KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

GİZEM TABAK

KOCAELİ 2018

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

GİZEM TABAK

Dr.Öğr.Üyesi Hülya KODAL SEVİNDİR		
Danışman,	**Kocaeli Üniversitesi**	....
Prof.Dr. Halis AYGÜN		
Jüri Üyesi,	**Kocaeli Üniversitesi**	....
Prof.Dr. Halim ÖZDEMİR		
Jüri Üyesi,	**Sakarya Üniversitesi**	....

Tezin Savunulduğu Tarih: 06.07.2018

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Günlük yaşantımızda, kesin olduğunu düşündüğümüz ancak gerçekte kesin olmayan birçok durumla karşılaşırız. Bu durumların sistematik olarak öngörülmesi, yapılan bazı kabullerden sonra mümkün olabilmektedir. Bulanık mantık bize bu tür belirsiz durumları tanımlamamızda yardımcı olur. Bulanık diferansiyel denklemler, bulanık mantık ve bulanık türev kavramlarını temel almaktadır.

Bulanık diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri konusunda bana çalışma fırsatı veren ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hülya Kodal Sevindir'e teşekkür eder sonsuz saygılarımı sunarım. Tüm yüksek öğrenim hayatım boyunca benden desteklerini esirgemeyen Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanı ve Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Halis Aygün'e teşekkürlerimi sunarım. Tez sürecinde bana büyük desteği olan hocam Dr. Öğr. Üyesi Mine Aylin Bayrak'a teşekkür ederim. Ayrıca Arş. Gör. Süleyman Çetinkaya'ya teşekkürlerimi sunarım. Tüm öğrenim hayatım boyunca desteğini esirgemeyen aileme ve yüksek lisans sürecimde benim için büyük fedakarlık gösteren eşime ve kızıma sonsuz sevgimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs – 2018 Gizem TABAK

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

U,V	: IR üzerinde her mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlar uzayı
μ	: Üyelik fonksiyonu
supp(A)	: A bulanık kümesinin desteği
core(A)	: A bulanık kümesinin çekirdeği
cl(A)	: A bulanık kümesinin kapanışı
A=(a,b,c)	: A üçgensel bulanık sayısı
A=(a,b,c,d)	: A yamuk bulanık sayısı
R_F	: Bulanık reel sayılar kümesi
x(.)	: Gerçek değerli sürekli fonksiyon
$\hat{f}$	: Genişletilmiş f fonksiyonu
$[A]_r$	: A bulanık kümesinin r-kesiti
$E([a,b];R^n)$	: [a,b]'den R^n'ye fonksiyonlar uzayı
F(X)	: $\mathbb{X}$ evreninin tüm bulanık alt kümeleri
Θ_H	: Hukuhara farkı
Θ_{gH}	: Genelleştirilmiş hukuhara farkı
$f_H{}'(x)$	: f fonksiyonunun x noktasındaki hukuhara türevi
$f_g{}'(x)$	: f fonksiyonunun x noktasındaki genelleştirilmiş türevi
$f_{gH}{}'(x)$	: f fonksiyonunun x noktasındaki genelleştirilmiş hukuhara türevi
$\underline{a}_r,\overline{a}_r$	: A bulanık sayısının r-kesitlerinin alt ve üst uç noktaları $[A]_r=\left[\underline{a}_r,\overline{a}_r\right]$
N	: Lineer olmayan diferansiyel operatör
L	: Lineer operatör
q	: Gömme parametresi
$\hbar$	: Yardımcı parametre
H	: Yardımcı fonksiyon

Kısaltmalar

ABM	: Adomian Bozunma Metodu
BBDP	: Bulanık Başlangıç Değer Problemi
BDD	: Bulanık Diferansiyel Denklemler
BDP	: Başlangıç Değer Problemi
HAM	: Homotopi Analiz Metodu
R_{x_m}	: M-yinci Mertebeden Deformasyon Denklemi

BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

ÖZET

Diferansiyel denklemler, fizik, mühendislik, ekonomi, biyoloji gibi alanlardaki uygulamalardan, teorik matematiksel gelişmelere kadar pek çok alanda kullanılmaktadır. Bulanık diferansiyel denklemler ise kısaca bulanık sayı değerli fonksiyonların dahil olduğu diferansiyel denklemler olarak tanımlanabilir.

Bulanık küme kavramı ilk kez Zadeh (Zadeh, 1965) tarafından ve bulanık diferansiyel denklemler Chang and Zadeh tarafından tanıtılmıştır. O zamanlardan beri birçok araştırmacı tarafından kapsamlı bir şekilde araştırılmaktadır. Bu çalışmada, bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için Euler yöntemi, Homotopy analiz yöntemi ve Adomian yöntemi kullanılarak bulanık diferansiyel denklemler için bazı nümerik çözümler ilk iki adım için ayrıntılı olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Cauchy Problemi, Bulanık Diferansiyel Denklemler, Hukuhara Diferansiyellenebilirlik, Kuvvetli Genelleştirilmiş Diferansiyellenebilirlik, Nümerik Çözümler.

NUMERICAL SOLUTIONS OF FUZZY DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

Differential equations have been encountered in many areas such as physics, engineering, economy and biology. Fuzzy differential equations can be recognized as differential equations having fuzzy valued functions. Fuzzy set concept was first introduced by Zadeh and fuzzy differential equations were first introduced by Chang and Zadeh. Since then, the topic of Fuzzy Differential Equations has been attracting a rapidly growing number of researchers. In this thesis some numerical algorithms for fuzzy ordinary differential equations are considered. Schemes for the classical Euler method, Homotopy Analysis Method, and Adomian Decomposition Method are discussed; this is followed by an error analysis. The algorithms are used to solve numerically for a linear fuzzy Cauchy problem, and the first two iterative steps of the algorithms are shown explicitly in detail.

Keywords: Fuzzy Cauchy Problem, Fuzzy Differential Equations, Hukuhara Differentiability, Strongly Generalized Differentiability, Numerical Solutions.

GİRİŞ

Bulanık diferansiyel denklemler teorisi, belirsizlik altında dinamik sistemleri modellemenin doğal bir yolunu temsil eder. Dolayısıyla bu teori, bilim ve mühendislik problemlerinin modellenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Bulanık diferansiyel denklemler bulanık küme ve bulanık türev kavramlarıyla yakından ilgilidir. Teknolojinin ilerlemesiyle bulanık diferansiyel denklemlerin günümüzde kullanım sahaları oldukça genişlemiştir. Bulanık diferansiyel denklemleri anlamak için öncelikle bulanık mantık kavramının özümsenmesi gerekmektedir.

İlk defa 1960 yılında, University of California (Berkeley)'den Prof. Dr. Lotfi Zadeh tarafından ortaya atılmış olan bulanık mantık, doğal dildeki belirsizliği modellemek için kullanılmıştır. Bulanık türev kavramı ise Chang ve Zadeh tarafından kullanılmış olup (Chang ve Zadeh, 1972), Dubois ve Prade tarafından genişletme ilkesi yardımı ile geliştirilmiştir (Dubois ve Prade, 1982). Bulanık diferansiyel denklem kavramı ilk defa 1987 yılında Kandel ve Byatt (Kandel ve Byatt, 1978; Kandel ve Byatt, 1980) tarafından kullanılmıştır. Daha sonra bulanık türev için araştırmacılar çeşitli tanımlar ortaya atmışlardır. Hukuhara türevi bu tanımlardan ilk ve en yaygın olanıdır (Hukuhara 1967). Puri ve Ralescu bu kavramı genelleştirmişlerdir (Puri, 1983). Bu genelleştirilmiş yaklaşım Kaleva (Kaleva, 1987; Kaleva, 1990) tarafından incelenmiştir. Hukuhara türevinin uygulamasında zamanla bulanıklığın artması ve kesin çözümden çok uzak çözümlerin elde edilmesi bu uygulamanın en önemli dezavantajıdır (Kaleva, 2006). Seikkala (Seikkala, 1987), bu dezavantajı ortadan kaldırmak için daha genel bir kavram olan Seikkala türevi kavramını önermiştir. Seikkala (Seikkala, 1987), Kaleva (Kaleva, 1987) ve (Kaleva, 1990) tarafından bulanık başlangıç değer problemi için verilen yaklaşım, Buckley ve Feuring (Buckley ve Feuring, 2000) tarafından genelleştirilmiştir. Ancak bu kavramın Dubois ve Prade (Dubois ve Prade, 1982)tarafından geliştirilmiş kavram ile aynı olduğu anlaşılmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Bulanık Mantık Kavramı

Matematiksel bir tasarım yapılırken ilk önce o sürecin bir dinamik modeline ihtiyaç vardır. Ancak bu durum pratikte bazen karışıklığa yol açabilmektedir. Süreçteki durumlar ile ilgili verilen bilgiler matematiksel modelleme için yetersiz olabilir ya da kurulan modellemede kullanılan parametreler zamanla değişiklik gösterebilir. Doğru modelin kurulması halinde bile bunun denetleyici tasarımında kullanılması daha karmaşık problemlere yol açabilir. Bu gibi karmaşık durumlarla karşılaşıldığı zaman genellikle uzman bir kişinin tecrübe ve bilgilerinden yararlanma yoluna başvurulur. Uzman kişi günlük yaşantımızda sıkça kullandığımız 'uygun, çok uygun, çok uygun değil, çok fazla, çok az, az' gibi kelimeler doğrultusunda esnek bir denetim mekanizması geliştirir. İşte bulanık denetim de bu tür mantıksal ilişkiler üzerine kurulmuştur (Zadeh, 1966).

Belirsizliklerle baş edebilmek için pek çok araştırmacı çeşitli çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalar sayesinde belirsizlik içeren problemlerin çözümü için olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, aralık matematiği gibi birçok teori geliştirilmiştir. Bu teoriler arasında en kullanışlı olanı Zadeh'in bulanık kümeler teorisidir. Bu teoride, klasik bir kümedeki her elemanı [0,1] aralığında bir sayıya götüren bir dönüşüm ile bulanık küme tanımlanmıştır. Böylece klasik kümedeki 0 ve 1 ikili aitlik derecesinden, kısmi aitlik derecesine geçerek daha esnek sonuçlar elde edilmiştir.

Günlük yaşantıda birçok durumu belirsizlikle tanımlarız. Genellikle kesinlik yaklaşımıyla modellenemeyen belirsiz durumlar bulanık kümeler yardımıyla gerçekçi bir şekilde modellenebilir. Bulanık kümede küme elemanlarının kesin sınırlarla belirlenmemiş olması sebebiyle hangi elemanların bu kümeye dahil olduğunu ayırt etmek kolay değildir. Kesin (klasik) kümelerde yer alan evet/hayır, iyi/kötü, doğru/yanlış ifadeleri bulanık kümelerde yerini kısmen doğru ve kısmen yanlış gibi ifadelere bırakır (Kleyle, 1997). Yani bulanık mantıkta modelleme aşamasında kullanılan değişkenler esnek bir şekilde belirlenirken, klasik mantıkta böyle bir durum söz konusu değildir. Bu da bulanık mantığı klasik mantıktan ayıran en önemli özelliktir. Bu esneklik asla tesadüfi değildir. Örneğin bir lastik nasıl içinde bulunduğu duruma göre şeklini değiştirirken, bütünlüğünü ve yapısını koruyabiliyorsa, bulanık modellerde de değişen şartlara rağmen özündeki yapıyı korurlar (Kıyak, 2003).

Bulanık mantığı, isminin insanlarda çağrıştırdığı gibi belirsiz parametrelerle yapılan belirsiz işlemler olarak tanımlamak doğru değildir. Bulanık mantık gelişmiş bir olasılık hesaplama metodu da değildir. Bazı bilim adamları bulanık mantığı, olasılığın bir devamı olarak görmüşlerdir, ancak bulanıklık ile olasılık birbirlerinden oldukça farklı kavramlardır. Bulanık mantık durumların gerçekleşme olasılığından ziyade oluşum derecesiyle ilgilenir. Öte yandan olasılık, bir durumun gerçekleşip gerçekleşmeyeceğini ölçer. Örneğin bir çölde bir haftadır su içmemiş durumda iseniz ve iki cam şişe su ile karşılaşmanız durumunda, şişelerden birinin üzerindeki etikette ‘0,91 olasılıkla içilebilir sudur’, diğerinin üzerinde ise ‘içilebilir su sınıfına 0,91 derecede aittir’ yazılması halinde her iki ifade de belirsizlik içermesine rağmen birbirinden oldukça farklıdır. Birincisinde 0,91 olasılıkla şişede su olması demek; 0,09 olasılıkla da renksiz başka bir sıvı olabilir demektir. Bu renksiz sıvı bir çeşit asit olabilir. Ancak içilebilir su sınıfına 0,91 üyelik derecesinde ait olması demek, bu suyun 0,91 kalitede iyi bir su olması demektir (Sinecen, 2002).

Günlük hayatta farkında olmadan kullanılan birçok terim bulanık bir yapıya sahiptir. Terimler ya da ölçülerin tam (kesin) olarak tanımlanamadığı durumlarda insanlar çoğu zaman durumları belirsiz (kesin olmayan) ifadeler kullanarak ifade ederler. Sıcak, soğuk, ılık, yaşlı, genç, kısa, uzun, az, çok, biraz, çok az, çok fazla, alçak, yüksek, biraz yüksek, çok alçak, çok yüksek gibi terimler örnek olarak verilebilir. Örneğin, bir kişinin kaç yaşında olduğu bilgisine göre genç, yaşlı, çok genç, çok yaşlı, orta yaşlı gibi sözel ifadelerle o kişiyi tanımlarız. Yolun rampa ve kayganlık durumuna göre arabanın gaz pedalına ya da fren pedalına biraz daha yavaş ya da biraz daha hızlı basarız. Bulunduğumuz ortamın ışığı yetersiz ise onu biraz daha arttırır, gereğinden fazla ise biraz azaltırız.

Tüm bunlar insan beyninin tam kesinlik içermeyen ve belirsiz durumlarda olayları nasıl değerlendirdiğine, nasıl tanımladığına, nasıl tepki verdiğine ve davrandığına ilişkin birer örnektir. İşte bulanık mantık, sorulara basitçe evet-hayır gibi net ve kesin cevaplar vermeyen durumları içerir. Bulanıklığın, bulanık mantığın temeli de aslında budur. Klasik mantık sistemlerinden farklı olarak bulanık mantık, uzman deneyim ve birikimlerine büyük ölçüde önem verir.

Zadeh, insanın tam kesinlik içermeyen bilgiyi anlama ve analiz etme yeteneğinden yola çıkarak bulanık mantık üzerine çalışmıştır. Belirsizlik içeren problemleri çözmek için insan düşüncesinin en önemli unsurlarının sayılardan çok dilsel ifadeler olduğunu savunarak bulanık mantık teorisini geliştirmiştir. Bulanık mantık sayesinde geleneksel matematiğin belirli çizgilerle sınırlı dünyası, derecelendirme yöntemiyle belirsizliğe doğru genişletilmiştir. Dolayısıyla gerçek hayattaki başarılı uygulamaları sayesinde bu kavram tüm dünyada birçok alanda sıklıkla kullanılmaya başlanmıştır. Bulanık mantığın sağladığı başlıca avantajlar (Şen, 2001);

- İnsan düşünce sistemine oldukça yakındır.
- Kullanılan değişkenlerin esnek bir şekilde belirlenebilmesi pratikte kolaylık sağlamaktadır.
- Yazılımının basit olması nedeniyle sistem daha ekonomik olarak kurulabilir.
- Kesinliği olmayan bilgilerin kullanılması söz konusudur.
- Uygulamasında mutlaka matematik modele gereksinim duyulmaz.
- Uzman kişilerin tecrübelerinden yararlanılarak kolaylıkla bir model tasarlanabilir.
- Geleneksel kontrol teknikleriyle uyum halindedir.
- Karmaşık durumlar için az sayıda kurallar vardır.
- Doğrudan kullanıcı girişlerine ve kullanıcının deneyimlerinden yararlanabilmesine olanak sağlar.

