2.2. 2-Metrik Uzaylarda Cantor Teoremi ve Baire Kategori Teoremi

Bu kısımda Lahiri ve diğ. (2011) tarafından 2-metrik uzaylarda incelenen Cantor Teoremi ve Baire Kategotami Teoremi verilecektir.

Notasyon 2.2.1: (X, d) bir 2-metrik uzay, $F \subseteq X$ ve $z \in X$ olmak üzere

$\delta_z(F) = \sup\{ d(x, y, z) \mid x, y \in F \}$

şeklinde tanımlansın. (X, d) sınırlı bir 2-metrik uzay ise her $F \subseteq X$ ve $z \in X$ için $\delta_z(F)$ değeri sonludur (Lahiri ve diğ., 2011).

Lemma 2.2.2: (X, d) bir 2-metrik uzay, $F \subseteq X$ ve $z \in X$ olsun. $\delta_z(F) = \delta_z(\bar{F})$ eşitliği sağlanmaktadır (Lahiri ve diğ., 2011).

İspat: $F \subseteq X$ ve $z \in X$ olsun. $F \subseteq \bar{F}$ olduğundan $\delta_z(F) \leq \delta_z(\bar{F})$ sağlanmaktadır. $\delta_z(F) \leq \delta_z(\bar{F})$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için $x, y \in \bar{F}$ olsun. Eğer $x, y \in F$ ise $d(x, y, z) \leq \delta_z(F)$ olduğu açıktır. Farzedelim ki $x \notin F$ ve $y \in F$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $x \in \bar{F}$ olduğundan ve $B_\varepsilon(x, y) \cap B_\varepsilon(x, z)$ 2-açık küme olup x noktasını içerdiğinden, $F \cap [B_\varepsilon(x, y) \cap B_\varepsilon(x, z)] \neq \emptyset$ dir. O halde $a \in F \cap [B_\varepsilon(x, y) \cap B_\varepsilon(x, z)]$ vardır. Buradan

$d(x, y, z) \leq d(x, y, a) + d(x, a, z) + d(a, y, z) < \delta_z(F) + 2\varepsilon$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik her $\varepsilon > 0$ için sağlandığından $x \in \bar{F}$ ve $y \in F$ için $d(x, y, z) \leq \delta_z(F)$ eşitsizliği elde edilir.

Son olarak, x, y $\in \bar{F} \setminus F$ için $d(x, y, z) \leq \delta_z(F)$ eşitsizliğinin sağlandığı benzer şekilde gösterilir. Bu durumda,

$\delta_z(\bar{F}) = \sup\{ d(x, y, z) \mid x, y \in \bar{F} \} \leq \delta_z(F)$

elde edilir. Dolayısıyla $\delta_z(F) = \delta_z(\bar{F})$ dir.

Teorem 2.2.3: (Tam 2-Metrik Uzaylar için Cantor Arakesit Teoremi) Bir (X, d) 2-metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul X'de boş olmayan 2-kapalı kümelerin $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ ve her $z \in X$ için $\delta_z(F_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ koşullarını sağlayan her $\{F_n\}$ dizisi için $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ arakesitinin tek noktalı olmasıdır (Lahiri ve diğ., 2011).

İspat: ($\Longrightarrow$) (X, d) tam 2-metrik uzay ve $\{F_n\}$, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ ve her $z \in X$ için $\delta_z(F_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ koşullarını sağlayan 2-kapalı kümelerin bir dizisi olsun. $\{F_n\} \neq \emptyset$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in F_n$ noktalarını seçelim. $\{x_n\}$ dizisinin (X, d) 2-metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\{F_n\}$ azalan bir dizi olduğundan her $m \geq n$ için $x_m \in F_n$ dir. Herhangi bir $z \in X$ için $m \geq n$ iken $d(x_n, x_m, z) \leq \delta_z(F_n)$ dir. $m, n \to \infty$ için $d(x_n, x_m, z) \leq \delta_z(F_n) \to 0$ elde edilir. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin (X, d) 2-metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. (X, d) tam olduğundan $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. Şimdi ise $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ olduğunu iddia ediyoruz. Varsayalım ki bazı k'lar için $x_k \neq x$ olsun. Eğer her k için $x_k = x$ olursa ispat tamamlanmış olur. $n \in \mathbb{N}$ sabit tutalım. $x \in G$ bir 2-açık küme olsun. $x_n \to x$ olduğundan her $k \geq n_1$ için $x_k \in G$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Bu durumda, her $k \geq \max\{n, n_1\}$ için $x_k \in F_n \cap (G \setminus \{x\})$ dir. Bu ise $x \in \overline{F_n}$ olduğunu ifade eder. F_n 2-kapalı olduğundan $x \in \overline{F_n} = F_n$ dir. Bu durum her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğundan $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ dir. Dolayısıyla $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ kümesi en az bir nokta içermektedir. Varsayalım ki $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ kümesi $x \neq y$ şeklinde birbirinden farklı iki nokta içersin. $z \in X$, $z \neq x, y$ olsun. $\delta_z(F_n)$ tanımından, her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x, y, z) \leq \delta_z(F_n)$ dir. $\delta_z(F_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ olduğundan $d(x, y, z) = 0$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ arakesiti tek noktalıdır.

($\Longleftarrow$) Tersine olarak, X'deki boş olmayan 2-kapalı kümelerin $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ ve her $z \in X$ için $\delta_z(F_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ koşullarını sağlayan her $\{F_n\}$ dizisi için $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ arakesiti tek noktalı olsun. $\{x_n\}$ dizisi (X, d) 2-metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun.

Her $n\in\mathbb{N}$ için $F_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ olsun. $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$ olduğu açıktır ve buradan $\overline{F_1} \supseteq \overline{F_2} \supseteq \dots \supseteq \overline{F_n} \supseteq \dots$ dır. Buradan $\{\overline{F_n}\}$'nin 2-kapalı kümelerin azalan bir dizisi olduğu görülmektedir. $z \in X$ ve keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_1$ iken $d(x_n,x_m,z) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Bu ise $\delta_z(F_{n_1}) \leq \varepsilon$ olduğunu gösteririr. Lemma 2.4.1'den $\delta_z(\overline{F_{n_1}}) \leq \varepsilon$ dır. $\{\overline{F_n}\}$ azalan olduğundan $n \geq n_1$ için $\delta_z(\overline{F_n}) \leq \delta_z(\overline{F_{n_1}}) \leq \varepsilon$ dır. Buradan $\delta_z(\overline{F_n}) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{0}$ olur. Hipotezden $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F_n}$ arakesiti tek noktalıdır. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F_n} = \{x_0\}$ diyelim. Bu durumda, $z \in X$ için

$$d(x_n, x_0, z) \leq \delta_z(\overline{F_n})$$

olur. $n \to \infty$ için

$$d(x_n, x_0, z) \leq \delta_z(\overline{F_n}) \to 0$$

olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin x_0 noktasına yakınsak olduğu görülür. Bu ise (X, d) 2-metrik uzayının tam olduğunu ispatlar.

Teorem 2.2.4: (2-Metrik Uzaylar için Baire Kategori Teoremi)

(*) Her $x, y \in X$ nokta çifti için x, y merkezli, her $z \in X$ için $\delta_z(B_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ olacak şekilde $\{B_n\}$ 2-kapalı yuvarların bir dizisi mevcuttur.

(*) koşulunu sağlayan tam (X, d) 2-metrik uzaylar, sayılabilir tane hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin birleşimi şeklinde yazılamaz (Lahiri ve diğ., 2011).

İspat: (X, d), (*) koşulunu sağlayan bir tam 2-metrik uzay olsun. Varsayalım ki, her $n \in \mathbb{N}$ için F_n hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme olmak üzere $X = \bigcup_{n\in N} F_n = \overline{F_n}$ şeklinde yazılsın. G bir 2-açık küme olsun. F_1 hiçbir yerde yoğun olmadığından $\overline{F_1}$, G'yi içermez. Bu durumda $x_1 \notin \overline{F_1}$ olacak şekilde bir $x_1 \in G$ vardır. $G \backslash \overline{F_1}$ 2-açık küme ve $x_1 \in G \backslash \overline{F_1}$ olduğundan Lemma 2.2.3'den

$$x_1 \in B_{r_1}(x_1, y_1) \cap B_{r_2}(x_1, y_2) \cap \dots \cap B_{r_n}(x_1, y_n) \subseteq G := H_1 \subseteq G \backslash \overline{F_1}$$

olacak şekilde sonlu sayıda $y_1, y_2, \dots, y_n \in X$, $r_1, r_2, \dots, r_n > 0$ mevcuttur.

(*) koşulu sağlandığından, genelliği bozmaksızın, her $z \in X$ için $\delta_z\left(B_{r_1}(x_1, y_1)\right) < 1$ olacak şekilde $B_{r_1}(x_1, y_1)$ kümesini seçelim. Buradan her $z \in X$ için $\delta_z(H_1) < 1$ olur.

$$U_1 = B_{r_{1/2}}(x_1, y_1) \cap B_{r_{2/2}}(x_1, y_2) \cap \ldots \cap B_{r_{n/2}}(x_1, y_n)$$

kümesini alalım. Bu durumda,

$$\overline{U_1} \subseteq B_{r_{1/2}}[x_1, y_1] \cap B_{r_{2/2}}[x_1, y_2] \cap \ldots \cap B_{r_{n/2}}[x_1, y_n] \subseteq H_1 \subseteq G \backslash \overline{F_1}$$

ve her $z \in X$ için $\delta_z(\overline{U_1}) < \delta_z(H_1) < 1$ elde edilir. Benzer şekilde U_1, 2-açık küme ve F_2, hiçbir yerde yoğun olmadığından $U_1 \backslash \overline{F_2} \neq \emptyset$ dir. Bu durumda $x_2 \in U_1 \backslash \overline{F_2}$ vardır. Benzer şekilde,

$$x_2 \in U_2 \subseteq \overline{U_2} \subseteq U_1 \backslash \overline{F_2}$$

olacak şekilde U_2 2-açık kümesi bulabiliriz ve her $z \in X$ için $\delta_z(\overline{U_2}) < \frac{1}{2}$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$ ve her $z \in X$ için $\delta_z(\overline{U_n}) < \frac{1}{n}$ olacak şekilde $\{\overline{U_n}\}$ 2-kapalı kümelerin bir dizisini elde ederiz. Yani $n \to \infty$ iken her $z \in X$ için $\delta_z(\overline{U_n}) \to 0$ dır. Teorem 2.4.2'den $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$ boştan farklıdır ve tek noktalıdır. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} = \{b\}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\overline{U_n} \cap \overline{F_n} = \emptyset$ olduğundan $b \notin \bigcup_{n \in N} F_n$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde ispat tamamlanmış olur.

2.3. 2-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda A_1-uzayı olan (X, d) 2-metrik uzaylar üzerinde çalışılacaktır.

Notasyon 2.3.1: (X, d) bir 2-metrik uzay ve $f:(X,d) \to (X,d)$ bir fonksiyon olsun. $t > 0$ için

$$S_t = \{\, x \in X \mid d(x, f(x), y) \leq t,\ \forall y \in X \,\}$$

olarak tanımlanır. Eğer x, f fonksiyonunun bir sabit noktası ise $x \in S_t$ olduğundan $S_t \neq \emptyset$ dır (Lahiri ve diğ., 2011).

Tanım 2.3.2: (X, d) bir 2-metrik uzay olsun. Bu takdirde,

$f:(X, d) \to (X, d)$ fonksiyonuna bir daraltma dönüşümü denir $:\Leftrightarrow$

(1) Her $x, y, z \in X$ ve $x \neq y \neq z$ için $d(f(x), f(y), z) < d(x, y, z)$

(2) $x = y$ veya $x = z$ veya $y = z$ ise $d(f(x), f(y), z) = 0$

sağlanır (Lahiri ve diğ., 2011).

Teorem 2.3.3: (X, d) 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \to (X, d)$ bir daraltma dönüşümü olsun. Bu durumda, her $t > 0$ için S_t kümesi 2-kapalıdır (Lahiri ve diğ., 2011).

İspat: (X, d) 2-metrik uzayı birinci sayılabilir T_1-uzayı olduğundan $t > 0$ için S_t kümesinin 2-kapalı olduğunu ispatlamak için bu kümeden yakınsak bir dizi alıp bu dizinin yakınsadığı noktanın bu kümeye ait olduğunu göstereceğiz. (X, d)'de $\{x_n\}$, $x \in X$ noktasına yakınsak bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ ve $y \in X$ verilsin. $B_\varepsilon(x, f(x)) \cap B_\varepsilon(x,y)$ 2-açık bir küme olup x noktasını içermektedir. $x_n \to x$ olduğundan $n \geq n_0$ iken $x_n \in B_\varepsilon(x, f(x)) \cap B_\varepsilon(x,y)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. f 'nin daraltma dönüşümü olduğu ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in S_t$ olduğu göz önüne alınırsa, her $n \geq n_0$ için

$$d(x, f(x), y) < d(x, f(x), x_n)+d(x, x_n, y)+d(x_n, f(x), y)$$

$$< 2\varepsilon+d(x_n, f(x), f(x_n))+d(x_n, f(x_n), y)+d(f(x_n), f(x), y)$$

$$< 2\varepsilon+d(x_n, x, x_n)+d(x_n, f(x_n), y)+d(x_n, x, y) < 2\varepsilon+t$$

olur. Bu ifade her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan $d(x, f(x), y) \leq t$ dir. Her $y \in X$ için doğru olduğundan $x \in S_t$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.3.4: (X, d) bir tam ve sınırlı 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \to (X, d)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y), z) \leq \alpha d(x, y, z)$$

ve x, y, z noktalarından ikisi birbirine eşit iken $d(f(x), f(y), z) = 0$ sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Lahiri ve diğ., 2011).

İspat: $x \in X$ olsun. x'in f fonksiyonu altında n-inci iterasyonu ile oluşturulan $\{f^n(x)\}$ dizisini ele alalım. (X, d) sınırlı olduğundan her $z \in X$ için

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x), z) \leq \alpha d(f^{n-1}(x), f^n(x), z) \leq \alpha^2 d(f^{n-2}(x), f^{n-1}(x), z)$$

$\leq \ldots \leq \alpha^n d(x, f(x), z) \leq \alpha^n k$

olacak şekilde bir $k > 0$ vardır. $\{t_n\}$, (X, d)'de azalan ve 0 noktasına yakınsayan bir dizi olmak üzere

$S_n = S_{t_n} = \{ s \mid d(s, f(s), z) \leq t_n, \forall z \in X \}$

kümesi boştan farklıdır. $0 < \alpha < 1$ olduğundan f bir daraltma dönüşümüdür. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için S_n 2-kapalı bir kümedir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $S_{n+1} \subseteq S_n$ dir. O halde $x, y \in S_n$ ve $z \in X$ için

$d(x, y, z) \leq d(x, y, f(x)) + d(x, f(x), z) + d(f(x), y, z)$

$\leq 2t_n + d(f(x), y, f(y)) + d(f(x), f(y), z) + d(f(y), y, z)$

$\leq 3t_n + \alpha d(x, y, y) + \alpha d(x, y, z) \leq 3t_n + \alpha d(x, y, z)$

elde edilir. Buradan

$d(x, y, z) \leq \frac{3t_n}{1-\alpha}$

elde edilir. Bu ise $\delta_z(S_n) \leq \frac{3t_n}{1-\alpha}$ anlamına gelir. Bu durumda $\delta_z(S_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ olur. Teorem 2.2.3'den $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ arakesiti tek noktalıdır. $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{x_0\}$ olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ ve $z \in X$ için $d(x_0, f(x_0), z) \leq t_n$ olur. Yani her $z \in X$ için $d(x_0, f(x_0), z) = 0$ dır. Bu ise $f(x_0) = x_0$ olmasını gerektiri. Yani x_0 noktası f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $z \in X$, $z \neq x$, $z \neq y$, noktası için

$d(x, y, z) = d(f(x), f(y), z) \leq \alpha d(x, y, z) < d(x, y, z)$

olur. Bu ise kabul ile çelişir. O halde f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.3.5: (X, d) bir sınırlı 2-metrik uzay olsun. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $f : (X, d) \to (X, d)$ fonksiyonu için

$d(f(x), f(y), z) \leq \alpha d(x, y, z) \quad (\forall\, x, y, z \in X)$

koşulu sağlansın. Bu durumda, $\{f^n(x)\}$ iterasyon dizisinin bir $x_0 \in X$ noktasına yakınsayan bir $\{f^{n_r}(x)\}$ alt dizisi mevcut ise x_0 noktası f fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır (Lahiri ve diğ., 2011).

İspat: $\{t_n\}$, (X, d)'de azalan ve 0 noktasına yakınsayan bir dizi olmak üzere

$$S_n = S_{t_n} = \{\, s \mid d(s, f(s), z) \leq t_n, \forall z \in X \,\}$$

kümesini ele alalım. Bu durumda, f bir daraltma dönüşümü ve (X, d) sınırlı olduğundan her $z \in X$ için

$$d\left(f^{n_r}(x), f^{n_r+1}(x), z\right) \leq \alpha d\left(f^{n_r-1}(x), f^{n_r}(x), z\right) \leq \alpha^2 d\left(f^{n_r-2}(x), f^{n_r-1}(x), z\right)$$

$$\leq \ \dots \ \leq \alpha^{n_r} d(x, f(x), z) \leq \alpha^{n_r} k$$

olacak şekilde bir $k > 0$ vardır. $0 < \alpha < 1$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için S_n kümesi boştan farklıdır. Ayrıca yeterince büyük r değerleri için S_n kümesi $f^{n_r}(x)$ noktasını içerir. $\varepsilon > 0$ olsun. $B_\varepsilon(x_0, f(x_0)) \cap B_\varepsilon(x_0, z)$ bir 2-açık küme olup x_0 noktasını içermektedir. $f^{n_r}(x) \to x_0$ olduğundan $r \geq r_0$ iken $f^{n_r}(x) \in B_\varepsilon(x_0, f(x_0)) \cap B_\varepsilon(x_0, z)$ olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. $n \in \mathbb{N}$ sabit tutalım ve $\alpha^{n_r} k < t_n$ olacak şekilde $r \geq r_0$ seçelim. Bu durumda, her $z \in X$ için

$$d(x_0, f(x_0), z) \leq d\left(x_0, f(x_0), f^{n_r}(x)\right) + d(x_0, f^{n_r}(x), z) + d(f^{n_r}(x), f(x_0), z)$$

$$\leq 2\varepsilon + d(f^{n_r}(x), f(x_0), z)$$

$$\leq 2\varepsilon + d\left(f^{n_r}(x), f(x_0), f^{n_r+1}(x)\right) + d\left(f^{n_r}(x), f^{n_r+1}(x), z\right) + d\left(f^{n_r+1}(x), f(x_0), z\right)$$

$$\leq 2\varepsilon + \alpha^{n_r} d(x, f(x_0), f(x)) + \alpha^{n_r} k + \alpha d(f^{n_r}(x), x_0, z)$$

$$< 2\varepsilon + \alpha^{n_r} \alpha d(x, x_0, x) + t_n + \alpha\varepsilon = t_n + (2+\alpha)\varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$d(x_0, f(x_0), z) \leq t_n, \ \ \forall z \in X$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$d(x_0, f(x_0), z) = 0, \ \forall z \in X$

olur. Bu ise $f(x_0) = x_0$ anlamına gelir. Yani x_0 noktası f fonksiyonunun sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliği yukarıdaki teoremin ispatına benzer şekilde görülür.

Teorem 2.3.6: X sayılamaz bir küme olmak üzere, (X, d) bir 2-metrik uzay, $f:(X, d) \to (X, d)$ bir daraltma dönüşümü ve $x \in X$ olsun. $\{f^n(x)\}$ iterasyon dizisinin bir $x_0 \in X$ noktasına yakınsayan bir $\{f^{n_r}(x)\}$ alt dizisi mevcut ise x_0 noktası f fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır (Lahiri ve diğ., 2011).

İspat: (X, d) bir 2-metrik uzay, $f:(X, d) \to (X, d)$ bir daraltma dönüşümü ve $x \in X$ olsun. $\{f^n(x)\}$ dizisinde bazı i'ler için $f^{i+1}(x)=f^i(x)$ ise bu durumda $x_0=f^i(x)$ noktası f fonksiyonunun sabit noktası olur. O halde her $i \in \mathbb{N}$ için $f^{i+1}(x) \neq f^i(x)$ olsun. Ayrıca $f(x_0) \neq x_0$ olsun. Aksi taktirde x_0 noktası f fonksiyonunun sabit noktası olur. x_0, $f(x_0)$ ve $f^i(x)$, $i=1, 2, \ldots$, noktalarından farklı bir $z \in X$ noktası seçelim. Buradan,

$$d\big(f(x_0), f^2(x_0), z\big) < d(x_0, f(x_0), z) \tag{2.1}$$

elde edilir. Negatif olmayan reel sayıların oluşturduğu $\big\{d\big(f^n(x), f^{n+1}(x), z\big)\big\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini ele alalım. İlk olarak $d(x_0, f(x_0), z)$ reel sayısının bu dizinin limiti olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ olsun. $B_{\varepsilon/3}(x_0, f(x_0)) \cap B_{\varepsilon/3}(x_0, z)$ bir 2-açık küme olup x_0 noktasını içermektedir. $f^{n_r}(x) \to x_0$ olduğundan $r \geq r_0$ iken $f^{n_r}(x) \in B_\varepsilon(x_0, f(x_0)) \cap B_\varepsilon(x_0, z)$ olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. $r > r_0$ seçelim. Bu durumda, her $z \in X$ için

$$d(x_0, f(x_0), z) \leq d\big(x_0, f(x_0), f^{n_r}(x)\big) + d(x_0, f^{n_r}(x), z) + d(f^{n_r}(x), f(x_0), z)$$

$$< \tfrac{2}{3}\varepsilon + d(f^{n_r}(x), f(x_0), z)$$

$$\leq \tfrac{2}{3}\varepsilon + d\left(f^{n_r}(x), f(x_0), f^{n_r+1}(x)\right) + d\big(f^{n_r}(x), f^{n_r+1}(x), z\big) + d\big(f^{n_r+1}(x), f(x_0), z\big)$$

$$< \tfrac{2}{3}\varepsilon + d\big(f^{n_r}(x), x_0, f^{n_r}(x)\big) + d\big(f^{n_r}(x), f^{n_r+1}(x), z\big) + d(f^{n_r}(x), x_0, z)$$

$$< \varepsilon + d\big(f^{n_r}(x), f^{n_r+1}(x), z\big) \tag{2.2}$$

olur. Benzer şekilde, yeterince büyük r için

$$d\left(f^{n_r}(x), f^{n_r+1}(x), z\right) < \varepsilon + d(x_0, f(x_0), z) \tag{2.3}$$

olduğu gösterilebilir. Eşitsizlik (2.2) ve (2.3) den

$$\left|d\left(f^{n_r}(x), f^{n_r+1}(x), z\right) - d(x_0, f(x_0), z)\right| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lim_{r\to\infty} d\left(f^{n_r}(x), f^{n_r+1}(x), z\right) = d(x_0, f(x_0), z)$$

elde edilir. Dikkat edilirse, sabit bir n_r için $n > n_r+1$ iken

$$d\left(f^{n}(x), f^{n+1}(x), z\right) < d\left(f^{n_r+1}(x), f^{n_r+2}(x), z\right)$$

sağlanmaktadır. Bu durumda, $d(x_0, f(x_0), z)$ limit noktası $n > n_r+1$ iken

$$d(x_0, f(x_0), z) \le d\left(f^{n_r+1}(x), f^{n_r+2}(x), z\right) \tag{2.4}$$

eşitsizliğini sağlamaktadır. Bu durum her $r \in \mathbb{N}$ için doğru olduğundan $r > r_0$ iken

$$d\left(f^{n_r+1}(x), f^{n_r+2}(x), z\right) \le d\left(f^{n_r+1}(x), f^{n_r+2}(x), f(x_0)\right) + d\left(f^{n_r+1}(x), f(x_0), z\right)$$

$$+ d\left(f(x_0), f^{n_r+2}(x), z\right) < d\left(f^{n_r+1}(x), f^{n_r+1}(x), x_0\right) + d(f^{n_r}(x), x_0, z)$$

$$+ d\left(f(x_0), f^{n_r+2}(x), z\right) < d(f^{n_r}(x), x_0, z) + d\left(f(x_0), f^{n_r+2}(x), f^{2}(x_0)\right)$$

$$+ d\left(f(x_0), f^{2}(x_0), z\right) + d\left(f^{2}(x_0), f^{n_r+2}(x), z\right)$$

$$< d(f^{n_r}(x), x_0, z) + d\left(f(x_0), f^{n_r+1}(x), f(x_0)\right) + d\left(f(x_0), f^{2}(x_0), z\right)$$

$$+ d(x_0, f^{n_r}(x), z) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + d\left(f(x_0), f^{2}(x_0), z\right) < \varepsilon + d\left(f(x_0), f^{2}(x_0), z\right) \tag{2.5}$$

olur. Eşitsizlik (2.4) ve (2.5) den

$$d(x_0, f(x_0), z) < \varepsilon + d\left(f(x_0), f^{2}(x_0), z\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$d(x_0, f(x_0), z) \leq d\big(f(x_0), f^2(x_0), z\big)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise Eşitsizlik (2.1) ile çelişmektedir. Bu durumda $f(x_0) = x_0$ veya bazı i'ler için $f^{i+1}(x) = f^{i}(x)$ olmalıdır. O halde f fonksiyonunun sabit noktası vardır. Sabit noktanın tekliği yukarıdaki teoremin ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 2.3.7: (X, d) bir tam 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \to (X, d)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y), z) \leq \alpha\, \big(d(x, f(x), z)+d(y, f(y), z)\big)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Singh ve diğ., 2016).

İspat: $\{t_n\}$, (X, d)'de azalan ve 0 noktasına yakınsayan bir dizi iken

$$S_n = S_{t_n} = \{\, s \mid d(s, f(s), z) \leq t_n,\ \forall z \in X \,\}$$

kümesini ele alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $S_{n+1} \subseteq S_n$ olduğu açıktır. Ayrıca f fonksiyonu sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için S_n kümesi 2-kapalıdır. $z \in X$ için $\delta_z(S_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ olduğunu gösterelim. Herhangi $x, y \in S_n$ noktaları için

$$d(x, y, z) \leq d\big(x, y, f(x)\big) + d(x, f(x), z) + d(f(x), y, z)$$

$$\leq 2t_n + d(f(x), y, z)$$

$$\leq 2t_n + d\big(f(x), y, f(y)\big) + d(f(x), f(y), z) + d(f(y), y, z)$$

$$\leq 4t_n + \alpha\, \big(d(x, f(x), z) + d(y, f(y), z)\big) \leq 4t_n + 2\alpha t_n = (4+2\alpha)t_n$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(x, y, z) \leq (4+2\alpha)t_n \to 0$ olur. Dolayısıyla $\delta_z(S_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ dır. Bu durumda $\{S_n\}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $S_{n+1} \subseteq S_n$ ve her $z \in X$ için $\delta_z(S_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ olacak şekildeki 2-kapalı kümelerin bir dizisi olur. Dolayısıyla $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ arakesiti bir tek noktalıdır. $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{x_0\}$ olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ ve $z \in X$ için $d(x_0, f(x_0), z) \leq t_n$ dir. Buradan her $z \in X$ için $d(x_0, f(x_0), z) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $f(x_0) = x_0$ dır. Yani x_0 noktası f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $z \in X$, $z \neq x$, $z \neq y$ noktası için

$$d(x, y, z) = d(f(x), f(y), z) \leq \alpha \left(d(x, f(x), z)+d(y, f(y), z)\right)$$

$$\leq \alpha \left(d(x, x, z)+d(y, y, z)\right)=0$$

elde edilir. Bu ise $d(x, y, z) = 0$ olduğu anlamına gelir. O halde f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.3.8: (X, d) bir tam 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \rightarrow (X, d)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y), z) \leq \alpha \left(d(x, f(y), z) + d(y, f(x), z)\right) \tag{2.6}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Singh ve diğ., 2016).

İspat: $\{t_n\}$, (X, d)'de azalan ve 0 noktasına yakınsayan bir dizi iken

$$S_n = S_{t_n} = \{ s \mid d(s, f(s), z) \leq t_n, \forall z \in X \}$$

kümesini ele alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $S_{n+1} \subseteq S_n$ olduğu açıktır. Ayrıca f fonksiyonu sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için S_n kümesi 2-kapalıdır. $z \in X$ için $\delta_z(S_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ olduğunu gösterelim. Herhangi $x, y \in S_n$ noktaları için

$$d(x, y, z) \leq d\left(x, y, f(x)\right) + d(x, f(x), z) + d(f(x), y, z)$$

$$\leq 2t_n + d(f(x), y, z)$$

$$\leq 2t_n + d\left(f(x), y, f(y)\right) + d(f(x), f(y), z) + d(f(y), y, z)$$

$$\leq 4t_n + \alpha\left(d(x, f(y), z) + d(y, f(x), z)\right) \tag{2.7}$$

elde edilir.

Birinci adım :

Eşitsizlik (2.6) ve (2.7) den

$$d(x, y, z) \leq 4t_n + \alpha\Big(d\big(x, f(y), f(x)\big)+d(x, f(x), z)+d(f(x), f(y), z)\Big)$$

$$+ \alpha\Big(d\big(y, f(x), f(y)\big) + d(y, f(y), z) + d(f(y), f(x), z)\Big)$$

$$\leq 4t_n + 4\alpha t_n + 2\alpha d(f(x), f(y), z)$$

$$\leq 4t_n + 4\alpha t_n + 2\alpha^2 \big(d(x, f(y), z) + d(y, f(x), z)\big) \tag{2.8}$$

elde edilir.