1.2. Bulanık Mantığın Kullanım Alanları

Bulanık mantık sistemleri ilk olarak çimento sanayiinde ve su arıtma sistemlerinin işletiminde kullanılmıştır. Daha sonra asansör ve vinç denetimi, nükleer reaktör, buhar türbini gibi alanlarda da bulanık mantıktan yararlanılmıştır.

Bulanık mantık ilk kez 1975 yılında, Londra'daki Queen Mary College'de Profesör olan H. Mamdani ve Assilian (Mamdani ve Assilian, 1975) tarafından bir buhar makinesinin kontrolünün sağlanması için kullanıldı. Daha sonra bu alanda ciddi adımlar atılmaya başlanmıştır.

Günümüzde de birçok alanda kullanılan bulanık mantık sistemleri, endüstri alanında da önemli adımlar atmıştır. Bu alandaki ilk önemli uygulama 1980'li yıllarda Danimarka'daki bir çimento fabrikasında gerçekleştirilmiştir (Munakata, 1994). Değirmenin içinde çok hassas bir şekilde oranlanması gereken sıcaklık ve oksijenin ayarlanması bulanık bir sistem yardımıyla en uygun bir şekilde yapılmıştır. Diğer bir önemli uygulama iste Japonya'da Hitachi firması tarafından dünyanın en gelişmiş metrosu olan Sendai Metrosu'nda gerçekleştirilmiştir. Bu uygulama sayesinde trenin istenilen konumda durması 3 kat daha iyileştirilmiş ve kullanılan enerji de yaklaşık %10 azaltılmıştır. Yaklaşık 14 km boyunca 16 istasyonda duran trenin duruş ve kalkış hareketi o kadar yumuşaktır ki ayaktaki yolcular bile bu durumdan hiç etkilenmemişlerdir (Sugeno 1985). Hitachi firmasının bu büyük ve önemli çalışmasının üzerine Tokyo Metro'suna da aynı sistemin kurulması için talep gelmiştir. Yamaichi Securities'in geliştirdiği bulanık mantık temelli uzman sistem sayesinde, 1988 yılında 'Kara Pazar' adlı Tokyo Borsa'sında yaşanan krizi yaklaşık 20 gün öncesinde haber vermiştir. Bu kadar başarılı uygulamalardan sonra bulanık mantık daha fazla ilgi ve talep görmeye başlamış ve bunun üzerine uluslararası bir çalışma ortamı oluşturabilmek için 1989 yılında LIFE (Laboratory for Interchange Fuzzy Engineering) laboratuvarları kurulmuştur. Bu labaratuvarların kurucuları arasında SGS, Thomson, Hitachi, Omron, NCR, IBM, Toshiba ve Matsuhita gibi dünya devleri de bulunmaktadır. 1990'lardan sonra bulanık mantık, fotoğraf makinalarında, bulaşık makinalarında, çamaşır makinalarında ve birçok ev aletlerinde ve hatta borsaya kadar birçok değişik alanlarda kullanılmıştır. Günümüzde, bulanık mantık uygulamalarına dayanan yazılımlar, donanımlar ve hatta bulanık mikroişlemciler piyasada kullanıcılara sunulmaktadır. Panasonic firmasının tasarladığı video kayıt cihazında çekim sırasında oluşan sarsıntıyı ortadan kaldırması, Subaru ve Nissan firmalarının birlikte geliştirdikleri otomobil vites sisteminde aracın, şoförün kullanış stiline ve motor gücüne göre uygun dişliyi ayarlaması, Nissan tarafından gerçekleştirilen ABS fren sistemleri, Fujitsu, Toshiba, Hitachi ve

Mitsubishi'nin büyük asansör denetim sistemleri, Matsushita firmasının tasarladığı çamaşır makinasında çamaşırların kirlilik oranına, ağırlığına ve kumaşın cinsine göre yıkama programı seçme bulanık mantığın kullanıldığı örneklerden bazılarıdır. Ayrıca Tokyo Institute of Tecnology'den M. Sugeno tarafından geliştirilen modelde bir helikopteri ses komutuyla hareket ettirmeyi ve pilotlar için dahi çok güç olan uçağı havada sabit tutmayı başarmışlardır (Baykal 2004).

Aşağıda bulanık mantık uygulamalarının kullanıldığı alanlar verilmiştir:

Biyoloji ve Tıp Biliminde: Bulanık mantık tabanlı teşhis cihazlarının yapımında, şeker hastaları için vücuttaki insülin seviyesini ayarlayarak şekeri dengede tutan (pankreas görevi gören) cihazların yapımında, kanser araştırmalarında, prematüre doğan bebekler için anne karnındaki ortamına yakın bir ortamın hazırlanmasında, kalp pillerinin üretiminde kullanılır.

Yönetim ve Karar Desteklerinde: Bulanık mantık tabanlı satış stratejilerinin oluşturulmasında, amaca yönelik fabrika yeri seçiminde kullanılır.

Ekonomi ve Finansta: Satış sistemlerinin bulanık modellenmesinde, bulanık mantık tabanlı ticaret sistemlerinde, bulanık mantık tabanlı maliyet–fayda analizlerinde, bulanık mantık tabanlı yatırım değerlendirmesinde kullanılır.

Çevre Biliminde: Hava tahminlerinin bulanık mantık tabanlı sistemlerinde ve su kalite kontrolünün sağlanmasında kullanılır.

Mühendislik ve Bilgisayar Bilimlerinde: Bulanık veri tabanı sistemlerinde, bulanık mantık tabanlı deprem tahminlerinde, nükleer işletmelerin otomasyonunun kontrolünde, bilgisayar ağları dizaynında, oluşturulan tasarımların değerlendirilmesinde, bulanık mantık kontrol sistemlerinde kullanılır.

Araştırma Çalışmalarında: Bulanık mantık tabanlı kaynak seçiminde, planlama ve modellemede kullanılır.

Kalıp Tanıma ve Sınıflandırılmasında: Bulanık mantık tabanlı konuşmaların, el yazılarının, yüz karakterlerinin tanınmasında, bulanık mantık tabanlı askeri komut analizlerinde, bulanık resim analizinde kullanılır.

Psikolojide: Bulanık mantık tabanlı insan davranış ve psikolojisinin analiz edilmesinde, bulanık mantık tabanlı suç işleme ve önleme sebeplerinin araştırılmasında kullanılır.

Güvenilirlik ve Kalite Kontrolünde: Bulanık mantık tabanlı hata tahmininde, üretim hattının denetiminde kullanılır.

Görüldüğü üzere bulanık mantık hayatımızın her alanında yer almaktadır.

Zadeh bulanık mantığın genel özelliklerini şu şekilde ifade etmiştir (Zadeh, 1965), (Elmas, 2003);

Bulanık mantık, kesin değerlere dayanan düşünme yerine, yaklaşık değerlere dayalı düşünme kullanır.

Bulanık mantıkta dilsel ifadeler; az, çok, çok az vb. şeklindedir.

Bulanık mantık, matematiksel modeli çok zor durumlar için oldukça uygundur.

Mantıksal olan tüm sistemler bulanık olarak ifade edilebilir.

Bulanık küme teorisi, insanın bir problem çözümünde kullandığı dilsel belirsizlikleri modeller. Bu sayede bu dilsel belirsizliğin bulanık sayılarla matematiksel olarak ifade edilmesini sağlar (Knight, 2001; Liang, 2001; Cheng, 2002; Byrne, 1995).

Bulanık mantığın özelliklerinden bir diğeri de, klasik küme (crisp ya da kesin kümeler de denilmektedir) anlayışının temel olarak kabul ettiği kurallar dışındaki bazı ilkeleri kullanmasıdır. Klasik küme yaklaşımına göre bir varlık bir kümenin "elemanı" ya da "elemanı değil" şeklinde ifade edilirken bulanık küme yaklaşımında bir varlık bir kümeye üyelik derecesi olarak belirtilen değer ölçüsünde aittir ya da değildir. Bulanık mantık; ikili (klasik) mantık sisteminin aksine günlük hayatta kullanılan değişkenlere üyelik dereceleri atayarak, olayların hangi ölçüde gerçekleştiğini belirleyen çoklu mantık sistemidir. Bulanıklık, aslında çok değerlilik (multi-valued) demektir. Yani bulanık mantık aslında siyah ile beyaz arasında sonsuz sayıda gri tonlarını içerir.

Klasik mantıkta bir ifade tamamen yanlış ise 0 değerinde ve tamamen doğru ise 1 değerindedir. Yani olay ve durumların kesin sınırları vardır. Ancak bulanık mantıkta bir ifadenin 0 veya 1 değerini alması sadece çok özel durumlarda oluşur. Bu özel durumların dışında tüm ifadeler 0'dan büyük 1'den küçük reel değerler alırlar. Bu yüzden bir varlık bir kümeye ait olabileceği gibi birden fazla kümeye de ait olabilmektedir. Bu ait olma derecesi de üyelik derecesi olarak adlandırılmaktadır.

Örneğin yükseklikle ilgili bir problem ele alındığında sadece yüksek ya da yüksek değil demekle kalmayıp ne kadar yüksek ya da ne kadar alçak olduğunu da belirtir. Kısaca, klasik mantığın karmaşık problemler karşısında yetersiz olduğu durumlardan dolayı bulanık mantık doğmuştur.

2. LİTERATÜR ÇALIŞMASI

Literatür tarandığında, geliştirildiği tarihten bu yana pek çok bilim insanı bulanıklık kavramı, bulanık mantık, bulanık değerli fonksiyonların Hukuhara diferansiyellenebilirliği, bulanık diferansiyel denklemler teorisi, bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözüm metotları konusunda birçok yayın yapıldığı gözlemlenmiştir. Bu yayınlar içerisinden seçilen bazı makaleler kronolojik sırasıyla aşağıda verilmiştir.

L. A. Zadeh 1965'deki çalışmasında bulanık mantık kavramını tanıtmıştır (Zadeh, 1965).

1967 yılında Hukuhara'nın bulanık türev tanımı, bulanık türev için ortaya atılan tanımlamaların ilk ve en yaygın olanıdır. (Hukuhara, 1967).

Yine L. A. Zadeh 1971 yılında bulanık algoritma ve bulanık modelleme üzerine çalışmalar yapmıştır. (Zadeh 1971).

Chang ve Zadeh bulanık türev kavramını ilk kez tanıtmışlardır (Chang ve Zadeh, 1972). Daha sonra Dubois ve Prade 1980'li yıllarda bu kavram üzerine uzun bir çalışma yaparak bulanık türev kavramını geliştirmişlerdir (Dubois ve Prade, 1982). Daha sonra 1978 yılında Kandel ve Byatt, BDD kavramını bulanık dinamik problemlerin analizine uygulamışlardır. 1978 yılında Nguyen bulanık kümeler için genişletme prensibine çalışmıştır (Nguyen, 1978).

Bulanık mantık ilk kez 1975 yılında, Londra'daki Queen Mary College'de Profesör olan H. Mamdani ve S. Assilian tarafından bir buhar makinesinin kontrolünün sağlanması için kullanıldı (Mamdani ve Assilian, 1975). Bu uygulamanın sonuçları bilim dünyasında çığır açtı ve teknolojide büyük değişikliklerin olmasına olanak sağladı. Daha sonra 1980'li yıllarda bulanık mantık, endüstri alanında da gelişme sağlamıştır. Bu alandaki ilk çalışma Danimarka'da yer alan bir çimento fabrikasında gerçekleştirilmiş ve olumlu sonuçlar elde edilmiştir (Munakata, 1994).

Kandel ve Byatt, 1978 ve 1980 yıllarındaki çalışmasında bulanık diferansiyel denklem kavramını kullanmışlardır (Kandel ve Byatt, 1978; Kandel ve Byatt, 1980).

Sugeno 1980'li yıllarda kendisi park edebilen bir robot araba geliştirmiştir. Daha sonra Hitachi firması tarafından Japonya'da bulunan dünyanın en gelişmiş metrosunda (Sendai Metrosu) bulanık mantık denetleyici sistem kullanılmış ve bu uygulama sayesinde trenin yol boyunca kullandığı enerji %10 azaltılmıştır (Sugeno, 1985).

Dubois ve Prade 1982 yılında bulanık türev kavramını genişletme ilkesi yardımıyla geliştirmiştir (Dubois ve Prade, 1982).

1983 yılında Puri, Hukuhara türevi kavramına yeni tanımlamalar getirerek bu kavramı geliştirmiştir (Puri, 1983).

S. Seikkala 1987 yılında, Hukuhara türevinin dezavantajı olan kesin çözümden uzak çözümlerin elde edilmesine çözüm olarak daha genel bir tanım olan bir türev kavramı önermiştir (Seikkala, 1987).

Kaleva, 1987 ve 1990 yıllarındaki makalelerinde bulanık başlangıç değerler problemi için yeni bir yaklaşım önermişlerdir (Kaleva, 1987; Kaleva, 1990).

1989 yılında LIFE (Laboratory for Interchange Fuzzy Engineering) kurulmuştur. Bu labaratuvarların kurucuları arasında SGS, Thomson, Hitachi, Omron, NCR, IBM, Toshiba ve Matsuhita gibi dünya devleri de bulunmaktadır (Baykal, 2004).

Kaleva, Seikkala ve Wu Congxin tarafından BDD'ler için bulanık başlangıç değer problemi titizlikle çalışılmış olup çeşitli düzenlemeler getirmişlerdir (Seikkala, 1987; Kaleva, 1990; Kaleva, 1987; Congxin, 1992).

G. Adomian 1990 yılında Adomian ayrıştırma yöntemini tanıtmış ve doğrusal olmayan denklemleri çözmek için bu yöntemi uygulamıştır (Adomian, 1990). Babolian ise bu yöntemi kullanarak birinci derece bulanık başlangıç değer problemini incelemiştir (Babolian, 2004).

Kauffmann ve Gupta'nın çalışmasında bulanık sayının temel tanımı verilmiştir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

1992 yılında San Diego'da bulanık tabanlı sistemler alanında ilk uluslararası IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineering) konferansı düzenlendi. Bu konferans bulanık mantık teorisinin IEEE tarafından başarılı bulunduğunun bir kanıtı olmuştur (Akpolat, 2000).

1992'de Liao tarafından önerilen ve topolojide temel bir kavram olup homotopiyi dayanak kabul eden HAM, lineerleştirme, pertürbasyon veya ayrıştırma olmaksızın bazı lineer ve lineer olmayan problemleri çözmek için etkili ve kolay bir şekilde kullanılmıştır (Argub, 2013).

Ming Ma tarafından bulanık adi diferansiyel denklemler için klasik Euler yöntemi ayrıntılı şekilde ele alınmıştır (Ma, 1997; Ma, 1999). Ayrıca bulanık diferansiyel denklemi parametrik formda yazıp daha sonra başlangıç koşullarına sahip iki adi diferansiyel denklemden oluşan yeni bir sistemi sayısal olarak çözümüne yer verilmiştir. Euler yöntemi ile hem doğrusal hem de doğrusal olmayan bulanık diferansiyel denklem çözümü ele alınmıştır.

Bulanık diferansiyel denklemlerin çözümünde destek bölgesinin giderek artması Hukuhara yaklaşımının önemli bir dezavantajı olduğu belirtilmiş ve bu dezavantajın ortadan kalkması için Buckley ve Feuring yeni bir çözüm önermiştir (Diamond, 2000; Buckley ve Feuring, 2000).

Kaleva tarafından verilen bulanık başlangıç değer için yaklaşıma Buckley ve Feuring 2000 yılında yaptıkları çalışmada bulanık başlangıç değer problemi için yeni bir çözüm sunmaktadır (Buckley ve Feuring, 2000). Birinci dereceden diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemini çözmüş ve sonra bu çözümü bulanık duruma genişletmişlerdir. Bu yeni çözümün temel özelliklerini vererek bulanık fonksiyonların türevlerini karşılaştırmış ve bu türevleri kullanarak bulanık başlangıç değer problemine karşılık gelen farklı çözümleri karşılaştırmışlardır.

Tasarım maliyetlerini tahmin etmede ve ticari amaçlı inşa projelerinde yetersizlikleri tahmin etmek için Knight tarafından bulanık bir model geliştirilmiştir (Knight,2001).

Bulanık adi diferansiyel denklemlerin çözümü için sayısal algoritmalar ele alınmış ve yüksek mertebeden Taylor yöntemi üzerine çalışılmıştır (Allahviranloo, 2002).

Buckley ve Feuring'in 2000 yılında yaptığı çalışmadan sonra yaklaşık çözümü bulmak ve bulanık duruma getirmek için ilk kez Adomian yöntemini kullanmıştır (Babolian, 2004; Buckley ve Feuring, 2000). Bu yöntem klasik metodların uygulanamayacağı problemleri çözmek için oldukça kullanışlı bir yöntemdir.

Bulanık diferansiyel denklemler için kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik ilk kez tanıtıldı (Bede, 2004).

2005 yılında Bede, bulanık diferansiyel denklemin genel yapısı ve bulanık sayı değerli fonksiyonların diferansiyellenebilirliğini incelemiştir (Bede, 2005).

Bulanık diferansiyel denklemler (BDD), genelleştirilmiş hukuhara diferabnsiyellenebilirlik kavramını kullanarak incelenmiştir. Daha sonra 2008 yılında yaptıkları çalışmada bulanık dönüşümler sınıfının genişletilmiş durumları için yanal bulanık H-türev kavramını ortaya koymuştur (Chalco-Cano ve Roman Flores, 2008; Chalco-Cano, 2006).

Gerçel olmayan bir çözümü olan denklemlerde kullanılan zorlayıcı terimin, bu bulanık diferansiyel denkleme etkisini detaylı bir şekilde incelemiştir (Kaleva, 2006).

Birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklemlerin modifiye edilmiş (ya da iyileştirilmiş) Euler yöntemi ile daha az bir hatayla çözüm yöntemi verilmiştir (Shokri, 2007).

Birinci mertebeden lineer BDD için kuvvetli genelleştirilmiş H-diferansiyellenebilirliği uygulamıştır (Bede, 2007). Daha sonra Allahviranloo, BDD için kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik altında analitik çözümler elde etmek için yeni bir yöntem önermişlerdir (Viranloo, 2009),.

Bulanık başlangıç değer probleminin sonsuz sayıda adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebilmesi için LU (lower-upper) parametrik gösterimini tanımlamıştır (Bede, 2011). LU parametresi Negoita-Ralescu teoremine dayanır ve bir elamanın bir kümeye üyelik durumunun o elemanın o kümedeki r-kesiti ile eşdeğer olduğunu ifade etmiştir.

Aralık değerli fonksiyonlar için diferansiyellenebilirlik kavramının genelleştirilmesi olan Hukuhara diferansiyellenebilirliği kullanılarak, aralık değerli fonksiyonlar için diferansiyel hesaplama çalışmaları yapılmıştır (Chalco-Cano, 2012).

Argub 2013 yılında yaptığı çalışmada, homotopy analiz yöntemi ile kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik altında bulanık başlangıç değer problemlerinin seri çözümünü ele almıştır (Argub, 2013).

Radhy, birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklemi tanımlamış ve Runge-Kutta yöntemiyle denklem çözümünü incelemiştir (Radhy, 2017).

3. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez kapsamında kullanılan bulanık diferansiyel denklemlerin dayanağı olarak kabul edilen bulanık küme, bulanık sayı ve üyelik fonksiyonu ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

Bölümün devamında, bulanık değerli fonksiyon ve bu fonksiyonların diferansiyellenebilirliği hakkında bilgi verilecek olup diferansiyellenebilme yaklaşımları hakkında bilgi verilecektir.

3.1. Bulanık Küme

Bulanık sistemlerde en temel elemanlar bulanık kümelerdir. Bulanık bir küme, değişik/farklı üyelik (ait olma) derecelerine sahip elemanları olan bir kümedir. Bulanık küme bir üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir ve elemanları 0 ile 1 arasında üyelik derecelerine sahiptir (Zadeh, 1965). Buna göre kümeye tam dahil olanların üyelik değerleri 1 olarak, kümeye dahil olmayan elemanların üyelik değerleri 0 olarak, kümeye dahil olup olmadıkları belirsiz olan elemanlara ise belirsizlik durumuna göre 0 ile 1 arasında değerler atanır. Bulanık mantıkta herşeyin bir üyelik (aitlik) derecesi vardır (Kubat, 2015). Oysa kesin (klasik) küme teorisinde böyle bir durum söz konusu değildir. Bir eleman ya kümeye aittir ya da tamamı ile kümenin dışındadır. Dolayısıyla kesin kümelerde bir elemanın alabileceği üyelik değeri ya 0 ya da 1 dir.

Klasik küme teorisine göre;

Bir x elemanının A kümesi ile ilişkisi için klasik mantıktaki karakteristik fonksiyon;

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlıdır. Yani bir nesne bir gruba aittir ya da değildir (Kasabov, 1998). Bulanık kümelerde ise bir nesne bir grubun kısmi olarak üyesi olabilir. Üyelik derecesi, üyelik fonksiyonu olarak adlandırılan genelleştirilmiş bir karakteristik fonksiyon ile tanımlanır (Gomes, 2015).

E evrensel kümesinin bir bulanık altkümesi A,

$$\mu_A : E \rightarrow [0,1] \tag{3.2}$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir (Kasabov, 1998).

Eğer,

$$\mu_A : E \rightarrow \{0,1\} \tag{3.3}$$

ise A kümesi kesin (crisp)'dir (Kasabov, 1998).

A bulanık kümesi X ayrık uzayının sonlu sayıda $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ elemanından oluşuyor ise Denklem (3.4) deki gibi gösterilir;

$$A=\left\{\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_A(x_2)}{x_2}+\ldots+\frac{\mu_A(x_n)}{x_n}\right\}=\sum\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}. \tag{3.4}$$

A bulanık kümesi, sürekli ve sonsuz X uzayının bulanık bir altkümesi ise Denklem (3.5) deki gibi gösterilir;

$$A=\left\{\int\frac{\mu_A(x)}{x}\right\}. \tag{3.5}$$

Buradaki her iki gösterimde de kullanılan yatay çizgiler bölüm işareti (kesir çizgisi) olmayıp, x_i elemanları için üyelik fonksiyonlarını ifade eder. Denklem (3.4)'deki '+' işareti cebirsel toplama işlemini değil, küme işlemlerindeki birleşim işleminin fonksiyonel gösterimidir. Denklem (3.5)'deki integral işareti ise sürekli değişkenlerin birleşimi anlamına gelmektedir (Ross, 1995).

Tanım 3.1. Bulanık kümenin desteği (support),

$$\text{supp}A=\{x\in R : \mu_A(x)>0\} \tag{3.6}$$

ile tanımlanır (Kasabov, 1998).

Tanım 3.2. Bulanık kümenin çekirdeği (core),

$$\text{coreA}=\{x\in R : \mu_A(x)=1\} \tag{3.7}$$

ile tanımlanır (Kasabov, 1998).

A ve B, R'nin iki bulanık altkümesi olmak üzere, R'deki her eleman için A ve B nin üyelik dereceleri eşit oluyorsa $\left(\mu_A(x)=\mu_B(x)\ ,\ \forall x\in R\right)$, A ve B bulanık altkümeleri eşittir.

Tanım 3.3. (r-Kesit)

r-Kesitler bulanık kümelerden klasik kümeler üreten dilimler olup bir A bulanık kümesinin r-kesiti aşağıdaki gibi tanımlanır (Chen, 2005);

$$[A]_r=\{x\epsilon X : \mu_A(x)\geq r\}. \tag{3.8}$$

Tanım 3.4. (Normallik)

X'in en az bir elemanı için "1" üyelik değerini alan bir A bulanık kümesine normaldir denir (Kaufmann ve Gupta, 1991), (Karanfil, 1997).

Yani $\exists x\in A$ öyle ki $\mu_A(x)=1$'dir.

Tanım 3.5. (Konvekslik)

$\forall\ x_1,x_2\epsilon X \quad , \quad \forall\ \lambda\in[0,1]$ olmak üzere;

$$\mu_A\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\geq\min\left(\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)\right) \tag{3.9}$$

eşitsizliğini sağlayan A bulanık kümesi konvekstir. Diğer bir ifadeyle A'nın artan değerleri için üyelik değerleri monoton artan veya azalan ya da önce monoton artıp sonra monoton azalan oluyorsa A kümesi konvekstir (Zadeh, 1965), (Kaufmann ve Gupta, 1991), (Karanfil, 1997).

Tanım 3.6. R reel sayılar kümesi olmak üzere R kümesinin bulanık alt kümelerinin bir ailesi F(R) olsun. Bu F(R) küme ailesinin elemanlarına bulanık miktarlar (fuzzy quantities) denir (Bede, 2005).

3.2. Üyelik Fonksiyonu ve Üyelik Derecesi

Bir fonksiyon, bir küme ya da diğer herhangi bir nesne bulanık olmadığında, sadece ‘fonksiyon’, ‘küme’ ve bunun gibi terimlerle ifade ederiz. Eğer durumu vurgulamak istiyorsak kesin (crisp), bulanık değil (nonfuzzy), klasik gibi terimler kullanırız.

Yani, A bulanık küme olmak üzere μ_A (x) değerine x’in A kümesine aitlik derecesi denir.

Tanım 3.6. E evreninin bir A bulanık alt kümesi;

$$\mu_A : E \rightarrow [0,1] \tag{3.10}$$

üyelik fonksiyonu olarak adlandırılan bir fonksiyon tarafından karakterize edilir.

Eğer ;

$$\mu_A : E \rightarrow \{0,1\} \tag{3.11}$$

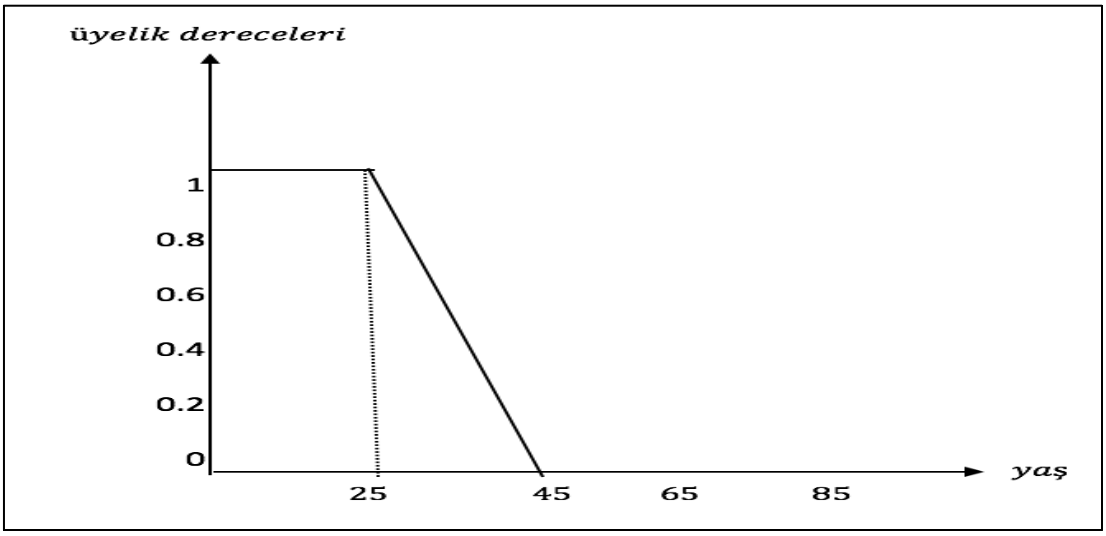
ise A altkümesi kesin (crisp) olarak adlandırılır.

Bulanık olmayan durumda, μ_A karakteristik fonksiyon olarak adlandırılır ve genellikle X_A ile gösterilir. Eğer X_A=0 ise x, A kümesine ait değildir, eğer X_A=1 ise x, A kümesine aittir. E’nin bir elemanının A kümesine olan kısmi üyeliği [0,1] aralığındaki bir derece ile karakterize edilir. Dolayısıyla $\mu_A(x)=0$ ise $x \notin A$, $\mu_A(x)$ 1’e yaklaştıkça A kümesine aitliği artar.

Örnek 3.1. “Genç” kavramını ele alacak olursak, herkes için genç olma yaş aralığı farklı şekilde yorumlanabileceğinden farklı üyelik fonksiyonları ortaya çıkacaktır. “Genç” kavramına uygun bir üyelik fonksiyonu yazılması istendiğinde,

$$\mu_{Genç}(x)=\begin{cases} 1, & x\leq 25 \\ \frac{40-x}{15}, & 25\leq x\leq 45 \\ 0, & x>45 \end{cases} \tag{3.12}$$

şeklinde bir üyelik fonksiyonu yazılır. Bu üyelik fonksiyonunun grafiği Şekil 3.1.’de verilmiştir.



Şekil 3.1. 'Genç' kavramı için üyelik fonksiyonunun grafiği

Teorem (3.1) (Karakterizasyon Teoremi) A bir bulanık sayı ve $\{[A]_r : r \in [0,1]\}$ R'nin altkümeler ailesi olmak üzere;

$\forall r \in [0,1]$ için $[A]_r$'ler boş olmayan kapalı aralıklar;

$$0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1 \text{ ise } [A]_{r_2} \subseteq [A]_{r_1} \tag{3.13}$$

[0,1] kapalı aralığında 0'a yakınsayan herhangi bir (r_n) azalmayan dizisi için;

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A]_{r_n} = [A]_r \tag{3.14}$$

[0,1] kapalı aralığında 0'a yakınsayan herhangi bir (r_n) artmayan dizisi için;

$$\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} [A]_{r_n}} \right) = [A]_0 \tag{3.15}$$

Böylece bir tek bulanık A sayısı vardır ve $\{[A]_r : r \in [0,1]\}$ küme ailesi A'nın r-kesitleridir.