İkinci adım :

Eşitsizlik (2.6) ve (2.8) den

$$d(x, y, z) \leq 4t_n+4\alpha t_n+2\alpha^2 \Big(d\big(x, f(y), f(x)\big)+d(x, f(x), z)+d(f(x), f(y), z)\Big)$$

$$+2\alpha^2 \Big(d\big(y, f(x), f(y)\big) + d(y, f(y), z) + d(f(y), f(x), z)\Big)$$

$$\leq 4t_n+4\alpha t_n+8\alpha^2 t_n+4\alpha^2 d(f(x), f(y), z)$$

$$\leq 4t_n+4\alpha t_n+8\alpha^2 t_n+4\alpha^3 \big(d(x, f(y), z)+d(y, f(x), z)\big) \tag{2.9}$$

elde edilir.

Üçüncü adım :

Eşitsizlik (2.6) ve (2.9) dan

$$d(x, y, z) \leq 4t_n + 4\alpha t_n + 8\alpha^2 t_n + 4\alpha^3(d\big(x, f(y), f(x)\big) + d(x, f(x), z)$$

$$+ d(f(x), f(y), z)) + 4\alpha^3\big(d(y, f(x), z) + d(y, f(x), z) + d(y, f(x), z)\big)$$

$$\leq 4t_n + 4\alpha t_n + 8\alpha^2 t_n + 16\alpha^3 t_n + 8\alpha^3 d(f(x), f(y), z)$$

$$\leq 4t_n + 4\alpha t_n \left(1+2\alpha+(2\alpha)^2\right) + 8\alpha^4\big(d(x, f(y), z) + d(y, f(x), z)\big) \tag{2.10}$$

elde edilir.

Dördüncü adım :

Eşitsizlik (2.6) ve (2.10) dan

$$d(x, y, z) \leq 4t_n + 4\alpha t_n\left(1+2\alpha+(2\alpha)^2\right) + 8\alpha^4(d\left(x, f(y), f(x)\right) + d(x, f(x), z)$$

$$+ d(f(x), f(y), z)) + 8\alpha^4\left(d\left(y, f(x), f(y)\right) + d(y, f(y), z) + d(f(y), f(x), z)\right)$$

$$\leq 4t_n + 4\alpha t_n\left(1+2\alpha+(2\alpha)^2\right) + 32\alpha^4 t_n + 16\alpha^4 d(f(x), f(y), z)$$

$$\leq 4t_n + 4\alpha t_n\left(1+2\alpha+(2\alpha)^2+(2\alpha)^3\right) + 16\alpha^4\left(d(x, f(y), z) + d(y, f(x), z)\right) \tag{2.11}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse n. adımda

$$d(x, y, z) \leq 4t_n + 4\alpha t_n\left(1 + 2\alpha + (2\alpha)^2 + \cdots + (2\alpha)^{n-1}\right)$$

$$+ 2^n\alpha^{n+1}\left(d(x, f(y), z) + d(y, f(x), z)\right)$$

$$\leq 4t_n + 4\alpha t_n\left(1+2\alpha+(2\alpha)^2+\ldots+(2\alpha)^{n-1}+\ldots\right)$$

$$+ 2^n\alpha^{n+1}\left(d(x, f(y), z) + d(y, f(x), z)\right)$$

$$= 4t_n + \frac{4\alpha t_n}{1-2\alpha} + 2^n\alpha^{n+1}\left(d(x, f(y), z) + d(y, f(x), z)\right)$$

$$= \left(4+\frac{4\alpha}{1-2\alpha}\right)t_n + 2^n\alpha^{n+1}\left(d(x, f(y), z) + d(y, f(x), z)\right) \tag{2.12}$$

elde edilir. $\alpha < \frac{1}{2}$ ve $\{t_n\}$ azalan olduğundan $d(x, y, z) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ dır. Dolayısıyla $\delta_z(S_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ dır. Bu durumda $\{S_n\}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $S_{n+1} \subseteq S_n$ ve her $z \in X$ için $\delta_z(S_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ olacak şekildeki 2-kapalı kümelerin bir dizisi olur. Ohalde, Teorem 2.2.3'den $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ arakesiti tek noktalıdır. $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{x_0\}$ olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ ve $z \in X$ için $d(x_0, f(x_0), z) \leq t_n$ dir. Buradan her $z \in X$ için $d(x_0, f(x_0), z) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $f(x_0) = x_0$ dır. Yani x_0 noktası f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $z \in X$ $(z \neq x, z \neq y)$ noktası için

$$d(x, y, z) = d(f(x), f(y), z) \leq \alpha \left(d(x, f(y), z) + d(y, f(x), z)\right)$$

$$= \alpha \left(d(x, y, z) + d(y, x, z)\right) = 2\alpha d(x, y, z)$$

$$\Longrightarrow d(x, y, z) \leq 2\alpha d(x, y, z) \Longrightarrow (1\text{-}2\alpha)d(x, y, z) \leq 0$$

olur. Bu ise $d(x, y, z) = 0$ olduğu anlamına gelir. O halde f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.3.9: (X, d) bir tam 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \rightarrow (X, d)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için α, β, γ negatif olmayan ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ koşulunu sağlayan reel sayılar olmak üzere

$$d(f(x), f(y), z) \leq \alpha d(x, y, z) + \beta d(x, f(y), z) + \gamma d(y, f(x), z) \qquad (2.13)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Singh ve diğ., 2016).

Uyarı 2.3.10: Teorem 2.3.9'da $\beta = \gamma = 0$ olması halinde bu teorem, Teorem 2.3.4 ile çakışır.

Teorem 2.3.9'da $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.11: (X, d) bir tam 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \rightarrow (X, d)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için β, γ negatif olmayan ve $\beta + \gamma < 1$ koşulunu sağlayan reel sayılar olmak üzere

$$d(f(x), f(y), z) \leq \beta d(x, f(y), z) + \gamma d(y, f(x), z)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Singh ve diğ., 2016).

Teorem 2.3.9'da $\beta = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.12: (X, d) bir tam 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \rightarrow (X, d)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için α, γ negatif olmayan ve $\alpha + \gamma < 1$ koşulunu sağlayan reel sayılar olmak üzere

$$d(f(x), f(y), z) \leq \alpha d(x, y, z) + \gamma d(y, f(x), z)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Singh ve diğ., 2016).

Teorem 2.3.9'da $\gamma = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.13: (X, d) bir tam 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \rightarrow (X, d)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için α, β negatif olmayan ve $\alpha + \beta < 1$ koşulunu sağlayan reel sayılar olmak üzere

$$d(f(x), f(y), z) \leq \alpha d(x, y, z) + \beta d(x, f(y), z)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Singh ve diğ., 2016).

Teorem 2.3.14: (X, d) bir tam 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \rightarrow (X, d)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için α, β, γ negatif olmayan ve $2\alpha + \beta + 2\gamma < 1$ koşulunu sağlayan reel sayılar olmak üzere

$$d(f(x),f(y),z) \leq \alpha\left(d(x,f(x),z)+d(y,f(y),z)\right) + \beta d(x,y,z) + \gamma \max\{d(x,f(y),z), d(y,f(x), z)\} \quad (2.14)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Saha ve Dey, 2009).

İspat: $x_0 \in X$ olsun. $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0,1, \dots$, şeklinde oluşturulan $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. Eşitsizlik (2.14) dan, her $z \in X$ için

$$d(x_2, x_1, z) = d(f(x_1), f(x_0), z) \leq \alpha\big(d(x_1, f(x_1), z) + d(x_0, f(x_0), z)\big)$$

$$+ \ \beta d(x_1, x_0, z) \ + \ \gamma \max\{d(x_1, f(x_0), z), d(x_0, f(x_1), z)\}$$

$$= \alpha\left(d(x_1, x_2, z) + d(x_0, x_1, z)\right) + \beta d(x_1, x_0, z) + \gamma \max\{d(x_1, x_1, z), d(x_0, x_2, z)\}$$

$= \alpha d(x_2, x_1, z) + (\alpha+\beta)d(x_1, x_0, z)+ \gamma d(x_2, x_0, z)$

$$\Longrightarrow (1-\alpha)d(x_2, x_1, z) \leq (\alpha+\beta)d(x_1, x_0, z)+ \gamma d(x_2, x_0, z) \tag{2.15}$$

elde edilir. Ayrıca d bir 2-metrik olduğundan Koşul (iv) den

$d(x_2, x_0, z) \leq d(x_2, x_0, x_1) + d(x_2, x_1, z) + d(x_1, x_0, z)$

$$=d(x_2, x_1, x_0) + d(x_2, x_1, z) + d(x_1, x_0, z) \tag{2.16}$$

olur. Eşitsizlik (2.15) ve (2.16) den

$(1-\alpha)d(x_2, x_1, z) \leq (\alpha+\beta)d(x_1, x_0, z)+\gamma\ (d(x_2, x_1, x_0)+d(x_2, x_1, z)+d(x_1, x_0, z)\ )$

$$\Longrightarrow (1-\alpha-\gamma)d(x_2, x_1, z) \leq (\alpha+\beta+\gamma)d(x_1, x_0, z)+\gamma d(x_2, x_1, x_0) \tag{2.17}$$

elde edilir. Tekrar Eşitsizlik (2.14) kullanırsa

$d(x_2, x_1, x_0) = d\big(f(x_1), f(x_0), x_0\big) \leq \alpha\big(d(x_1, f(x_1), x_0)+d(x_0, f(x_0), x_0)\big)+\beta d(x_1, x_0, x_0)$

$+\ \gamma \max\{d(x_1, f(x_0), x_0), d(x_0, f(x_1), x_0)\} = \alpha d(x_2, x_1, x_0)$

$\Longrightarrow (1-\alpha)d(x_2, x_1, x_0) \leq 0 \Longrightarrow d(x_2, x_1, x_0)=0$

elde edilir. O halde Eşitsizlik (2.17) den

$(1-\alpha-\gamma)d(x_2, x_1, z) \leq (\alpha+\beta+\gamma)d(x_1, x_0, z)$

$$\Longrightarrow d(x_2, x_1, z) \leq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\alpha-\gamma)} d(x_1, x_0, z)$$

elde edilir. O halde

$$d(x_n, x_{n+1}, z) \leq \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\alpha-\gamma}\right)^n d(x_1, x_0, z)$$

eşitsizliği sağlanır. $h = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\alpha-\gamma}$ alınırsa,

$$d(x_n, x_{n+1}, z) \leq h^n d(x_1, x_0, z) \tag{2.18}$$

olur. $2\alpha+\beta+2\gamma<1$ olduğundan $\alpha+\beta+\gamma<1-\alpha-\gamma$ olur. Yani $h<1$ dir. d bir 2-metrik olduğundan Koşul (iv) den,

$$d(x_n, x_{n+2}, z) = d(x_{n+2}, x_n, z) \leq d(x_{n+2}, x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+2}, x_{n+1}, z) + d(x_{n+1}, x_n, z)$$

$$= d(x_{n+2}, x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}, z) + d(x_{n+1}, x_n, z)$$

$$= d(x_{n+2}, x_{n+1}, x_n) + \sum_{k=0}^{1} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}, z)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$d(x_n, x_{n+3}, z) = d(x_{n+3}, x_n, z) \leq d(x_{n+3}, x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+3}, x_{n+1}, z) + d(x_{n+1}, x_n, z)$$

$$\leq d(x_{n+3}, x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, x_n, z) + d(x_{n+3}, x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+3}, x_{n+2}, z)$$

$$+ d(x_{n+2}, x_{n+1}, z) = \sum_{k=0}^{1} d(x_{n+3}, x_{n+k+1}, x_{n+k}) + \sum_{k=0}^{2} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}, z)$$

sağlanır. O halde $p>0$ için

$$d(x_n, x_{n+p}, z) \leq \sum_{k=0}^{p-2} d(x_{n+p}, x_{n+k+1}, x_{n+k}) + \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}, z)$$

elde edilir. Eşitsizlik (2.18) den

$$d(x_n, x_{n+p}, z) \leq \frac{h^n}{1-h}\Big(d(x_{n+p}, x_0, x_1) + d(x_0, x_1, z)\Big) \tag{2.19}$$

elde edilir. Ayrıca Eşitsizlik (2.18) den

$$d(x_{n+p-1}, x_{n+p}, x_0) \leq h^{n+p-1} d(x_0, x_1, x_0) = 0$$

olur. Tekrar Eşitsizlik (2.14) kullanılırsa,

$$d(x_{n+p}, x_0, x_1) = d(x_{n+p}, x_1, x_0) = d\left(f(x_{n+p-1}), f(x_0), x_0\right)$$

$$\leq \alpha\Big(d\big(x_{n+p-1}, f(x_{n+p-1}), x_0\big) + d(x_0, f(x_0), x_0)\Big) + \beta d(x_{n+p-1}, x_0, x_0)$$

$$+\gamma \max\{d(x_{n+p-1}, f(x_0), x_0), d(x_0, f(x), x_0)\}$$

$$= \alpha d(x_{n+p-1}, x_{n+p}, x_0) + \gamma d(x_{n+p-1}, x_1, x_0) = \gamma d(x_{n+p-1}, x_1, x_0)$$

$$\Rightarrow d(x_{n+p}, x_1, x_0) \leq \gamma d(x_{n+p-1}, x_1, x_0) \leq \gamma^2 d(x_{n+p-2}, x_1, x_0) \leq \cdots \leq \gamma^p d(x_n, x_1, x_0)$$

$$\leq \gamma^{p+1} d(x_{n-1}, x_1, x_0) \leq \ldots \leq \gamma^{p+n} d(x_0, x_1, x_0) = 0$$

$$\Rightarrow d(x_{n+p-1}, x_{n+p}, x_0) = 0$$

elde edilir. O halde, Eşitsizlik (2.19) dan

$$d(x_n, x_{n+p}, z) \leq \frac{h^n}{1-h} d(x_0, x_1, z)$$

olur. Buradan $n \to \infty$ için limit alınırsa $z \in X$ için $d(x_n, x_{n+p}, z) \to 0$ olur. O halde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam olduğundan $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. Şimdi ise x noktasının f fonksiyonunun sabit noktası olduğunu göstereceğiz. Bunun için Eşitsizlik (2.14) kullanılırsa

$$d(x_{n+1}, f(x), z) = d(f(x_n), f(x), z) \leq \alpha\big(d(x_n, f(x_n), z) + d(x, f(x), z)\big)$$

$$+ \beta d(x_n, x, z) + \gamma \max\{d(x_n, f(x), z), d(x, f(x_n), z)\}$$

elde edilir. Buradan, $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(x, f(x), z) = \alpha\big(d(x, x, z) + d(x, f(x), z)\big) + \beta d(x, x, z)$$

$$+ \gamma \max\{d(x, f(x), z), d(x, x, z)\} = (\alpha+\gamma) d(x, f(x), z)$$

$$\Rightarrow (1-\alpha-\gamma) d(x, f(x), z) \leq 0$$

olur. Bu ise $d(x, f(x), z) = 0$ olduğu anlamına gelir. Her $z \in X$ için $d(x, f(x), z) = 0$ olduğundan $f(x) = x$ dir. O halde x noktası f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $z \in X$ $(z \neq x,\ z \neq y)$ noktası için

$$d(x, y, z) = d(f(x), f(y), z) \leq \alpha\,\big(d(x, f(x), z) + d(y, f(y), z)\big) + \beta d(x, y, z)$$

$$+ \gamma \max\{d(x, f(y), z), d(y, f(x), z) = \alpha\,\big(d(x, x, z) + d(y, y, z)\big) + \beta d(x, y, z)$$

$$+ \gamma \max\{d(x, y, z), d(y, x, z) = (\beta+\gamma) d(x, y, z)$$

$\Rightarrow (1\text{-}\beta\text{-}\gamma)d(x, y, z) \leq 0$

elde edilir. Bu ise $d(x, y, z) = 0$ olduğu anlamına gelir. O halde f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 2.3.15: (X, d) bir 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \rightarrow (X, d)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $z \in X$ için

$$d(f^n(x), y, z) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow d\big(f\big(f^n(x)\big), f(y), z\big) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

sağlanıyor ise f dönüşümüne yörüngesel sürekli adı verilir (Iseki, 1976).

Iseki (1976) metrik uzaylar için sağlanan Ciric tarafından verilen sabit nokta teoremini 2-metrik uzaylarda için aşağıdaki şekilde ifade etmiştir.

Teorem 2.3.16: (X, d) bir tam ve sınırlı 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \rightarrow (X, d)$ bir yörüngesel sürekli dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için $0 < q < 1$ olmak üzere f dönüşümü

$$\min\{d(f(x), f(y), z), d(x, f(x), z), d(y, f(y), z)\} - \min\{d(x, f(y), z), d(y, f(x), z)\} \leq q d(x, y, z)$$

eşitsizliğini sağlanıyor ise her $x \in X$ için $\{f^n(x)\}$ dizisi f fonksiyonunun sabit noktasına yakınsar (Iseki, 1976).

Iseki tarafından verilen yukarıdaki teoremin bir genellemesi olan aşağıdaki teorem Khan (1980) tarafından verilmiştir.

Teorem 2.3.17: (X, d) bir tam ve sınırlı 2-metrik uzay ve $f:(X, d) \rightarrow (X, d)$ bir yörüngesel sürekli dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 > \beta$, $\beta - \alpha_2 \geq 0$, $\beta - \alpha_3 \geq 0$ koşullarını sağlayan reel sayılar olmak üzere f dönüşümü

$$\alpha_1 d(f(x), f(y), z) + \alpha_2 d(x, f(x), z) + \alpha_3 d(y, f(y), z)$$

$$-\min\{d(x, f(y), z), d(y, f(x), z)\} \leq \beta d(x, y, z) \tag{2.20}$$

eşitsizliğini sağlanıyor ise her $x \in X$ için $\{f^n(x)\}$ dizisi f fonksiyonunun sabit noktasına yakınsar (Khan, 1980).

İspat: $x_0 \in X$ olsun. $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0,1, \ldots$ şeklinde oluşturulan $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n+1}$ ise $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu açıktır ve bu durumda $\{x_n\}$ dizisi f fonksiyonunun sabit noktasına yakınsar. Her $n = 0,1, \ldots$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Eşitsizlik (2.30) da $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ yazılırsa,

$$\alpha_1 d(f(x_{n-1}), f(x_n), z) + \alpha_2 d(x_{n-1}, f(x_{n-1}), z) + \alpha_3 d(x_n, f(x_n), z)$$

$$-\min\{d(x_{n-1}, f(x_n), z), d(x_n, f(x_{n-1}), z)\} \leq \beta d(x_{n-1}, x_n, z)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 d(x_n, x_{n+1}, z) + \alpha_2 d(x_{n-1}, x_n, z) + \alpha_3 d(x_n, x_{n+1}, z)$$

$$-\min\{d(x_{n-1}, x_{n+1}, z), d(x_n, x_n, z)\} \leq \beta d(x_{n-1}, x_n, z)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_3) d(x_n, x_{n+1}, z) \leq (\beta - \alpha_2) d(x_{n-1}, x_n, z)$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n+1}, z) \leq \left(\frac{\beta - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_3}\right) d(x_{n-1}, x_n, z)$$

eşitsizliği elde edilir. $q = \frac{\beta - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_3} < 1$ alınırsa,

$$d(x_n, x_{n+1}, z) \leq q d(x_{n-1}, x_n, z)$$

olur. Bu şekilde devam edilirse,

$$d(x_n, x_{n+1}, z) \leq q^n d(x_0, x_1, z) \tag{2.21}$$

eşitsizliği elde edilir. d bir 2-metrik olduğundan Koşul (2M4) den

$$d(x_n, x_{n+2}, z) \leq d(x_n, x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}, z) + d(x_{n+1}, x_{n+2}, z)$$

$$= d(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) + \sum_{r=0}^{1} d(x_{n+r}, x_{n+r+1}, z) \tag{2.22}$$

elde edilir. Ayrıca Eşitsizlik (2.30) da $x = x_n$, $y = x_{n+1}$, $z = x_n$ yazılırsa,

$$\alpha_1 d(f(x_n), f(x_{n+1}), x_n) + \alpha_2 d(x_n, f(x_n), x_n) + \alpha_3 d(x_{n+1}, f(x_{n+1}), x_n)$$

$$-\min\{d(x_n, f(x_{n+1}), x_n), d(x_{n+1}, f(x_n), x_n)\} \leq \beta d(x_n, x_{n+1}, x_n)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 d(x_{n+1}, x_{n+2}, x_n) + \alpha_2 d(x_n, x_{n+1}, x_n) + \alpha_3 d(x_{n+1}, x_{n+2}, x_n)$$

$-\min\{d(x_n, x_{n+2}, x_n), d(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n)\} \leq \beta d(x_n, x_{n+1}, x_n)$

$\Longrightarrow (\alpha_1+\alpha_3)d(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \leq 0$

elde edilir. $\alpha_1+\alpha_3>0$ olduğundan $d(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0$ olur. Bu durumda, Eşitsizlik (2.22) den

$$d(x_n, x_{n+2}, z) \leq \sum_{r=0}^{1} d(x_{n+r}, x_{n+r+1}, z)$$

elde edilir. Benzer işlem tekrarlanırsa,

$$d(x_n, x_{n+3}, z) \leq \sum_{r=0}^{1} d(x_{n+3}, x_{n+r}, x_{n+r+1}) + \sum_{r=0}^{2} d(x_{n+r}, x_{n+r+1}, z) \quad (2.23)$$

elde edilir. Yine $d(x_{n+3}, x_n, x_{n+1}) = 0$ ve $d(x_{n+3}, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0$ olduğu benzer işlemlerle gösterilir. Bu durumda, Eşitsizlik (2.23) den

$$d(x_n, x_{n+3}, z) \leq \sum_{r=0}^{2} d(x_{n+r}, x_{n+r+1}, z)$$

elde edilir. Benzer işlem tekrarlanırsa $p > 0$ için

$$d(x_n, x_{n+p}, z) \leq \sum_{r=0}^{p-1} d(x_{n+r}, x_{n+r+1}, z)$$

elde edilir. O halde, $p > 0$ için Eşitsizlik (2.21) den

$$d(x_n, x_{n+p}, z) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1, z)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $q \in [0, 1)$ olduğundan $d(x_n, x_{n+p}, z) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1, z) \to 0$ olur. O halde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam 2-metrik uzay olduğundan $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Bu durumda, her $z \in X$ için $d(f^n(x_0), x, z) \to 0$ dır. f yörüngesel sürekli olduğundan $d(f(f^n(x_0)), f(x), z) \to 0$ dir. Bu durumda $f(x) = x$ olur. Yani x noktası f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

3. BULANIK 2-METRİK UZAYLAR

Bu bölümde Sharma tarafından 2002 yılında tanımlanan bulanık 2-metrik kavramı tanıtılacaktır ve temel özellikleri ile birlikte incelenecektir. Daha sonra, Das ve Saha (2013, 2016), Yadav ve Thakur (2013) tarafından bulanık 2-metrik uzaylarda elde edilen bazı sabit nokta teoremleri verilecektir.

3.1. Bulanık 2-Metrik Uzay Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 3.1.1: X boştan farklı bir küme ve $*$ sürekli bir t-norm olsun. $M : X\times X\times X\times[0,\infty)\rightarrow[0, 1]$ dönüşümüne X üzerinde bir bulanık 2-metrik denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y, z, u \in X$ ve $t_1, t_2, t_3 > 0$ için aşağıdaki koşullar sağlanır.

(BM1) $M(x, y, z, 0) = 0$.

(BM2) x, y, z noktalarından en az ikisi birbirine eşit ise her $t > 0$ için $M(x, y, z, t) = 1$.

(BM3) $M(x, y, z, t) = M(x, z, y, t) = M(y, z, x, t)$.

(BM4) $M(x, y, u, t_1) * M(x, u, z, t_2) * M(u, y, z, t_3) \leq M(x, y, z, t_1+t_2+t_3)$.

(BM5) $M(x, y, z, \cdot) : [0,\infty)\rightarrow[0,1]$ soldan süreklidir.

Bu durumda $(X, M, *)$ üçlüsüne bulanık 2-metrik uzay adı verilir. Buradaki $M(x, y, z, t)$ değeri köşe noktaları x, y, z olan üçgenin alanının t'den küçük olma olasılığı olarak düşünülebilir (Sharma, 2002).

Örnek 3.1.2: d, X üzerinde bir 2-metrik ve $a * b = ab$ olmak üzere $M_d : X\times X\times X\times[0,\infty)\rightarrow[0, 1]$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$M_d(x, y, z, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + d(x, y, z)}, & t > 0 \text{ ise} \\ 0, & t = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Kolaylıkla görülmektedir ki, M_d dönüşümü X üzerinde bir bulanık 2-metriktir. Yani her 2-metrik yardımıyla bir bulanık 2-metrik üretilir. Bu şekilde üretilen bulanık 2-metriğe, d 2-metriği tarafından üretilen standart bulanık 2-metrik adı verilir (Saha, 2016).

Lemma 3.1.3: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay olsun. Bu durumda $M(x, y, z, \cdot):(0, \infty)\to[0,1]$ fonksiyonu azalmayandır (Sharma, 2002).

İspat: Varsayalım ki, $s, t > 0$, $s > t$ iken $M(x, y, z, t) > M(x, y, z, s)$ olsun. Bu durumda,

$$M(x, y, z, t) > M(x, y, z, s) \geq M\left(x, y, y, \frac{s}{2}-\frac{t}{2}\right) * M(x, y, z, t) * M\left(y, y, z, \frac{s}{2}-\frac{t}{2}\right)$$

$$\geq 1 * M(x, y, z, t) * 1 = M(x, y, z, t)$$

olur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $M(x, y, z, \cdot)$ azalmayan bir fonksiyondur.

Tanım 3.1.4: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay, $x\in X$ ve $0 < r < 1$ olsun. Bu durumda, her $t > 0$ için

$$B(x, r, t)=\{ y\in X \mid M(x, y, z, t) > 1- r, \forall z\in X \}$$

şeklinde tanımlanan kümeye t'ye göre x merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir (Shrivastava, 2016).

Sonuç 3.1.5: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay olmak üzere

$$\tau_M = \{A \subseteq X \mid \forall x\in A \text{ için } \exists t > 0 \text{ ve } r \in(0,1) : B(x, r, t) \subseteq A \}$$

şeklinde tanımlanan τ_M ailesi X üzerinde bir topolojidir (Shrivastava, 2016).

Tanım 3.1.6: (Yakınsak Dizi) $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay, $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi ve $x\in X$ olsun. Her $z\in X$ ve $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, z, t) = 1$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine x noktasına yakınsaktır denir ve bu durum $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ ile gösterilir (Sharma, 2002).

Lemma 3.1.7: Bir bulanık 2-metrik uzayda yakınsak her dizinin bir tek limit noktası vardır (Singh ve diğ., 2007).

Tanım 3.1.8: (Cauchy Dizisi) $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay ve $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi olsun. Her $z \in X$, $t > 0$, $p > 0$ için $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_{n+p}, z, t) = 1$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi adı verilir (Sharma, 2002).

Tanım 3.1.9: (Tam Bulanık 2-Metrik Uzay) $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay olsun. Eğer X'deki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ise $(X, M, *)$ bulanık 2-metrik uzayına bir tam bulanık 2-metrik uzay adı verilir (Sharma, 2002).

Sonuç 3.1.10: (X, d) bir 2-metrik uzay olsun. Bu durumda $(X, M_d, *)$ standart bulanık 2-metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul (X, d) 2-metrik uzayının tam olmasıdır.

Tanım 3.1.11: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay olsun. Eğer X' deki her $\{x_n\}$ dizisinin X' de yakınsak olan bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi varsa $(X, M, *)$ bulanık 2-metrik uzayına kompakt denir (Das ve Saha, 2013).

Tanım 3.1.12: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay ve $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ dizileri sırasıyla X'deki x ve y noktalarına yakınsak olsun. Eğer her $z \in X$ ve $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z, t) = M(x, y, z, t)$ ise M dönüşümüne X üzerinde süreklidir denir (Singh ve diğ., 2007).

Tanım 3.1.13: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay, $f : (X, M, *) \to (X, M, *)$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. $(X, M, *)$'daki $x_n \to x$ koşulunu sağlayan her $\{x_n\}$ dizisi için $f(x_n) \to f(x)$ koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna x noktasında süreklidir, denir.

Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise bu f fonksiyonuna X üzerinde süreklidir denir (Al-Mayahi ve Ibrahim, 2013).

Not 3.1.14: Bu kısımdan itibaren $(X, M, *)$ bulanık 2-metriğinin Tanım 3.1.1'deki koşullara ek olarak

(BM6) $\lim_{t\to\infty} M(x, y, z, t) = 1$

koşulunu da sağladığı kabul edilecektir (Sharma, 2002).

Lemma 3.1.15: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay olsun. Her $x,y,z\in X$ ($z\neq x$, $z\neq y$) ve $t > 0$ için $q \in (0,1)$ olmak üzere

$$M(x, y, z, qt) \geq M(x, y, z, t)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $x = y$ dir (Sharma, 2002).

İspat: M azalmayan bir fonksiyon olduğundan, $t > 0$ için $q \in (0,1)$ iken

$$M(x, y, z, t) \geq M(x, y, z, qt)$$

olur. Hipotezden

$$M(x, y, z, t) \geq M(x, y, z, qt) \geq M(x, y, z, t)$$

dir. Buradan $M(x, y, z, t) = M(x, y, z, qt)$ olur. O halde $M(x, y, z, \cdot)$ sabit bir fonksiyondur. $\lim\limits_{t\to\infty} M(x, y, z, t)=1$ olduğundan her $t > 0$ için $M(x, y, z, t)=1$ dir. $z\neq x$ ve $z\neq y$ olduğundan $x=y$ olur.

Lemma 3.1.16: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay ve $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi olsun. Her $z\in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Das ve Saha, 2013).

$$\begin{aligned} M\left(x_n, x_{n+p}, z, t\right) \geq\ & M\left(x_n, x_{n+1}, x_{n+p}, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+p}, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right) \\ & * \ldots * M\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, x_{n+p}, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(x_n, x_{n+1}, z, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right) \\ & * M\left(x_{n+1}, x_{n+2}, z, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right) * \ldots * M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right) \\ & * M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right) \end{aligned}$$

Lemma 3.1.17: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay ve $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi olsun. Her $t > 0$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$M(x_{n+2}, x_{n+1}, z, qt) \geq M(x_{n+1}, x_n, z, t) \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $q \in (0,1)$ mevcut ise $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir (Sharma, 2002).