A bulanık sayısının r-kesitleri:

r^- ve r^+, $[A]_r$ kapalı aralığının alt ve üst uç noktaları olmak üzere $[A]_r=[r,{}^{-}r^{+}]$ ile gösterilir (Negoita, 1975).

3.3. Bulanık Sayı

Tanım 3.7. A, R'nin bulanık altkümesi ve $\mu_A : R \rightarrow [0,1]$ üyelik fonsiyonu olmak üzere bulanık sayı aşağıdaki özellikleri sağlayan bir bulanık miktardır;

1. En az bir x değeri için, üyelik derecesi 1 değerini almalıdır. Yani $\exists x$ için $\mu_A(x)=1$ sağlanmalıdır. Bu özellik normallik özelliği olarak adlandırılır.
2. A bulanık kümesinin desteği $\text{supp}A=\{x\in E : \mu_A(x)>0\}$ sınırlıdır.
3. A bulanık kümesinin r-kesitleri kapalı aralıklardır.

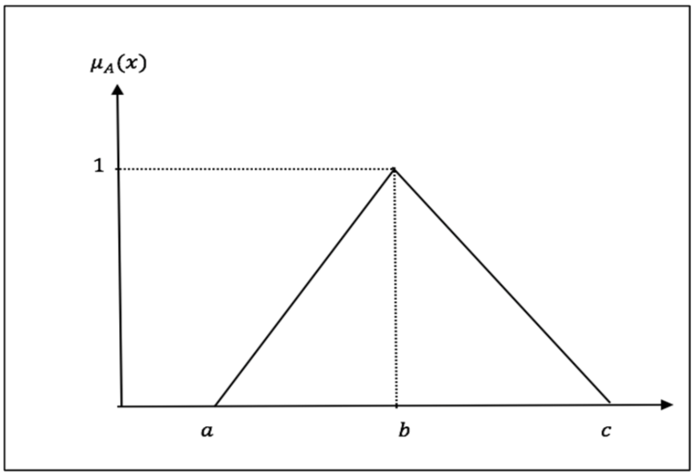
Diğer bir deyişle normal ve konveks olma özelliklerini sağlayan bulanık kümeye bulanık sayı denir. Üçgensel ve yamuk bulanık sayılar en çok kullanılan bulanık sayılardır.

Tanım 3.8. (Üçgensel bulanık sayı) Desteği [a,c] ve çekirdeği (tepesi) {b} olan $A : E \rightarrow [0,1]$ bulanık sayısına Üçgensel Bulanık Sayı (üçgen bulanık sayı) denir ve üyelik fonksiyonu;

$$\mu_A(x)=\begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b] \\ \frac{c-x}{c-b}, & x\in[b,c] \\ 0, & x\notin[a,b] \end{cases} \tag{3.16}$$

şeklindedir (Gomes, 2015).

a<b<c için örnek olarak Şekil 3.2. verilebilir.



Şekil 3.2. Üçgen bulanık sayı

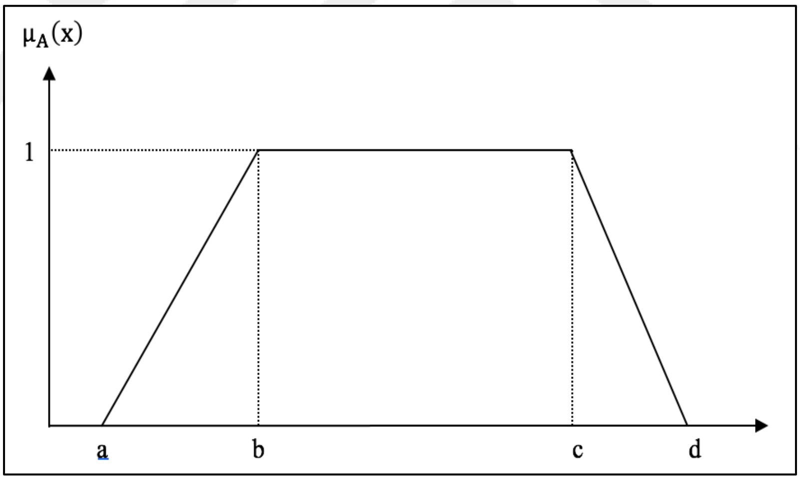
Tanım 3.9. (Yamuk bulanık sayı) Bir A bulanık kümesinin merkez değeri [b,c] sağ ve sol açıklığı sırasıyla a>0 ve d>0 olmak üzere üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyorsa A kümesine 'Yamuk Bulanık Sayı' denir ve üyelik fonksiyonu;

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x\leq b \\ 1, & b\leq x\leq c \\ \frac{x-d}{c-d}, & c\leq x\leq d \\ 0, & x>d \end{cases} \tag{3.17}$$

şeklindedir (Chen, 2005).

a<b<c<d için örnek olarak Şekil 3.3. verilebilir.

A=(a,b,c,d) şeklinde ifade edilen bulanık sayının grafiği Şekil 3.3.'de verilmiştir.



Şekil 3.3. Yamuk bulanık sayı

3.4. Bulanık Fonksiyon

Bulanık küme değerli fonksiyonlar bulanık fonksiyonlar olarak adlandırılır (Dubois ve Prade, 1980). Genel olarak türev ve integrasyon gibi işlemler yalnızca klasik bir uzaydan, bulanık küme değerli fonksiyon olarak adlandırılan bulanık uzaya eşlemeler için tanımlanır. Bulanık bir uzaydan başka bir bulanık uzaya yapılan eşleme daha geneldir ve bulanık başlangıç değer problemlerinde bulanık diferansiyel denklemin sağ taraf fonksiyonu olarak görülür. Bulanık küme değerli fonksiyonlar, küme değerli fonksiyonların genelleştirilmesidir.

$G:I\rightarrow P(X)$: $\forall t\in I$ için $G(t)\neq\emptyset$ için G, I'da küme değerli bir fonksiyondur ve I genellikle bir aralık belirtir. Yani X'in kuvvet kümesine I'nın değerlerini atar.

Bulanık fonksiyon demetleri (kısaca bulanık demetler) fonksiyonlar uzayının bir bulanık altkümesidir. Aslında bu bir fonksiyon değildir ancak bulanık başlangıç değer problemine çözümler tanımlamak için kullanılır.

Bulanık küme kuramının en önemli uygulamalarından biri olarak bilinen genişletme prensibi (extension principle) Zadeh tarafından tanıtılmıştır (Diamond, 2000). Bulanık olmayan sayısal ifadeleri bulanık miktarlar ile tanımlamak için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem bulanık küme kuramının en temel ögelerinden biridir (Nguyen, 1978), (Zadeh, 1975).

Tanım 3.10. U ve V iki evrensel küme ve $f: U\rightarrow V$ klasik bir fonksiyon olsun. $\forall A\in F(U)$ için f'in genişletmesi $\hat{f}(A)\in F(V)$ bulanık fonksiyonu olarak tanımlanır öyle ki;

$$\mu_{\hat{f}(A)}(y)=\begin{cases}\sup_{s\in f^{-1}(y)}(\mu_A(s)) & , \quad f^{-1}(y)\neq\emptyset \\ 0 & , \quad f^{-1}(y)=\emptyset\end{cases} \tag{3.18}$$

$\forall y\in V$ için;

$$f^{-1}(y)=\{x\in U: f(x)=y\}. \tag{3.19}$$

Örnek 3.2. $f(x)=ax+b$, $a,b\in R$ ve $a\neq 0$ olsun.

$f^{-1}(y)=a^{-1}(y-b)$ için f fonksiyonunun genişletmesi $\hat{f}(A)$ bulanık fonksiyonudur ve verilen $X\in F(R)$ ve $\forall y\in R$ için;

$$\mu_{\hat{f}(A)}(y)=\sup_{x=p^{-1}(y-b)}\mu_X(x)=\mu_X\left(a^{-1}(y-b)\right)$$

ya da,

$$\mu_{\hat{f}(X)}(ax+b)=\mu_X$$

yani,

$$\hat{f}(X)=aX+b.$$

3.5. Bulanık Değerli Fonksiyonların Diferansiyellenebilirliği

Bulanık diferansiyel denklemlerin çalışmalarında diferansiyellenebilme türüne göre birkaç yaklaşım vardır. Bunlardan bazıları;

1. Hukuhara Diferansiyellenebilirliği,
2. Seikkala Diferansiyellenebilirliği,
3. Kuvvetli Genelleştirilmiş Diferansiyelenebilirliktir.

Bu yaklaşımlardan en yaygın olanı Hukuhara türevine dayanan yaklaşımdır.

3.5.1. Hukuhara diferansiyellenebilirlik

Tanım 3.11. (Bede, 2005) $x,y \in R_F$ iki bulanık sayı olsun. Eğer $x=y+z$ olacak şekilde $z \in R_F$ bulanık sayısı bulunabiliyorsa z, x ve y'nin Hukuhara farkı (kısaca H-fark) olarak adlandırılır ve $z=x\Theta_H y$ ile gösterilir.

Tanım 3.12. (Bede, 2005) $F: [a,b] \rightarrow F_\varphi(R^n)$ olsun.

Yeteri derecede küçük h>0 için $f(x+h)\Theta_H f(x)$ ve $f(x)\Theta_H f(x+h)$ H-farkları vardır öyle ki;

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)\Theta f(x)}{h} = \lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x)\Theta f(x-h)}{h} = f'(x) \tag{3.20}$$

O halde $f'(x)$ bulanık sayısına f fonksiyonunun x noktasındaki Hukuhara Türevi denir (Puri ve Ralescu, 1983).

Tanım 3.13. (Bede-2005) $x, y \in R_F$ iki bulanık sayı olsun. x ve y'nin Genelleştirilmiş Hukuhara Farkı (kısaca gH-fark) $x\Theta_{gH} y=z$ $(z \in R_F)$'dir.

i) $x = y+z$ ya da

ii) $y = x-z$

ii) $y = x-z$

3.5.2. Seikkala diferansiyellenebilirlik

Tanım 3.14. $F:[a,b]\rightarrow F_{\varphi}(R^n)$ olsun. Eğer $\forall\alpha\in[0,1]$ için $F_S'(x_0)$ bulanık sayısının r-kesitleri olarak adlandırılan $[(\underline{f_r})'(x_0),(\overline{f_r})'(x_0)]$ mevcut ise F, x_0'da Seikkala diferansiyellenebilirdir denir ve $F_S'(x_0)$, F'in x_0'da Seikkala türevidir.

Eğer $F: [a,b]\rightarrow F_{\varphi}(R^n)$ H-diferansiyellenebilir ise $\underline{f_r}$ ve $\overline{f_r}$ diferansiyellenebilirdir ve

$$[F'(x_0)]_r=[(\underline{f_r})'(x_0),(\overline{f_r})'(x_0)]. \tag{3.21}$$

Yani, F H-diferansiyellenebilir ise Seikkala diferansiyellenebilirdir ve türevleri eşittir (Gomes, 2015).

3.5.3. Kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik

$f:(a,b)\rightarrow R_F$ ve $x_0\in(a,b)$ olmak üzere aşağıdaki şartlardan en az birini sağlamak koşuluyla $f'(x_0)\in R_F$ elemanı varsa f, x_0'da kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirdir.

Yeterince küçük h>0 için, $\exists f(x_0+h)\Theta f(x_0)$, $\exists f(x_0)\Theta f(x_0-h)$,

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x_0+h)\Theta f(x_0)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x_0)\Theta f(x_0-h)}{h}=f'(x_0). \tag{3.22}$$

Yeterince küçük h>0 için, $\exists f(x_0)\Theta f(x_0+h)$, $\exists f(x_0-h)\Theta f(x_0)$,

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x_0)\Theta f(x_0+h)}{-h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x_0-h)\Theta f(x_0)}{-h}=f'(x_0). \tag{3.23}$$

Yeterince küçük h>0 için, $\exists f(x_0+h)\Theta f(x_0)$, $\exists f(x_0-h)\Theta f(x_0)$,

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x_0+h)\Theta f(x_0)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x_0-h)\Theta f(x_0)}{-h}=f'(x_0). \tag{3.24}$$

Yeterince küçük h>0 için, $\exists f(x_0)\Theta f(x_0+h)$, $\exists f(x_0)\Theta f(x_0-h)$,

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x_0)\Theta f(x_0+h)}{-h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x_0)\Theta f(x_0-h)}{h}=f'(x_0) \tag{3.25}$$

Bu tanımdaki durum (i), aynı zamanda Hukuhara türevini de temsil eder (Bede, 2005).

Yardımcı Teorem (3.1) $x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\ x_3(t)\right)$ üçgensel bulanık bir sayı olsun. Bu durumda x(t) (i)-diferansiyellenebilir ise $x^{'}=(x_1^{'},\ x_2^{'},\ x_3^{'})$;

x(t) (ii)-diferansiyellenebilir ise $x^{'}=(x_3^{'},\ x_2^{'},\ x_1^{'})$ şeklindedir (Bede, 2005).

Tanım 3.15. (Chalco-Cano ve Román-Flores, 2006) $f:(a,b)\rightarrow E$ ve $x_0\in(a,b)$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanması durumunda, f, x_0'da diferansiyellenebilirdir.

Yeterince küçük h>0 için, $\exists f(x_0+h)\Theta f(x_0),\ \ \exists f(x_0)\Theta f\left(x_0-h\right)$

$$\lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{f(x_0+h)\Theta f(x_0)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{f(x_0)\Theta f(x_0-h)}{h}=f^{'}(x_0) \tag{3.26}$$

Yeterince küçük h>0 için, $\exists f(x_0+h)\Theta f(x_0),\ \ \exists f(x_0)\Theta f\left(x_0-h\right)$,

$$\lim_{h\rightarrow 0^-}\frac{f(x_0+h)\Theta f(x_0)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0^-}\frac{f(x_0)\Theta f(x_0-h)}{h}=f^{'}(x_0) \tag{3.27}$$

Teorem (3.2) (Chalco-Cano, Román-Flores, 2006) Eğer $f:(a,b)\rightarrow E$ fonksiyonu (2) formunda diferansiyellenebilir ise süreklidir.

Teorem (3.3) (Chalco-Cano, Román-Flores, 2006) $f: T\rightarrow F(R)$ bir fonksiyon ve her $\forall r\in[0,1]$ için

$[f(t;r)]_r=[\underline{f}(t;r),\overline{f}(t;r)]$ olarak tanımlanır. Yani;

Eğer f, (1) formunda diferansiyellenebilir ise $\underline{f}(t;r)$ ve $\overline{f}(t;r)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır;

$$\left[f^{'}(t;r)\right\}=\left[\underline{f_r}'(t;r),\overline{f_r}'(t;r)\right] \tag{3.28}$$

Eğer f, (2) formunda diferansiyellenebilir ise $\underline{f}(t;r)$ ve $\overline{f}(t;r)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır;

$$[f^{'}(t;r)]=\left[\overline{f}'(t;r),\underline{f}'(t;r)\right] \tag{3.29}$$

4. BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Diferansiyel denklemler, fizik, mühendislik, ekonomi ve biyoloji alanlarındaki uygulamalardan, teorik matematiksel gelişmelere kadar geniş bir yelpazede araştırılmıştır. Daha sonra sınırları hassas olmayan, öznel kavramları modellemeye yarayan çok daha yeni bir teori olan bulanık kümeler teorisi, uygulanabilirliği ve işlevselliği nedeniyle çeşitli alanlarda kullanılmaya başlanmıştır. Bulanık değerler içeren fonksiyon fikrinin oluşması bulanık diferansiyel denklem fikrinin oluşumuna da ışık tutmuştur. O zamandan beri yapılan araştırmalar sonucunda farklı bulanık türevler ve bulanık fonksiyonlar tanımlanmış ve bulanık diferansiyel denklemlerin teorilerinde yer almıştır.