İspat: $\{x_n\}$, $(X, M, *)$ bulanık 2-metrik uzayında bir dizi, $t > 0$ ve $q \in (0,1)$ olsun. Eşitsizlik (3.1) de $n = 1$ için

$$M(x_3, x_2, z, qt) \geq M(x_2, x_1, z, t)$$

olur. $n = 2$ için

$$M(x_4, x_3, z, qt) \geq M(x_3, x_2, z, t) \geq M\left(x_2, x_1, z, \frac{t}{q}\right)$$

olur. Bu durumda, n için

$$M(x_{n+2}, x_{n+1}, z, t) \geq M\left(x_2, x_1, z, \frac{t}{q^n}\right) \tag{3.2}$$

elde edilir. Lemma 3.1.16'den her $z \in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$M(x_n, x_{n+p}, z, t) \geq M\left(x_n, x_{n+1}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \ldots * M\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(x_n, x_{n+1}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \ M\left(x_{n+1}, x_{n+2}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * \ldots * M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \ M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $t_0 = \frac{t}{2(p-1)+1}$ yazılır ve (3.2) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$M(x_n, x_{n+p}, z, t) \geq M\left(x_2, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{q^{n-1}}\right) * M\left(x_2, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{q^n}\right)$$

$$* \, M\left(x_2, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{q^{n+1}}\right) * \ldots * M\left(x_2, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{q^{n+p-3}}\right) * M\left(x_2, x_1, z, \frac{t_0}{q^{n-1}}\right)$$

$$* \ M\left(x_2, x_1, z, \frac{t_0}{q^n}\right) * M\left(x_2, x_1, z, \frac{t_0}{q^{n+1}}\right) * \ldots * M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t_0}{q^{n+p-2}}\right)$$

$$* \, M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t_0}{q^{n+p-2}}\right)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa Koşul (BM6) dan

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_n, x_{n+p}, z, t\right) \geq 1 * 1 * \ldots * 1 = 1$$

elde edilir. O halde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

3.2. Bulanık 2-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 3.2.1: $(X, M, *)$ bir tam bulanık 2-metrik uzay ve $f : (X, M, *) \to (X, M, *)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y,z \in X$ için $k \in (0,1)$ olmak üzere

$$M(f(x), f(y), z, kt) \geq M(x, y, z, t) \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Das ve Saha, 2013).

İspat: $x \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f^n(x)$ şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. Her $t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$M(x_{n+2}, x_{n+1}, z, kt) = M(f(x_{n+1}), f(x_n), z, kt) \geq M(x_{n+1}, x_n, z, t)$$

olduğundan $k \in (0,1)$ iken

$$M(x_{n+2}, x_{n+1}, z, kt) \geq M(x_{n+1}, x_n, z, t)$$

elde edilir. Bu durumda Lemma 3.1.17'den $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $(X, M, *)$ tam bulanık 2-metrik uzay olduğundan $x_n \to y$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradan her $z \in X$ için

$$1 \geq M(f(y), y, z, t) \geq M\left(f(y), y, f(x_n), \tfrac{t}{3}\right) * M\left(f(y), f(x_n), z, \tfrac{t}{3}\right) * M\left(f(x_n), y, z, \tfrac{t}{3}\right)$$

$$\geq M\left(f(y), y, x_{n+1}, \tfrac{t}{3}\right) * M\left(y, x_n, z, \tfrac{t}{3k}\right) * M\left(x_{n+1}, y, z, \tfrac{t}{3}\right) \geq 1 * 1 * 1 = 1$$

olur. Yani $z \in X$ için $M(f(y), y, z, t) = 1$ elde edilir. Bu durumda $f(y) = y$ dir. O halde y noktası f fonksiyonunun bir sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $z \in X$ $(z \neq x,\ z \neq y)$ noktası için

$$M(x, y, z, t) = M(f(x), f(y), z, t) \geq M\left(x, y, z, \tfrac{t}{k}\right) = M\left(f(x), f(y), z, \tfrac{t}{k}\right)$$

$$\geq M\left(x, y, z, \frac{t}{k^2}\right) = M\left(f(x), f(y), z, \frac{t}{k^2}\right) \geq M\left(x, y, z, \frac{t}{k^3}\right) = M\left(f(x), f(y), z, \frac{t}{k^3}\right)$$

$$\geq \ldots \geq M\left(x, y, z, \frac{t}{k^n}\right)$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa Koşul (BM6) dan $M(x, y, z, t) \geq M\left(x, y, z, \frac{t}{k^n}\right) \to 1$ sağlanır. Yani $z \in X$ için $M(x, y, z, t) = 1$ dir. Bu ise $x = y$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Lemma 3.2.2: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay ve $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ dizileri sırasıyla X'deki x ve y noktalarına yakınsak olsun. Bu durumda her $z \in X$, $t > 0$ ve $0 < s < t$ için aşağıdaki özellikler sağlanır (Das ve Saha, 2013).

(1) $\lim_{n\to\infty} \inf M(x_n, y_n, z, t) \geq M(x, y, z, t - s)$ (3.4)

(2) $\lim_{n\to\infty} \sup M(x_n, y_n, z, t) \leq M(x, y, z, t + s)$ (3.5)

İspat:

(1) $x, y, z \in X$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ olsun. Koşul (BM4) den,

$$M(x_n, y_n, z, t) \geq M\left(x_n, y_n, x, \frac{s}{4}\right) * M\left(x_n, x, z, \frac{s}{4}\right) * M\left(x, y_n, z, t - \frac{s}{2}\right)$$

$$\geq M\left(x_n, y_n, x, \frac{s}{4}\right) * M\left(x_n, x, z, \frac{s}{4}\right) * M\left(x, y_n, y, \frac{s}{4}\right) * M(x, y, z, t - s)$$

$$* M\left(y, y_n, z, \frac{s}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \inf M(x_n, y_n, z, t) \geq 1 * 1 * 1 * M(x, y, z, t - s) * 1 = M(x, y, z, t - s)$$

(2) (1)'e benzer şekilde ispatlanır.

Sonuç 3.2.3: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay ve $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ dizileri sırasıyla X'deki x ve y noktalarına yakınsak olsun. Bu durumda her $z \in X$, $t > 0$ ve $0 < s < t$ için aşağıdaki özellikler sağlanır (Das ve Saha, 2013).

(1) $\lim_{n\to\infty} \inf M(x_n, y_n, z, t) \geq M(x, y, z, t)$ (3.6)

(2) $\lim_{n\to\infty} \sup M(x_n, y_n, z, t) \le M(x, y, z, t^+)$ (3.7)

İspat: $M(x, y, z, \cdot)$ fonksiyonunun soldan sürekli olduğu kullanılarak Eşitsizlik (3.4) ve (3.5) de $s \to 0^+$ için limit alınırsa,

$\lim_{n\to\infty} \inf M(x_n, y_n, z, t) \ge M(x, y, z, t)$ ve $\lim_{n\to\infty} \sup M(x_n, y_n, z, t) \le M(x, y, z, t^+)$

elde edilir.

Teorem 3.2.4: $(X, M, *)$ bir kompakt bulanık 2-metrik uzay ve $f:(X, M, *) \to (X, M, *)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$, $x \ne y \ne z$ için

$$M(f(x), f(y), z, t) > M(x, y, z, t) \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Das ve Saha, 2013).

İspat: $x \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f^n(x)$ şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. $\{x_n\}$ dizisinde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \ne x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Aksi halde x_n noktası f fonksiyonunun sabit noktası olur. Ayrıca her $m \ne n$ için $x_n \ne x_m$ olsun. Aksi taktirde $m > n$ için

$$M(x_n, x_{n+1}, z, t) = M(x_m, x_{m+1}, z, t) > M(x_{m-1}, x_m, z, t) > \ldots > M(x_n, x_{n+1}, z, t)$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir. $(X, M, *)$ kompakt bulanık 2-metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi vardır. $\lim_{n\to\infty} x_{n_i} = y$, $y \in X$ olsun. Varsayalım ki, her $i \in \mathbb{N}$ için $y, f(y) \ne x_{n_i}$ olsun. Eşitsizlik (3.8) den

$$1 \ge M(f(x_{n_i}), f(y), z, t) > M(x_{n_i}, y, z, t)$$

elde edilir. Her $z \in X$ ve $t > 0$ için $i \to \infty$ iken limit alınırsa $M(x_{n_i}, y, z, t) \to 1$ olduğundan $\lim_{i\to\infty} M(f(x_{n_i}), f(y), z, t) = 1$ dir. Yani, $\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(y)$ olur. Benzer şekilde

$$1 \ge M(f^2(x_{n_i}), f^2(y), z, t) > M(f(x_{n_i}), f(y), z, t)$$

elde edilir. Her $z \in X$ ve $t > 0$ için $i \to \infty$ iken limit alınırsa $M\left(f(x_{n_i}), f(y), z, t\right) \to 1$ olduğundan $\lim_{i\to\infty} M\left(f^2(x_{n_i}), f^2(y), z, t\right) = 1$ dir. Yani $\lim_{i\to\infty} f^2(x_{n_i}) = f^2(y)$ sağlanır. Bu durumda, $\left\{M\left(x_{n_i}, f(x_{n_i}), z, t\right)\right\}$ ve $\left\{M\left(f(x_{n_i}), f^2(x_{n_i}), z, t\right)\right\}$ dizileri aynı noktaya yakınsar. O halde, her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(y, f(y), z, t^+) \geq \lim_{i\to\infty} \sup M\left(x_{n_i}, f(x_{n_i}), z, t\right) = \lim_{i\to\infty} \sup M\left(f(x_{n_i}), f^2(x_{n_i}), z, t\right)$$

$$\geq \lim_{i\to\infty} \inf M\left(f(x_{n_i}), f^2(x_{n_i}), z, t\right) \geq M\left(f(y), f^2(y), z, t\right)$$

elde edilir. Yani her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(y, f(y), z, t^+) \geq M\left(f(y), f^2(y), z, t\right)$$

olur. Eğer $f(y) \neq y$ ise her $z \in X$ ve $t > 0$ için $M(y, f(y), z, t) < M\left(f(y), f^2(y), z, t\right)$ bulunur. Bu ise çelişkidir. Bu durumda $f(y) = y$ olmalıdır. O halde y, f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $z \in X$ ($z \neq x$, $z \neq y$) noktası için

$$M(x, y, z, t) = M(f(x), f(y), z, t) > M(x, y, z, t)$$

elde edilir. Bu ise kabul ile çelişir. O halde, f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 3.2.5: $(X, M, *)$ bir tam bulanık 2-metrik uzay ve $f : (X, M, *) \to (X, M, *)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için $t = t_1 + t_2$, $a + b = 1$ ve $0 < k < 1$ olmak üzere,

$$M^2(f(x), f(y), z, t) \geq M^2\left(x, y, z, \frac{t_1}{ka}\right) + M\left(x, f(x), z, \frac{t_2}{kb}\right) . M\left(y, f(y), z, \frac{t_2}{kb}\right) \qquad (3.9)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Yadav ve Thakur, 2013).

İspat: $x \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = f^n(x)$ şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. Eşitsizlik (3.9) da $x = x_{n-1}$, $y = x_n$, $t_1 = at$, $t_2 = bt$ yazılırsa,

$$M^2(f(x_{n-1}), f(x_n), z, t) \geq M^2\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{at}{ka}\right)$$

$$+M\left(x_{n-1}, f(x_{n-1}), z, \frac{bt}{kb}\right). M\left(x_n, f(x_n), z, \frac{bt}{kb}\right) \geq M^2\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right)$$

$$+M\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right). M(x_n, x_{n+1}, z, t)$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $M^2\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right)$ ile bölünürse,

$$\frac{M^2(f(x_{n-1}), f(x_n), z, t)}{M^2\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right)} \geq \frac{M^2\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right)}{M^2\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right)} + \frac{M\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right). M(x_n, x_{n+1}, z, t)}{M^2\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right)}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{M^2(f(x_{n-1}), f(x_n), z, t)}{M^2\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right)} \geq 1 + \frac{M(x_n, x_{n+1}, z, t)}{M\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right)}$$

olur. $r = \frac{M(x_n, x_{n+1}, z, t)}{M\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right)}$ alınırsa $r^2 - r - 1 \geq 0$ bulunur. Varsayalım ki, $r < 1$ olsun. Bu durumda, $r > 0$ olduğundan $r^2 - r < 0 \Longrightarrow r^2 - r - 1 < 0$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde $r \geq 1$ olmalıdır. Yani $\frac{M(x_n, x_{n+1}, z, t)}{M\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right)} \geq 1$ dir. Buradan

$$M(x_n, x_{n+1}, z, t) \geq M\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t}{k}\right)$$

olduğu görülür. Bu durumda Lemma 3.1.17'den $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $(X, M, *)$ tam bulanık 2-metrik uzay olduğundan $x_n \rightarrow y$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradan her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$M^2(y, f(y), z, t) = \lim_{n\to\infty} M^2(f(x_n), f(y), z, t)$$

$$\geq \lim_{n\to\infty}\left(M^2\left(x_n, y, z, \frac{t}{k}\right) + M\left(x_n, f(x_n), z, \frac{t}{k}\right). M\left(y, f(y), z, \frac{t}{k}\right)\right) = 1 + M\left(y, f(y), z, \frac{t}{k}\right)$$

elde edilir. Yani her $z \in X$ ve $t > 0$ için $M^2(y, f(y), z, t)=1$ bulunur. Bu durumda $f(y) = y$ olur. O halde y, f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $z \in X$ ($z \neq x$, $z \neq y$) noktası için

$$M^2(x, y, z, t) = M^2(f(x), f(y), z, t) \geq M^2\left(x, y, z, \tfrac{t}{k}\right) + M\left(x, f(x), z, \tfrac{t}{k}\right) . M\left(y, f(y), z, \tfrac{t}{k}\right)$$

$$= M^2\left(x, y, z, \tfrac{t}{k}\right) + M\left(x, x, z, \tfrac{t}{k}\right) . M\left(y, y, z, \tfrac{t}{k}\right) = M^2\left(x, y, z, \tfrac{t}{k}\right) + 1 \geq M^2\left(x, y, z, \tfrac{t}{k}\right)$$

elde edilir. Buradan ise $M(x, y, z, t) \geq M\left(x, y, z, \tfrac{t}{k}\right)$ olur. Bu durumda Lemma 3.1.15'den x=y olur. O halde, f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Uyarı 3.2.6: Teorem 3.2.5'deki Eşitsizlik (3.9) da $t_2 = 0$ ve $t_1 = at$ alınırsa, Teorem 3.2.5 ile Teorem 3.2.1 çakışır (Yadav ve Thakur, 2013).

Teorem 3.2.7: $(X, M, *)$ bir tam bulanık 2-metrik uzay ve $f : (X, M, *) \rightarrow (X, M, *)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$, $t > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n \in (0, \infty)$ olmak üzere,

$$M(f^n(x), f^n(y), z, k_n t) \geq M(x, y, z, t) \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanıyor ve $k_n \rightarrow 0$ (buradaki yakınsaklık $\mathbb{R}$'nin $(0, \infty)$ altuzay topolojisine göre) ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Saha, 2016).

İspat: $x \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f^n(x)$ şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. Her $z \in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$1 \geq M(x_n, x_{n+p}, z, t) \geq M\left(x_n, x_{n+1}, x_{n+p}, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+p}, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \ldots * M\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, x_{n+p}, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(x_n, x_{n+1}, z, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \; M\left(x_{n+1}, x_{n+2}, z, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right) * \ldots * M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \; M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \tfrac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $t_0 = \frac{t}{2(p-1)+1}$ yazılır ve Eşitsizlik (3.10) göz önüne alınırsa,

$$1 \geq M(x_n, x_{n+p}, z, t) \geq M\left(x, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{k_n}\right) * M\left(x, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{k_{n+1}}\right)$$

$$* M\left(x, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{k_{n+2}}\right) * \ldots * M\left(x, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{k_{n+p-2}}\right) * M\left(x, x_1, z, \frac{t_0}{k_n}\right)$$

$$* M\left(x, x_1, z, \frac{t_0}{k_{n+1}}\right) * M\left(x, x_1, z, \frac{t_0}{k_{n+2}}\right) * \ldots * M\left(x, x_1, z, \frac{t_0}{k_{n+p-1}}\right)$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $k_n \to 0$ olduğundan Koşul (BM6) kullanılarak,

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_{n+p}, z, t) \geq 1 * 1 * \ldots * 1 = 1$$

elde edilir. O halde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $(X, M, *)$ tam bulanık 2-metrik uzay olduğundan $x_n \to y$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradan her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$1 \geq M(y, f(y), z, t) \geq M\left(y, f(y), x_{n+1}, \frac{t}{3}\right) * M\left(y, x_{n+1}, z, \frac{t}{3}\right) * M\left(x_{n+1}, f(y), z, \frac{t}{3}\right)$$

$$\geq M\left(x_{n+1}, y, f(y), \frac{t}{3}\right) * M\left(x_{n+1}, y, z, \frac{t}{3}\right) * M\left(x_n, y, z, \frac{t}{3k_1}\right)$$

elde edilir. $x_n \to y$ olduğundan $1 \geq M(y, f(y), z, t) \geq 1 * 1 * 1 = 1$ sağlanır. Yani her $z \in X$ ve $t > 0$ için $M(y, f(y), z, t) = 1$ bulunur. Bu durumda $f(y) = y$ olur. O halde y, f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f^n(x) = x$ ve $f^n(y) = y$ olur. Her $z \in X$ $(z \neq x, z \neq y)$ noktası için

$$1 \geq M(x, y, z, t) = M(f^n(x), f^n(y), z, t) \geq M\left(x, y, z, \frac{t}{k_n}\right)$$

dir. $n \to \infty$ için limit alınırsa Koşul (BM6) dan $1 \geq M(x, y, z, t) \geq M\left(x, y, z, \frac{t}{k^n}\right) \to 1$ elde edilir. Yani her $z \in X$ için $M(x, y, z, t) = 1$ dir. O halde $x = y$ olur. Dolayısıyla f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Uyarı 3.2.8: Teorem 3.2.7'de $n = 1$ alınması durumunda Eşitsizlik (3.10) Teorem 3.2.1'deki Eşitsizlik (3.3) ü gerektirmez. Çünkü, bu durumda $k_1 < 1$ olması garanti edilemez (Saha, 2016).

Örnek 3.2.9: Örnek 2.1.21'de verilen (X, d) tam 2-metrik uzayını ele alalım. M_d, d 2-metriği tarafından üretilen standart bulanık 2-metrik olsun. Bu durumda $(X, M_d, *)$ bir tam bulanık 2-metrik uzaydır. $f: X \to X$, $f(x) = 1$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda her $x, y, z \in X$, $t > 0$ ve $0 < k < 1$ için $M_d(f^n(x), f^n(y), z, k^n t)=1$ olur. Aynı zamanda $n \to \infty$ için $k^n \to 0$ dır. Buradan f fonksiyonunun Teorem 3.2.7'nin bütün koşullarını sağladığı görülmektedir. Ayrıca $1 \in X$ noktası f fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır (Saha, 2016).

Teorem 3.2.10: $(X, M, *)$ bir tam bulanık 2-metrik uzay, $f : (X, M, *) \to (X, M, *)$ sürekli bir fonksiyon ve $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ iki dizi olsun. Her $x, y, z \in X$, $t > 0$ ve $0 < k < 1$ için

$$M(f^m(x), f^m(y), z, kt) \geq M(x, y, z, t) \tag{3.11}$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ mevcut olsun. Eğer her $z \in X$ ve $t > 0$ için $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ iken $M(x_n, y_n, z, t) \to M(x, y, z, t)$ koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Saha, 2016).

İspat: $B := f^m$ diyelim. $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ alalım. Her $z \in X$, $t > 0$ ve $0 < k < 1$ için

$$M\left(B^n(f(x)), B^n(x), z, k^n t\right) \geq M\left(B^{n-1}(f(x)), B^{n-1}(x), z, k^{n-1} t\right)$$

$$\geq M\left(B^{n-2}(f(x)), B^{n-2}(x), z, k^{n-2} t\right) \geq \ldots \geq M(f(x), x, z, t) \tag{3.12}$$

elde edilir. Teorem 3.2.1'in ispatındaki benzer işlemler yapıldığında $\{B^n(x)\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. $(X, M, *)$ tam bulanık 2-metrik uzay olduğundan $B^n(x) \to y$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Ayrıca y noktası B'nin bir tek sabit noktasıdır. f fonksiyonu sürekli olduğundan $f(B^n(x)) = B^n(f(x)) \to f(y)$ dir. Bu durumda hipotezden, her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$M\left(B^n(f(x)), B^n(x), z, t\right) \xrightarrow{n \to \infty} M(f(y), y, z, t)$$

elde edilir. Eşitsizlik (3.12) den

$$1 \geq M\left(B^n(f(x), B^n(x), z, t)\right) \geq M\left(f(x), x, z, \tfrac{t}{k^n}\right)$$

elde edilir. Her $z \in X$ ve $t > 0$ için $n \to \infty$ iken limit alınırsa $M\left(f(x), x, z, \frac{t}{k^n}\right) \to 1$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} M\left(B^n(f(x), B^n(x), z, t)\right) = 1$ dir. Yani $M(f(y), y, z, t) = 1$ olur. Bu durumda $f(y) = y$ olur. O halde y, f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(x) = x$ olduğundan $B(x) = f^m(x) = f^{m-1}(x) = \ldots = x$ olur. B'nin bir tek sabit noktası olduğundan $x = y$ olmalıdır. Dolayısıyla f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 3.2.11: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay, $\varepsilon > 0$ ve $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ X'de sonlu bir dizi olsun. Eğer her $z \in X$, $t > 0$ ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için $M(x_{i-1}, x_i, z, t) > 1-\varepsilon$ oluyorsa bu diziye x'den y'ye bir ε-zincir denir. Her $x, y \in X$ için $(X, M, *)$ bulanık 2-metrik uzayında x'den y'ye bir ε-zincir mevcut ise bu bulanık 2-metrik uzaya ε-zincirlenebilir uzay adı verilir (Saha, 2016).

Tanım 3.2.12: $(X, M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay, $f : (X, M, *) \to (X, M, *)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$, $t > 0$ için $\varepsilon > 0$, $0 < \lambda < 1$ olmak üzere

$$M(x, y, z, t) > 1-\varepsilon \text{ olması } M(f(x), f(y), z, t) \geq M\left(x, y, z, \frac{t}{\lambda}\right) \tag{3.13}$$

olmasını gerektiriyor ise f 'ye (ε-λ)-düzgün yerel daraltan dönüşüm adı verilir.

(ε-λ)-düzgün yerel daraltan her dönüşümün sürekli olduğu açıktır (Saha, 2016).

Örnek 3.2.13: Örnek 2.1.21'de verilen (X, d) tam 2-metrik uzayını ele alalım. M_d, d 2-metriği tarafından üretilen standart bulanık 2-metrik olsun. Bu durumda $(X, M_d, *)$ bir tam bulanık 2-metrik uzaydır. $f: X \to X$, $f(x) = 1$ fonksiyonu verilsin ve $\varepsilon > 0$, $0 < \lambda < 1$ olsun. $x, y, z \in X$, $t > 0$ için $M_d(x, y, z, t) > 1-\varepsilon$ verilsin. Bu durumda,

$$M_d(f(x), f(y), z, t) = M_d(1, 1, z, t) = 1 \geq M_d\left(x, y, z, \frac{t}{\lambda}\right)$$

elde edilir. O halde f , (ε-λ)-düzgün yerel daraltan dönüşümdür (Saha, 2016).

Teorem 3.2.14: $(X, M, *)$ bir tam, ε-zincirlenebilir bulanık 2-metrik uzay ve $f : (X, M, *) \rightarrow (X, M, *)$ bir (ε-λ)-düzgün yerel daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır (Saha, 2016).

İspat: $x \in X$ noktasını alalım. $f(x) \neq x$ olsun. Aksi taktirde x noktası f fonksiyonunun sabit noktası olur ve ispat tamamlanır. $(X, M, *)$ ε-zincirlenebilir bulanık 2-metrik uzay olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $z \in X$, $t > 0$ ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için $M(x_{i-1}, x_i, z, t) > 1-\varepsilon$ olacak şekilde x'den f(x)'e bir $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = f(x)$ ε-zincir vardır. İlk olarak, her m pozitif tamsayısı, $z \in X$, $t > 0$ ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$M(f^m(x_{i-1}), f^m(x_i), z, t) \geq M\left(x_{i-1}, x_i, z, \frac{t}{\lambda^m}\right) \tag{3.14}$$

eşitsizliğinin sağlandığını tümevarım yöntemi ile gösterelim. Eşitsizlik (3.13) den

$$M(f(x_{i-1}), f(x_i), z, t) \geq M\left(x_{i-1}, x_i, z, \frac{t}{\lambda}\right)$$

olduğundan m = 1 için Eşitsizlik (3.14) sağlanmış olur. m-1 için Eşitsizlik (3.14) ün sağlandığını kabul edelim. Yani,

$$M\left(f^{m-1}(x_{i-1}), f^{m-1}(x_i), z, t\right) \geq M\left(x_{i-1}, x_i, z, \frac{t}{\lambda^{m-1}}\right) \tag{3.15}$$

olsun. Bu durumda, Eşitsizlik (3.13) ve (3.15) kullanılarak m için,

$$1 - \varepsilon < M\left(x_{i-1}, x_i, z, \frac{t}{\lambda^m}\right) \leq M\left(f(x_{i-1}), f(x_i), z, \frac{t}{\lambda^{m-1}}\right) \leq M(f^m(x_{i-1}), f^m(x_i), z, t)$$

elde edilir. O halde, Eşitsizlik (3.14) her m pozitif tam sayısı için sağlanmaktadır. Lemma 3.1.16'den her $z \in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$1 \geq M\left(f^m(x), f^{m+1}(x), z, t\right) = M(f^m(x_0), f^m(x_n), z, t)$$

$$\geq M\left(f^m(x_0), f^m(x_1), f^m(x_n), \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(f^m(x_1), f^m(x_2), f^m(x_n), \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \ldots * M\left(f^m(x_{n-2}), f^m(x_{n-1}), f^m(x_n), \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(f^m(x_0), f^m(x_1), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \ldots * M\left(f^m(x_{n-1}), f^m(x_n), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(f^m(x_{n-1}), f^m(x_n), f^m(x_n), \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $t_0 = \frac{t}{2(p-1)+1}$ yazılır ve Eşitsizlik (3.14) göz önüne alınırsa,

$$1 \geq M\left(f^m(x), f^{m+1}(x), z, t\right) \geq M\left(x_0, x_1, f^m(x_n), \frac{t_0}{\lambda^m}\right) * M\left(x_1, x_2, f^m(x_n), \frac{t_0}{\lambda^m}\right)$$

$$* \ldots * M\left(x_{n-2}, x_{n-1}, f^m(x_n), \frac{t_0}{\lambda^m}\right) * M\left(x_0, x_1, z, \frac{t_0}{\lambda^m}\right) * M\left(x_1, x_2, z, \frac{t_0}{\lambda^m}\right)$$

$$* \ldots * M\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t_0}{\lambda^m}\right) * M\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t_0}{\lambda^m}\right)$$

olur. $m \to \infty$ için limit alınırsa Koşul (BM6) kullanılarak her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$\lim_{m \to \infty} M\left(f^m(x), f^{m+1}(x), z, t\right) \geq 1 * 1 * \ldots * 1 = 1 \tag{3.16}$$

elde edilir. Ayrıca, Lemma 3.1.16'den her $z \in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$1 \geq M\left(f^m(x), f^{m+p}(x), z, t\right) \geq M\left(f^m(x), f^{m+1}(x), f^{m+p}(x), \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* M\left(f^{m+1}(x), f^{m+2}(x), f^{m+p}(x), \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * \ldots * M\left(f^{m+p-2}(x), f^{m+p-1}(x), f^m(x), \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* M\left(f^m(x), f^{m+1}(x), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(f^{m+1}(x), f^{m+2}(x), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \ldots * M\left(f^{m+p-1}(x), f^{m+p}(x), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(f^{m+p-1}(x), f^{m+p}(x), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $r_0 = \frac{t}{2(p-1)+1}$ yazılır ve Eşitsizlik (3.16) göz önüne alınırsa,

$$\lim_{m \to \infty} M\left(f^m(x), f^{m+p}(x), z, t\right) \geq 1 * 1 * \ldots * 1 = 1$$

elde edilir. O halde $\{f^m(x)\}$ bir Cauchy dizisidir. $(X, M, *)$ tam bulanık 2-metrik uzay olduğundan $f^m(x) \to y$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. f sürekli olduğundan $f^{m+1}(x) \to f(y)$ dir. Bu durumda $f(y)=y$ olur. O halde y, f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $(X, M, *)$ ε-zincirlenebilir bulanık 2-metrik uzay olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $z \in X$, $t > 0$ ve $i = 1, 2, \ldots, k$ için $M(w_{i-1}, w_i, z, t) > 1-\varepsilon$ olacak şekilde x'den y'ye bir $x = w_0, w_1, w_2, \ldots, w_k = y$ ε-zincir vardır. Bu durumda, bir h pozitif tam sayısı için Lemma 3.1.16'den, her $z \in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$1 \geq M(x, y, z, t) = M(f^h(x), f^h(y), z, t) = M(f^h(w_0), f^h(w_k), z, t)$$

$$\geq M\left(f^h(w_0), f^h(w_1), f^h(w_k), \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(f^h(w_1), f^h(w_2), f^h(w_k), \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \ldots * M\left(f^h(w_{k-2}), f^h(w_{k-1}), f^h(w_k), \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(f^h(w_0), f^h(w_1), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \ldots * M\left(f^h(w_{k-1}), f^h(w_k), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(f^h(w_{k-1}), f^h(w_k), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $s_0 = \frac{t}{2(p-1)+1}$ yazılır ve Eşitsizlik (3.14) göz önüne alınırsa,

$$1 \geq M(x, y, z, t) \geq M\left(w_0, w_1, f^h(w_k), \frac{s_0}{\lambda^h}\right) * M\left(w_1, w_2, f^m(w_k), \frac{s_0}{\lambda^h}\right)$$

$$* \ldots * M\left(w_{k-2}, w_{k-1}, f^h(w_k), \frac{s_0}{\lambda^h}\right) * M\left(w_0, w_1, z, \frac{s_0}{\lambda^h}\right) * M\left(w_1, w_2, z, \frac{s_0}{\lambda^h}\right)$$

$$* \ldots * M\left(w_{k-1}, w_k, z, \frac{s_0}{\lambda^h}\right) * M\left(w_{k-1}, w_k, z, \frac{s_0}{\lambda^h}\right)$$

olur. $h \to \infty$ için limit alınırsa Koşul (BM6) kullanılarak her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$\lim_{h \to \infty} M(x, y, z, t) \geq 1 * 1 * \ldots * 1 = 1$$

elde edilir. Yani her $z \in X$ için $M(x, y, z, t) = 1$ dir. O halde $x = y$ olur. Dolayısıyla f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

4. SEZGİSEL BULANIK 2-METRİK UZAYLAR

Bu bölümde, sezgisel bulanık 2-metrik uzaylar (Mursaleen ve Lohani, 2009), (Bakry, 2015) yapısı temel özellikleri ile birlikte tanıtılacaktır. Daha sonra, bulanık 2-metrik uzaylarda verilen bazı sabit nokta teoremleri sezgisel bulanık 2-metrik uzaylara genelleştirilecektir.

4.1. Sezgisel Bulanık 2-Metrik Uzay Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 4.1.1: X boştan farklı bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $\diamond$ sürekli bir t-conorm olsun. M, N : $X\times X\times X\times[0,\infty)\to[0, 1]$ dönüşümleri için aşağıdaki özellikler sağlansın. Her $x, y, z, u \in X$ ve $t_1, t_2, t_3 > 0$ için

(SBM1) $M(x, y, z, t) + N(x, y, z, t) \leq 1$.

(SBM2) $M(x, y, z, 0) = 0$.

(SBM3) x,y,z noktalarından en az ikisi birbirine eşit ise her $t > 0$ için $M(x,y,z,t) = 1$.

(SBM4) $M(x, y, z, t) = M(x, z, y, t) = M(y, z, x, t)$.

(SBM5) $M(x, y, z, t_1+t_2+t_3) \geq M(x, y, u, t_1) * M(x, u, z, t_2) * M(u, y, z, t_3)$.

(SBM6) $M(x, y, z, \cdot) : [0,\infty)\to[0,1]$ soldan süreklidir.

(SBM7) $N(x, y, z, 0) = 1$.

(SBM8) x,y,z noktalarından en az ikisi birbirine eşit ise her $t > 0$ için $N(x,y,z,t) = 0$.

(SBM9) $N(x, y, z, t) = N(x, z, y, t) = N(y, z, x, t)$.

(SBM10) $N(x, y, z, t_1+t_2+t_3) \leq N(x, y, u, t_1) \diamond N(x, u, z, t_2) \diamond N(u, y, z, t_3)$.

(SBM11) $N(x, y, z, \cdot) : [0,\infty)\to[0,1]$ sağdan süreklidir.

Bu durumda (M, N) ikilisine sezgisel bulanık 2-metrik ve $(X, M, N, *, \diamond)$ beşlisine ise sezgisel bulanık 2-metrik uzay denir. Buradaki $M(x, y, z, t)$ ve $N(x, y, z, t)$ değerleri köşeleri x, y, z olan üçgenin alanının t'ye yakın ve uzak olma derecesi olarak düşünülebilir (Mursaleen ve Lohani, 2009) (Bakry, 2015).

Uyarı 4.1.2: Her bulanık 2-metrik bir sezgisel bulanık 2-metrik üretir. Gerçekten, $(X,M, *)$ bir bulanık 2-metrik uzay ve $\diamond$ t-conormu, $x\diamond y=1-[(1-x) * (1-y)]$ olarak alınırsa $(X, M, 1-M, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzaydır.

Örnek 4.1.3: (X,d) bir 2-metrik uzay, $a * b = ab$, $a \diamond b = \min\{1, a+b\}$ ve $M_d,N_d : X\times X\times X\times[0,\infty)\to[0, 1]$ dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$M_d(x, y, z, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + d(x, y, z)}, & t > 0 \text{ ise} \\ 0, & t = 0 \text{ ise} \end{cases},$$

$$N_d(x, y, z, t) = \frac{d(x, y, z)}{t + d(x, y, z)}.$$

Bu durumda $(X, M_d, N_d, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzaydır. Bu şekildeki sezgisel bulanık 2-metrik uzaya, d 2-metriği tarafından üretilen standart sezgisel bulanık 2-metrik uzay denir. Buradan görülür ki, her 2-metrik bir sezgisel bulanık 2-metrik üretmektedir.

Lemma 4.1.4: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay olsun. Bu durumda $M(x, y, z, \cdot) : (0,\infty)\to[0,1]$ fonksiyonu azalmayan ve $N(x, y, z, \cdot) : (0,\infty)\to[0,1]$ fonksiyonu artmayandır (Bakry, 2015).

Tanım 4.1.5: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay, $x \in X$ ve $0 < r < 1$ olsun. Bu durumda, her $t > 0$ için

$$B(x, r, t)=\{ y \in X \mid M(x, y, z, t) > 1- r, N(x, y, z, t) < r, \forall z \in X \}$$

şeklinde tanımlanan kümeye t'ye göre x merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir (Mursaleen ve Lohani, 2009).

Sonuç 4.1.6: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay olsun.

$$\tau_{(M,N)} = \{ A \subseteq X \mid \forall x \in X \text{ için } \exists\, t > 0,\, r \in (0,1) : B(x, r, t) \subseteq A \}$$

şeklinde tanımlanan $\tau_{(M,N)}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir (Mursaleen ve Lohani, 2009).

Tanım 4.1.7: (Yakınsak Dizi) (X, M, N, $*$, $\diamond$) bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay, $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi olsun. Her $z \in X$ ve $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, z, t) = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} N(x_n, x, z, t) = 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine x noktasına yakınsaktır denir. Bu durum $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ ile gösterilir (Mursaleen ve Lohani, 2009).

Lemma 4.1.8: Bir sezgisel bulanık 2-metrik uzayda yakınsak her dizinin bir tek limit noktası vardır.

İspat: Tanım 4.1.1 ve Tanım 4.1.8'den kolaylıkla elde edilir.

Tanım 4.1.9: (Cauchy Dizisi) (X, M, N, $*$, $\diamond$) bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay, $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi olsun. Her $z \in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_{n+p}, z, t) = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} N(x_n, x_{n+p}, z, t) = 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi adı verilir (Mursaleen ve Lohani, 2009).

Tanım 4.1.10: (Tam Sezgisel Bulanık 2-Metrik Uzay) (X, M, N, $*$, $\diamond$) bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay olsun. Eğer X'deki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ise (X, M, N, $*$, $\diamond$) sezgisel bulanık 2-metrik uzayına bir tam sezgisel bulanık 2-metrik uzay adı verilir (Mursaleen ve Lohani, 2009).

Sonuç 4.1.11: (X, d) bir 2-metrik uzay ve (X, M_d, N_d, $*$, $\diamond$) bu d 2-metriği tarafından üretilen standart sezgisel bulanık 2-metrik uzay olsun. Bu durumda (X, M_d, N_d, $*$, $\diamond$) sezgisel bulanık 2-metrik uzayın tam olması için gerek ve yeter koşul (X, d) 2-metrik uzayının tam olmasıdır.

Tanım 4.1.12: (X, M, N, $*$, $\diamond$) bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay olsun. Eğer X' deki her $\{x_n\}$ dizisinin X' de yakınsak olan bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi varsa (X, M, N, $*$, $\diamond$) sezgisel bulanık 2-metrik uzayına kompakt denir (Mursaleen ve Lohani, 2009).

Tanım 4.1.13: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay, $f:(X,M,N,*,\diamond)\to(X,M,N,*,\diamond)$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. $(X, M, *)$'daki $x_n \to x$ koşulunu sağlayan her $\{x_n\}$ dizisi için $f(x_n) \to f(x)$ koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna x noktasında süreklidir denir.

Not 4.1.14: Bu kısımdan itibaren $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel bulanık 2-metriğinin Tanım 4.1.1'deki koşullara ek olarak

(SBM12) $\lim\limits_{t\to\infty} M(x, y, z, t) = 1$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} N(x, y, z, t) = 0$

koşulunu da sağladığı kabul edilecektir (Bakry, 2015).

Lemma 4.1.15: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay olsun. Her $x,y,z\in X$ $(z\neq x,\ z\neq y)$ ve $t > 0$ için $q \in (0,1)$ olmak üzere

$$M(x, y, z, qt) \geq M(x, y, z, t) \text{ ve } N(x, y, z, qt) \leq N(x, y, z, t)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $x = y$ dir (Bakry, 2015).

İspat: Teorem 3.1.15'e benzer şekilde ispatlanır.

Lemma 4.1.16: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay ve $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi olsun. Her $z\in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$M(x_n, x_{n+p}, z, t) \geq M\left(x_n, x_{n+1}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \ldots * M\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * M\left(x_n, x_{n+1}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \; M\left(x_{n+1}, x_{n+2}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) * \ldots * M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$* \; M\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right).$$

$$N(x_n, x_{n+p}, z, t) \leq N\left(x_n, x_{n+1}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamond N\left(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$\diamond \ldots \diamond N\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamond N\left(x_n, x_{n+1}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$\diamondsuit\, N\left(x_{n+1}, x_{n+2}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamondsuit \ldots \diamondsuit N\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$

$\diamondsuit\, N\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right).$

Lemma 4.1.17: $(X, M, N, *, \diamondsuit)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay ve $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi olsun. Her $z \in X$, $t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$M(x_{n+2}, x_{n+1}, z, qt) \geq M(x_{n+1}, x_n, z, t) \tag{4.1}$$

$$N(x_{n+2}, x_{n+1}, z, qt) \leq N(x_{n+1}, x_n, z, t) \tag{4.2}$$

olacak şekilde bir $q \in (0,1)$ mevcut ise $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

İspat: $\{x_n\}$, $(X, M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel bulanık 2-metrik uzayında bir dizi ve $t > 0$ olsun. $q \in (0,1)$ için Eşitsizlik (4.1) ve (4.2) sağlansın. Bu koşullar altında $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_{n+p}, z, t) = 1$ olduğu Teorem 3.1.17'den bilinmektedir. Burada, $\lim_{n\to\infty} N(x_n, x_{n+p}, z, t) = 0$ olduğu gösterilecektir. Eşitsizlik (4.2) de $n = 1$ için

$$N(x_3, x_2, z, qt) \leq N(x_2, x_1, z, t)$$

dir. $n = 2$ için

$$N(x_4, x_3, z, qt) \leq N(x_3, x_2, z, t) \leq N\left(x_2, x_1, z, \frac{t}{q}\right)$$

olur. Bu durumda, n için

$$N(x_{n+2}, x_{n+1}, z, t) \leq N\left(x_2, x_1, z, \frac{t}{q^n}\right) \tag{4.3}$$

elde edilir. Lemma 4.1.16'den her $z \in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için

$N(x_n, x_{n+p}, z, t) \leq N\left(x_n, x_{n+1}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamondsuit\, N\left(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$

$\diamondsuit \ldots \diamondsuit\, N\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamondsuit N\left(x_n, x_{n+1}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$

$\diamondsuit\, N\left(x_{n+1}, x_{n+2}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamondsuit \ldots \diamondsuit N\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamondsuit\, N\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$

eşitsizliği sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlikte $t_0 = \frac{t}{2(p-1)+1}$ yazılır ve Eşitsizlik (4.3) göz önüne alınırsa,

$$N(x_n, x_{n+p}, z, t) \leq N\left(x_2, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{q^{n-1}}\right) \diamond N\left(x_2, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{q^n}\right)$$

$$\diamond N\left(x_2, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{q^{n+1}}\right) \diamond \ldots \diamond N\left(x_2, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{q^{n+p-3}}\right) \diamond N\left(x_2, x_1, z, \frac{t_0}{q^{n-1}}\right)$$

$$\diamond N\left(x_2, x_1, z, \frac{t_0}{q^n}\right) \diamond N\left(x_2, x_1, z, \frac{t_0}{q^{n+1}}\right) \diamond \ldots \diamond N\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t_0}{q^{n+p-2}}\right)$$

$$\diamond N\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t_0}{q^{n+p-2}}\right)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa Koşul (SBM12) den

$$\lim_{n \to \infty} N(x_n, x_{n+p}, z, t) \leq 0 \diamond 0 \diamond \ldots \diamond 0 = 0$$

elde edilir. O halde, $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

4.2. Sezgisel Bulanık 2-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 4.2.1: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir tam sezgisel bulanık 2-metrik uzay ve $f:(X,M,N,*,\diamond) \to (X,M,N,*,\diamond)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için $k \in (0,1)$ olmak üzere

$$M(f(x), f(y), z, kt) \geq M(x, y, z, t) \text{ ve } N(f(x), f(y), z, kt) \leq N(x, y, z, t) \qquad (4.4)$$

eşitsizlikleri sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f^n(x)$ şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. Her $z \in X$, $t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$M(x_{n+2}, x_{n+1}, z, kt) = M(f(x_{n+1}), f(x_n), z, kt) \geq M(x_{n+1}, x_n, z, t)$$

$$N(x_{n+2}, x_{n+1}, z, kt) = N(f(x_{n+1}), f(x_n), z, kt) \leq N(x_{n+1}, x_n, z, t)$$

olduğundan $k \in (0,1)$ iken

$$M(x_{n+2}, x_{n+1}, z, kt) \geq M(x_{n+1}, x_n, z, t)$$

$N(x_{n+2}, x_{n+1}, z, kt) \le N(x_{n+1}, x_n, z, t)$

elde edilir. Bu durumda Lemma 4.1.17'den $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $(X, M, N, *, \diamond)$ tam sezgisel bulanık 2-metrik uzay olduğundan $x_n \to y$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradan, her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$0 \le N(f(y), y, z, t) \le N\left(f(y), y, f(x_n), \tfrac{t}{3}\right) \diamond N\left(f(y), f(x_n), z, \tfrac{t}{3}\right) \diamond N\left(f(x_n), y, z, \tfrac{t}{3}\right)$$

$$\le N\left(f(y), y, x_{n+1}, \tfrac{t}{3}\right) \diamond N\left(y, x_n, z, \tfrac{t}{3k}\right) \diamond N\left(x_{n+1}, y, z, \tfrac{t}{3}\right) \le 0 \diamond 0 \diamond 0 = 0$$

olur. Yani her $z \in X$ ve $t > 0$ için $N(f(y), y, z, t) = 0$ elde edilir. Bu durumda, $f(y) = y$ dir. O halde y noktası f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. Buradan, $z \in X$ $(z \neq x,\ z \neq y)$ ve $t > 0$ için

$$N(x, y, z, t) = N(f(x), f(y), z, t) \le N\left(x, y, z, \tfrac{t}{k}\right) = N\left(f(x), f(y), z, \tfrac{t}{k}\right)$$

$$\le N\left(x, y, z, \tfrac{t}{k^2}\right) = N\left(f(x), f(y), z, \tfrac{t}{k^2}\right) \le N\left(x, y, z, \tfrac{t}{k^3}\right) = N\left(f(x), f(y), z, \tfrac{t}{k^3}\right)$$

$$\le \ldots \le N\left(x, y, z, \tfrac{t}{k^n}\right)$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa Koşul (SBM12) den $N(x, y, z, t) \le N\left(x, y, z, \tfrac{t}{k^n}\right) \to 0$ elde edilir. Yani her $z \in X$ için $N(x, y, z, t) = 0$ dir. O halde $x = y$ olur. Dolayısıyla f fonsiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Lemma 4.2.2: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay ve $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ dizileri sırasıyla X'deki x ve y noktalarına yakınsak olsun. Bu durumda her $z \in X$, $t > 0$ ve $0 < s < t$ için

(1) $$\liminf_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z, t) \ge M(x, y, z, t - s) \tag{4.5}$$

$$\limsup_{n\to\infty} N(x_n, y_n, z, t) \le N(x, y, z, t - s) \tag{4.6}$$

(2) $$\limsup_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z, t) \le M(x, y, z, t + s) \tag{4.7}$$

$$\liminf_{n\to\infty} N(x_n, y_n, z, t) \geq N(x, y, z, t+s) \tag{4.8}$$

İspat : Teorem 3.2.2'ye benzer şekilde ispatlanır.

Sonuç 4.2.3: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay ve $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ dizileri sırasıyla X'deki x ve y noktalarına yakınsak olsun. Bu durumda her $z \in X$, $t > 0$ ve $0 < s < t$ için

(1) $\liminf_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z, t) \geq M(x, y, z, t)$

$\limsup_{n\to\infty} N(x_n, y_n, z, t) \leq N(x, y, z, t)$

(2) $\limsup_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z, t) \leq M(x, y, z, t^+)$

$\liminf_{n\to\infty} N(x_n, y_n, z, t) \geq N(x, y, z, t^+)$

İspat: $M(x, y, z, \cdot)$ ve $N(x, y, z, \cdot)$ fonksiyonlarının soldan sürekli olduklarını kullanarak Eşitsizlik (4.5), (4.6), (4.7) ve (4.8) de $s \to 0^+$ için limit alınırsa,

$$\liminf_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z, t) \geq M(x, y, z, t)$$

$$\limsup_{n\to\infty} N(x_n, y_n, z, t) \leq N(x, y, z, t)$$

$$\limsup_{n\to\infty} M(x_n, y_n, z, t) \leq M(x, y, z, t)$$

$\liminf_{n\to\infty} N(x_n, y_n, z, t) \geq N(x, y, z, t)$ elde edilir.

Teorem 4.2.4: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir kompakt sezgisel bulanık 2-metrik uzay ve $f:(X,M,N,*,\diamond) \to (X,M,N,*,\diamond)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y,z \in X$, $x \neq y$ için

$$M(f(x), f(y), z, t) > M(x, y, z, t) \text{ ve } N(f(x), f(y), z, t) < N(x, y, z, t) \tag{4.9}$$

eşitsizlikleri sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f^n(x)$ şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. $\{x_n\}$ dizisinde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Diğer türlü

x_n noktası f fonksiyonunun sabit noktası olur. Ayrıca, her $m \neq n$ için $x_n \neq x_m$ olsun. Aksi taktirde, $m > n$ için

$$M(x_n, x_{n+1}, z, t) = M(x_m, x_{m+1}, z, t) > M(x_{m-1}, x_m, z, t) > \ldots > M(x_n, x_{n+1}, z, t)$$

$$N(x_n, x_{n+1}, z, t) = N(x_m, x_{m+1}, z, t) < N(x_{m-1}, x_m, z, t) < \ldots < N(x_n, x_{n+1}, z, t)$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir. $(X, M, N, *, \diamond)$ kompakt sezgisel bulanık 2-metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi vardır. $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = y$, $y \in X$ olsun. Varsayalım ki, her $i \in \mathbb{N}$ için y, $f(y) \neq x_{n_i}$ olsun. Eşitsizlik (4.9) dan,

$$1 \geq M\left(f\left(x_{n_i}\right), f(y), z, t\right) > M\left(x_{n_i}, y, z, t\right)$$

$$0 \leq N\left(f\left(x_{n_i}\right), f(y), z, t\right) < M\left(x_{n_i}, y, z, t\right)$$

elde edilir. Her $z \in X$ ve $t > 0$ için $M\left(x_{n_i}, y, z, t\right) \xrightarrow{i\to\infty} 1$ ve $N\left(x_{n_i}, y, z, t\right) \xrightarrow{i\to\infty} 0$ olduğundan $\lim\limits_{i\to\infty} M\left(f\left(x_{n_i}\right), f(y), z, t\right) = 1$ ve $\lim\limits_{i\to\infty} N\left(f\left(x_{n_i}\right), f(y), z, t\right) = 0$ dır. Yani $\lim\limits_{i\to\infty} f\left(x_{n_i}\right) = f(y)$ olur. Benzer şekilde,

$$1 \geq M\left(f^2\left(x_{n_i}\right), f^2(y), z, t\right) > M\left(f(x_{n_i}), f(y), z, t\right)$$

$$0 \leq N\left(f^2\left(x_{n_i}\right), f^2(y), z, t\right) < N\left(f(x_{n_i}), f(y), z, t\right)$$

elde edilir. Her $z \in X$, $t > 0$ için $M\left(f(x_{n_i}), f(y), z, t\right) \xrightarrow{i\to\infty} 1$ ve $N\left(f(x_{n_i}), f(y), z, t\right) \xrightarrow{i\to\infty} 0$ olduğundan $\lim\limits_{i\to\infty} M\left(f^2\left(x_{n_i}\right), f^2(y), z, t\right) = 1$ ve $\lim\limits_{i\to\infty} N\left(f^2\left(x_{n_i}\right), f^2(y), z, t\right) = 0$ dır. Yani $\lim\limits_{i\to\infty} f^2\left(x_{n_i}\right) = f^2(y)$ olur. Bu durumda, $\left\{M\left(x_{n_i}, f\left(x_{n_i}\right), z, t\right)\right\}$, $\left\{M\left(f\left(x_{n_i}\right), f^2\left(x_{n_i}\right), z, t\right)\right\}$ dizileri ve $\left\{N\left(x_{n_i}, f\left(x_{n_i}\right), z, t\right)\right\}$, $\left\{N\left(f\left(x_{n_i}\right), f^2\left(x_{n_i}\right), z, t\right)\right\}$ dizileri aynı noktaya yakınsar. O halde, her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(y, f(y), z, t) \geq \lim_{i\to\infty} \sup M\left(x_{n_i}, f\left(x_{n_i}\right), z, t\right) = \lim_{i\to\infty} \sup M\left(f\left(x_{n_i}\right), f^2\left(x_{n_i}\right), z, t\right)$$

$$\geq \lim_{i\to\infty} \inf M\left(f\left(x_{n_i}\right), f^2\left(x_{n_i}\right), z, t\right) \geq M\left(f(y), f^2(y), z, t\right)$$

$$N(y, f(y), z, t) \leq \lim_{i\to\infty} \inf N\left(x_{n_i}, f\left(x_{n_i}\right), z, t\right) = \lim_{i\to\infty} \inf N\left(f\left(x_{n_i}\right), f^2\left(x_{n_i}\right), z, t\right)$$

$\leq \lim\limits_{i\to\infty} \sup N\left(f\left(x_{n_i}\right), f^2\left(x_{n_i}\right), z, t\right) \leq N\left(f(y), f^2(y), z, t\right)$

elde edilir. Yani, her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$M(y, f(y), z, t) \geq M\left(f(y), f^2(y), z, t\right)$ ve $N(y, f(y), z, t) \leq N\left(f(y), f^2(y), z, t\right)$

olur. Eğer $f(y) \neq y$ ise her $z \in X$ ve $t > 0$ için $M(y, f(y), z, t) < M\left(f(y), f^2(y), z, t\right)$ ve $N(y, f(y), z, t) > N\left(f(y), f^2(y), z, t\right)$ olur. Bu ise çelişkidir. Bu durumda $f(y) = y$ olmalıdır. O halde y, f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $z \in X$ ($z \neq x$, $z \neq y$) noktası için

$M(x, y, z, t) = M(f(x), f(y), z, t) > M(x, y, z, t)$

$N(x, y, z, t) = N(f(x), f(y), z, t) < N(x, y, z, t)$

elde edilir. Bu ise çelişkidir. O halde, f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 4.2.5: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir tam sezgisel bulanık 2-metrik uzay ve $f:(X,M,N,*,\diamond) \rightarrow (X,M,N,*,\diamond)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için $t = t_1 + t_2$, $a+b = 1$ ve $0 < k < 1$ olmak üzere,

$$M^2(f(x), f(y), z, t) \geq M^2\left(x, y, z, \frac{t_1}{ka}\right) + M\left(x, f(x), z, \frac{t_2}{kb}\right) . M\left(y, f(y), z, \frac{t_2}{kb}\right) \qquad (4.10)$$

$$N^2(f(x), f(y), z, t) \leq N^2\left(x, y, z, \frac{t_1}{ka}\right) - N\left(x, f(x), z, \frac{t_2}{kb}\right) . N\left(y, f(y), z, \frac{t_2}{kb}\right) \qquad (4.11)$$

eşitsizlikleri sağlanıyor ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: Bir önceki bölümdeki Teorem 3.2.5'e benzer şekilde ispatlanır.

Uyarı 4.2.6: Teorem 4.2.5'deki Eşitsizlik (4.10) ve (4.11) de $t_2 = 0$ ve $t_1 = at$ alınırsa, Teorem 4.2.5 ile Teorem 4.2.1 çakışır.

Teorem 4.2.7: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir tam sezgisel bulanık 2-metrik uzay ve $f:(X,M,N,*,\diamond) \rightarrow (X,M,N,*,\diamond)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$, $t > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n \in (0, \infty)$ olmak üzere,

$$M(f^n(x), f^n(y), z, k_n t) \geq M(x, y, z, t) \tag{4.12}$$

$$N(f^n(x), f^n(y), z, k_n t) \leq N(x, y, z, t) \tag{4.13}$$

eşitsizlikleri sağlanıyor ve $k_n \to 0$ ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f^n(x)$ şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. Bu şekilde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \to \infty} M(x_n, x_{n+p}, z, t) = 1$ olduğu Teorem 3.2.7'den bilinmektedir. Burada, $\lim_{n \to \infty} N(x_n, x_{n+p}, z, t) = 0$ olduğu gösterilecektir. Her $z \in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$0 \leq N(x_n, x_{n+p}, z, t) \leq N\left(x_n, x_{n+1}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamond N\left(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$\diamond \ldots \diamond N\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamond N\left(x_n, x_{n+1}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$\diamond N\left(x_{n+1}, x_{n+2}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamond \ldots \diamond N\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamond N\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

sağlanır. Yukarıdaki eşitsizliklerde $t_0 = \frac{t}{2(p-1)+1}$ yazılır ve Eşitsizlik (4.13) göz önüne alınırsa,

$$0 \leq N(x_n, x_{n+p}, z, t) \leq N\left(x, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{k_n}\right) \diamond N\left(x, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{k_{n+1}}\right)$$

$$\diamond N\left(x, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{k_{n+2}}\right) \diamond \ldots \diamond N\left(x, x_1, x_{n+p}, \frac{t_0}{k_{n+p-2}}\right) \diamond N\left(x, x_1, z, \frac{t_0}{k_n}\right)$$

$$\diamond N\left(x, x_1, z, \frac{t_0}{k_{n+1}}\right) \diamond N\left(x, x_1, z, \frac{t_0}{k_{n+2}}\right) \diamond \ldots \diamond N\left(x, x_1, z, \frac{t_0}{k_{n+p-1}}\right)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $k_n \to 0$ olduğundan Koşul (SBM12) kullanılarak,

$$\lim_{n \to \infty} N(x_n, x_{n+p}, z, t) \leq 0 \diamond 0 \diamond \ldots \diamond 0 = 0$$

elde edilir. O halde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $(X, M, N, *, \diamond)$ tam sezgisel bulanık 2-metrik uzay olduğundan $x_n \to y$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradan her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$1 \geq M(y, f(y), z, t) \geq M\left(y, f(y), x_{n+1}, \tfrac{t}{3}\right) * M\left(y, x_{n+1}, z, \tfrac{t}{3}\right) * M\left(x_{n+1}, f(y), z, \tfrac{t}{3}\right)$$

$$\geq M\left(x_{n+1}, y, f(y), \tfrac{t}{3}\right) \;*\; M\left(x_{n+1}, y, z, \tfrac{t}{3}\right) * \; M\left(x_n, y, z, \frac{t}{3k_1}\right)$$

$$0 \leq N(y, f(y), z, t) \leq N\left(y, f(y), x_{n+1}, \tfrac{t}{3}\right) \diamond N\left(y, x_{n+1}, z, \tfrac{t}{3}\right) \diamond N\left(x_{n+1}, f(y), z, \tfrac{t}{3}\right)$$

$$\leq N\left(x_{n+1}, y, f(y), \tfrac{t}{3}\right) \diamond N\left(x_{n+1}, y, z, \tfrac{t}{3}\right) \diamond N\left(x_n, y, z, \frac{t}{3k_1}\right)$$

elde edilir. $x_n \to y$ olduğundan $1 \geq M(y, f(y), z, t) \geq 1 * 1 * 1 = 1$ ve $0 \leq N(y, f(y), z, t) \leq 0 \diamond 0 \diamond \ldots \diamond 0 = 0$ olur. Yani her $z \in X$ ve $t > 0$ için $M(y, f(y), z, t) = 1$ ve $N(y, f(y), z, t) = 0$ bulunur. Bu durumda $f(y) = y$ olur. O halde y, f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y'nin f fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f^n(x) = x$ ve $f^n(y) = y$ olur. Her $z \in X$ $(z \neq x, z \neq y)$ ve $t > 0$ için

$$0 \leq N(x, y, z, t) = N(f^n(x), f^n(y), z, t) \leq N\left(x, y, z, \frac{t}{k_n}\right)$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa Koşul (SBM12) den $0 \leq N(x,y,z,t) \leq N\left(x,y,z, \frac{t}{k^n}\right) \to 0$ elde edilir. Yani her $z \in X$ için $N(x, y, z, t) = 0$ dır. O halde $x = y$ olur. Dolayısıyla f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Uyarı 4.2.8: Teorem 4.2.7'de $n = 1$ alınması durumunda Eşitsizlik (4.13) Teorem 4.2.1'deki Eşitsizlik (4.4) ü gerektirmez. Çünkü bu durumda $k_1 < 1$ olması garanti edilemez.

Örnek 4.2.9: Örnek 2.1.21'de verilen (X, d) tam 2-metrik uzayını ve bu d 2-metriği tarafından üretilen $(X, M_d, N_d, *, \diamond)$ standart sezgisel bulanık 2-metrik uzayını ele alalım. Bu durumda $(X, M_d, N_d, *, \diamond)$ bir tam sezgisel bulanık 2-metrik uzaydır. $f: X \to X$, $f(x) = 1$ dönüşümü verilsin. Bu durumda her $x, y, z \in X$, $t > 0$ ve $0 < k < 1$ için $M(f^n(x), f^n(y), z, k^n t) = 1$ ve $N(f^n(x), f^n(y), z, k^n t) = 0$ olur. Aynı zamanda $n \to \infty$ iken $k^n \to 0$ dır. Buradan f fonksiyonunun Teorem 4.2.7'nin bütün koşullarını sağladığı görülmektedir. Ayrıca $1 \in X$ noktası f fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır.