Bulanık diferansiyel denklem ilk defa 1980li yıllarda kullanılmıştır (Kandel ve Byatt, 1980) ve günümüzde kullanılan yöntemlerin bir karakteristiğini üstlenmektedir (Seikkala, 1987), (Kaleva, 1987). Literatürde yer alan birçok bulanık yapıda tanımlı diferansiyel denklem birbirlerine benzer görünürler. Çoğu örnekte ele alınan bulanık diferansiyel denklemlerin klasik tanımlı adi diferansiyel denklemlerin bulanıklaştırılmasıyla oluşturulduğu görülmektedir (Sevim, 2012).

4.1. Başlangıç Değer Problemi

Başlangıç Değer Problemi (BDP), başlangıç koşullarıyla birlikte verilen bir adi diferansiyel denklem sistemidir.

$$\begin{cases} x'(t)=f\big(t,x(t)\big) \\ x(0)=x_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Klasik durum olarak adlandırdığımız çözüm genellikle x(.) gerçek değerli sürekli fonksiyon olarak adlandırılır ki bu verilen her t değerinde başlangıç koşulunu ve diferansiyel denklemi sağlar. Burada $x'(t)$ sembolü x'in t deki türevini gösterir. x(.) fonksiyonu bir eğri olarak tanımlanır ve her bir gerçek değerli t'de, takip edilen hız ve yön f fonksiyonu tarafından belirlenir. Bu durumda çözüm, gerçek değerli bir argümana sahip gerçek değerli bir fonksiyondur.

4.2. Bulanık Başlangıç Değer Problemi

Başlangıç değer probleminde herhangi bir parametre bulanıklık sergiliyorsa yeni bir problem haline gelir ve buna bulanık başlangıç değer problemi denir (Kaleva ve Seikkala, 1987). Bulanık başlangıç değer problemi fonksiyonlar uzayının bulanık bir kümesidir (Gomes, 2015).

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases} , \quad t\in[t_0,T] \tag{4.2}$$

$$[y_0]_r=\left[\underline{y}(0;r),\overline{y}(0;r)\right], \quad r\in(0,1] \tag{4.3}$$

Zadeh'in genişletme prensibinden yola çıkarak,

y=y(t) iken F(y(t))'nin tanımından;

$$f(y(t))(s)=\sup\{y(\tau):s=f(\tau)\}, s\in R\} \tag{4.4}$$

Buradan;

$$[f(y(t))]_r=[f_1(y;r),f_2(y;r)], \quad r\in(0,1] \tag{4.5}$$

$$f_1(y;r)=\min\left\{f(u): u\in\left[\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right]\right\} \tag{4.6}$$

$$f_2(y;r)=\max\left\{f(u): u\in\left[\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right]\right\} \tag{4.7}$$

f(y) bir bulanık fonksiyon olmak üzere türevi $f'(y)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır (Seikkala, 1987);

$$[f'(y(t))]_r=[f_1'(y;r), f_2'(y;r)], \quad t\in I, \; r\in(0,1] \tag{4.8}$$

$$f_1'(y;r)=\min\left\{f'(u): u\in\left[\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right]\right\} \tag{4.9}$$

$$f_2'(y;r)=\max\left\{f'(u): u\in\left[\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right]\right\} \tag{4.10}$$

Denklem (4.2) Bulanık başlangıç değer probleminin tek bir çözümünün olması için gerek ve yeter koşul f'in Lipschitz koşununu sağlamasıdır.

$$\|f(y)-f(z)\|\leq L\|y-z\|,\ \ L\geq 0 \tag{4.11}$$

(Kaleva, 1987)' deki Teorem 5.2'den, Denklem (4.2)'ye eşdeğer bir sistem $r\,\epsilon(0,1]$ için;

$$\underline{y}'(t,r)=\underline{f}\big(y(t)\big)=f_1(y;r)=F\left(\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right),\ \ \underline{y}(0,r)=\underline{y_0}(r), \tag{4.12}$$

$$\overline{y}'(t,r)=\overline{f}\big(y(t)\big)=f_2(y;r)=G\left(\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right),\ \ \overline{y}(0,r)=\overline{y_0}(r). \tag{4.13}$$

Burada y, t'nin bir bulanık fonksiyonu, f(t,y) ise kesin değişken t'nin ve bulanık değişken y'nin bulanık bir fonksiyonudur. f fonksiyonu, değerleri bulanık kümeler olan küme değerli bir fonksiyondur. Bu yüzden, y bilinmeyen fonksiyonunun türevi y' de bulanıktır. y', y'nin bulanık türevi ve $y(t_0)=y_0$ üçgensel ya da üçgen şeklinde bir bulanık sayıdır (Shokri, 2007). Klasik durumda olduğu gibi Denklem (4.2) ile ilişkili bir integral denklemi de vardır (Kaleva, 1987). Bu denklem bulanık bir integral ve Minkowski toplamını içerir ve bu tür denklemin çözümü her zaman azalmayan bir çapa sahiptir. Yani bulanıklık zamanla azalmaz. Denklem (4.2) problemi;

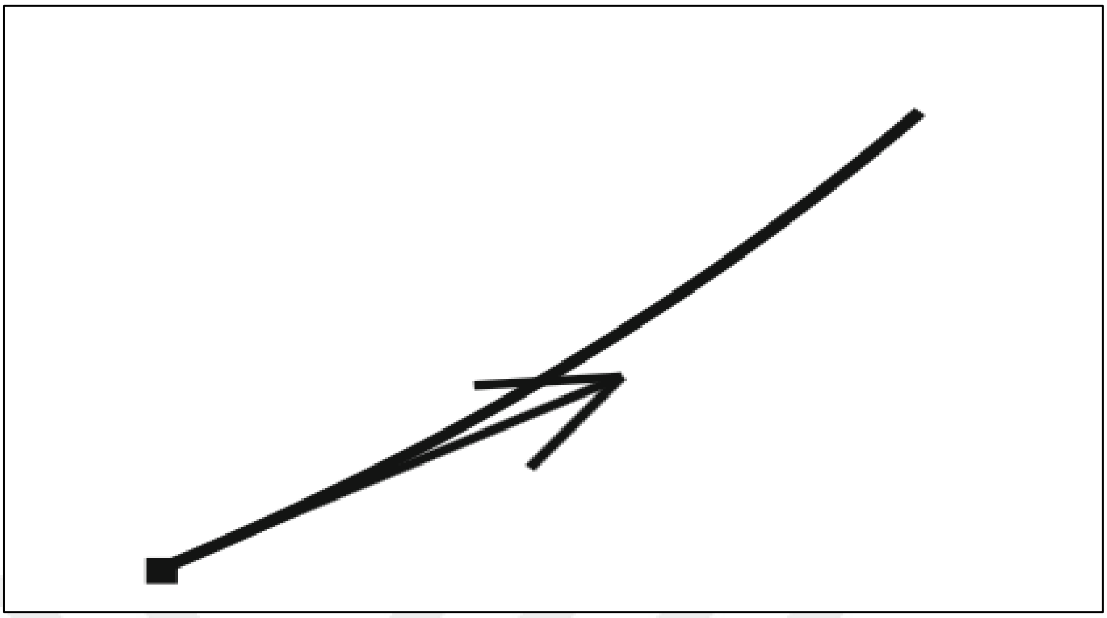
$$y(x)=y_0+\int_{t_0}^{t} f\big(t,y(t)\big)dt,\quad t\in[t_0,T] \tag{4.14}$$

integral denklemine eşittir.

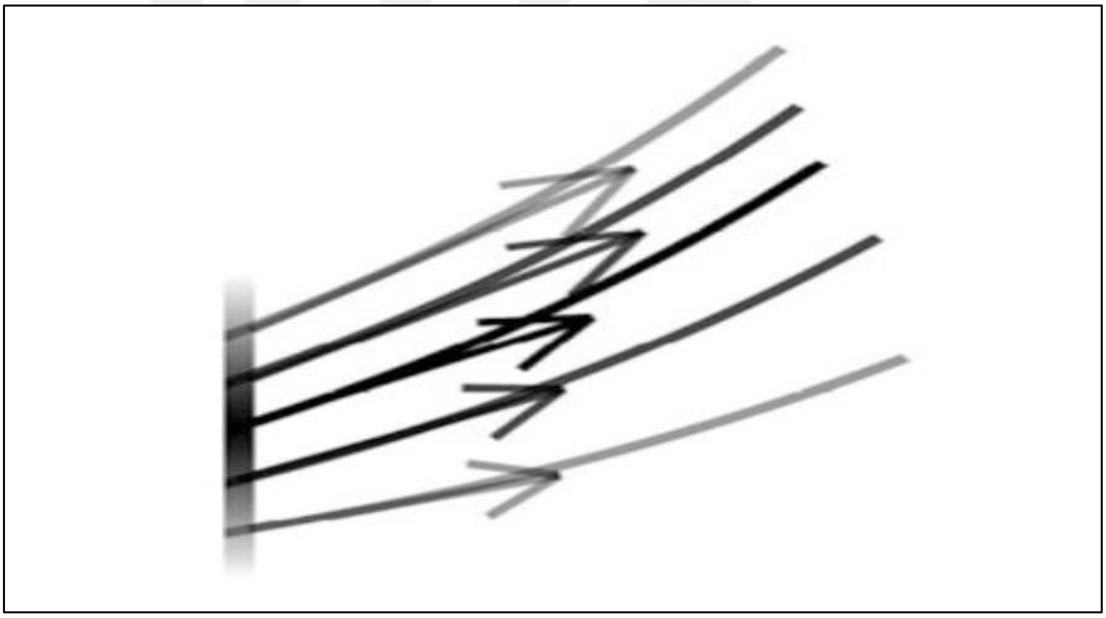
Özet olarak:

$E([a,b];R^n)$ [a,b]'den R^n'ye fonksiyonlar uzayı ve $f:[a,b]\rightarrow R^n$ olmak üzere, Denklem (4.1) başlangıç değer probleminin çözümü $x(.)\epsilon E([a,b];R^n)$ fonksiyonudur. Burada çözüm, gerçek değerli bir fonksiyondur ve diferansiyel denklem, türevinin bağımsız değişkene (reel) ve durum değişkenine bağlı olan gerçek değerli bir fonksiyon olduğu anlamına gelir (Gomes, 2015).

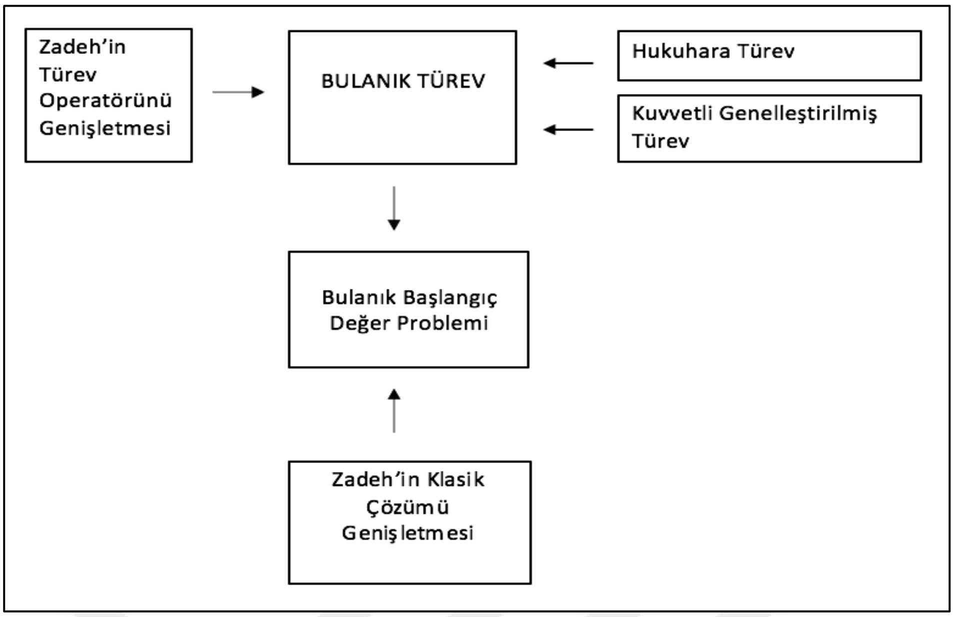
F(X), X evreninin tüm bulanık kümelerini tanımlamak üzere, Denklem (4.1) bulanık başlangıç değer probleminin çözümü $X(.)\epsilon F(E([a,b];R^n))$ fonksiyonlar uzayının bir bulanık kümesidir. Yani her bir fonksiyon $X(.)$ bulanık küme çözümüne üye olma derecesine (üyelik derecesine) sahiptir (Gomes, 2015).



Şekil 4.1. Klasik başlangıç değer problemi: $x(.)\epsilon E([a,b];\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu bir çözümdür ve $f: [a,b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyondur (Gomes, 2015).



Şekil 4.2. Bulanık başlangıç değer problemi: Çözüm, $X(.)\epsilon\mathcal{F}(E([a,b];\mathbb{R}^n))$ fonksiyonlarının bir demetidir ve F, $F:[a,b]\times\mathcal{F}(\mathbb{R})\rightarrow\mathcal{F}(\mathbb{R})$ olacak şekilde bulanık küme değerli bir fonksiyondur (Gomes, 2015).



Şekil 4.3. Bulanık başlangıç değer probleminin işleyiş sistemi (Gomes, 2015).

4.3. Bulanık Diferansiyel Denklem Çözümü

Birinci mertebeden bulanık başlangıç değer problemini ele alalım (Kandel ve Byatt, 1980).

$$\begin{aligned} &y'(t)=f(t,y(t)) \\ &y(t_0)=y_0 \end{aligned} \qquad t\in[t_0,T] \tag{4.15}$$

Burada y, t'nin bulanık bir fonksiyonu; $f(t,y(t))$ ise t kesin değişkeni ile y bulanık değişkeninin bir bulanık fonksiyonu; y' ise y'nin Hukuhara türevidir. Başlangıç şartı $y(t_0)=y_0$ şeklindeki bulanık sayısı üçgen bulanık sayı veya yamuk biçimli bulanık sayı olarak ifade edilir. y(t) bulanık fonksiyonu ise $y(t)=[\underline{y}(t);\overline{y}(t)]$ ile gösterilir. $t\in[t_0,T]$ için y(t)'nin r-seviye kümeleri; $[y(t)]_r=[\underline{y}(t;r);\overline{y}(t;r)]$ dir.

Ayrıca;

$$[y'(t)]_r=[\underline{y}'(t;r),\overline{y}'(t;r)] \tag{4.16}$$

$$[f(t,y(t))]_r=[\underline{f}(t,y(t);r);\overline{f}(t,y(t);r)]$$

$$f(t,y)=\left[\underline{f}(t,y),\bar{f}(t,y)\right] \tag{4.17}$$

yazarız. Buradan;

$$\begin{aligned}\underline{y}'(t;r)&=\underline{f}(t,y(t);r)=F[t,\underline{y}(t;r),\bar{y}(t;r)]\\ \bar{y}'(t;r)&=\bar{f}(t,y(t);r)=G[t,\underline{y}(t;r),\bar{y}(t;r)]\end{aligned} \tag{4.18}$$

olur.