Teorem 4.2.10: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir tam sezgisel bulanık 2-metrik uzay, $f:(X,M,N,*,\diamond) \rightarrow (X,M,N,*,\diamond)$ sürekli bir fonksiyon ve $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subseteq X$ iki dizi olsun. Her $x, y, z \in X$, $t > 0$ ve $0 < k < 1$ için

$$M(f^m(x), f^m(y), z, kt) \geq M(x, y, z, t)$$

$$N(f^m(x), f^m(y), z, kt) \leq N(x, y, z, t)$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ mevcut olsun. Eğer her $z \in X$ ve $t > 0$ için $x_n \rightarrow x$ ve $y_n \rightarrow y$ iken $M(x_n, y_n, z, t) \rightarrow M(x, y, z, t)$ ve $N(x_n, y_n, z, t) \rightarrow N(x, y, z, t)$ koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: Teorem 3.2.10'a benzer şekilde ispatlanır.

Tanım 4.2.11: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay, $\varepsilon > 0$ ve $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ X'de sonlu bir dizi olsun. Eğer her $z \in X$, $t > 0$ ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için $M(x_{i-1}, x_i, z, t) > 1-\varepsilon$ ve $N(x_{i-1}, x_i, z, t) < \varepsilon$ oluyorsa bu diziye x'den y'ye bir ε-zincir denir. Her $x, y \in X$ için $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel bulanık 2-metrik uzayında x'den y'ye bir ε-zincir mevcut ise bu sezgisel bulanık 2-metrik uzaya ε-zincirlenebilir uzay adı verilir.

Tanım 4.2.12: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel bulanık 2-metrik uzay, $f:(X,M,N,*,\diamond) \rightarrow (X,M,N,*,\diamond)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ ve $t > 0$ için $\varepsilon > 0$, $0 < \lambda < 1$ olmak üzere

$$M(x, y, z, t) > 1-\varepsilon \Longrightarrow M(f(x), f(y), z, t) \geq M\left(x, y, z, \tfrac{t}{\lambda}\right)$$

$$N(x, y, z, t) < \varepsilon \Longrightarrow N(f(x), f(y), z, t) \leq N\left(x, y, z, \tfrac{t}{\lambda}\right)$$

sağlanıyor ise f 'ye (ε-λ)-düzgün yerel daraltan dönüşüm adı verilir.

(ε-λ)-düzgün yerel daraltan her dönüşümün sürekli olduğu açıktır.

Örnek 4.2.13: Örnek 2.1.21'de verilen (X, d) tam 2-metrik uzayını ve bu d 2-metriği tarafından üretilen $(X, M_d, N_d, *, \diamond)$ standart sezgisel bulanık 2-metrik uzayını ele alalım. $f: X \to X$, $f(x) = 1$ fonksiyonu verilsin. $\varepsilon > 0$, $0 < \lambda < 1$ olsun. $x, y, z \in X$ ve $t>0$ için $M(x, y, z, t) > 1-\varepsilon$ ve $N(x, y, z, t) < \varepsilon$ verilsin. Bu durumda,

$$M(f(x), f(y), z, t) = M(1, 1, z, t) = 1 \geq M\left(x, y, z, \frac{t}{\lambda}\right)$$

$$N(f(x), f(y), z, t) = N(1, 1, z, t) = 0 \leq N\left(x, y, z, \frac{t}{\lambda}\right)$$

elde edilir. O halde f , $(\varepsilon\text{-}\lambda)$-düzgün yerel daraltan dönüşümdür.

Teorem 4.2.14: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir tam, ε-zincirlenebilir sezgisel bulanık 2-metrik uzay, $f:(X,M,N,*,\diamond)\to (X,M,N,*,\diamond)$ bir $(\varepsilon\text{-}\lambda)$-düzgün yerel daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x\in X$ noktasını alalım. $f(x) \neq x$ olsun. Aksi taktirde, x noktası f fonksiyonunun sabit noktası olur ve ispat tamamlanır. $(X, M, N, *, \diamond)$ ε-zincirlenebilir sezgisel bulanık 2-metrik uzay olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $z\in X$, $t > 0$ ve $i = 1, 2, \dots , n$ için $M(x_{i-1},x_i, z, t) >1-\varepsilon$ ve $N(x_{i-1}, x_i, z, t) < \varepsilon$ olacak şekilde x'den f(x)'e bir $x=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n= f(x)$ ε-zincir vardır. İlk olarak her m pozitif tamsayısı ve her $z\in X$, $t> 0$ ve $i = 1, 2, \dots , n$ için

$$M(f^m(x_{i-1}), f^m(x_i), z, t) \geq M\left(x_{i-1}, x_i, z, \frac{t}{\lambda^m}\right) \tag{4.14}$$

$$N(f^m(x_{i-1}), f^m(x_i), z, t) \leq N\left(x_{i-1}, x_i, z, \frac{t}{\lambda^m}\right) \tag{4.15}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı Teorem 3.2.14'dekine benzer şekilde tümevarım yöntemi ile gösterilir. Yine Teorem 3.2.14'den $\lim_{m\to\infty} M\left(f^m(x), f^{m+p}(x), z, t\right) = 1$ olduğu bilinmektedir. Burada $\lim_{m\to\infty} N\left(f^m(x), f^{m+p}(x), z, t\right) = 0$ olduğu gösterilecektir. Lemma 4.1.16'dan her $z \in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$0 \leq N\left(f^m(x), f^{m+1}(x), z, t\right) = N(f^m(x_0), f^m(x_n), z, t)$$

$$\leq N\left(f^m(x_0), f^m(x_1), f^m(x_n), \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamond N\left(f^m(x_1), f^m(x_2), f^m(x_n), \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$\diamond \dots \diamond N\left(f^m(x_{n-2}), f^m(x_{n-1}), f^m(x_n), \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamond N\left(f^m(x_0), f^m(x_1), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$\diamondsuit \ldots \diamondsuit N\left(f^m(x_{n-1}), f^m(x_n), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamondsuit N\left(f^m(x_{n-1}), f^m(x_n), f^m(x_n), \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $t_0 = \frac{t}{2(p-1)+1}$ yazılır ve Eşitsizlik (4.15) göz önüne alınırsa,

$$0 \leq N\left(f^m(x), f^{m+1}(x), z, t\right) \leq N\left(x_0, x_1, f^m(x_n), \frac{t_0}{\lambda^m}\right) \diamondsuit N\left(x_1, x_2, f^m(x_n), \frac{t_0}{\lambda^m}\right)$$

$$\diamondsuit \ldots \diamondsuit\ N\left(x_{n-2}, x_{n-1}, f^m(x_n), \frac{t_0}{\lambda^m}\right) \diamondsuit\ N\left(x_0, x_1, z, \frac{t_0}{\lambda^m}\right) \diamondsuit\ N\left(x_1, x_2, z, \frac{t_0}{\lambda^m}\right)$$

$$\diamondsuit \ldots \diamondsuit N\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t_0}{\lambda^m}\right) \diamondsuit N\left(x_{n-1}, x_n, z, \frac{t_0}{\lambda^m}\right)$$

elde edilir. $m \to \infty$ için limit alınırsa Koşul (SBM12) kullanılarak, her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$\lim_{m \to \infty} N\left(f^m(x), f^{m+1}(x), z, t\right) \leq 0 \diamondsuit 0 \diamondsuit \ldots \diamondsuit 0 = 0 \tag{4.16}$$

elde edilir. Ayrıca Lemma 4.1.16'den her $z \in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$0 \leq N\left(f^m(x), f^{m+p}(x), z, t\right) \leq\ N\left(f^m(x), f^{m+1}(x), f^{m+p}(x), \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$\diamondsuit N\left(f^{m+1}(x), f^{m+2}(x), f^{m+p}(x), \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamondsuit \ldots \diamondsuit N\left(f^{m+p-2}(x), f^{m+p-1}(x), f^m(x), \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$\diamondsuit N\left(f^m(x), f^{m+1}(x), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamondsuit N\left(f^{m+1}(x), f^{m+2}(x), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$\diamondsuit \ldots \diamondsuit N\left(f^{m+p-1}(x), f^{m+p}(x), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamondsuit N\left(f^{m+p-1}(x), f^{m+p}(x), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlikte $r_0 = \frac{t}{2(p-1)+1}$ yazılır ve Eşitsizlik (4.16) göz önüne alınırsa,

$$\lim_{m \to \infty} N\left(f^m(x), f^{m+p}(x), z, t\right) \leq\ 0 \diamondsuit 0 \diamondsuit \ldots \diamondsuit 0 = 0$$

elde edilir. O halde, $\{f^m(x)\}$ bir Cauchy dizisidir. $(X, M, N, *, \diamondsuit)$ tam sezgisel bulanık 2-metrik uzay olduğundan $f^m(x) \to y$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{m+1}(x) \to f(y)$ dir. Bu durumda $f(y) = y$ olur. O halde y, f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için x ve y birbirinden farklı f fonksiyonunun iki sabit noktası olsun. $(X, M, N, *, \diamond)$ ε-zincirlenebilir sezgisel bulanık 2-metrik uzay olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $z \in X$, $t > 0$ ve $i = 1, 2, \ldots, k$ için $M(w_{i-1}, w_i, z, t) > 1-\varepsilon$ ve $N(w_{i-1}, w_i, z, t) < \varepsilon$ olacak şekilde x'den y'ye bir $x = w_0, w_1, w_2, \ldots, w_k = y$ ε-zincir vardır. Bu durumda bir h pozitif tam sayısı için Lemma 4.1.16'den, her $z \in X$, $t > 0$ ve $p > 0$ için

$$0 \le N(x, y, z, t) = N(f^h(x), f^h(y), z, t) = N(f^h(w_0), f^h(w_k), z, t)$$

$$\le N\left(f^h(w_0), f^h(w_1), f^h(w_k), \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamond N\left(f^h(w_1), f^h(w_2), f^h(w_k), \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$\diamond \ldots \diamond N\left(f^h(w_{k-2}), f^h(w_{k-1}), f^h(w_k), \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamond N\left(f^h(w_0), f^h(w_1), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

$$\diamond \ldots \diamond N\left(f^h(w_{k-1}), f^h(w_k), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right) \diamond N\left(f^h(w_{k-1}), f^h(w_k), z, \frac{t}{2(p-1)+1}\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $s_0 = \frac{t}{2(p-1)+1}$ yazılır ve Eşitsizlik (4.15) göz önüne alınırsa,

$$0 \le N(x, y, z, t) \le N\left(w_0, w_1, f^h(w_k), \frac{s_0}{\lambda^h}\right) \diamond N\left(w_1, w_2, f^m(w_k), \frac{s_0}{\lambda^h}\right)$$

$$\diamond \ldots \diamond N\left(w_{k-2}, w_{k-1}, f^h(w_k), \frac{s_0}{\lambda^h}\right) \diamond N\left(w_0, w_1, z, \frac{s_0}{\lambda^h}\right) \diamond N\left(w_1, w_2, z, \frac{s_0}{\lambda^h}\right)$$

$$\diamond \ldots \diamond N\left(w_{k-1}, w_k, z, \frac{s_0}{\lambda^h}\right) \diamond N\left(w_{k-1}, w_k, z, \frac{s_0}{\lambda^h}\right)$$

olur. $h \to \infty$ için limit alınırsa Koşul (SBM12) kullanılarak, her $z \in X$ ve $t > 0$ için

$$\lim_{h \to \infty} N(x, y, z, t) \le 0 \diamond 0 \diamond \ldots \diamond 0 = 0$$

elde edilir. Yani, her $z \in X$ ve $t > 0$ için $N(x, y, z, t) = 0$ dır. O halde $x = y$ bulunur. Dolayısıyla f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır

5. ESNEK 2-METRİK UZAYLAR

Bu bölümde, 2-metrik uzay yapısı esnek noktaların kullanılmasıyla genelleştirilerek esnek 2-metrik uzay yapısı tanımlanacaktır. Daha sonra esnek 2-metrik uzay kullanılarak esnek 2-metrik topolojik uzay üretilecek ve bu topolojik uzaydaki temel kavramlar tanımlanacaktır. Son olarak Cantor Teoremi ve Baire Kategori Teoreminin de verilmesiyle, esnek 2-metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ispatlanacaktır.

5.1. Esnek 2-Metrik Uzay Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 5.1.1: $\widetilde{X}$ evrensel esnek küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $d\colon SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \to \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümüne $\widetilde{X}$ esnek kümesi üzerinde bir esnek 2-metrik adı verilir.

(EM1) Her $P_\lambda^x, P_\mu^y \in SP(\widetilde{X}), P_\lambda^x \neq P_\mu^y$ için $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \neq \bar{0}$ olacak şekilde bir $P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ mevcuttur.

(EM2) $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z$ esnek noktalarından en az ikisi birbirine eşit ise $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) = \bar{0}$ dır.

(EM3) Her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) = d(P_\mu^y, P_\gamma^z, P_\lambda^x) = d(P_\gamma^z, P_\lambda^x, P_\mu^y)$ dir.

(EM4) Her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z, P_\eta^t \in SP(\widetilde{X})$ için $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \leq d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\eta^t) + d(P_\lambda^x, P_\eta^t, P_\gamma^z) + d(P_\eta^t, P_\mu^y, P_\gamma^z)$ dir.

Üzerinde bir d esnek 2-metriği tanımlanmış olan $\widetilde{X}$ esnek kümesine esnek 2-metrik uzay adı verilir ve $(\widetilde{X}, d)$ ikilisi ile gösterilir. Koşul (EM2) ve (EM4) den her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \gtrapprox \bar{0}$ olduğu açıktır.

Uyarı 5.1.2: (1) Eğer E parametre kümesi tek noktalı bir küme ise Tanım 5.1.1 Gähler tarafından verilmiş olan Tanım 2.1.1 ile çakışır. Böylece Gähler tarafından verilen tanım esnek evrene genişletilmiştir.

(2) Sonlu parametre kümesi E ile birlikte $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay olsun. Her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için

$$m_d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) = \max_{\eta \in E} d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z)(\eta)$$

şeklinde tanımlanan $m_d : SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $SP(\widetilde{X})$ üzerinde Gähler anlamında bir 2-metriktir.

Örnek 5.1.3: (1) $\widetilde{X}$ evrensel esnek küme olmak üzere her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için

$$d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) = \begin{cases} \overline{0}, & P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \text{ esnek noktalarından en az ikisi birbirine eşit ise} \\ \overline{1}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d: SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \to \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü $\widetilde{X}$ esnek kümesi üzerinde bir esnek 2-metriktir. Bu esnek 2-metriğe ayrık esnek 2-metrik veya diskret esnek 2-metrik, $(\widetilde{X}, d)$ ikilisine ise ayrık esnek 2-metrik uzay adı verilir.

(2) $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ bir alt küme ve $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}$ parametre kümesi olsun. Her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için

$$d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) = \begin{cases} |\overline{x}-\overline{y}|+|\overline{y}-\overline{z}|+|\overline{x}-\overline{z}|+|\overline{\lambda}-\overline{\mu}|+|\overline{\mu}-\overline{\gamma}|+|\overline{\lambda}-\overline{\gamma}|, & P_\lambda^x \neq P_\mu^y \neq P_\gamma^z \\ \overline{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d : SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \to \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü $\widetilde{X}$ esnek kümesi üzerinde bir esnek 2-metriktir. Bu esnek 2-metriğe mutlak esnek 2-metrik, $(\widetilde{X}, d)$ ikilisine ise mutlak esnek 2-metrik uzay adı verilir.

(3) X en az iki elemana sahip bir küme ve $\emptyset \neq E$ parametre kümesi olsun. Her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) = \overline{0}$ şeklinde tanımlanan $d: SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \to \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü $\widetilde{X}$ esnek kümesi üzerinde bir esnek 2-metriktir.

(4) X en az iki elemana sahip bir küme ve $\emptyset \neq E$ parametre kümesi olsun. Her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) = |(\overline{x}-\overline{y})(\overline{y}-\overline{z})(\overline{z}-\overline{x})|+|(\overline{\lambda}-\overline{\mu})(\overline{\mu}-\overline{\gamma})(\overline{\gamma}-\overline{\lambda})|$ şeklinde

tanımlanan $d:SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \times SP(\widetilde{X}) \to \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü $\widetilde{X}$ esnek kümesi üzerinde bir esnek 2-metriktir.

Tanım 5.1.4: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay olsun. Eğer her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \widetilde{\leq} \tilde{k}$ olacak şekilde bir $\tilde{k} \widetilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayısı mevcut ise $(\widetilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayına sınırlı esnek 2-metrik uzay denir.

Tanım 5.1.5: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay ve $\Phi \neq \widetilde{Y} \widetilde{\subseteq} \widetilde{X}$ bir esnek alt küme olsun. Her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{Y})$ için $d_Y(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) = d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z)$ şeklinde tanımlanan $d_Y : SP(\widetilde{Y}) \times SP(\widetilde{Y}) \times SP(\widetilde{Y}) \to \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü $\widetilde{Y}$ esnek kümesi üzerinde bir esnek 2-metriktir. Bu 2-metriğe d ile $\widetilde{Y}$ esnek kümesi üzerinde üretilen alt 2-metrik, $(\widetilde{Y}, d_Y)$ ikilisine ise $(\widetilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayının bir esnek 2-metrik alt uzayı denir.

Tanım 5.1.6: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay, $P_\lambda^x, P_\mu^y \in SP(\widetilde{X})$ ve $\tilde{r} \widetilde{\in} \mathbb{R}(E)^*$ olsun. Bu durumda,

(1) $B_{\tilde{r}}(P_\lambda^x, P_\mu^y) = \{ P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X}) \mid d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \widetilde{<} \tilde{r} \}$ şeklinde tanımlanan kümeye P_λ^x ve P_μ^y merkezli $\tilde{r}$ yarıçaplı 2-açık yuvar denir. $SS\left(B_{\tilde{r}}(P_\lambda^x, P_\mu^y)\right)$ esnek kümesine ise P_λ^x ve P_μ^y merkezli $\tilde{r}$ yarıçaplı esnek 2-açık yuvar adı verilir.

(2) $B_{\tilde{r}}[P_\lambda^x, P_\mu^y] = \{ P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X}) \mid d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \widetilde{\leq} \tilde{r} \}$ şeklinde tanımlanan kümeye P_λ^x ve P_μ^y merkezli $\tilde{r}$ yarıçaplı 2-kapalı yuvar denir. $SS(B_{\tilde{r}}[P_\lambda^x, P_\mu^y])$ esnek kümesine ise P_λ^x ve P_μ^y merkezli $\tilde{r}$ yarıçaplı esnek 2-kapalı yuvar adı verilir.

Örnek 5.1.7: Örnek 5.1.3 (1)'de verilen $(\widetilde{X}, d)$ ayrık esnek 2-metrik uzayını ele alalım. Bu durumda, her $P_\lambda^x, P_\mu^y \in SP(\widetilde{X})$ için 2-açık yuvar ve 2-kapalı yuvar aşağıdaki şekildedir.

$$B_{\tilde{r}}(P_\lambda^x, P_\mu^y) = \begin{cases} SP(\widetilde{X}), & \tilde{r} \widetilde{>} \overline{1} \\ \{P_\lambda^x, P_\mu^y\}, & \tilde{r} \widetilde{\leq} \overline{1} \end{cases}, \quad B_{\tilde{r}}[P_\lambda^x, P_\mu^y] = \begin{cases} SP(\widetilde{X}), & \tilde{r} \widetilde{\geq} \overline{1} \\ \{P_\lambda^x, P_\mu^y\}, & \tilde{r} \widetilde{<} \overline{1} \end{cases}$$

Tanım 5.1.8: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay olsun. Eğer her $P_\lambda^x, P_\mu^y \in SP(\widetilde{X})$, $P_\lambda^x \neq P_\mu^y$ için sırasıyla P_λ^x, P_γ^z ve P_μ^y, P_γ^z merkezli $\tilde{r} \widetilde{>} \overline{0}$ yarıçaplı $SS\left(B_{\tilde{r}}(P_\lambda^x, P_\gamma^z)\right)$ ve $SS\left(B_{\tilde{r}}(P_\mu^y, P_\gamma^z)\right)$

esnek 2-açık yuvarları, $\left(P_\lambda^x \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{r}}\left(P_\lambda^x, P_\gamma^z\right)\right), P_\mu^y \tilde{\notin} SS\left(B_{\tilde{r}}\left(P_\lambda^x, P_\gamma^z\right)\right)\right)$ ve $\left(P_\lambda^x \tilde{\notin} SS\left(B_{\tilde{r}}\left(P_\mu^y, P_\gamma^z\right)\right), P_\mu^y \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{r}}\left(P_\mu^y, P_\gamma^z\right)\right)\right)$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, bu esnek 2-metrik uzaya T_1 özelliğine sahiptir denir.

Teorem 5.1.9: Her esnek 2-metrik uzay T_1 özelliğine sahiptir.

İspat: $(\tilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay ve $P_\lambda^x, P_\mu^y \in SP(\tilde{X})$, $P_\lambda^x \neq P_\mu^y$ olacak şekilde iki esnek nokta olsun. Bu durumda $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \neq \bar{0}$ olacak şekilde bir $P_\gamma^z \in SP(\tilde{X})$ mevcuttur. $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \tilde{>} \bar{0}$ dır. $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) = \tilde{r}$ diyelim. $\tilde{s} = \frac{\tilde{r}}{2}$ olarak seçilirse $SS\left(B_{\tilde{s}}\left(P_\lambda^x, P_\gamma^z\right)\right)$ ve $SS\left(B_{\tilde{s}}\left(P_\mu^y, P_\gamma^z\right)\right)$ esnek kümeleri iki esnek 2-açık yuvar olup $\left(P_\lambda^x \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{s}}\left(P_\lambda^x, P_\gamma^z\right)\right), P_\mu^y \tilde{\notin} SS\left(B_{\tilde{s}}\left(P_\lambda^x, P_\gamma^z\right)\right)\right)$ ve $\left(P_\lambda^x \tilde{\notin} SS\left(B_{\tilde{s}}\left(P_\mu^y, P_\gamma^z\right)\right), P_\mu^y \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{s}}\left(P_\mu^y, P_\gamma^z\right)\right)\right)$ sağlanmaktadır. Bu ise $(\tilde{X}, d)$'nin T_1 özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Note 5.1.10: Esnek 2-açık yuvarların $\delta = \left\{ SS\left(B_{\tilde{r}}\left(P_\lambda^x, P_\mu^y\right)\right) \mid \tilde{r} \tilde{\in} \mathbb{R}(E)^*, P_\lambda^x, P_\mu^y \in SP(\tilde{X})\right\}$ ailesi $\tilde{X}$ esnek kümesi üzerinde bir esnek topoloji üretir. Alttabanı bu δ ailesi olan üretilmiş esnek topolojiye esnek 2-metrik topoloji denir ve bu topoloji $\ll\delta\gg = \tilde{\tau}_d$ ile gösterilir. $\tilde{\tau}_d$'nin elemanlarına esnek 2-açık küme ve bu kümelerin tümleyenlerine esnek 2-kapalı küme adı verilir.

Lemma 5.1.11: $(\tilde{X}, \tilde{\tau}_d)$ bir esnek 2-metrik topolojik uzay ve G bir esnek alt küme olsun. G'nin esnek 2-açık küme olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $P_\mu^y \tilde{\in} G$ için $P_\mu^y \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{r}_1}\left(P_\mu^y, P_{\lambda_1}^{x_1}\right)\right) \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r}_2}\left(P_\mu^y, P_{\lambda_2}^{x_2}\right)\right) \tilde{\cap} \ldots \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r}_n}\left(P_\mu^y, P_{\lambda_n}^{x_n}\right)\right) \tilde{\subseteq} G$ olacak şekilde sonlu sayıda $P_{\lambda_1}^{x_1}, P_{\lambda_2}^{x_2}, P_{\lambda_3}^{x_3}, \ldots, P_{\lambda_n}^{x_n} \in SP(\tilde{X})$, $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \ldots, \tilde{r}_n \tilde{>} \bar{0}$ mevcut olmasıdır.

İspat: $SS\left(B_{\tilde{r}_1}\left(P_\mu^y, P_{\lambda_1}^{x_1}\right)\right) \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r}_2}\left(P_\mu^y, P_{\lambda_2}^{x_2}\right)\right) \tilde{\cap} \ldots \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r}_n}\left(P_\mu^y, P_{\lambda_n}^{x_n}\right)\right)$ esnek kümesi esnek 2-açık küme olduğundan yeter koşul sağlanmaktadır. Gerek koşulun sağlandığını göstermek için G bir esnek 2-açık küme ve $P_\mu^y \tilde{\in} G$ olsun. Bu durumda,

$$P_\mu^y \widetilde{\in} \bigcap_{i=1}^{m} SS\left(B_{\widetilde{r}_i}\left(P_{\gamma_i}^{z_i}, P_{\lambda_i}^{x_i}\right)\right) \widetilde{\subseteq} G$$

olacak şekilde $SS\left(B_{\widetilde{r}_i}\left(P_{\gamma_i}^{z_i}, P_{\lambda_i}^{x_i}\right)\right)$, i=1,2,3, ... ,m esnek 2-açık yuvarları vardır. Her i=1,2,3, … ,m için $P_\mu^y \widetilde{\in} SS\left(B_{\widetilde{r}_i}\left(P_{\gamma_i}^{z_i}, P_{\lambda_i}^{x_i}\right)\right)$ olduğundan $d\left(P_\mu^y, P_{\gamma_i}^{z_i}, P_{\lambda_i}^{x_i}\right) \widetilde{<} \widetilde{r}_i$ dir. $d\left(P_\mu^y, P_{\gamma_i}^{z_i}, P_{\lambda_i}^{x_i}\right) = \widetilde{s}_i$ diyelim. $\widetilde{t}_i \widetilde{<} \frac{\widetilde{r}_i - \widetilde{s}_i}{\widetilde{2}}$ seçelim. Bu durumda her i = 1,2, … ,m için $SS\left(B_{\widetilde{t}_i}\left(P_\mu^y, P_{\lambda_i}^{x_i}\right)\right) \widetilde{\cap} SS\left(B_{\widetilde{t}_i}\left(P_\mu^y, P_{\gamma_i}^{z_i}\right)\right) \widetilde{\subseteq} SS\left(B_{\widetilde{r}_i}\left(P_{\gamma_i}^{z_i}, P_{\lambda_i}^{x_i}\right)\right)$ olur. O halde

$$P_\mu^y \widetilde{\in} SS\left(B_{\widetilde{t}_1}\left(P_\mu^y, P_{\lambda_1}^{x_1}\right)\right) \widetilde{\cap} SS\left(B_{\widetilde{t}_1}\left(P_\mu^y, P_{\gamma_1}^{z_1}\right)\right) \widetilde{\cap} \ldots \widetilde{\cap} SS\left(B_{\widetilde{t}_m}\left(P_\mu^y, P_{\lambda_m}^{x_m}\right)\right)$$

$$\widetilde{\cap} SS\left(B_{\widetilde{t}_m}\left(P_\mu^y, P_{\gamma_m}^{z_m}\right)\right) \widetilde{\subseteq} \cap_{i=1}^{m} SS\left(B_{\widetilde{r}_i}\left(P_{\gamma_i}^{z_i}, P_{\lambda_i}^{x_i}\right)\right) \widetilde{\subseteq} G$$

sağlanır.

Tanım 5.1.12: $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau}_d)$ bir esnek 2-metrik topolojik uzay ve F bir esnek alt küme olsun. $P_\lambda^x \widetilde{\in} G$ olan her G esnek 2-açık kümesi için $G \widetilde{\cap} (F \setminus P_\lambda^x) \neq \Phi$ oluyorsa P_λ^x esnek noktasına F'nin esnek 2-yığılma noktası denir. F'nin esnek 2-yığılma noktalarının kümesi ad(F) ile gösterilir ve $F' = SS(ad(F))$ esnek kümesine F'nin türev kümesi adı verilir.

Tanım 5.1.13: $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau}_d)$ bir esnek 2-metrik topolojik uzay ve F bir esnek alt küme olsun. $SP(F) \cup ad(F)$ kümesine F'nin esnek 2-kapanış noktalarının kümesi adı verilir, ve cl(F) ile gösterilir. $\overline{F} = SS(cl(F))$ esnek kümesine de F'nin kapanışı adı verilir.

Lemma 5.1.14: $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau}_d)$ esnek 2-metrik topolojik uzaydaki her F esnek alt kümesi için $\overline{F}$ esnek kümesi esnek 2-kapalıdır.

İspat: $\overline{F} = F \widetilde{\cup} F'$ esnek kümesinin $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau}_d)$ esnek 2-metrik topolojik uzayda esnek 2-kapalı olduğunu ispatlamak için $\widetilde{X} \setminus \overline{F} = \widetilde{X} \setminus (F \widetilde{\cup} F') = (\widetilde{X} \setminus F) \widetilde{\cap} (\widetilde{X} \setminus F')$ esnek kümesinin esnek 2-açık olduğunu göstereceğiz. $P_\mu^y \widetilde{\in} H = (\widetilde{X} \setminus F) \widetilde{\cap} (\widetilde{X} \setminus F')$ olsun. Bu durumda $P_\mu^y \widetilde{\notin} F$ and $P_\mu^y \widetilde{\notin} F'$ dir. $P_\mu^y \widetilde{\notin} F'$ ise P_μ^y, F'nin esnek 2-yığılma noktası değildir. Yani

$G \tilde{\cap} (F \backslash P_{\mu}^{y}) = \Phi$ olacak şekilde bir $P_{\mu}^{y} \tilde{\in} G$ esnek 2-açık kümesi vardır. $P_{\mu}^{y} \tilde{\notin} F$ olduğundan

$$G \tilde{\cap} F = \Phi \Longrightarrow G \tilde{\subseteq} \tilde{X} \backslash F \tag{5.1}$$

dir. Her $P_{\gamma}^{z} \tilde{\in} G$ için $P_{\gamma}^{z} \tilde{\notin} F'$ dir. Bu durumda,

$$G \tilde{\cap} F' = \Phi \Longrightarrow G \tilde{\subseteq} \tilde{X} \backslash F' \tag{5.2}$$

olur. Denklem (5.1) ve (5.2) den

$$G \tilde{\subseteq} (\tilde{X} \backslash F) \tilde{\cap} (\tilde{X} \backslash F') = \tilde{X} \backslash (F \tilde{\cup} F')$$

elde edilir. G esnek 2-açık küme olduğundan Lemma 5.1.11'den $P_{\mu}^{y} \tilde{\in} \bigcap_{i=1}^{n} SS\left(B_{\tilde{r}_i}(P_{\mu}^{y}, P_{\lambda_i}^{x_i})\right) \tilde{\subseteq} G \tilde{\subseteq} \tilde{X} \backslash (F \tilde{\cup} F')$ olacak şekilde $P_{\lambda_i}^{x_i} \in SP(\tilde{X})$, $\tilde{r}_i \tilde{>} \bar{0}$ $(1 \leq i \leq n)$ mevcuttur. Dolayısıyla $\tilde{X} \backslash (F \tilde{\cup} F')$ esnek kümesi esnek 2-açıktır. O halde $\bar{F} = F \tilde{\cup} F'$ esnek 2-kapalı kümedir.

Lemma 5.1.15: $(\tilde{X}, \tilde{\tau}_d)$ bir esnek 2-metrik topolojik uzay ve F bir esnek alt küme olsun. F esnek kümesinin esnek 2-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\bar{F} = F$ olmasıdır.

İspat: F esnek kümesi $(\tilde{X}, \tilde{\tau}_d)$ esnek 2-metrik topolojik uzayda esnek 2-kapalı olsun. $F \tilde{\subseteq} \bar{F}$ olduğu açıktır. $\bar{F} \tilde{\subseteq} F$ olduğunu göstermek için $P_{\lambda}^{x} \tilde{\in} \bar{F}$ alalım. O halde $P_{\lambda}^{x} \tilde{\in} F$ veya $P_{\lambda}^{x} \tilde{\in} F'$ dir. $P_{\lambda}^{x} \tilde{\in} F$ ise ispat tamamlanır. Diğer durum için $P_{\lambda}^{x} \tilde{\in} F' \backslash F$ olsun. F kümesi esnek 2-kapalı ve $P_{\lambda}^{x} \tilde{\notin} F$ olduğundan $\tilde{X} \backslash F$ esnek 2-açık olup $P_{\lambda}^{x} \tilde{\in} \tilde{X} \backslash F$ dir. esnek 2-yığılma nokta tanımından $F \tilde{\cap} \left[(\tilde{X} \backslash F) \backslash P_{\lambda}^{x}\right] \neq \Phi$ dir. $P_{\lambda}^{x} \tilde{\notin} F$ olduğundan $F \tilde{\cap} (\tilde{X} \backslash F) \neq \Phi$ dir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $P_{\lambda}^{x} \tilde{\in} F$ olmalıdır. Bu durumda $\bar{F} \tilde{\subseteq} F$ olur.

Theorem 5.1.16: Esnek 2-metrik topolojik uzaylarda her esnek 2-kapalı yuvar esnek 2-kapalı bir kümedir.

İspat: $(\tilde{X}, \tilde{\tau}_d)$ esnek 2-metrik topolojik uzayda $SS(B_{\tilde{r}}[P_{\lambda}^{x}, P_{\mu}^{y}])$, P_{λ}^{x} ve P_{μ}^{y} merkezli $\tilde{r}$ yarıçaplı bir esnek 2-kapalı yuvar olsun. $SS(B_{\tilde{r}}[P_{\lambda}^{x}, P_{\mu}^{y}])$'nin bütün esnek 2-yığılma noktalarının $SS(B_{\tilde{r}}[P_{\lambda}^{x}, P_{\mu}^{y}])$'nin içinde olduğunu göstereceğiz. P_{e}^{a} esnek noktası,

$P_e^a \tilde{\notin} SS(B_{\tilde{r}}[P_\lambda^x, P_\mu^y])$ olacak şekilde $SS(B_{\tilde{r}}[P_\lambda^x, P_\mu^y])$'nin bir esnek 2-yığılma noktası olsun. Bu durumda $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_e^a) \tilde{>} \tilde{r}$ dır. $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \bar{0}$ verilsin. $SS(B_{\tilde{\varepsilon}}(P_\lambda^x, P_e^a)) \tilde{\cap} SS(B_{\tilde{\varepsilon}}(P_\lambda^x, P_e^a))$ esnek 2-açık küme olup P_e^a esnek noktasını içerdiğinden $SS(B_{\tilde{r}}[P_\lambda^x, P_\mu^y]) \tilde{\cap} \{[SS(B_{\tilde{\varepsilon}}(P_\lambda^x, P_e^a)) \tilde{\cap} SS(B_{\tilde{\varepsilon}}(P_\lambda^x, P_e^a))] \backslash P_e^a\} \neq \Phi$ dir. Bu durumda $P_f^b \tilde{\in} SS(B_{\tilde{r}}[P_\lambda^x, P_\mu^y]) \tilde{\cap} \{[SS(B_{\tilde{\varepsilon}}(P_\lambda^x, P_e^a)) \tilde{\cap} SS(B_{\tilde{\varepsilon}}(P_\lambda^x, P_e^a))] \backslash P_e^a\}$ olacak şekilde bir esnek nokta vardır. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanmaktadır.

$$d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_e^a) \tilde{\leq} d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_f^b) + d(P_\lambda^x, P_f^b, P_e^a) + d(P_f^b, P_\mu^y, P_e^a) \tilde{<} \tilde{r} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = \bar{2}\,\tilde{\varepsilon} + \tilde{r}.$$

$\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \bar{0}$ keyfi olduğundan $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_e^a) \tilde{<} \tilde{r}$ ifadesi varsayımımız ile çelişmektedir. O halde, P_e^a esnek noktası $SS(B_{\tilde{r}}[P_\lambda^x, P_\mu^y])$ esnek kümesinin esnek 2-yığılma noktası olmamaktadır. Dolayısıyla, $SS(B_{\tilde{r}}[P_\lambda^x, P_\mu^y])$ esnek kümesi bütün esnek 2-yığılma noktalarını içermektedir. O halde, $SS(B_{\tilde{r}}[P_\lambda^x, P_\mu^y])$ esnek 2-kapalı kümedir.

Uyarı 5.1.17: Sonlu parametre kümesi ile birlikte esnek metrik uzayların birinci sayılabilir uzay (A_1-uzayı) olduğu bilinmektedir, fakat bu özellik esnek 2-metrik uzaylarda sağlanmamaktadır. Yani, esnek 2-metrik uzayların genel olarak birinci sayılabilir uzay olması gerekmez.

Tanım 5.1.18: (Yakınsak Dizi) $(\tilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay, $\{P_{\lambda_n}^{x_n}\}_n$, $\tilde{X}$'daki esnek noktaların bir dizisi ve $P_\mu^y \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Her $P_\gamma^z \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_\mu^y, P_\gamma^z) \xrightarrow{n\to\infty} \bar{0}$ oluyorsa $\{P_{\lambda_n}^{x_n}\}_n$ dizisine P_μ^y esnek noktasına yakınsaktır denir. Yani, her $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \bar{0}$ esnek reel sayısı için en az bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyleki her $n \geq N$ ve her $P_\gamma^z \tilde{\in} \tilde{X}$ için $d(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_\mu^y, P_\gamma^z) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ sağlanır ve bu durum $P_{\lambda_n}^{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} P_\mu^y$ veya $\lim_{n\to\infty} P_{\lambda_n}^{x_n} = P_\mu^y$ ile gösterilir.

Lemma 5.1.19: Esnek 2-metrik uzaylarda esnek noktalardan oluşan yakınsak her dizinin bir tek limit noktası vardır.

İspat: Tanım 5.1.18'den kolaylıkla elde edilir.

Lemma 5.1.20: Esnek 2-metrik uzaydaki yakınsaklık ile esnek 2-metriğin ürettiği esnek 2-metrik topolojik uzaydaki yakınsaklık denktir. Yani,

$P_{\lambda_n}^{x_n} \xrightarrow{d} P_\mu^y \Leftrightarrow P_{\lambda_n}^{x_n} \xrightarrow{\tilde{\tau}_d} P_\mu^y.$

İspat: ($\Leftarrow$) $(\widetilde{X},\tilde{\tau}_d)$ esnek 2-metrik topolojik uzayda $\lim_{n\to\infty} P_{\lambda_n}^{x_n} = P_\mu^y$ olsun. $P_\mu^y \tilde{\in} \widetilde{X}$ ve $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \bar{0}$ keyfi olarak verilsin. $SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P_\mu^y, P_\gamma^z\right)\right)$ esnek 2-açık küme olup P_μ^y esnek noktasını içerdiğinden $n \geq m$ iken $P_{\lambda_n}^{x_n} \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P_\mu^y, P_\gamma^z\right)\right)$ olacak şekilde bir m doğal sayısı mevcuttur. Yani $n \geq m$ için $d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_\mu^y, P_\gamma^z\right) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olur ki bu ifade de $d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_\mu^y, P_\gamma^z\right) \xrightarrow{n\to\infty} \bar{0}$ olduğu anlamına gelir. O halde $(\widetilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayda $\{P_{\lambda_n}^{x_n}\}_n$ dizisi P_μ^y esnek noktasına yakınsaktır.

($\Rightarrow$) $(\widetilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayda $\lim_{n\to\infty} P_{\lambda_n}^{x_n} = P_\mu^y$ olsun. $P_\mu^y \tilde{\in} G$ olacak şekilde G bir esnek 2-açık küme olsun. Lemma 5.1.11'den $P_{\gamma_1}^{z_1}, P_{\gamma_2}^{z_2}, P_{\gamma_3}^{z_3}, \dots, P_{\gamma_n}^{z_n} \in SP(\widetilde{X})$, $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \dots, \tilde{r}_n \tilde{>} \bar{0}$ için

$$P_\mu^y \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{r}_1}\left(P_\mu^y, P_{\gamma_1}^{z_1}\right)\right) \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r}_2}\left(P_\mu^y, P_{\gamma_2}^{z_2}\right)\right) \tilde{\cap} \dots \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r}_n}\left(P_\mu^y, P_{\gamma_n}^{z_n}\right)\right) \tilde{\subseteq} G$$

sağlanır. $d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_\mu^y, P_{\gamma_i}^{z_i}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \bar{0}$ olduğundan $n \geq m_i$ için $d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_\mu^y, P_{\gamma_i}^{z_i}\right) \tilde{<} \tilde{r}_i$ olacak şekilde m_i doğal sayıları mevcuttur. Yani her i=1,2, … ,n için $n \geq m_i$ iken $P_{\lambda_n}^{x_n} \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{r}_i}\left(P_\mu^y, P_{\gamma_i}^{z_i}\right)\right)$ dir. $m = \max\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ alınırsa, her $n \geq m$ için

$$P_{\lambda_n}^{x_n} \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{r}_1}\left(P_\mu^y, P_{\gamma_1}^{z_1}\right)\right) \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r}_2}\left(P_\mu^y, P_{\gamma_2}^{z_2}\right)\right) \tilde{\cap} \dots \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r}_n}\left(P_\mu^y, P_{\gamma_n}^{z_n}\right)\right) \tilde{\subseteq} G$$

sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Theorem 5.1.21: $(\widetilde{X},\tilde{\tau}_d)$ bir esnek 2-metrik topolojik uzay, $F \tilde{\subseteq} \widetilde{X}$ ve $P_\mu^y \tilde{\in} \widetilde{X}$ olsun. $\{P_{\lambda_n}^{x_n}\}_n \tilde{\subseteq} F \backslash P_\mu^y$ dizisi P_μ^y esnek noktasına yakınsak ise P_μ^y, F'nin esnek 2-yığılma noktasıdır.

İspat: Tanım 5.1.12 ve Tanım 5.1.18'den kolaylıkla elde edilmektedir.

Tanım 5.1.22: (Esnek 2-Sınırlı Dizi) $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay ve $\{P_{\lambda_n}^{x_n}\}_n$, $\widetilde{X}$'daki esnek noktaların bir dizisi olsun. Her $P_\gamma^z \tilde{\in} \widetilde{X}$ için $\{d\left(P_{\lambda_m}^{x_m}, P_{\lambda_n}^{x_n}, P_\gamma^z\right) | \, m,n \in \mathbb{N}\}$ esnek reel sayılar kümesi sınırlı ise $\{P^{x_n}_{\lambda_n}\}_n$ esnek noktalar dizisine $(\widetilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayda sınırlıdır denir. Yani her $P^z_\gamma \widetilde{\in} \widetilde{X}$ ve her $m, n \in \mathbb{N}$ için $d(P^{x_m}_{\lambda_m}, P^{x_n}_{\lambda_n}, P^z_\gamma) \widetilde{\leq} \widetilde{M}$ olacak şekilde bir $\widetilde{M} \widetilde{>} \overline{0}$ mevcut olması anlamına gelmektedir.

Tanım 5.1.23: (Cauchy Dizisi) $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay, $\{P^{x_n}_{\lambda_n}\}_n$, $\widetilde{X}$'daki esnek noktaların bir dizisi olsun. Her $P^z_\gamma \widetilde{\in} \widetilde{X}$ için $d(P^{x_n}_{\lambda_n}, P^{x_m}_{\lambda_m}, P^z_\gamma) \xrightarrow{n,m\to\infty} \overline{0}$ oluyorsa $\{P^{x_n}_{\lambda_n}\}_n$ dizisine Cauchy dizisi adı verilir. Yani, her $\widetilde{\varepsilon} \widetilde{>} \overline{0}$ esnek reel sayısı için en az bir $N=N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyleki her $n, m \geq N$ ve her $P^z_\gamma \widetilde{\in} \widetilde{X}$ için $d(P^{x_n}_{\lambda_n}, P^{x_m}_{\lambda_m}, P^z_\gamma) \widetilde{<} \widetilde{\varepsilon}$ sağlanır.

Tanım 5.1.24: (Tam Esnek 2-metrik Uzay) $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay olsun. Eğer $\widetilde{X}$'daki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir esnek noktaya yakınsak ise $(\widetilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayına bir tam esnek 2-metrik uzay adı verilir.

Tanım 5.1.25: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay ve $F \widetilde{\subseteq} \widetilde{X}$ olsun.

(1) $\overline{F} = \widetilde{X}$ ise F esnek alt kümesine $(\widetilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayında heryerde yoğundur denir.

(2) $(\overline{F})^o = \Phi$ ise F esnek alt kümesine $(\widetilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayında hiçbir yerde yoğun değildir denir. (Herhangi bir F esnek alt kümesi için F^o ile F'nin esnek 2-iç noktaları ifade edilmektedir ve F'nin içinde kalan esnek 2-açık kümelerin birleşimi olarak tanımlanır.)

Tanım 5.1.26: $(\widetilde{X}, d)$ ve $(\widetilde{Y}, \rho)$ esnek 2-metrik uzaylar, $\varphi_\psi : (\widetilde{X}, \widetilde{\tau}_d) \to (\widetilde{Y}, \widetilde{\tau}_\rho)$ bu esnek 2-metriklerin ürettiği esnek 2-metrik topolojik uzaylar arasında bir esnek fonksiyon ve $P^x_\lambda \in SP(\widetilde{X})$ olsun. Eğer her $\varphi_\psi(P^x_\lambda) \widetilde{\in} V$ esnek 2-açık kümesi için $\varphi_\psi(U) \widetilde{\subseteq} V$ olacak şekilde bir $P^x_\lambda \widetilde{\in} U$ esnek 2-açık kümesi mevcut ise φ_ψ esnek fonksiyonuna P^x_λ esnek noktasında süreklidir denir.

Eğer φ_ψ esnek fonksiyonu her $P^x_\lambda \in SP(\widetilde{X})$ esnek noktasında sürekli ise bu φ_ψ esnek fonksiyonuna $\widetilde{X}$ üzerinde süreklidir denir.

Tanım 5.1.27: $(\widetilde{X}, d)$ ve $(\widetilde{Y}, \rho)$ esnek 2-metrik uzaylar, $\varphi_\psi:(\widetilde{X},\tilde{\tau}_d)\rightarrow(\widetilde{Y}, \tilde{\tau}_\rho)$ bu esnek 2-metriklerin ürettiği esnek 2-metrik topolojik uzaylar arasında bir esnek fonksiyon ve $P^y_\mu \in SP(\widetilde{X})$ olsun. Eğer $(\widetilde{X}, \tilde{\tau}_d)$'da $P^{x_n}_{\lambda_n}\rightarrow P^y_\mu$ koşulunu sağlayan her $\{P^{x_n}_{\lambda_n}\}_n$ esnek nokta dizisi için $(\widetilde{Y}, \tilde{\tau}_\rho)$'da $\varphi_\psi(P^{x_n}_{\lambda_n})\rightarrow\varphi_\psi(P^y_\mu)$ koşulu sağlanıyorsa, φ_ψ esnek fonksiyonuna P^y_μ esnek noktasında dizisel süreklidir denir.

Lemma 5.1.28: Esnek 2-metrik topolojik uzaylar arasındaki her sürekli fonksiyon dizisel süreklidir.

İspat: Süreklilik ve dizisel süreklilik tanımlarından açıktır.

5.2. Esnek 2-Metrik Uzaylarda Cantor Teoremi ve Baire Kategori Teoremi

Bu kısımda, Cantor arakesit teoremi tam esnek 2-metrik uzaylar için ispatlanacaktır ve bu teorem kullanılarak böyle bir uzayın hiçbir yerde yoğun olmayan esnek kümelerin birleşimi şeklinde ifade edilemeyeceği gösterilecektir.

Notasyon 5.2.1: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay, $F \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \widetilde{X}$ ve $P^z_\gamma \in SP(\widetilde{X})$ olsun. Her $\eta \in E$ için $\delta_{P^z_\gamma}(F)(\eta)$ değeri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\delta_{P^z_\gamma}(F)(\eta) = \sup\left\{d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^z_\gamma\right)(\eta) \;\middle|\; P^x_\lambda,\, P^y_\mu \in SP(F)\right\}.$$

$(\widetilde{X}, d)$ sınırlı bir esnek 2-metrik uzay ise her $F \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \widetilde{X}$ esnek alt kümesi her $P^z_\gamma \in SP(\widetilde{X})$ ve her $\eta \in E$ için $\delta_{P^z_\gamma}(F)(\eta)$ değeri sonludur.

Lemma 5.2.2: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay, $F \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \widetilde{X}$ ve $P^z_\gamma \in SP(\widetilde{X})$ olsun. $\delta_{P^z_\gamma}(F)=\delta_{P^z_\gamma}(\overline{F})$ eşitliği sağlanır.

İspat: $F \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \overline{F}$ olduğundan $\delta_{P^z_\gamma}(F) \mathrel{\widetilde{\leq}} \delta_{P^z_\gamma}(\overline{F})$ dir. $\delta_{P^z_\gamma}(\overline{F}) \mathrel{\widetilde{\leq}} \delta_{P^z_\gamma}(F)$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için $P^x_\lambda, P^y_\mu \in cl(F)$ alalım. Eğer $P^x_\lambda, P^y_\mu \in SP(F)$ kümesine ait ise $d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^z_\gamma\right) \mathrel{\widetilde{\leq}} \delta_{P^z_\gamma}(F)$ olduğu açıktır. Farzedelim ki, $P^x_\lambda \notin SP(F)$ ve $P^y_\mu \in SP(F)$ olsun. $\tilde{\varepsilon} \mathrel{\widetilde{>}} \overline{0}$ keyfi verilsin. $P^x_\lambda \in cl(F)$ olduğundan ve $SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}(P^x_\lambda, P^y_\mu)\right) \mathrel{\widetilde{\cap}} SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}(P^x_\lambda, P^z_\gamma)\right)$ esnek 2-açık küme olup P^x_λ esnek noktasını içerdiğinden,

$F \tilde{\sqcap} \left[SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P^x_\lambda, P^y_\mu\right)\right) \tilde{\sqcap} SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P^x_\lambda, P^z_\gamma\right)\right)\right] \neq \Phi$ dır. O halde $P^t_\eta \tilde{\in} F \tilde{\sqcap} \left[SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P^x_\lambda, P^y_\mu\right)\right) \tilde{\sqcap} SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P^x_\lambda, P^z_\gamma\right)\right)\right]$ vardır. Buradan,

$$d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^z_\gamma\right) \tilde{\leq} d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^t_\eta\right) + d\left(P^x_\lambda, P^t_\eta, P^z_\gamma\right) + d\left(P^t_\eta, P^y_\mu, P^z_\gamma\right) \tilde{<} \bar{2}\tilde{\varepsilon} + \delta_{P^z_\gamma}(F)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik her $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \bar{0}$ için sağlandığından $P^x_\lambda \in cl(F)$ ve $P^y_\mu \in SP(F)$ için $d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^z_\gamma\right) \tilde{\leq} \delta_{P^z_\gamma}(F)$ eşitsizliği elde edilir.

Son olarak $P^x_\lambda, P^y_\mu \in cl(F) \setminus SP(F)$ için $d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^z_\gamma\right) \tilde{\leq} \delta_{P^z_\gamma}(F)$ eşitsizliğinin sağlandığı benzer şekilde gösterilir. Bu durumda, her $\eta \in E$ için

$$\delta_{P^z_\gamma}(\bar{F})(\eta) = \sup\left\{d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^z_\gamma\right)(\eta) \,\middle|\, P^x_\lambda, P^y_\mu \in cl(F)\right\} \leq \delta_{P^z_\gamma}(F)(\eta)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\delta_{P^z_\gamma}(F) = \delta_{P^z_\gamma}(\bar{F})$ dir.

Teorem 5.2.3: (Tam Esnek 2-Metrik Uzaylar için Cantor Arakesit Teoremi) Bir $(\tilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayın tam olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{X}$'da boş olmayan esnek 2-kapalı kümelerin $F_1 \tilde{\supseteq} F_2 \tilde{\supseteq} \ldots \tilde{\supseteq} F_n \tilde{\supseteq} \ldots$ ve her $P^z_\gamma \in SP(\tilde{X})$ için $\delta_{P^z_\gamma}(F_n) \xrightarrow{n\to\infty} \bar{0}$ koşullarını sağlayan her $\{F_n\}$ esnek küme dizisi için $\tilde{\bigcap}_{n=1}^{\infty} F_n$ arakesitinin tek noktalı olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$ $(\tilde{X}, d)$ tam esnek 2-metrik uzay ve $\{F_n\}$, $F_1 \tilde{\supseteq} F_2 \tilde{\supseteq} \ldots \tilde{\supseteq} F_n \tilde{\supseteq} \ldots$ ve her $P^z_\gamma \in SP(\tilde{X})$ için $\delta_{P^z_\gamma}(F_n) \xrightarrow{n\to\infty} \bar{0}$ koşullarını sağlayan esnek 2-kapalı kümelerin bir dizisi olsun. $\{F_n\} \neq \Phi$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $P^{x_n}_{\lambda_n} \tilde{\in} F_n$ esnek noktalarını seçelim. $\left\{P^{x_n}_{\lambda_n}\right\}_n$ esnek noktalar dizisinin $(\tilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\{F_n\}$ azalan bir dizi olduğundan her $m \geq n$ için $P^{x_m}_{\lambda_m} \tilde{\in} F_n$ dir. Herhangi bir $P^z_\gamma \in SP(\tilde{X})$ için $m \geq n$ için $d\left(P^{x_m}_{\lambda_m}, P^{x_n}_{\lambda_n}, P^z_\gamma\right) \tilde{\leq} \delta_{P^z_\gamma}(F_n)$ dir. Buradan, $d\left(P^{x_m}_{\lambda_m}, P^{x_n}_{\lambda_n}, P^z_\gamma\right) \tilde{\leq} \delta_{P^z_\gamma}(F_n) \xrightarrow{m,n\to\infty} \bar{0}$ elde edilir. Bu ise, $\left\{P^{x_n}_{\lambda_n}\right\}_n$ esnek noktalar dizisinin $(\tilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. $(\tilde{X}, d)$ tam olduğundan $P^{x_n}_{\lambda_n} \to P^y_\mu$ olacak şekilde bir $P^y_\mu \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek noktası vardır. Şimdi ise

$P^{y}_{\mu}\tilde{\in}\tilde{\cap}^{\infty}_{n=1}F_n$ olduğunu iddia ediyoruz. Varsayalım ki bazı k'lar için $P^{x_k}_{\lambda_k} \neq P^{y}_{\mu}$ olsun. Eğer her k için $P^{x_k}_{\lambda_k} = P^{y}_{\mu}$ olursa ispat tamamlanmış olur. $n\in\mathbb{N}$ sabit tutalım. $P^{y}_{\mu} \tilde{\in} G$ esnek 2-açık bir küme olsun. $P^{x_n}_{\lambda_n}\rightarrow P^{y}_{\mu}$ olduğundan her $k \geq n_1$ için $P^{x_k}_{\lambda_k} \tilde{\in} G$ olacak şekilde $n_1\in\mathbb{N}$ mevcuttur. Bu durumda, her $k \geq \max\{n,n_1\}$ için $P^{x_k}_{\lambda_k} \tilde{\in} F_n \tilde{\cap}\left(G\backslash P^{y}_{\mu}\right)$ dir. Bu ise $P^{y}_{\mu}\tilde{\in} \overline{F_n}$ olduğunu ifade eder. F_n esnek 2-kapalı olduğundan $P^{y}_{\mu} \tilde{\in} \overline{F_n}=F_n$ dir. Bu durum her $n\in\mathbb{N}$ için doğru olduğundan $P^{y}_{\mu} \tilde{\in} \tilde{\cap}^{\infty}_{n=1}F_n$ dir. Dolayısıyla $\tilde{\cap}^{\infty}_{n=1}F_n$ esnek kümesi en az bir esnek nokta içermektedir. Varsayalım ki, $\tilde{\cap}^{\infty}_{n=1}F_n$ esnek kümesi $P^{z}_{\gamma} \neq P^{y}_{\mu}$ şeklinde birbirinden farklı iki esnek nokta içersin. $P^{k}_{\nu}\in SP(\tilde{X})$, $P^{k}_{\nu} \neq P^{y}_{\mu}, P^{z}_{\gamma}$ olsun. $\delta_{P^{k}_{\nu}}(F_n)$ tanımından, her $\eta\in E$ ve $n\in\mathbb{N}$ için $d\left(P^{y}_{\mu}, P^{z}_{\gamma}, P^{k}_{\nu}\right)(\eta) \leq \delta_{P^{k}_{\nu}}(F_n)(\eta)$ dır. $\delta_{P^{k}_{\nu}}(F_n) \xrightarrow{n\rightarrow\infty} \overline{0}$ olduğundan $d\left(P^{y}_{\mu},P^{z}_{\gamma},P^{k}_{\nu}\right) = \overline{0}$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $\tilde{\cap}^{\infty}_{n=1}F_n$ arakesiti tek noktalıdır.

($\Leftarrow$) Tersine olarak, $\tilde{X}$'daki boş olmayan esnek 2-kapalı kümelerin $F_1\tilde{\supseteq}F_2\tilde{\supseteq} \ldots \tilde{\supseteq}F_n\tilde{\supseteq} \ldots$ ve her $P^{z}_{\gamma} \in SP(\tilde{X})$ için $\delta_{P^{z}_{\gamma}}(F_n) \xrightarrow{n\rightarrow\infty} \overline{0}$ koşullarını sağlayan her $\{F_n\}$ esnek küme dizisi için $\tilde{\cap}^{\infty}_{n=1}F_n$ arakesiti tek noktalı olsun. $\left\{P^{x_n}_{\lambda_n}\right\}_n$ esnek noktalar dizisi $\left(\tilde{X}, d\right)$ esnek 2-metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $F_n=\left\{P^{x_n}_{\lambda_n}, P^{x_{n+1}}_{\lambda_{n+1}},P^{x_{n+2}}_{\lambda_{n+2}}, \ldots\right\}$ olsun. $SS(F_1)\tilde{\supseteq}SS(F_2)\tilde{\supseteq}\ldots\tilde{\supseteq}SS(F_n)\tilde{\supseteq}\ldots$ olduğu açıktır ve buradan $\overline{SS(F_1)} \tilde{\supseteq}\overline{SS(F_2)}\tilde{\supseteq} \ldots \tilde{\supseteq}\overline{SS(F_n)}\tilde{\supseteq} \ldots$ dır. Buradan $\left\{\overline{SS(F_n)}\right\}$'nin esnek 2-kapalı kümelerin azalan bir dizisi olduğu görülmektedir. $P^{y}_{\mu}\in SP(\tilde{X})$ ve keyfi $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $n, m \geq n_1$ iken $d\left(P^{x_m}_{\lambda_m}, P^{x_n}_{\lambda_n}, P^{y}_{\mu}\right) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $n_1\in\mathbb{N}$ mevcuttur. Bu ise $\delta_{P^{y}_{\mu}}\left(SS\left(F_{n_1}\right)\right) \tilde{\leq} \tilde{\varepsilon}$ olduğunu gösteririr. Lemma 5.2.2'den $\delta_{P^{y}_{\mu}}\left(\overline{SS(F_n)}\right)\tilde{\leq} \tilde{\varepsilon}$ dır. $\left\{\overline{SS(F_n)}\right\}$ azalan olduğundan $n \geq n_1$ için $\delta_{P^{y}_{\mu}}\left(\overline{SS(F_n)}\right)\tilde{\leq} \delta_{P^{y}_{\mu}}\left(\overline{SS(F_{n_1})}\right)\tilde{\leq} \tilde{\varepsilon}$ dır. Buradan, $\delta_{P^{y}_{\mu}}\left(\overline{SS(F_n)}\right) \xrightarrow{n\rightarrow\infty} \overline{0}$ olur. Hipotezden $\tilde{\cap}^{\infty}_{n=1}\overline{SS(F_n)}$ arakesiti tek noktalıdır. $\tilde{\cap}^{\infty}_{n=1}\overline{SS(F_n)}=P^{k}_{\nu}$ diyelim. Bu durumda, $P^{y}_{\mu}\in SP(\tilde{X})$ için

$$d\left(P^{x_n}_{\lambda_n},P^{k}_{\nu},P^{y}_{\mu}\right) \tilde{\leq} \delta_{P^{y}_{\mu}}\left(\overline{SS(F_n)}\right)$$

olur. $n\rightarrow\infty$ için limit alınırsa,

$$d\left(P^{x_n}_{\lambda_n}, P^k_\nu, P^y_\mu\right) \mathrel{\tilde{\leq}} \delta_{P^y_\mu}\left(\overline{SS(F_n)}\right) \rightarrow \bar{0}$$

elde edilir. Ohalde, $\{P^{x_n}_{\lambda_n}\}_n$ dizisinin P^k_ν esnek noktasına yakınsak olduğu bulunur. Bu ise $(\widetilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayının tam olduğunu ispatlar.