Ayrıca;

$$[y(t_0)]_r=\left[\underline{y}(t_0,;r),\bar{y}(t_0,;r)\right] \tag{4.19}$$

$$[y_0]_r=\left[\underline{y_0}(r),\bar{y}_0(r)\right]$$

$$\underline{y}(t_0;r)=\underline{y_0}(r), \quad \bar{y}(t_0,;r)=\bar{y}_0(r) \tag{4.20}$$

Zadeh'in genişletme ilkesini kullanarak;

$$f\big(t,y(t)\big)(s)=\sup\{y(t)(\tau):\ s=f(t,\tau)\},\ s\in R \tag{4.21}$$

üyelik fonksiyonları elde edilir. Böylece $f\big(t,y(t)\big)$ bulanık fonksiyonunun r-seviye kümesi:

$$\begin{aligned}\underline{f}(t,y(t);r)&=\min\{f(t,u):u\in [y(t)]_r\},\\ \bar{f}(t,y(t);r)&=\max\{f(t,u):u\in [y(t)]_r\},\end{aligned} \tag{4.22}$$

için;

$$[f(t,y(t))]_r=\left[\underline{f}(t,y(t);r),\bar{f}(t,y(t);r)\right], \quad r\in[0,1] \tag{4.23}$$

olur.

Örnek 4.1. $f(t)=(1,3,5)e^{-3t}$ olsun.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t)\ \Theta\ f(t+h)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{(e^{-3t},\ 3e^{-3t},\ 5e^{-3t})\ \Theta\ (e^{-3t-3h},\ 3e^{-3t-3h},\ 5e^{-3t-3h})}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(e^{-3t}-e^{-3t-3h},\ 3e^{-3t}-3e^{-3t-3h},\ 5e^{-3t}-5e^{-3t-3h})}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{5e^{-3t}(1-(e^{-3h})}{-h},\ \frac{3e^{-3t}(1-e^{-3h})}{-h},\ \frac{e^{-3t}(1-(e^{-3h})}{-h}\right) \tag{4.24}$$

Bu eşitlikteki limit sonucu 0/0 belirsizliği olduğundan dolayı L'Hospital kuralının uygulanması durumunda;

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{15e^{-3t}e^{-3h}}{-1},\ \frac{9e^{-3t}e^{-3h}}{-1},\ \frac{e^{-3t}e^{-3h}}{-1}\right)=(-15e^{-3t},\ -9e^{-3t},\ -e^{-3t})$$

$$=e^{-3t}\left(-15,\ -9,\ -1\right) \tag{4.25}$$

elde edilir. Benzer şekilde (ii)-diferansiyellenebilirlikteki eşitliğin sağ tarafını yazalım;

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t-h)\ \Theta\ f(t)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{(e^{-3t+3h},\ 3e^{-3t+3h},\ 5e^{-3t+3h})\ \Theta\ (e^{-3t},\ 3e^{-3t},\ 5e^{-3t})}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(e^{-3t+3h}-e^{-3t},\ 3e^{-3t+3h}-3e^{-3t},\ 5e^{-3t+3h}-5e^{-3t})}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{5e^{-3t}(e^{3h}-1)}{-h},\ \frac{3e^{-3t}(e^{3h}-1)}{-h},\ \frac{e^{-3t}(e^{3h}-1)}{-h}\right) \tag{4.26}$$

Benzer şekilde limit sonucu 0/0 belirsizliği olduğundan dolayı L'Hospital kuralının uygulanması durumunda;

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{15e^{-3t}e^{3h}}{-1},\ \frac{9e^{-3t}e^{3h}}{-1},\ \frac{e^{-3t}e^{3h}}{-1}\right)=(-15e^{-3t},\ -9e^{-3t},\ -e^{-3t})$$

$$=e^{-3t}\left(-15,\ -9,\ -1\right) \tag{4.27}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t)\ \Theta\ f(t+h)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t-h)\ \Theta\ f(t)}{-h} \tag{4.28}$$

olduğundan denklem (ii) diferansiyellenebilirdir.

Yardımcı Teorem (4.1)’den;

$f'(t)=e^{-3t}(-15, -9, -1)$ olur.

Burada $x(t)= e^{-3t}$, $y(t)=3e^{-3t}$, $z(t)= 5e^{-3t}$ alırsak;

$f'(t)=(z', y', x')$ olur.

Örnek 4.2. (Sadaghadfar, 2013)

$$y'(t)=y(t)+u, \quad y(0)=(r, 2-r), \quad u=[r-1 , 1-r], \quad 0\leq r\leq 1 \tag{4.29}$$

bulanık diferansiyel denklemini çözelim.

$$[y(t)]_r=\left[\underline{y}(t;r), \overline{y}(t;r)\right], \quad \underline{u}=r-1, \quad \overline{u}=1-r \tag{4.30}$$

i) $t\geq 0$ için:

$$\underline{y}'=\underline{y}+\underline{u} \tag{4.31}$$

$$\overline{y}'=\overline{y}+\overline{u} \tag{4.32}$$

$$\underline{y}(0)=r \tag{4.33}$$

$$\overline{y}(0)=2-r \tag{4.34}$$

$$\underline{y}'=\underline{y}+r-1 \tag{4.35}$$

$$\frac{d\underline{y}}{dt}=\underline{y}+r-1 \tag{4.36}$$

$$\frac{d\underline{y}}{\underline{y}+r-1}=dt \tag{4.37}$$

$$\ln(\underline{y}+r-1)=t+c \tag{4.38}$$

$$\underline{y}+r-1=e^{t}e^{c}=c_1e^{t} \tag{4.39}$$

$\underline{y}(0)=r$ başlangıç koşulunu bu denklemde yazarsak;

$$c_1=r+r-1=2r-1 \tag{4.40}$$

Buradan;

$$\underline{y}=(2r-1)e^t+1-r \tag{4.41}$$

$$\overline{y}'=\overline{y}+1-r \tag{4.42}$$

$$\frac{d\overline{y}}{dt}=\overline{y}+1-r \tag{4.43}$$

$$\frac{d\overline{y}}{\overline{y}+1-r}=dt \tag{4.44}$$

$$\ln(\overline{y}+r-1)=t+c \tag{4.45}$$

$$\overline{y}+1-r=e^te^c=c_2e^t \tag{4.46}$$

$\overline{y}(0)=2-r$ başlangıç koşulunu bu denklemde yazarsak;

$$c_2=2-r+1-r=3-2r \tag{4.47}$$

Buradan;

$$\overline{y}=(3-2r)e^t+r-1 \tag{4.48}$$

$$[y]_r=\left[(2r-1)e^t+1-r,\ (3-2r)e^t+r-1\right] \tag{4.49}$$

ii) $t<0$ için:

$$\underline{y}'=\overline{y}+\underline{u} \tag{4.50}$$

$$\overline{y}'=\underline{y}+\overline{u} \tag{4.51}$$

$$\underline{y}(0)=r \tag{4.52}$$

$$\overline{y}(0)=2-r \tag{4.53}$$

$$\underline{y}'=\overline{y}+\underline{u} \tag{4.54}$$

$$\underline{y}''=\bar{y}'=\underline{y}+\bar{u} \tag{4.55}$$

$$\underline{y}''=\underline{y}+1-r \tag{4.56}$$

$$\underline{y}''-\underline{y}=1-r \tag{4.57}$$

Önce homojen kısmı çözelim:

$$\underline{y}''-\underline{y}=0 \tag{4.58}$$

$$D^2-1=0 \tag{4.59}$$

$$D=\pm 1$$

$$\underline{y}=c_3e^t+c_4e^{-t} \tag{4.60}$$

$$\underline{y}'=c_3e^t-c_4e^{-t} \tag{4.61}$$

Buradan Denklem (4.29) başlangıç koşullarını kullanarak:

$$r=c_3+c_4 \tag{4.62}$$

$$1=c_3-c_4 \tag{4.63}$$

$$c_3=\frac{r+1}{2} \tag{4.64}$$

$$c_4=\frac{r-1}{2} \tag{4.65}$$

Genel çözüm:

$$\underline{y_G}=\frac{r+1}{2}e^t+\frac{r-1}{2}e^{-t} \tag{4.66}$$

$$\underline{y}''-\underline{y}=1-r \tag{4.67}$$

$$\underline{y}=A \tag{4.68}$$

$$\underline{y}'=0 \tag{4.69}$$

$\underline{y}''=0$ (4.70)

$A=1-r$ (4.71)

Özel çözüm:

$\underline{y}_{Ö}=1-r$ (4.72)

$\underline{y}=\frac{r+1}{2}e^{t}+\frac{r-1}{2}e^{-t}+1-r$ (4.73)

ii)

$\underline{y}'=\overline{y}+\underline{u}$ (4.74)

$\overline{y}'=\underline{y}+\overline{u}$ (4.75)

$\underline{y}(0)=r$ (4.76)

$\overline{y}(0)=2-r$ (4.77)

$\overline{y}''=\underline{y}'=\overline{y}+\underline{u}$ (4.78)

$\overline{y}''=\overline{y}+r-1$ (4.79)

Önce homojen kısmı çözelim:

$\overline{y}''-\overline{y}=0$ (4.80)

$D^2-1=0$ (4.81)

$D=\pm 1$

$\overline{y}=c_5e^{t}+c_6e^{-t}$ (4.82)

$\overline{y}'=c_5e^{t}-c_6e^{-t}$ (4.83)

Buradan $\underline{y}(0)=r$, $\overline{y}(0)=2-r$ başlangıç koşullarını kullanarak:

$$2\text{-}r=c_5+c_6 \tag{4.84}$$

$$1=c_5-c_6 \tag{4.85}$$

$$c_5=\frac{3-r}{2} \tag{4.86}$$

$$c_6=\frac{1-r}{2} \tag{4.87}$$

Genel çözüm:

$$\overline{y}_G=\frac{3-r}{2}e^t+\frac{1-r}{2}e^{-t}$$

$$\overline{y}''-\overline{y}=r-1 \tag{4.88}$$

$$\overline{y}=A \tag{4.89}$$

$$\overline{y}'=0 \tag{4.90}$$

$$\overline{y}''=0 \tag{4.91}$$

$$A=r-1 \tag{4.92}$$

Özel çözüm:

$$\underline{y_Ö}=r-1 \tag{4.93}$$

$$\overline{y}=\frac{3-r}{2}e^t+\frac{1-r}{2}e^{-t}+r-1 \tag{4.94}$$

$$[y]_r=\left[\frac{r+1}{2}e^t+\frac{r-1}{2}e^{-t}+1-r\ ,\ \frac{3-r}{2}e^t+\frac{1-r}{2}e^{-t}+r-1\right] \tag{4.95}$$

5. BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bulanık diferansiyel denklemlerin uygulamalarında çeşitli yöntemler vardır. Bir BDD'nin nümerik çözümü, bu klasik yöntemleri bulanık duruma genişleterek elde edilmektedir. Nümerik çözüm için Taylor yöntemi, Euler yöntemi, Adams-Bashforth yöntemi, Adams-Moulton yöntemi, Predictor- Corrector yöntemi, HAM yöntemi, Adomian bozunma (ayrıştırma) yöntemi, Runge-Kutta yöntemi gibi bazı metotlar kullanılmaktadır.

Bu çalışmada BDD'nin nümerik çözümünde uygulanan Ham Yöntemi, Adomian Yöntemi ve Euler Yöntemi ele alınacaktır. Problemin nümerik olarak çözülebilmesi için öncelikle yeterli sayıda koşulun bilinmesi ve bu koşulların çözümde kullanılması gerekmektedir.

5.1. Euler Metodu

Diferansiyel denklemlerin bilgisayar ortamında çözümü için genelde nümerik metotlar kullanılmaktadır. Bunların en bilineni Euler metodudur. Bir diferansiyel denklemin analitik çözümünde amaç y fonksiyonunu bulmaktır. Nümerik çözümünde ise amaç verilen bir $[a,b]$ aralığı için y fonksiyonunun aldığı değerleri bulmaktır. Euler metodu da bir başlangıç değerinden başlayıp istenen aralıktaki değerleri aşağıda verilen kural ile hesaplamaktadır.

h adım aralığı olmak üzere;

$$y(t)=y(t_0)+y'(t_0)(t-t_0)+\text{hata} \tag{5.1}$$

$$\text{hata}=\frac{h^2}{2}y''(\xi)=O(h^2) \tag{5.2}$$

Bu ifadeyi düzenlersek;

$$\frac{y(t)-y(t_0)}{(t-t_0)}=y'(t_0) \tag{5.3}$$

elde ederiz. Bu fonksiyonun t noktasındaki değeri, $(t_0,y(t_0))$noktasından çizilen bir teğettir ve dolayısıyla hata içermektedir. Burada $h=t_0+t$ adımı küçüldükçe hata da küçülecektir. $t=t_0+h$ noktasında y değeri elde edildikten sonra aynı işlem tekrarlanarak noktalardaki değerler elde edilir;

$$y_{n+1}=y_n+hy_n^{'}+O\left(h^2\right) \tag{5.4}$$

5.2. Bulanık Diferansiyel Denklemlerin Euler Metodu ile çözümü

Euler metodu Taylor serisinin birinci dereceden terimini kullanır. Bulanık başlangıç değer problemi (Ma, 1999);

$$\underline{y}^{'}(t)=\underline{f}(t,y)=F\left(t,\underline{y},\overline{y}\right);\quad \underline{y}^{'}(t_0)=\underline{y_0} \tag{5.5}$$

$$\overline{y}^{'}(t)=\overline{f}(t,y)=G\left(t,\underline{y},\overline{y}\right);\quad \overline{y}(t_0)=\overline{y_0} \tag{5.6}$$

şeklinde olsun.

$r\in[0,1]$ olmak üzere Denklem (5.5) ve Denklem (5.6)'nin parametrik formu;

$$\begin{aligned} &\underline{y}'(t,r)=\underline{f}\big(y(t)\big)=f_1(y;r)=F\left(t,\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right),\quad \underline{y}(t_0,r)=\underline{y_0}(r),\\ &\overline{y}'(t,r)=\overline{f}\big(y(t)\big)=f_2(y;r)=G\left(t,\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right),\quad \overline{y}(t_0,r)=\overline{y}_0(r), \end{aligned} \tag{5.7}$$

ile gösterilir.

Denklem (5.7)'yi integre etmek için $[t_0,T]$ aralığı M eşit parçaya bölünsün $(t_0<t_1<t_2<\ldots<t_M=T)$.

Bulanık başlangıç değer probleminin kesin çözümü $[Y(t)]_r=[\underline{Y}(t;r),\overline{Y}(t;r)]$ ve yaklaşık çözümü $[y(t)]_r=[\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)]$ olsun. Bu durumda $0\leq M\leq 1$ olmak üzere t_m'deki kesin çözüm;

$Y_m(r)=[\underline{Y_m}(r),\overline{Y}_m(r)]$ ve yaklaşık çözüm $y_m(r)=[\underline{y_m}(r),\overline{y_m}(r)]$'dir.

Çözümün hesaplanacağı noktalar ise;

$$t_M=t_0+mh, \quad h=\frac{T-t_0}{M} \quad 1\leq m\leq M$$

noktalarıdır.

Euler Metodu $\underline{Y}'(t;r)$ ve $\overline{Y}'(t;r)$'nin birinci mertebeden yaklaşımına dayanır;

$$Z'(t;r)\approx\frac{Z(t+h;r)-Z(t;r)}{h} \tag{5.8}$$

ile verilir. Burada Z(t;r) alternatif olarak $\underline{Y}(t;r)$ ve $\overline{Y}(t;r)$ alınır.

Denklem (5.8)'den yararlanarak;

$$F_m(r)\triangleq F\left[t_M, \underline{y}_m(r), \overline{Y}_m(r)\right], \tag{5.9}$$

$$G_m(r)\triangleq \left[Gt_M, \underline{y}_m(r), \overline{Y}_m(r)\right], \tag{5.10}$$

olmak üzere;

$$\underline{y_{m+1}}(r)=\underline{y_m}(r)+hF_m(r), \tag{5.11}$$

$$\overline{Y_{m+1}}(r)=\overline{Y_m}(r)+hG_m(r), \tag{5.12}$$

ve buradan da;

$$\underline{y_{m+1}}(r)=\underline{y_m}(r)+hF_m\left(t_M, \underline{y_m}(r), \overline{y_m}(r)\right), \tag{5.13}$$

$$\overline{y_{m+1}}(r)=\overline{y_m}(r)+hG_m\left(t_M, \underline{y_m}(r), \overline{y_m}(r)\right). \tag{5.14}$$

denklemi elde edilir (Friedman, 1994), (Ma, 1999).

Yardımcı Teorem (5.1) (Ma, 1999) Verilen A ve B pozitif sabit sayıları için;

$$|W_{n+1}|\leq A|W_n|+B, \qquad 0\leq n\leq N-1 \tag{5.15}$$

koşulunu sağlayan $\{W_n\}_{n=0}^{N}$, bir sayı dizisi olsun. Buradan;

$$|W_n|\leq A^N|W_n|+B\frac{A^n-1}{A-1}, \quad 0\leq n\leq N-1 \tag{5.16}$$

Yardımcı Teorem (5.2) (Ma, 1999) Verilen A ve B pozitif sabit sayıları için;

$$|W_{n+1}|\leq|W_n|+A\max\{|W_n|, |V_n|\}+B, \tag{5.17}$$

$$|V_{n+1}|\leq|V_n|+A\max\{|W_n|, |V_n|\}+B, \tag{5.18}$$

ve

$$U_n=|V_n|+|W_n|, \quad 0\leq n\leq N.$$

Buradan $\overline{A}=1+2A$ ve $\overline{B}=2B$ olduğunda;

$$U_n\leq\overline{A}^n U_0+\overline{B}\frac{\overline{A}^n-1}{\overline{A}-1}, \quad 1\leq n\leq N \tag{5.19}$$

İspat: Denklem (5.17) ve Denklem (5.18)'den Yardımcı Teorem (5.1)'i uygulayarak U_n, $0\leq n\leq N$ için;

$$|V_{n+1}|+|W_{n+1}|\leq|V_n|+|W_n|+2A(|V_n|+|W_n|)+2B=(1+2A)(|V_n|+|W_n|)+2B \tag{5.20}$$

Denklem (5.19)'u elde ederiz (Ma, 1999)

Örnek 5.1. (Shokri, 2007)

$$y'(t)=k_1y^2(t)+k_2, \quad t\in I, \tag{5.21}$$

$$y(0)=0 \tag{5.22}$$

$$[k_1]=[k_{11},k_{12}]=\left[0{,}5+0{,}5r\ ,\ 1{,}5-0{,}5r\right] \tag{5.23}$$

$$[k_2]=[k_{21},k_{22}]=\left[0{,}75+0{,}25r\ ,\ 1{,}25-0{,}25r\right] \tag{5.24}$$

$$\underline{y}(0;r)=\overline{y}(0;r)=0 \tag{5.25}$$

Bulanık diferansiyel denkleminin kesin çözümü;

$$l_1(r)=\sqrt{\frac{k_{21}(r)}{k_{11}(r)}}, \quad l_2(r)\sqrt{\frac{k_{22}(r)}{k_{12}(r)}}, \tag{5.26}$$

$$w_1(r)=\sqrt{\frac{k_{11}(r)}{k_{21}(r)}}, \quad w_2(r)\sqrt{\frac{k_{12}(r)}{k_{22}(r)}}, \tag{5.27}$$

olmak üzere,

$$\underline{Y}(t;r)=l_1(r)\tan(w_1(r)t)\,, \tag{5.28}$$

$$\overline{Y}(t;r)=l_2(r)\tan(w_2(r)t)\,. \tag{5.29}$$

Buradan Euler metodunu kullanarak iterasyon adımlarını yazalım:

$$\underline{y}_{n+1}(r)=\underline{y}_n(r)+hF\left(t_n,\underline{y}_n(r),\overline{y}_n(r)\right) \tag{5.30}$$

$$\overline{y}_{n+1}(r)=\overline{y}_n(r)+hG\left(t_n,\underline{y}_n(r),\overline{y}_n(r)\right) \tag{5.31}$$

denklemlerinden;

$$\underline{y_1}=\underline{y_0}+h\left(k_{11}\underline{y_0}^2+k_{21}\right)=0+h[(0,5+0,5r)0+(0,75+0,25r)]=(0,75+0,25r)h \tag{5.32}$$

$$\underline{y_2}=\underline{y_1}+h\left(k_{11}\underline{y_1}^2+k_{21}\right)=(0,75+0,25r)h$$

$$+h\left[(0,5+0,5r)\left((0,75+0,25r)h\right)^2+(0,75+0,25r)\right]$$

$$=(0,75+0,25r)h+h\left[(0,5+0,5r)(0,5625+0,3750r+0,0625r^2)h^2+(0,75+0,25r)\right]$$

$$=(1,5+0,5r)h+(0,5+0,5r)(0,5625+0,3750r+0,0625r^2)h^3 \tag{5.33}$$

$$\overline{y_1}=\overline{y_0}+h\left(k_{12}\overline{y_0}^2+k_{22}\right)=0+h[(1,5-0,5r)0+1,25-0,25r]$$

$$=\left(1,25-0,25r\right)h \tag{5.34}$$

$$\overline{y_2}=\overline{y_1}+h\left(k_{12}\overline{y_1}^2+k_{22}\right)=(1,25-0,25r)h$$

$$+h\left[(1{,}5-0{,}5r)\left((1{,}25-0{,}25r)h\right)^2+(1{,}25-0{,}25r)\right]$$

$$=(1{,}25-0{,}25r)h+h\left[(1{,}5-0{,}5r)(1{,}5625-0{,}6250r+0{,}0625r^2)h^2+(1{,}25-0{,}25r)\right]$$

$$=(2{,}5-0{,}5r)h+(1{,}5-0{,}5r)(1{,}5625-0{,}6250r+0{,}0625r^2)h^3 \tag{5.35}$$

$$\underline{y}'(t,r)=\underline{f}(y(t))=f_1(y;r)=F\left(t,\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right)=k_{11}\underline{y}^2(t)+k_{21}, \tag{5.36}$$

$$\overline{y}'(t,r)=\overline{f}(y(t))=f_2(y;r)=G\left(t,\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right)=k_{12}\overline{y}^2(t)+k_{22}, \tag{5.37}$$

$\underline{y}(t_0,r)=\underline{y_0}(r)$ ve $\overline{y}(t_0,r)=\overline{y}_0(r)$ olmak üzere, BDD için iterasyon denklemleri;

$$\underline{y_{m+1}}(r)=\underline{y_m}(r)+hF_m\left(t_M,\underline{y_m}(r),\overline{y_m}(r)\right), \tag{5.38}$$

$$\overline{y_{m+1}}(r)=\overline{y_m}(r)+hG_m\left(t_M,\underline{y_m}(r),\overline{y_m}(r)\right) \tag{5.39}$$

şeklinde ifade edilir.

5.3. Homotopi Analiz Metodu (HAM)

İlk olarak 1992 yılında Liao tarafından tanıtılan Homotopi Analiz Metodu (HAM) sonsuz kuvvet serileri bakımından bir analitik yaklaşık çözüm sunar (Argub, 2013). Ancak bu çözümü değerlendirmek ve sonsuz kuvvet serilerinden sayısal değerler elde etmek için pratik bir yola ihtiyaç vardır. Bu bölümde, HAM'ın verimliliğini bir örnekle ele alacağız.

Öncelikle HAM'ın temel fikrini anlayabilmek için aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemi ele alalım (Argub, 2013).

$$N[x(t)]=0, \quad t\geq t_0 \ , \tag{5.40}$$

Burada N lineer olmayan diferansiyel operatör ve $x(t)$ de t bağımsız değişkeninin bilinmeyen bir fonksiyonudur. Liao, sıfırıncı derece deformasyon denklemini şu şekilde oluşturmuştur;

$$\left(1\text{-}q\right)L\left[\varphi(t;q)\text{-}x_0(t)\right]= q\hbar H(t)N[\varphi(t;q)], \tag{5.41}$$

$q\in[0,1]$ gömme parametresi, $\hbar\neq 0$ yardımcı parametre, $H(t)\neq 0$ yardımcı fonksiyon, N lineer olmayan operatör, $\varphi(t;q)$ bilinmeyen fonksiyon, $x_0(t)$ başlangıç koşulunu sağlayan x(t)'nin tahmini başlangıcı ve L de tahmini lineer operatördür. Burada;

$$f(t)=0 \text{ için } L[f(t)]=0 \tag{5.42}$$

Denklem (5.42) ve uygun başlangıç durumuna göre q=0 olduğunda;

$$\varphi(t;0)=x_0(t), \tag{5.43}$$

ve q=1 olduğunda $\hbar\neq 0$ ve $H(t)\neq 0$ olduğu için, (5.41) sıfırıncı derece deformasyon denklemi, Denklem (5.40)'e eşdeğerdir. Bu yüzden,

$$\varphi(t;1)=x(t). \tag{5.44}$$

Böylece Denklem (5.43) ve Denklem (5.44)'e göre, q 0'dan 1'e arttıkça, $x_0(t)$ yaklaşık başlangıcından x(t) kesin çözümüne çeşitli sürekli çözümler vardır.

m-yinci derece deformasyon türevini aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz;

$$x_m(t)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m(\varphi(t;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0}. \tag{5.45}$$

Denklem (5.43) ve Denklem (5.45)'i kullanarak gömme parametresi ile bir Taylor serisinde $\varphi(t;q)$'nin gömme parametresi q'ya göre genişletmesi;

$$\varphi(t;q)= x_0(t)+\sum_{m=1}^{\infty} x_m(t)q^m. \tag{5.46}$$

Yardımcı parametre h'nin, ilk yaklaşım $x_0(t)$'nin, yardımcı fonksiyon H(t)'nin ve yardımcı lineer operatör L'nin, q=1 de Denklem (5.46) serisine uygun bir şekilde seçildiğini varsayalım. Böylece bu varsayımlar altında $x(t)= x_0(t)+\sum_{m=1}^{\infty} x_m(t)$ dizi çözümüne sahip oluruz.

Burada tanımlı vektör ise $\vec{x}_n(t)=\left\{x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)\right\}$ şeklindedir.

Denklem (5.41), q parametresinin gömülmesine göre m kez türevlenerek ve sonra q=0 alıp en son m! ile bölerek, Denklem (5.45)'den;

m=1,2,3,…,n için

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \tag{5.47}$$

$$R_{x_m}\left(\vec{x}_{m-1}(t)\right) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^m N[\varphi(t;q]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0} \tag{5.48}$$

için;

$$L\left[x_m(t)-\chi_m x_{m-1}(t)\right] = hH(t)R_{x_m}\left(\vec{x}_{m-1}(t)\right) \tag{5.49}$$

m-yinci dereceden deformasyon denklemi elde edilir.

5.4. Bulanık Diferansiyel Denklemlerin Homotopy Analiz Metodu ile çözümü

Bu bölümde BDD için HAM'ı (1)-diferansiyellenebilirlik durumunda oluşturacağız. Bununla birlikte benzer yapı (2)-diferansiyellenebilirlik için de uygulanabilir.

$q\in[0,1]$ gömme parametresi olsun. Homotopi analiz metodu $\underline{x}_r(t)\rightarrow\underline{\varphi}_r(t;q)$ ve $\overline{x}_r(t)\rightarrow\overline{\varphi}_r(t;q)$ gibi bir çeşit sürekli eşlemelere dayanmaktadır. Gömme parametresi q arttıkça $\underline{\varphi}_r(t;q)$ ve $\overline{\varphi}_r(t;q)$ ilk yaklaşımdan kesin çözüme kadar değişir.

Lineer olmayan operatörler;

$$N_1[\underline{\varphi}_r(t;q)]=\tfrac{d}{dt}[\underline{\varphi}_r(t;q)-f_{1,r}(t)\left(t,\underline{\varphi}_r(t;q),\overline{\varphi}_r(t;q)\right), \tag{5.50}$$

$$N_2[\overline{\varphi}_r(t;q)]=\tfrac{d}{dt}[\overline{\varphi}_r(t;q)-f_{2,r}(t)\left(t,\underline{\varphi}_r(t;q),\overline{\varphi}_r(t;q)\right). \tag{5.51}$$

q gömme parametresini kullanarak, $\underline{x}_{r,0}(t)$ ve $\overline{x}_{r,0}(t)$, $\underline{x}_r(t)$ ve $\overline{x}_r(t)$'nin ilk tahmini yaklaşımları olmak üzere $\underline{\varphi}_r(t_0;q)=\underline{x}_{r,0}(t)$ ve $\overline{\varphi}_r(t_0;q)=\overline{x}_{r,0}(t)$ başlangıç koşulları için;

$$(1-q)L_1\left[\underline{\varphi}_r(t;q)-\underline{x}_{r,0}(t)\right] = q\hbar_1 H_1(t)N_1\left[\underline{\varphi}_r(t;q)\right], \tag{5.52}$$

$$(1-q)L_2\left[\overline{\varphi}_r(t;q)-\overline{x}_{r,0}(t)\right] = q\hbar_2 H_2(t)N_2\left[\overline{\varphi}_r(t;q)\right], \tag{5.53}$$

sıfırıncı derece deformasyon denklemlerin bir ailesini tanımlarız.