Teorem 5.2.4: (Esnek 2-Metrik Uzaylar için Baire Kategori Teoremi)

(*) Her $P^x_\lambda, P^y_\mu \in SP(\widetilde{X})$ esnek nokta çifti için P^x_λ, P^y_μ merkezli ve her $P^z_\gamma \in SP(\widetilde{X})$ için $\delta_{P^z_\gamma}\left(SS(B_n)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \bar{0}$ olacak şekilde $\{SS(B_n)\}$ esnek 2-kapalı yuvarların bir dizisi mevcuttur.

(*) koşulunu sağlayan $(\widetilde{X}, d)$ tam esnek 2-metrik uzayı sayılabilir tane hiçbir yerde yoğun olmayan esnek kümenin birleşimi şeklinde yazılamaz.

İspat: $(\widetilde{X}, d)$ uzayı (*) koşulunu sağlayan bir tam esnek 2-metrik uzay olsun. Varsayalım ki, her $n \in \mathbb{N}$ için F_n hiçbir yerde yoğun olmayan esnek kümeler olmak üzere $\widetilde{X} = \widetilde{\bigcup}_{n=1}^{\infty} F_n = \widetilde{\bigcup}_{n=1}^{\infty} \overline{F_n}$ şeklinde yazılsın. G bir esnek 2-açık küme olsun. F_1 hiçbir yerde yoğun olmadığından $\overline{F_1}$, G'yi içermez. Bu durumda $P^{x_1}_{\lambda_1} \tilde{\notin} \overline{F_1}$ olacak şekilde bir $P^{x_1}_{\lambda_1} \tilde{\in} G$ vardır. $G \setminus \overline{F_1}$ esnek 2-açık küme ve $P^{x_1}_{\lambda_1} \tilde{\in} G \setminus \overline{F_1}$ olduğundan Lemma 5.1.11'den

$$P^{x_1}_{\lambda_1} \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{r}_1}\left(P^{x_1}_{\lambda_1}, P^{y_1}_{\mu_1}\right)\right) \tilde{\cap} \ldots \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r}_n}\left(P^{x_1}_{\lambda_1}, P^{y_n}_{\mu_n}\right)\right) := H_1 \tilde{\subseteq} G \setminus \overline{F_1}$$

olacak şekilde sonlu sayıda $P^{y_1}_{\mu_1}, P^{y_2}_{\mu_2}, \ldots, P^{y_n}_{\mu_n} \tilde{\in} SP(\widetilde{X}), \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \ldots, \tilde{r}_n \tilde{>} \bar{0}$ mevcuttur.

(*) koşulu sağlandığından, genelliği bozmaksızın, her $P^z_\gamma \in SP(\widetilde{X})$ için $\delta_{P^z_\gamma}\left(SS\left(B_{\tilde{r}_1}\left(P^{x_1}_{\lambda_1}, P^{y_1}_{\mu_1}\right)\right)\right) \tilde{<} \bar{1}$ olacak şekilde $SS\left(B_{\tilde{r}_1}\left(P^{x_1}_{\lambda_1}, P^{y_1}_{\mu_1}\right)\right)$ esnek kümesini seçelim. Buradan her $P^z_\gamma \in SP(\widetilde{X})$ için $\delta_{P^z_\gamma}(H_1) \tilde{<} \bar{1}$ olur.

$$U_1 = SS\left(B_{\tilde{r}_1 \setminus \bar{2}}\left(P^{x_1}_{\lambda_1}, P^{y_1}_{\mu_1}\right)\right) \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r}_2 \setminus \bar{2}}\left(P^{x_1}_{\lambda_1}, P^{y_2}_{\mu_2}\right)\right) \tilde{\cap} \ldots \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r}_n \setminus \bar{2}}\left(P^{x_1}_{\lambda_1}, P^{y_n}_{\mu_n}\right)\right)$$

kümesini alalım. O halde

$$\overline{U_1} \tilde{\subseteq} SS\left(B_{\tilde{r_1}\backslash\bar{2}}\left[P^{x_1}_{\lambda_1},P^{y_1}_{\mu_1}\right]\right) \tilde{\cap}\ldots\tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{r_n}\backslash\bar{2}}\left[P^{x_1}_{\lambda_1},P^{y_n}_{\mu_n}\right]\right) \tilde{\subseteq} H_1 \tilde{\subseteq} G\backslash\overline{F_1}$$

ve her $P^z_\gamma \in SP(\tilde{X})$ için $\delta_{P^z_\gamma}(\overline{U_1}) \tilde{\leq} \delta_{P^z_\gamma}(H_1) \tilde{<} \bar{1}$ elde edilir. Benzer şekilde U_1 esnek 2-açık küme ve F_2 hiçbir yerde yoğun olmadığından $U_1\backslash\overline{F_2} \neq \Phi$ dir. Bu durumda $P^{x_2}_{\lambda_2} \tilde{\in} U_1\backslash\overline{F_2}$ vardır. Benzer şekilde

$$P^{x_2}_{\lambda_2} \tilde{\in} U_2 \tilde{\subseteq} \overline{U_2} \tilde{\subseteq} U_1\backslash\overline{F_2}$$

olacak şekilde U_2 esnek 2-açık kümesi bulabiliriz ve her $P^z_\gamma \in SP(\tilde{X})$ için $\delta_{P^z_\gamma}(\overline{U_2}) \tilde{<} \frac{\bar{1}}{2}$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için $\overline{U_{n+1}} \tilde{\subseteq} \overline{U_n}$ ve her $P^z_\gamma \in SP(\tilde{X})$ için $\delta_{P^z_\gamma}(\overline{U_n}) \tilde{<} \frac{\bar{1}}{n}$ olacak şekilde $\{\overline{U_n}\}$ esnek 2-kapalı kümelerin bir dizisini elde ederiz. Yani $n \rightarrow \infty$ iken her $P^z_\gamma \in SP(\tilde{X})$ için $\delta_{P^z_\gamma}(\overline{U_n}) \rightarrow \bar{0}$ dır. Teorem 5.2.3'den $\tilde{\bigcap}_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$ boştan farklıdır ve bir tek esnek nokta içerir. $\tilde{\bigcap}_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} = P^t_\eta$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\overline{U_n} \tilde{\cap} \overline{F_n} = \Phi$ olduğundan $P^t_\eta \tilde{\notin} \tilde{\bigcup}_{n=1}^{\infty} F_n$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde ispat tamamlanmış olur.

5.3. Esnek 2-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda, Lahiri ve diğ. (2011) ve Singh ve diğ. (2016) tarafından 2-metrik uzaylarda verilen sabit nokta teoremleri esnek 2-metrik uzaylara genişletilmiştir. Bundan sonra, $(\tilde{X}, d)$ birinci sayılabilir esnek 2-metrik uzay olarak göz önüne alınacaktır.

Notasyon 5.3.1: $(\tilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay ve $\varphi_\psi : (\tilde{X}, d) \rightarrow (\tilde{X}, d)$ bir esnek fonksiyon olsun. $\tilde{t} \tilde{>} \bar{0}$ için

$$S_{\tilde{t}} = \{ P^x_\lambda \mid d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^y_\mu\right) \tilde{\leq} \tilde{t}, \forall P^y_\mu \in SP(\tilde{X})\}$$

şeklinde esnek nokta kümesi tanımlanır. Eğer P^x_λ, φ_ψ esnek fonksiyonunun bir sabit noktası ise $P^x_\lambda \in S_{\tilde{t}}$ olduğundan $S_{\tilde{t}} \neq \Phi$ dır.

Tanım 5.3.2: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay ve $\varphi_\psi: (\widetilde{X}, d) \rightarrow (\widetilde{X}, d)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için $\bar{0} \,\widetilde{\leq}\, \bar{\alpha} \,\widetilde{<}\, \bar{1}$ olmak üzere

$$d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) \,\widetilde{\leq}\, \bar{\alpha}\ d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise φ_ψ esnek fonksiyonuna daralma dönüşümü adı verilir. Burada $\bar{\alpha}$ esnek reel sayısına daralma sabiti adı verilir.

Tanım 5.3.3: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay ve $\varphi_\psi: (\widetilde{X}, d) \rightarrow (\widetilde{X}, d)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ $(P_\lambda^x \neq P_\mu^y \neq P_\gamma^z)$ için

$$d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) \,\widetilde{<}\, d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z)$$

ve $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z$ esnek noktalarından en az ikisi birbirine eşit iken $d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) = \bar{0}$ sağlanıyorsa φ_ψ esnek fonksiyonuna daraltma dönüşümü adı verilir.

Tanımlar karşılaştırıldığında, her daralma dönüşümünün daraltma dönüşümü olduğu açıktır.

Tanım 5.3.4: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay ve $\varphi_\psi: (\widetilde{X}, d) \rightarrow (\widetilde{X}, d)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer $\varphi_\psi(P_\lambda^x) = P_\lambda^x$ olacak şekilde bir $P_\lambda^x \in SP(\widetilde{X})$ esnek noktası mevcut ise bu P_λ^x esnek noktasına φ_ψ esnek fonksiyonunun sabit noktası denir.

Teorem 5.3.5: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay ve $\varphi_\psi: (\widetilde{X}, d) \rightarrow (\widetilde{X}, d)$ bir daraltma dönüşümü olsun. Bu durumda, her $\tilde{t} \,\widetilde{>}\, \bar{0}$ için $SS(S_{\tilde{t}})$ esnek kümesi esnek 2-kapalıdır.

İspat: $(\widetilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzayı birinci sayılabilir T_1-uzayı olduğundan $SS(S_{\tilde{t}})$ esnek kümesinin esnek 2-kapalı olduğunu ispatlamak için bu kümeden yakınsak bir dizi alıp bu dizinin yakınsadığı noktanın bu kümeye ait olduğunu göstereceğiz. $(\widetilde{X}, d)$'de $\{P_{\lambda_n}^{x_n}\}_n$ yakınsak bir dizi olsun. $P_{\lambda_n}^{x_n} \rightarrow P_\lambda^x$, $P_\lambda^x \widetilde{\in} \widetilde{X}$ olsun. $\tilde{\varepsilon} \,\widetilde{>}\, \bar{0}$ ve $P_\mu^y \in SP(\widetilde{X})$ verilsin. $SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x)\right)\right) \,\widetilde{\cap}\, SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}(P_\lambda^x, P_\mu^y)\right)$ esnek 2-açık bir küme olup P_λ^x esnek noktasını içermektedir. $P_{\lambda_n}^{x_n} \to P_\lambda^x$ olduğundan $n \geq n_0$ iken $P_{\lambda_n}^{x_n} \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x)\right)\right) \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P_\lambda^x, P_\mu^y\right)\right)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. φ_ψ'nin daraltma esnek dönüşümü olduğu ve her $n \in \mathbb{N}$ için $P_{\lambda_n}^{x_n} \tilde{\in} SS(S_{\tilde{t}})$ olduğu göz önüne alınırsa, her $n \geq n_0$ için

$$d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\mu^y\right) \tilde{\leq} d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_{\lambda_n}^{x_n}\right) + d\left(P_\lambda^x, P_{\lambda_n}^{x_n}, P_\mu^y\right) + d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\mu^y\right)$$

$$\tilde{<} \bar{2}\tilde{\varepsilon} + d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, \varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_{\lambda_n}^{x_n}\right)\right) + d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, \varphi_\psi\left(P_{\lambda_n}^{x_n}\right), P_\mu^y\right) + d\left(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_n}^{x_n}\right), \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\mu^y\right)$$

$$\tilde{<} \bar{2}\tilde{\varepsilon} + d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_\lambda^x, P_{\lambda_n}^{x_n}\right) + d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, \varphi_\psi\left(P_{\lambda_n}^{x_n}\right), P_\mu^y\right) + d(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_\lambda^x, P_\mu^y) \tilde{<} \bar{3}\tilde{\varepsilon} + \tilde{t}$$

olur. Bu ifade her $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \bar{0}$ için doğru olduğundan $d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\mu^y\right) \tilde{\leq} \tilde{t}$ dir. Her $P_\mu^y \in SP(\tilde{X})$ için doğru olduğundan $P_\lambda^x \tilde{\in} SS(S_{\tilde{t}})$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.3.6: $(\tilde{X}, d)$ bir tam ve sınırlı esnek 2-metrik uzay ve $\varphi_\psi: (\tilde{X}, d) \to (\tilde{X}, d)$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda, φ_ψ esnek fonksiyonunun $\tilde{X}$ üzerinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $P_\lambda^x \in SP(\tilde{X})$ olsun. P_λ^x'in φ_ψ esnek fonksiyonu altında n. iterasyonu ile oluşturulan $\left\{\varphi_\psi^n(P_\lambda^x)\right\}$ dizisini ele alalım. $(\tilde{X}, d)$ sınırlı olduğundan her $P_\gamma^z \in SP(\tilde{X})$ için

$$d\left(\varphi_\psi^n(P_\lambda^x), \varphi_\psi^{n+1}(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right) \tilde{\leq} \bar{\alpha} d\left(\varphi_\psi^{n-1}(P_\lambda^x), \varphi_\psi^n(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)$$

$$\tilde{\leq} \bar{\alpha}^2 d\left(\varphi_\psi^{n-2}(P_\lambda^x), \varphi_\psi^{n-1}(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right) \tilde{\leq} \dots \tilde{\leq} \bar{\alpha}^n d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right) \tilde{\leq} \bar{\alpha}^n \tilde{M}$$

olacak şekilde $\tilde{M} \tilde{>} \bar{0}$ vardır. $\{\tilde{t}_n\}$ esnek noktaların azalan ve $\bar{0}$ esnek reel sayısına yakınsayan bir dizisi iken

$$S_n = S_{\tilde{t}_n} = \left\{ P_\eta^s \,\middle|\, d\left(P_\eta^s, \varphi_\psi(P_\eta^s), P_\gamma^z\right) \tilde{\leq} \tilde{t}_n, \forall P_\gamma^z \in SP(\tilde{X}) \right\}$$

kümesi boştan farklıdır. $\bar{0} \lesseqqgtr \bar{\alpha} \tilde{<} \bar{1}$ olduğundan φ_{ψ} daraltma dönüşümüdür. Bu durumda, her bir $SS(S_n)$ esnek 2-kapalı esnek küme olur. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $SS(S_{n+1}) \tilde{\subseteq} SS(S_n)$ dir. O halde $P_\lambda^x, P_\mu^y \tilde{\in} SS(S_n)$ ve $P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için

$$d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \lesseqqgtr d\left(P_\lambda^x, P_\mu^y, \varphi_\psi(P_\lambda^x)\right) + d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\mu^y, P_\gamma^z\right)$$

$$\tilde{\leq} \bar{2}\widetilde{t_n} + d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\mu^y, \varphi_\psi(P_\mu^y)\right) + d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi(P_\mu^y), P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi(P_\mu^y), P_\mu^y, P_\gamma^z\right)$$

$$\tilde{\leq} \bar{3}\widetilde{t_n} + \bar{\alpha} d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\mu^y) + \bar{\alpha} d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \tilde{\leq} \bar{3}\widetilde{t_n} + \bar{\alpha} d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z)$$

elde edilir. Buradan $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \tilde{\leq} \frac{\bar{3}\widetilde{t_n}}{\bar{1}-\bar{\alpha}}$ bulunur. Bu ise $\delta_{P_\gamma^z}(SS(S_n)) \tilde{\leq} \frac{\bar{3}\widetilde{t_n}}{\bar{1}-\bar{\alpha}}$ olduğu anlamına gelir. Bu durumda $\delta_{P_\gamma^z}(SS(S_n)) \xrightarrow{n\to\infty} \bar{0}$ olur. Teorem 5.2.3'den $\widetilde{\bigcap}_{n=1}^{\infty} SS(S_n)$ arakesiti tek noktalıdır. $\widetilde{\bigcap}_{n=1}^{\infty} SS(S_n) = P_{\lambda_0}^{x_0}$ olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ ve $P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için $d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi(P_{\lambda_0}^{x_0}), P_\gamma^z\right) \tilde{\leq} \widetilde{t_n}$ olur. Yani her $P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için $d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi(P_{\lambda_0}^{x_0}), P_\gamma^z\right) = \bar{0}$ dır. Bu ise $\varphi_\psi(P_{\lambda_0}^{x_0}) = P_{\lambda_0}^{x_0}$ demektir. Yani $P_{\lambda_0}^{x_0}$ esnek noktası φ_ψ esnek fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için P_λ^x ve P_μ^y'nin φ_ψ esnek fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ ($P_\gamma^z \neq P_\lambda^x, P_\gamma^z \neq P_\mu^y$) esnek noktası için

$$d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) = d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi(P_\mu^y), P_\gamma^z\right) \tilde{\leq} \bar{\alpha} d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z) \tilde{<} d(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z)$$

elde edilir. Bu ise kabul ile çelişir. O halde φ_ψ esnek fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 5.3.7: $(\widetilde{X}, d)$ bir sınırlı esnek 2-metrik uzay. $\varphi_\psi : (\widetilde{X}, d) \to (\widetilde{X}, d)$ bir daralma dönüşümü ve $P_\lambda^x \in SP(\widetilde{X})$ olsun. $\left\{\varphi_\psi^n(P_\lambda^x)\right\}$ iterasyon dizisinin bir $P_{\lambda_0}^{x_0} \in SP(\widetilde{X})$ esnek noktasına yakınsayan bir $\left\{\varphi_\psi^{n_r}(P_\lambda^x)\right\}$ alt dizisi mevcut ise $P_{\lambda_0}^{x_0}$ esnek noktası φ_ψ esnek dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

İspat: $\{\widetilde{t_n}\}$ esnek noktaların azalan ve $\bar{0}$ esnek reel sayısına yakınsayan bir dizisi iken

$$S_n = S_{\tilde{t}_n} = \left\{ P^s_\eta \,\middle|\, d\left(P^s_\eta, \varphi_\psi\left(P^s_\eta\right), P^z_\gamma\right) \tilde{\leqq} \tilde{t}_n, \forall P^z_\gamma \in SP\left(\tilde{X}\right)\right\}$$

esnek noktaların bir kümesi olsun. Bu durumda, φ_ψ daralma esnek dönüşümü ve $(\tilde{X}, d)$ sınırlı olduğundan her $P^z_\gamma \in SP\left(\tilde{X}\right)$ için

$$d\left(\varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda), \varphi^{n_r+1}_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right) \tilde{\leqq} \bar{\alpha} d\left(\varphi^{n_r-1}_\psi(P^x_\lambda), \varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right)$$

$$\tilde{\leqq} \bar{\alpha}^2 d\left(\varphi^{n_r-2}_\psi(P^x_\lambda), \varphi^{n_r-1}_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right) \tilde{\leqq} \ldots \tilde{\leqq} \bar{\alpha}^{n_r} d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right) \tilde{\leqq} \bar{\alpha}^{n_r} \tilde{M}$$

olacak şekilde $\tilde{M} \tilde{>} \bar{0}$ vardır. $\bar{0} \tilde{\leqq} \bar{\alpha} \tilde{<} \bar{1}$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $SS(S_n)$ kümesi boştan farklıdır. Ayrıca yeterince büyük r değerleri için $SS(S_n)$ esnek kümesi $\varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda)$ esnek noktasını içerir. $SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P^{x_0}_{\lambda_0}, \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right)\right)\right) \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P^{x_0}_{\lambda_0}, P^z_\gamma\right)\right)$ esnek 2-açık bir küme olup $P^{x_0}_{\lambda_0}$ esnek noktasını içermektedir. $\varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda) \to P^{x_0}_{\lambda_0}$ olduğundan $r \geq r_0$ için $\varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda) \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P^{x_0}_{\lambda_0}, \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right)\right)\right) \tilde{\cap} SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}}\left(P^{x_0}_{\lambda_0}, P^z_\gamma\right)\right)$ olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. $n \in \mathbb{N}$ sabit tutalım ve $\bar{\alpha}^{n_r} \tilde{M} \tilde{<} \tilde{t}_n$ olacak şekilde $r \geq r_0$ seçelim. Bu durumda,

$$d\left(P^{x_0}_{\lambda_0}, \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right), P^z_\gamma\right) \tilde{\leqq} d\left(P^{x_0}_{\lambda_0}, \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right), \varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda)\right) + d\left(P^{x_0}_{\lambda_0}, \varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right)$$

$$+ d\left(\varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda), \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right), P^z_\gamma\right) \tilde{<} \bar{2}\tilde{\varepsilon} + d\left(\varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda), \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right), P^z_\gamma\right)$$

$$\tilde{\leqq} \bar{2}\tilde{\varepsilon} + d\left(\varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda), \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right), \varphi^{n_r+1}_\psi(P^x_\lambda)\right) + d\left(\varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda), \varphi^{n_r+1}_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right)$$

$$+ d\left(\varphi^{n_r+1}_\psi(P^x_\lambda), \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right), P^z_\gamma\right) \tilde{\leqq} \bar{2}\tilde{\varepsilon} + \bar{\alpha}^{n_r} d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi(P^x_\lambda), \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right)\right) + \bar{\alpha}^{n_r}\tilde{M}$$

$$+ \bar{\alpha} d\left(\varphi^{n_r}_\psi(P^x_\lambda), P^{x_0}_{\lambda_0}, P^z_\gamma\right) \tilde{<} \bar{2}\tilde{\varepsilon} + \bar{\alpha}^{n_r}\bar{\alpha} d\left(P^x_\lambda, P^x_\lambda, P^{x_0}_{\lambda_0}\right) + \tilde{t}_n + \tilde{\alpha}\tilde{\varepsilon} = \tilde{t}_n + (\bar{2}+\tilde{\alpha})\tilde{\varepsilon}$$

elde edilir. $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \bar{0}$ keyfi olduğundan

$$d\left(P^{x_0}_{\lambda_0}, \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right), P^z_\gamma\right) \tilde{\leqq} \tilde{t}_n, \ \forall P^z_\gamma \in SP(\tilde{X})$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right) \tilde{\leq} \overline{0}, \ \forall P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$$

bulunur. Bu ise $\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right)=P_{\lambda_0}^{x_0}$ anlamına gelir. Yani $P_{\lambda_0}^{x_0}$, φ_ψ esnek fonksiyonunun sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliği yukarıdaki teoremdeki ispata benzer şekilde gösterilir.

Teorem 5.3.8: $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek 2-metrik uzay. $\varphi_\psi:(\widetilde{X}, d)\to(\widetilde{X}, d)$ bir daraltma dönüşümü ve $P_\lambda^x \in SP(\widetilde{X})$ olsun. $\left\{\varphi_\psi^n(P_\lambda^x)\right\}$ iterasyon dizisinin $P_{\lambda_0}^{x_0} \in SP(\widetilde{X})$ esnek noktasına yakınsayan bir $\left\{\varphi_\psi^{n_r}(P_\lambda^x)\right\}$ alt dizisi mevcut ise $P_{\lambda_0}^{x_0}$ esnek noktası φ_ψ esnek fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır.

İspat: $(\widetilde{X}, d)$ esnek 2-metrik uzay. $\varphi_\psi:(\widetilde{X}, d)\to(\widetilde{X}, d)$ bir daraltma esnek dönüşüm ve $P_\lambda^x \in SP(\widetilde{X})$ olsun. $\left\{\varphi_\psi^n(P_\lambda^x)\right\}$ esnek noktalar dizisinde bazı i'ler için $\varphi_\psi^{i+1}(P_\lambda^x) = \varphi_\psi^i(P_\lambda^x)$ ise bu durumda $P_{\lambda_0}^{x_0} = \varphi_\psi^i(P_\lambda^x)$ esnek noktası φ_ψ'nin sabit noktası olur. O halde $\varphi_\psi^i(P_\lambda^x) \neq \varphi_\psi^{i+1}(P_\lambda^x)$ olsun. Ayrıca $\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right) \neq P_{\lambda_0}^{x_0}$ olsun. Aksi taktirde $P_{\lambda_0}^{x_0}$ esnek noktası φ_ψ'nin sabit noktası olur. $P_{\lambda_0}^{x_0}$, $\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right)$ ve $\varphi_\psi^i(P_\lambda^x)$, i=1,2, … esnek noktalarından farklı bir $P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ noktası seçelim. Buradan,

$$d\left(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_\psi^2\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right) \tilde{<} d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right) \tag{5.3}$$

elde edilir. Negatif olmayan esnek reel sayıların oluşturduğu $\left\{d\left(\varphi_\psi^n\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right),\varphi_\psi^{n+1}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right),P_\gamma^z\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini ele alalım. İlk olarak $d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right)$ esnek reel sayısının bu dizinin limiti olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon \tilde{>} \overline{0}$ olsun. $SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}/\overline{3}}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right)\right)\right) \tilde{\cap}\, SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}/\overline{3}}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, P_\gamma^z\right)\right)$ esnek 2-açık bir küme olup $P_{\lambda_0}^{x_0}$ esnek noktasını içermektedir. $\varphi_\psi^{n_r}(P_\lambda^x)\to P_{\lambda_0}^{x_0}$ olduğundan $r \geq k$ iken $\varphi_\psi^{n_r}(P_\lambda^x) \tilde{\in} SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}/\overline{3}}\left(P_{\lambda_0}^{x_0},\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right)\right)\right) \tilde{\cap}\, SS\left(B_{\tilde{\varepsilon}/\overline{3}}\left(P_{\lambda_0}^{x_0},P_\gamma^z\right)\right)$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ mevcuttur. $r > k$ seçelim. Bu durumda,

$$d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right) \tilde{\leq} d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_\psi^{n_r}(P_\lambda^x)\right) + d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi^{n_r}(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)$$

$$+ d\left(\varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_{\gamma}^{z}\right) \ \tilde{<} \ \frac{\bar{2}}{3}\tilde{\varepsilon} + d\left(\varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_{\gamma}^{z}\right)$$

$$\tilde{\leq} \ \frac{\bar{2}}{3}\tilde{\varepsilon} + d\left(\varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x})\right) + d\left(\varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), P_{\gamma}^{z}\right)$$

$$+ d\left(\varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_{\gamma}^{z}\right) \tilde{<} \ \frac{\bar{2}}{3}\tilde{\varepsilon} + d\left(\varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x}), P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x})\right)$$

$$+ d\left(\varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), P_{\gamma}^{z}\right) + d\left(\varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x}), P_{\lambda_0}^{x_0}, P_{\gamma}^{z}\right)$$

$$\tilde{<} \ \tilde{\varepsilon} + d\left(\varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), P_{\gamma}^{z}\right) \tag{5.4}$$

olur. Benzer şekilde, yeterince büyük r için

$$d\left(\varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), P_{\gamma}^{z}\right) \ \tilde{<} \ \tilde{\varepsilon} + d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_{\gamma}^{z}\right) \tag{5.5}$$

olduğu gösterilebilir. Eşitsizlik (5.4) ve (5.5) den

$$\left|d\left(\varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), P_{\gamma}^{z}\right)(\eta) - d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_{\gamma}^{z}\right)(\eta)\right| < \tilde{\varepsilon}(\eta), \ \forall\eta\in E$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} d\left(\varphi_{\psi}^{n_r}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), P_{\gamma}^{z}\right) = d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_{\gamma}^{z}\right)$$

elde edilir. Dikkat edilirse, sabit bir n_r için $n > n_r+1$ iken

$$d\left(\varphi_{\psi}^{n}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}^{n+1}(P_{\lambda}^{x}), P_{\gamma}^{z}\right) \ \tilde{<} \ d\left(\varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}^{n_r+2}(P_{\lambda}^{x}), P_{\gamma}^{z}\right)$$

sağlanmaktadır. Bu durumda $d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_{\gamma}^{z}\right)$ limit değeri $n>n_r+1$ iken

$$d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_{\gamma}^{z}\right) \ \tilde{\leq} \ d\left(\varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}^{n_r+2}(P_{\lambda}^{x}), P_{\gamma}^{z}\right) \tag{5.6}$$

eşitsizliğini sağlamaktadır. Bu durum her $r\in\mathbb{N}$ için doğru olduğundan $r>k$ iken

$$d\left(\varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}^{n_r+2}(P_{\lambda}^{x}), P_{\gamma}^{z}\right) \ \tilde{\leq} \ d\left(\varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}^{n_r+2}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right)\right)$$

$$+ d\left(\varphi_{\psi}^{n_r+1}(P_{\lambda}^{x}), \varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_{\gamma}^{z}\right) + d\left(\varphi_{\psi}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_{\psi}^{n_r+2}(P_{\lambda}^{x}), P_{\gamma}^{z}\right)$$

$$\widetilde{<} d\left(\varphi_\psi^{n_r+1}(P_\lambda^x), \varphi_\psi^{n_r+1}(P_\lambda^x), P_{\lambda_0}^{x_0}\right) + d\left(\varphi_\psi^{n_r}(P_\lambda^x), P_{\lambda_0}^{x_0}, P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi(P_{\lambda_0}^{x_0}), \varphi_\psi^{n_r+2}(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)$$

$$\widetilde{<} d\left(\varphi_\psi^{n_r}(P_\lambda^x), P_{\lambda_0}^{x_0}, P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_\psi^{n_r+2}(P_\lambda^x), \varphi_\psi^2\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right)\right)$$

$$+ d\left(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_\psi^2\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi^2\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_\psi^{n_r+2}(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)$$

$$\widetilde{<} d\left(\varphi_\psi^{n_r}(P_\lambda^x), P_{\lambda_0}^{x_0}, P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_\psi^{n_r+1}(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right)\right)$$

$$+ d\left(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_\psi^2\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right) + d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi^{n_r}(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)$$

$$\widetilde{<} \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} + d\left(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_\psi^2\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right) \;\widetilde{<}\; \tilde{\varepsilon} + d\left(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_\psi^2\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right) \tag{5.7}$$

olur. Eşitsizlik (5.6) ve (5.7) den

$$d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right) \widetilde{<} \tilde{\varepsilon} + d\left(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_\psi^2\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, \varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right) \widetilde{\leq} d\left(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \varphi_\psi^2\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_\gamma^z\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise Eşitsizlik (5.3) ile çelişmektedir. Bu durumda, $\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right) = P_{\lambda_0}^{x_0}$ veya bazı i'ler için $\varphi_\psi^{i+1}(P_\lambda^x) = \varphi_\psi^i(P_\lambda^x)$ olmalıdır. O halde, φ_ψ esnek fonksiyonunun bir sabit noktası vardır. Sabit noktanın tekliği yukarıdaki teoremdeki ispata benzer şekilde gösterilir.

Teorem 5.3.9: $(\widetilde{X}, d)$ bir tam esnek 2-metrik uzay ve $\varphi_\psi : \left(\widetilde{X}, d\right) \to \left(\widetilde{X}, d\right)$ sürekli bir esnek fonksiyon olsun. Eğer her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için $\overline{0} \,\widetilde{\leq}\, \overline{\alpha} \,\widetilde{<}\, \frac{\overline{1}}{2}$ olmak üzere

$$d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) \widetilde{\leq} \overline{\alpha}\left(d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right) + d\left(P_\mu^y, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right)\right)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise φ_ψ esnek fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $\{\widetilde{t_n}\}$ esnek noktaların azalan ve $\overline{0}$ esnek reel sayısına yakınsayan bir dizisi iken

$$S_n = S_{\widetilde{t_n}} = \left\{ P^s_\eta \,\middle|\, d\left(P^s_\eta, \varphi_\psi\left(P^s_\eta\right), P^z_\gamma\right) \,\widetilde{\leq}\, \widetilde{t_n}, \forall P^z_\gamma \widetilde{\in} SP\left(\widetilde{X}\right)\right\}$$

esnek noktaların bir kümesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $SS(S_{n+1}) \widetilde{\subseteq} SS(S_n)$ olduğu açıktır. Ayrıca φ_ψ esnek fonksiyonu sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $SS(S_n)$ esnek kümesi esnek 2-kapalıdır. $P^z_\gamma \widetilde{\in} SP\left(\widetilde{X}\right)$ esnek noktası için $\delta_{P^z_\gamma}\left(SS(S_n)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{0}$ olduğunu gösterelim. Herhangi $P^x_\lambda, P^y_\mu \widetilde{\in} SS(S_n)$ esnek noktaları için

$$d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^z_\gamma\right) \widetilde{\leq} d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, \varphi_\psi(P^x_\lambda)\right) + d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right) + d\left(\varphi_\psi(P^x_\lambda), P^y_\mu, P^z_\gamma\right)$$

$$\widetilde{\leq}\, \overline{2}\widetilde{t_n} + d\left(\varphi_\psi(P^x_\lambda), P^y_\mu, P^z_\gamma\right) \widetilde{\leq}\, \overline{2}\widetilde{t_n} + d\left(\varphi_\psi(P^x_\lambda), P^y_\mu, \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right)\right)$$

$$+ d\left(\varphi_\psi(P^x_\lambda), \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right) + d\left(\varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^y_\mu, P^z_\gamma\right)$$

$$\widetilde{\leq}\, \overline{4}\widetilde{t_n} + \overline{\alpha}\left(d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right) + d\left(P^y_\mu, \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right)\right) \widetilde{\leq}\, \overline{4}\widetilde{t_n} + \overline{2}\overline{\alpha}\widetilde{t_n} = (\overline{4}+\overline{2}\overline{\alpha})\widetilde{t_n}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ise $d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^z_\gamma\right) \widetilde{\leq} (\overline{4}+\overline{2}\overline{\alpha})\widetilde{t_n} \xrightarrow{n\to\infty} \overline{0}$ sağlanır. Dolayısıyla $\delta_{P^z_\gamma}\left(SS(S_n)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{0}$ dır. Bu durumda $\{SS(S_n)\}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $SS(S_{n+1}) \widetilde{\subseteq} SS(S_n)$ ve her $P^z_\gamma \widetilde{\in} SP\left(\widetilde{X}\right)$ için $\delta_{P^z_\gamma}\left(SS(S_n)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{0}$ olacak şekildeki esnek 2-kapalı kümelerin bir dizisi olduğu görülür. Dolayısıyla $\widetilde{\bigcap}_{n=1}^{\infty} SS(S_n)$ arakesiti tek noktalıdır. $\widetilde{\bigcap}_{n=1}^{\infty} SS(S_n) = P^{x_0}_{\lambda_0}$ olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ ve $P^z_\gamma \widetilde{\in} SP\left(\widetilde{X}\right)$ için $d\left(P^{x_0}_{\lambda_0}, \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right), P^z_\gamma\right) \widetilde{\leq} \widetilde{t_n}$ dir. Buradan her $P^z_\gamma \widetilde{\in} SP\left(\widetilde{X}\right)$ için $d\left(P^{x_0}_{\lambda_0}, \varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right), P^z_\gamma\right) = \overline{0}$ elde edilir. Dolayısıyla $\varphi_\psi\left(P^{x_0}_{\lambda_0}\right) = P^{x_0}_{\lambda_0}$ dır. Yani $P^{x_0}_{\lambda_0}$ esnek noktası φ_ψ esnek fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için P^x_λ ve P^y_μ'nin φ_ψ esnek fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $P^z_\gamma \widetilde{\in} SP\left(\widetilde{X}\right)$ $(P^z_\gamma \neq P^x_\lambda, P^z_\gamma \neq P^y_\mu)$ esnek noktası için

$$d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^z_\gamma\right) = d\left(\varphi_\psi(P^x_\lambda), \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right)$$

$$\widetilde{\leq}\, \overline{\alpha}\left(d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right) + d\left(P^y_\mu, \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right)\right) = \overline{\alpha}\left(d\left(P^x_\lambda, P^x_\lambda, P^z_\gamma\right) + d\left(P^y_\mu, P^y_\mu, P^z_\gamma\right)\right) = \overline{0}$$

olur. Bu ise $d\left(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z\right) = \bar{0}$ olduğu anlamına gelir. O halde φ_ψ esnek fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 5.3.10: $(\widetilde{X}, d)$ bir tam esnek 2-metrik uzay ve $\varphi_\psi: \left(\widetilde{X}, d\right) \to \left(\widetilde{X}, d\right)$ sürekli bir esnek fonksiyon olsun. Eğer her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\widetilde{X})$ için $\bar{0} \,\widetilde{\leq}\, \bar{\alpha} \,\widetilde{<}\, \frac{\bar{1}}{2}$ olmak üzere,

$$d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) \,\widetilde{\leq}\, \bar{\alpha}\left(d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) + d\left(P_\mu^y, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)\right) \tag{5.8}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise φ_ψ esnek fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $\{\widetilde{t_n}\}$ esnek noktaların azalan ve $\bar{0}$ esnek reel sayısına yakınsayan bir dizisi iken

$$S_n = S_{\widetilde{t_n}} = \left\{ P_\eta^s \;\middle|\; d\left(P_\eta^s, \varphi_\psi\left(P_\eta^s\right), P_\gamma^z\right) \,\widetilde{\leq}\, \widetilde{t_n}, \forall P_\gamma^z \in SP\left(\widetilde{X}\right)\right\}$$

esnek noktaların bir kümesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $SS\left(S_{n+1}\right) \,\widetilde{\subseteq}\, SS(S_n)$ olduğu açıktır. Ayrıca φ_ψ esnek fonksiyonu sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $SS\left(S_n\right)$ esnek kümesi esnek 2-kapalıdır. $P_\gamma^z \in SP\left(\widetilde{X}\right)$ esnek noktası için $\delta_{P_\gamma^z}\left(SS(S_n)\right) \xrightarrow{n \to \infty} \bar{0}$ olduğunu gösterelim. Herhangi $P_\lambda^x, P_\mu^y \widetilde{\in} SS(S_n)$ esnek noktaları için

$$d\left(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z\right) \,\widetilde{\leq}\, d\left(P_\lambda^x, P_\mu^y, \varphi_\psi(P_\lambda^x)\right) + d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\mu^y, P_\gamma^z\right)$$

$$\widetilde{\leq}\, \bar{2}\widetilde{t_n} + d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\mu^y, P_\gamma^z\right) \,\widetilde{\leq}\, \bar{2}\widetilde{t_n} + d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\mu^y, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right)\right)$$

$$+\, d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\mu^y, P_\gamma^z\right)$$

$$\widetilde{\leq}\, \bar{4}\widetilde{t_n} + \bar{\alpha}\left(d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) + d\left(P_\mu^y, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)\right) \tag{5.9}$$

<u>Birinci adım :</u>

Eşitsizlik (5.8) ve (5.9) dan

$$d\left(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z\right) \,\widetilde{\leq}\, \bar{4}\widetilde{t_n} + \bar{\alpha}\left(d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), \varphi_\psi(P_\lambda^x)\right) + d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right)\right)$$

$$+\bar{\alpha}\left(d\left(P_\mu^y, \varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right)\right) + d\left(P_\mu^y, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)\right)$$

$$\tilde{\leq} \bar{4}\tilde{t}_n + \bar{4}\bar{\alpha}\tilde{t}_n + \bar{2}\bar{\alpha}d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right)$$

$$\tilde{\leq} \bar{4}\tilde{t}_n + \bar{4}\bar{\alpha}\tilde{t}_n + \bar{2}\bar{\alpha}^2\left(d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) + d\left(P_\mu^y, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)\right) \tag{5.10}$$

elde edilir.

İkinci adım :

Eşitsizlik (5.8) ve (5.10) dan

$$d\left(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z\right) \tilde{\leq} \bar{4}\tilde{t}_n + \bar{4}\bar{\alpha}\tilde{t}_n$$

$$+\bar{2}\bar{\alpha}^2\left(d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), \varphi_\psi(P_\lambda^x)\right) + d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right)\right)$$

$$+\bar{2}\bar{\alpha}^2\left(d\left(P_\mu^y, \varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right)\right) + d\left(P_\mu^y, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)\right)$$

$$= \bar{4}\tilde{t}_n + \bar{4}\bar{\alpha}\tilde{t}_n + \bar{8}\bar{\alpha}^2\tilde{t}_n + \bar{4}\bar{\alpha}^2 d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right)$$

$$\tilde{\leq} \bar{4}\tilde{t}_n + \bar{4}\bar{\alpha}\tilde{t}_n + \bar{8}\bar{\alpha}^2\tilde{t}_n + \bar{4}\bar{\alpha}^3\left(d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) + d\left(P_\mu^y, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)\right) \tag{5.11}$$

elde edilir.

Üçüncü adım :

Eşitsizlik (5.8) ve (5.11) den

$$d\left(P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z\right) \tilde{\leq} \bar{4}\tilde{t}_n + \bar{4}\bar{\alpha}\tilde{t}_n + \bar{8}\bar{\alpha}^2\tilde{t}_n$$

$$+\bar{4}\bar{\alpha}^3\left(d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), \varphi_\psi(P_\lambda^x)\right) + d\left(P_\lambda^x, \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right)\right)$$

$$+\bar{4}\bar{\alpha}^3\left(d\left(P_\mu^y, \varphi_\psi(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right)\right) + d\left(P_\mu^y, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), P_\gamma^z\right) + d\left(\varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), \varphi_\psi(P_\lambda^x), P_\gamma^z\right)\right)$$

$$= \overline{4}\widetilde{t_n} + \overline{4}\overline{\alpha}\widetilde{t_n} + \overline{8}\overline{\alpha}^2\widetilde{t_n} + \overline{16}\overline{\alpha}^3\widetilde{t_n} + \overline{8}\overline{\alpha}^3 d\left(\varphi_\psi(P^x_\lambda), \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right)$$

$$\widetilde{\leqq}\, \overline{4}\widetilde{t_n} + \overline{4}\overline{\alpha}\widetilde{t_n}(\overline{1}+\overline{2}\overline{\alpha}+(\overline{2}\overline{\alpha})^2) + \overline{8}\overline{\alpha}^4\left(d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right) + d\left(P^y_\mu, \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right)\right) \qquad (5.12)$$

elde edilir.

<u>Dördüncü adım :</u>

Eşitsizlik (5.8) ve (5.12) den

$$d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^z_\gamma\right) \widetilde{\leqq}\, \overline{4}\widetilde{t_n} + \overline{4}\overline{\alpha}\widetilde{t_n}(\overline{1}+\overline{2}\overline{\alpha}+(\overline{2}\overline{\alpha})^2)$$

$$+ \overline{8}\overline{\alpha}^4\left(d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), \varphi_\psi(P^x_\lambda)\right) + d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right) + d\left(\varphi_\psi(P^x_\lambda), \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right)\right)$$

$$+ \overline{8}\overline{\alpha}^4\left(d\left(P^y_\mu, \varphi_\psi(P^x_\lambda), \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right)\right) + d\left(P^y_\mu, \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right) + d\left(\varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right)\right)$$

$$= \overline{4}\widetilde{t_n} + \overline{4}\overline{\alpha}\widetilde{t_n}(\overline{1}+\overline{2}\overline{\alpha}+(\overline{2}\overline{\alpha})^2) + \overline{32}\overline{\alpha}^4\widetilde{t_n} + \overline{16}\overline{\alpha}^4 d\left(\varphi_\psi(P^x_\lambda), \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right)$$

$$\widetilde{\leqq}\, \overline{4}\widetilde{t_n} + \overline{4}\overline{\alpha}\widetilde{t_n}[\overline{1}+\overline{2}\overline{\alpha}+(\overline{2}\overline{\alpha})^2+(\overline{2}\overline{\alpha})^3]$$

$$+ \overline{16}\overline{\alpha}^4\left(d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right) + d\left(P^y_\mu, \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right)\right) \qquad (5.13)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse n. adımda

$$d\left(P^x_\lambda, P^y_\mu, P^z_\gamma\right) \widetilde{\leqq}\, \overline{4}\widetilde{t_n} + \overline{4}\overline{\alpha}\widetilde{t_n}(\overline{1}+\overline{2}\overline{\alpha}+(\overline{2}\overline{\alpha})^2+\ldots+(\overline{2}\overline{\alpha})^{n-1})$$

$$+ \overline{2}^n\overline{\alpha}^{n+1}\left(d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right) + d\left(P^y_\mu, \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right)\right)$$

$$\widetilde{\leqq}\, \overline{4}\widetilde{t_n} + \overline{4}\overline{\alpha}\widetilde{t_n}(\overline{1}+\overline{2}\overline{\alpha}+(\overline{2}\overline{\alpha})^2+\ldots+(\overline{2}\overline{\alpha})^{n-1}+\ldots)$$

$$+ \overline{2}^n\overline{\alpha}^{n+1}\left(d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right) + d\left(P^y_\mu, \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right)\right)$$

$$= \overline{4}\widetilde{t_n} + \frac{\overline{4}\overline{\alpha}\widetilde{t_n}}{\overline{1}\text{-}\overline{\alpha}} + \overline{2}^n\overline{\alpha}^{n+1}\left(d\left(P^x_\lambda, \varphi_\psi\left(P^y_\mu\right), P^z_\gamma\right) + d\left(P^y_\mu, \varphi_\psi(P^x_\lambda), P^z_\gamma\right)\right)$$

$$=\left(\bar{4}+\frac{\bar{4}\bar{\alpha}}{\bar{1}-\bar{\alpha}}\right)\widetilde{t_n}+\bar{2}^n\bar{\alpha}^{n+1}\left(d\left(P_\lambda^x,\varphi_\psi\left(P_\mu^y\right),P_\gamma^z\right)+d\left(P_\mu^y,\varphi_\psi(P_\lambda^x),P_\gamma^z\right)\right) \tag{5.14}$$

elde edilir. $\bar{\alpha}\mathrel{\tilde{<}}\frac{\bar{1}}{2}$ ve $\{\widetilde{t_n}\}$ azalan olduğundan $d\left(P_\lambda^x,P_\mu^y,P_\gamma^z\right)\xrightarrow{n\to\infty}\bar{0}$ dır. Dolayısıyla $\delta_{P_\gamma^z}\left(SS(S_n)\right)\xrightarrow{n\to\infty}\bar{0}$ dır. Bu durumda $\{SS(S_n)\}$, her $n\in\mathbb{N}$ için $SS(S_{n+1})\mathrel{\tilde{\subseteq}}SS(S_n)$ ve her $P_\gamma^z\in SP(\widetilde{X})$ için $\delta_{P_\gamma^z}\left(SS(S_n)\right)\xrightarrow{n\to\infty}\bar{0}$ olacak şekildeki esnek 2-kapalı kümelerin bir dizisi olur. Dolayısıyla $\widetilde{\bigcap}_{n=1}^{\infty}SS(S_n)$ arakesiti tek noktalıdır. $\widetilde{\bigcap}_{n=1}^{\infty}SS(S_n)=P_{\lambda_0}^{x_0}$ olsun. Bu durumda, her $n\in\mathbb{N}$ ve $P_\gamma^z\in SP(\widetilde{X})$ $d\left(P_{\lambda_0}^{x_0},\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right),P_\gamma^z\right)\mathrel{\tilde{\leq}}\widetilde{t_n}$ dir. Buradan her $P_\gamma^z\in SP(\widetilde{X})$ için $d\left(P_{\lambda_0}^{x_0},\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right),P_\gamma^z\right)=\bar{0}$ elde edilir. Dolayısıyla $\varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right)=P_{\lambda_0}^{x_0}$ dır. Yani $P_{\lambda_0}^{x_0}$ esnek noktası φ_ψ esnek fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği ispatlamak için P_λ^x ve P_μ^y'nin φ_ψ esnek fonksiyonunun birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. $P_\gamma^z\in SP(\widetilde{X})$ $(P_\gamma^z\neq P_\lambda^x,\ P_\gamma^z\neq P_\mu^y)$ esnek noktası için

$$d\left(P_\lambda^x,P_\mu^y,P_\gamma^z\right)=d\left(\varphi_\psi(P_\lambda^x),\varphi_\psi\left(P_\mu^y\right),P_\gamma^z\right)$$

$$\mathrel{\tilde{\leq}}\bar{\alpha}\left(d\left(P_\lambda^x,\varphi_\psi\left(P_\mu^y\right),P_\gamma^z\right)+d\left(P_\mu^y,\varphi_\psi(P_\lambda^x),P_\gamma^z\right)\right)=\bar{\alpha}\left(d\left(P_\lambda^x,P_\mu^y,P_\gamma^z\right)+d\left(P_\mu^y,P_\lambda^x,P_\gamma^z\right)\right)$$

$$=\bar{2}\bar{\alpha}d\left(P_\lambda^x,P_\mu^y,P_\gamma^z\right)$$

$$\Rightarrow d\left(P_\lambda^x,P_\mu^y,P_\gamma^z\right)\mathrel{\tilde{\leq}}\bar{2}\bar{\alpha}d\left(P_\lambda^x,P_\mu^y,P_\gamma^z\right)\Rightarrow(\bar{1}-\bar{2}\bar{\alpha})d\left(P_\lambda^x,P_\mu^y,P_\gamma^z\right)\mathrel{\tilde{\leq}}\bar{0}\ \Rightarrow d\left(P_\lambda^x,P_\mu^y,P_\gamma^z\right)=\bar{0}$$

olur. Bu ise $P_\lambda^x=P_\mu^y$ olduğu anlamına gelir. O halde φ_ψ esnek fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, öncelikle metrik uzayların lineer olmayan bir genelleştirmesi olan 2-metrik uzaylar, bu uzayların önemli birtakım özellikleri ve bu uzaylara ilişkin bazı temel sabit nokta teoremleri tanıtılmıştır. Buna ek olarak, bulanık 2-metrik uzaylar ve sezgisel bulanık 2-metrik uzaylar sabit nokta teoremleri ile birlikte verilmiştir. Daha sonra, ikinci bölümde yer verilmiş olan 2-metrik uzay kavramı ve sabit nokta teoremleri esnek noktalar baz alınarak genelleştirilmiştir. Bu elde edilen yeni 2-metrik yapısı esnek 2-metrik olarak adlandırılmıştır ve bu yapı vasıtasıyla topoloji üretilerek kapanış, limit noktası, yakınsaklık, tamlık gibi temel kavramlar ile topolojik özelliklere yer verilmiştir. Son olarak esnek 2-metrik uzaylar için sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

Bunun yanısıra, 2-metrik uzaylarda çalışılmış olan ortak sabit nokta teoremleri de esnek 2-metrik uzaylara genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR

Abbas M., Murtaza G., Romaguera S, Soft Contraction Theorem, *Journal of Nonlinear Convex Analysis*, 2015, **16**, 423-435.

Aktaş H., Çağman N., Soft Sets and Soft Groups, *Information Sciences*, 2007, **177**(13), 2726-2735.

Al-Mayahi N.F., Ibrahim L.S., Some Properties of Two-Fuzzy Metric Spaces, *General Mathematics Notes*, 2013, **17**(2), 41-52.

Ansari Z.K., Shrivasta R., Ansari G., Some Fixed Point Theorems in Fuzzy 2-Metric and Fuzzy 3-Metric Spaces, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 2011, **6**(46), 2291-2301.

Aydoğdu E., Aygünoğlu A., Aygün H., Soft Metric Spaces and Fixed Point Theorems on Soft Metric Spaces, *International Conference on Mathematics and Engineering*, Yıldız Technical University, Istanbul, Turkey, 10-12 May 2017.

Aygunoglu A., Aygun H., Introduction to fuzzy soft groups, *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, **58**, 1279-1286.

Aygunoglu A., Aygun H., Some notes on soft topological spaces, *Neural Computing and Applications*, 2012, **21**(1),113–119.

Aygünoğlu A., Çetkin V., Aygün H., An introduction to fuzzy soft topological spaces, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2014, **43**(2), 197-208.

Bakry M.S., Common Fixed Point Theorem on Intuitionistic Fuzzy 2-Metric Spaces, *Genaral Mathematics Notes*, 2015, **27**(2), 69-84.

Banach S: Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 1922, **3**, 133–181.

Brouwer L.E. J., Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Mathematische Annalen, 1912, **7l**, 97 -115.

Çağman N., Enginoğlu S., Soft set theory and uni–int decision making, *European Journal of Operational Research*, 2010, **207**, 848–855.

Çetkin V., Aygün H., On fuzzy soft topogenous, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2013, **27**(1), 247-255.

Çetkin V., Aygün H., Uniformity Structure in the Context of Soft Set, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013, **6**(1), 69-78.

Çetkin V., Aygün H., On Convergence of Fuzzy Soft Filters, *3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Vienna, Austria, 25-28 August 2014.

Çetkin V., Aygün H., Hutton Uniformity in the Context of Fuzzy Soft Sets, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2016, **9**(4), 419-433.

Çetkin V., Aygün H., On Convergence of Soft Nets, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 2016, **26**(3-5), 175-187.

Çetkin V., Aygünoğlu A., Aygün H., CATS of Soft Topological Spaces, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2016, **30**, 1903-1913.

Das N.R., Saha M.L., Some Fixed Point Theorems in Fuzzy 2-metric Spaces, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 2013, **21**(4), 753-758.

Das S., Samanta S.K., Soft real set, soft real number and their properties, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 2012, **20**, 551- 576.

Das S., Samanta S.K., On Soft Metric Spaces, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 2013, **21**, 707- 734.

Das S., Samanta S.K., Soft metric, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013, **6**, 77-94.

Dersanambika K.S., Aswathy M.R., Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 2011, **6**, 1079-1089.

Farhangdoost M.R., Metrizable and 2-Metrizable Topological Spaces, *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theroies*, 2012, **10**(1), 61-69.

Gähler S., 2-metriche Raume and ihre Topologische Strucktur, *Mathematische Nachrichten*, 1963, **26**, 115-148.

George A., Veeramani P.,On some results in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, **64**, 395-399.

Han J., A Common Fixed Point Theorem on Fuzzy 2-Metric Spaces, *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, 2010, **23**(4), 646-655.

Iseki K., Fixed Point Theorems in 2-metric Spaces, *Math. Seminar Notes XIX*, 1975.

Iseki K., Mathematics on Two Normed Spaces, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 1976, **13**(2), 127-135.

Joshi A., Some Common Fixed Point Theorems in Fuzzy 2-Metric Spaces under Strict Contractive Conditions for Mappings Satisfying New Property, *International Journal of Physics and Mathematical Sciences*, 2013, **3**(3), 1-7.

Kaleva O., The Completion of Fuzzy Metric Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1985, **109**, 194-198.

Khan M.S., On Fixed Point Theorems in 2-Metric Space, *Publications de L'Institut Mathematique*, 1980, **27**(41), 107-112.

Kharal A., Ahmad B., Mappings on soft classes, *New Mathematics and Natural Computation*, 2011, **7**(3), 471-481.

Klement E.P.,Mesiar R.,Pap E.,Triangular Norms,*Kluwer Academic Publishers*, 2000.

Kramosil O., Michalek J., Fuzzy Metric and Statistical Metric Spaces, *Kybernetica*, 1975, **11**, 326-334.

Lahiri B.K.,Das P.,Dey L.K., Cantor's Theorem in 2-Metric Spaces and Its Applications to Fixed Point Problems, *Taiwanese Journal of Mathametics*, 2011, **15**(1), 337-352.

Lal S.N., Singh A. K., An Analogue of Banach's Contraction Principle for 2-Metric Spaces, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1978, **18**, 137-143.

Maji P.K., Biswas R., Roy A.R., Fuzzy soft sets, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 2001, **9**(3), 589-602.

Maji P.K., Biswas R., Roy A.R., Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 2003, **45**, 555-562.

Molodtsov D., Soft Sets Theory-First Results, *Computers and Mathematics with Applications*, 1999, **37**, 19-31.

Mursaleen M., Lohani Q. M. D., Mohiuddine S. A., Intuitionistic Fuzzy 2-Metric Space and its Completion, *Chaos, Solitions and Fractals*, 2009, **42**, 1258-1265.

Mursaleen M., Lohani Q. M. D., Baire's and Cantor's Theorems in Intuitionistic Fuzzy 2-Metric Spaces, *Chaos, Solitions and Fractals*, 2009, **42**, 2254-2259.

Naidu S.V.R, Some Fixed Point Theorems in Metric and 2-Metric Spaces, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2001, **28**, 625-636.

Naidu S.V.R., Prasad J.R., Fixed Point Theorems in 2-Metric Spaces, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1986, **17**(8), 974-993.

Nazmul Sk., Samanta S. K., Neighbourhood properties of soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2012, **6**, 1-15.

Park J. H., Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces, *Chaos, Solitions and Fractals*, 2004, **22**, 1039-1046.

Pazar Varol B., Aygün H., On soft Hausdorff spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2012, **5**(1), 15-24.

Rhoades B.E., Contractive Type Mappings on a 2-Metric Space, *Mathematische Nachrichten*, 1979, **91**, 151-155.

Saha M.L., Some Fixed Point Theorems in Complete Fuzzy 2-Metric Spaces, *IOSR Journal of Mathematics*, 2016, **12**(1), 01-05.

Saha M., Dey D., On the Theory of Fixed Points of Contractive Type Mappings in a 2-Metric Space, *International Journal of Mathematical Anaysis*, 2009, **3**(6), 283-293.

Saha M., Dey D., Fixed Point Theorems for a Class of A-Contractions on a 2-Metric Space, *Novi Sad Journao of Mathematics*, 2010, **40**(1), 3-8.

Shabir M., Naz M., On soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **61**, 1786-1799.

Sharma A.K., A Note on Fixed Points in 2-Metric Spaces, *Indian Jornal of Pure and Applied Mathematics*, 1980, **11**(12), 1580,1583.

Sharma S., On Fuzzy Metric Space, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 2002, **26**, 133–145.

Shrivastava K., Common Fixed Point Theorems Satisfying Implicit Relation, *International Journal of Advance Research in Science and Engineering*, 2016, **5**(8), 206-215.

Shrivastava R., Gupta V., Vijaywargi N., Common Fixed Point Theorem in Intuitionistic Fuzzy 2-Metric Spaces for Integral Inequality, *Mathematical Theory and Modeling*, 2014, **4**(12), 17-28.

Singh B., Jain S., Jain S., Generalized Theorems on Fuzzy Metric Spaces, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 2007, **31**, 963-978.

Singh M., Singh N., Chauhan P., Fixed Point Theorems via The Concept Set S_t in 2-Metric Spaces, *International Jornal of Mathematical Sciences and Engineering Applications*, 2016, **10**(2), 43-53.

Tanay B., Kandemir M. B., Topological structures of fuzzy soft sets, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **61**, 412-418.

Wardovski D., On a Soft Mapping and its Fixed Points, *Fixed Point Theory and Applications*, 2013, 182.

Yadav D.S., Thakur S.S., Fixed Point Theorems for Generalized Contraction Mappings in Complete Fuzzy 2-Metric Spaces, *General Mathematics Notes*, 2013, **16**(1), 25-32.

Zorlutuna I., Akdağ M., Min W. K., Atmaca S., Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2012, **3**(2), 171-185.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Güner E., Çetkin V., Aygün H., On Some Fixed Point Theorems in Soft Metric Spaces, *International Conference on Mathematics and Engineering,* Yıldız Technical University, Istanbul, Turkey, 10-12 May 2017.

Güner E., Çetkin V., Aygün H., Soft Fixed Point Theorems in Terms of Soft Altering Distance Functions, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling*, Gelişim University, Istanbul, Turkey, 3-7 July 2017.

ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmit'de tamamladı. 2010 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2015 yılında fakülte ve bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2016 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.