Taylor teoremiyle, $\underline{\varphi_r}(t;q)$ ve $\overline{\varphi_r}(t;q)$, q gömme parametresinin;

$$\underline{\varphi_r}(t;q) = \underline{x_{r,0}}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \underline{x_{r,m}}(t)\, q^m, \tag{5.54}$$

$$\overline{\varphi_r}(t;q) = \overline{x_{r,0}}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{x_{r,m}}(t)\, q^m, \tag{5.55}$$

kuvvet serisiyle genişletilir. Verilen $\underline{x_{r,m}}(t)$ ve $\overline{x_{r,m}}(t)$'ler sırasıyla;

$$\frac{1}{m!} \frac{\partial^m \underline{\varphi_r}(t;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0},$$

$$\frac{1}{m!} \frac{\partial^m \overline{\varphi_r}(t;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0}$$

dır. Böylece q=1'de seriler;

$$\underline{x_r}(t) = \underline{x_{r,0}}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \underline{x_{r,m}}(t), \tag{5.56}$$

$$\overline{x_r}(t) = \overline{x_{r,0}}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{x_{r,m}}(t). \tag{5.57}$$

Denklem (5.48) ve Denklem (5.49) m-yinci dereceden deformasyon denklemlerinden;

$$R_{\underline{x_m}}\left(\underline{x_{m-1}}(t), \vec{\overline{x}}_{m-1}(t)\right) = \frac{d}{dt}\underline{x_{r,m}}(t) - \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} f_{1,r}\left[t, \underline{\varphi_r}(t;q), \overline{\varphi_r}(t;q)\right]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q\to 0} \tag{5.58}$$

$$R_{\overline{x_m}}\left(\vec{\underline{x}}_{m-1}(t), \vec{\overline{x}}_{m-1}(t)\right) = \frac{d}{dt}\overline{x_{r,m}}(t) - \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} f_{2,r}\left[t, \underline{\varphi_r}(t;q), \overline{\varphi_r}(t;q)\right]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q\to 0} \tag{5.59}$$

iken;

$$L_1\left[\underline{x_{r,m}}(t) - \chi_m \underline{x_{r,m-1}}(t)\right] = \hbar_1 H_1(t) R_{\underline{x}_m}\left(\vec{\underline{x}}_{m-1}(t), \vec{\overline{x}}_{m-1}(t)\right), \tag{5.60}$$

$$L_2\left[\overline{x_{r,m}}(t) - \chi_m \overline{x_{r,m-1}}(t)\right] = \hbar_1 H_1(t) R_{\overline{x_m}}\left(\vec{\underline{x}}_{m-1}(t), \vec{\overline{x}}_{m-1}(t)\right). \tag{5.61}$$

Benzer olarak i=1,2 için;

$H_i(t)=1$, $\hbar_i=\hbar$ ve $L_i=\frac{d}{dt}$ seçebiliriz. Böylece L_i'nin sağdan tersi;

$$L_i^{-1}=\int_{t_0}^{t}(.)d\tau$$

olacaktır. Buradan, m≥1 için m-yinci derece deformasyon denklemi;

$$\underline{x}_{r,m}(t)=\chi_m\underline{x}_{r,m-1}(t)+\hbar\int_{t_0}^{t}R_{x_m}\left(\underline{x}_{m-1}(t),\vec{\overline{x}}_{m-1}(t)\right)d\tau, \tag{5.62}$$

$$\overline{x}_{r,m}(t)=\chi_m\overline{x}_{r,m-1}(t)+\hbar\int_{t_0}^{t}R_{\overline{x}_m}\left(\vec{\underline{x}}_{m-1}(t),\vec{\overline{x}}_{m-1}(t)\right)d\tau. \tag{5.63}$$

Eğer $\underline{x}_r(t)$ ve $\overline{x}_r(t)$'nin ilk tahmini yaklaşımlarını sırasıyla $\underline{x}_{r,0}(t)=\underline{x}_r(t_0)=\underline{x}_r^0$ ve $\overline{x}_{r,0}(t)=\overline{x}_r(t_0)=\overline{x}_r^0$ alırsak, iterasyon formülü kullanarak i=1,2,…,n için $\underline{x}_{r,i}(t)$ ve $\overline{x}_{r,i}(t)$ değerlerini için hesaplayabiliriz. Son olarak k. mertebeden

$$\psi_{\underline{x}_{r,k}}(t)=\sum_{m=0}^{k-1}\underline{x}_{r,m}(t) \text{ ve } \psi_{\overline{x}_{r,k}}(t)=\sum_{m=0}^{k-1}\overline{x}_{r,m}(t)$$

seri açılımı yapılarak;

$\underline{x}_r(t_0)=\underline{x}_r^0$ ve $\overline{x}_r(t_0)=\overline{x}_r^0$ başlangıç koşulları için

$$\begin{aligned}&\underline{x}_r'(t)=f_{1,r}(t,\underline{x}_r(t),\overline{x}_r(t),\\&\underline{x}_r'(t)=f_{2,r}(t,\underline{x}_r(t),\overline{x}_r(t),\end{aligned} \tag{5.64}$$

denklem sisteminin yaklaşık çözümünü bulabiliriz.

Örnek 5.2. (Shokri 2007)

$$y'(t)=k_1y^2(t)+k_2,\quad t\in I,\quad y(0)=0 \tag{5.65}$$

$$[k_1]=[k_{11},k_{12}]=\left[0.5+0.5r,1.5-0.5r\right] \tag{5.66}$$

$$[k_2]=[k_{21},k_{22}]=\left[0.75+0.25r,1.25-0.25r\right] \tag{5.67}$$

$\underline{y}(0;r)=\overline{y}(0;r)=0$

t≥0 durumunda;

$$\underline{y_r}'(t)=k_{11}\underline{y_r}(t)+k_{12}$$

$$\overline{y_r}'(t)=k_{21}\overline{y_r}(t)+k_{22} \tag{5.68}$$

$$\underline{y_r}(0)=0,\quad \overline{y_r}(0)=0$$

$$\underline{y_1}=\hbar\int_0^t\left[\underline{y}_0'-k_{11}(\underline{y_0})^2-k_{21}\left(1-\chi_1\right)\right]dt=\hbar\int_0^t\left[0-0-k_{21}\left(1-\chi_1\right)\right]dt=-\hbar tk_{21} \tag{5.69}$$

$$\overline{y_1}=\hbar\int_0^t\left[\overline{y_0}'+k_{12}(\overline{y_0})^2-k_{22}\left(1-\chi_1\right)\right]dt=\hbar\int_0^t\left[0-0-k_{22}\left(1-\chi_1\right)\right]dt=-\hbar t\,k_{22} \tag{5.70}$$

$$\underline{y_2}=\hbar\int_0^t\left[\underline{y_1}'-k_{11}(\underline{y_1})^2\right]dt=\underline{y_1}+\hbar\int_0^t\left[-\hbar k_{21}-k_{11}(-\hbar k_{21}t)^2\right]dt$$

$$=-\hbar tk_{21}-\hbar^2tk_{21}-\frac{1}{3}h^3t^3k_{11}k_{21}{}^2 \tag{5.71}$$

$$\overline{y_2}=\hbar\int_0^t\left[\overline{y_1}'+k_{12}(\overline{y_1})^2\right]dt=\overline{y_1}+\hbar\int_0^t-\hbar k_{22}-k_{12}(-\hbar k_{22}t)^2\,dt$$

$$=-\hbar tk_{22}-\hbar^2tk_{22}-\frac{1}{3}h^3t^3k_{12}k_{22}{}^2 \tag{5.72}$$

t<0 durumunda;

$$\left[\overline{y_1}'+k_{12}(\overline{y_1})^2\right]dt=\overline{y_1}+\hbar\int_0^t-\hbar k_{22}-k_{12}(-\hbar k_{22}t)^2\,dt$$

$$\underline{y_1}=\hbar\int_0^t\left[\underline{y_1}'-k_{12}(\overline{y_0})^2-k_{22}\left(1-\chi_1\right)\right]dt=\hbar\int_0^t-k_{22}dt=-\hbar k_{22}t \tag{5.73}$$

$$\overline{y_1}=\hbar\int_0^t\left[\overline{y}_0'+k_{12}(\underline{y_0})^2-k_{21}\left(1-\chi_1\right)\right]dt=\hbar\int_0^t-k_{21}\,dt=-\hbar k_{21}t \tag{5.74}$$

$$\underline{y_2}=\underline{y_1}+\hbar\int_0^t\left[\underline{y_1}'-k_{12}(\overline{y_1})^2\right]dt=\underline{y_1}+\hbar\int_0^t\left[-\hbar k_{22}-k_{12}(-\hbar k_{21}t)^2\right]dt$$

$$=-\hbar k_{22}t-\hbar^2tk_{22}-\frac{1}{3}h^3t^3k_{12}k_{21}{}^2 \tag{5.75}$$

$$\overline{y_2}=\overline{y_1}+\hbar\int_0^t\left[\overline{y_1}'-k_{11}(\underline{y_1})^2\right]dt=\overline{y}_1+\hbar\int_0^t\left[-\hbar k_{21}-k_{11}(-\hbar k_{22}t)^2\right]dt$$

$$=-\hbar k_{21}t-\hbar^2 tk_{21}-\frac{1}{3}h^3t^3k_{11}k_{22}{}^2 \qquad (5.76)$$

5.5. Adomian Bozunma Metodu

Adomian bozunma metodu (ABM), adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler de dahil olmak üzere doğrusal ve doğrusal olmayan denklemlerin çözümü için bilinen sistematik bir yöntemdir. ABM, uygulamalı bilimler ve mühendislik alanındaki uygulamalar için analitik yaklaşık çözümler ve sayısal yaklaşımlar için kullanılan güçlü bir yöntemdir (Duan, 2012).

L lineer operatör ve tersi $L^{-1}=\int_0^x(.)dx$ olsun. Aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$Ly_i=f_i\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)\ i=1,2,\ldots,n \qquad (5.77)$$

Burada L operatörünün tersi alınarak, Adomian bozunma metodunu uygulamak için aşağıdaki forma bir denklem elde ederiz.

$$y_i=y_i(0)+\int_0^x f_i\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)dx\ \ i=1,2,\ldots,n. \qquad (5.78)$$

Her zamanki gibi ABM'de (5.78) denklemi, bir serinin toplamı olarak kabul edilir.

$$y_i=\sum_{j=0}^{\infty} f_{ij} \qquad (5.79)$$

Burada (5.78) denklemindeki integral, Adomian polinomları olarak adlandırılan ($A_{ij}(f_{i,0},f_{i,1},\ldots,f_{in}$)'ler ile aşağıdaki şekilde seriye açılabilir;

$$f_i\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)=\sum_{j=0}^{\infty} A_{ij}\left(f_{i,0},\ldots,f_{ij}\right) \qquad (5.80)$$

Denklem (5.79) ve Denklem (5.80)'i, Denklem (5.78) haline getirmek yerine:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}=y_i(0)+\int_0^x\sum_{j=0}^{\infty} A_{ij}\left(f_{i,0},\ldots,f_{ij}\right)=y_i(0)+\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^x A_{ij}\left(f_{i,0},\ldots,f_{ij}\right) \qquad (5.81)$$

yazabiliriz.

Tanımdan;

$$f_{i,0}=y_i(0), \tag{5.82}$$

$$f_{i,n+1}=\int_0^x A_{i,n}\left(f_{i,0},\ldots,f_{i,n}\right)dx \quad n=0,1,2,\ldots \tag{5.83}$$

elde edilir.

5.6. Bulanık Diferansiyel Denklemlerin Adomian Bozunma Metodu İle Çözümü

Doğrusal ve doğrusal olmayan fonksiyonel denklemleri (cebirsel, diferansiyel, kısmi diferansiyel, integral, ...) çözmek için ayrışma yöntemi, 1980'lerde Adomian (Adomian 1989), (Adomian, 1994) tarafından ortaya konmuştur. Adomian, nonlineer fonksiyonel denklemleri çözmek için aşağıdaki formdaki gibi bir teknik geliştirmiştir.

f verilen fonksiyon ve N lineer olmayan operatör olmak üzere;

$$u-N(u)=f. \tag{5.84}$$

Adomian tekniğinde $u=\sum_{i=0}^{\infty}u_i$ bir seri, $N(u)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$ doğrusal olmayan operatör ve $u_0, u_1,\ldots, u_n$'deki A_n polinomları Adomian polinomları olarak adlandırılır.

λ bir parametre olmak üzere;

$$z=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i, \quad N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n A_n, \tag{5.85}$$

$$A_0=f(u_0), \tag{5.86}$$

$$A_1=u_1\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0), \tag{5.87}$$

$$A_2=u_2\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0)+(u_1^2/2!)(d^2/du_0^2)f(u_0), \tag{5.88}$$

$$A_3=u_3\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0)+(u_1u_2)\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)f(u_0)+\left(\frac{u_1^3}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^3}\right)f(u_0), \tag{5.89}$$

…

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{5.90}$$

$$u=\sum_{i=0}^{\infty} u_i, \tag{5.91}$$

serisinin terimlerini hesaplamak için kullanılan iterasyon formülü;

$$u_0=f, \tag{5.92}$$

$$u_{n+1}=A_n(u_0, u_1,\ldots, u_n) \quad n=0,1,2,\ldots \tag{5.93}$$

dır.

Bilinen u_0 değerini ve u_{n+1} formülasyonunu kullanarak diğer $u_1,u_2,\ldots,u_n$ değerler, elde edilir. Daha sonra bu değerler Denklem (5.91)'de yerine yazılarak u çözümü bulunabilir (Adomian,1990).

Örnek 5.3. i=1,2 için $k_i>0$ ve bulanık başlangıç değer problemi:

$$y'(t)=k_1y^2(t)+k_2, \quad t\in I, \tag{5.94}$$

$$y(0)=0 \tag{5.95}$$

Adomian bozunma metodu ile yaklaşık çözüm:

$$u_0(t,k,0)=\int_0^t k_2dt=k_2t, \tag{5.96}$$

$$u_1(t,k,0)=A_0(u_0)=\int_0^t k_1(k_2t)^2dt=\frac{1}{3}k_1k_2^2t^3, \tag{5.97}$$

$$u_2(t,k,0)=A_1(u_0,u_1)=\int_0^t 2k_1\left(k_2t\frac{1}{3}k_1k_2^2t^3\right)dt=\frac{2}{15}k_1^2k_2^3t^5, \tag{5.98}$$

$$g(t,k,0)\approx\phi_3(t,k,0)=u_0(t,k,0)+u_1(t,k,0)+u_2(t,k,0). \tag{5.99}$$

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial k_i}\geq 0, \quad \forall i=1,2$$

için $K_i[r]=[k_{i1}(r),k_{i2}(r)]$ ve $0\leq r\leq 1$ için r-kesitler:

$$\underline{y}(t,r)=k_{21}(r)t+\frac{1}{3}k_{11}(r)\left(k_{21}(r)\right)^2t^3+\frac{2}{15}\left(k_{11}(r)\right)^2\left(k_{21}(r)\right)^3t^5, \tag{5.100}$$

$$\overline{y}(t,r)=k_{22}(r)t+\frac{1}{3}k_{12}(r)\left(k_{22}(r)\right)^2t^3+\frac{2}{15}\left(k_{12}(r)\right)^2\left(k_{22}(r)\right)^3t^5. \qquad (5.101)$$

$$\underline{y}'(t,r)=k_{21}(r)+k_{11}(r)\left(k_{21}(r)\right)^2t^2+\frac{2}{3}\left(k_{11}(r)\right)^2\left(k_{21}(r)\right)^3t^4, \qquad (5.102)$$

$$\overline{y}'(t,r)=k_{22}(r)+k_{12}(r)\left(k_{22}(r)\right)^2t^2+\frac{2}{3}\left(k_{12}(r)\right)^2\left(k_{22}(r)\right)^3t^4. \qquad (5.103)$$

Örnek 5.4.

$$y'(t)=-y(t)+\sin(t) \qquad (5.104)$$

$$\underline{y_r}(0)=\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r$$
$$\overline{y_r}(0)=\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r \qquad (5.105)$$

Denklem (5.104) ve Denklem (5.105) bulanık başlangıç değer problemi için nümerik çözümleri Euler metodu, Homotopi analiz metodu ve Adomian bozunma metodunu kullanarak bulunuz.

(a) Euler metodu ile çözüm:

Bulanık başlangıç değer problemini kullanarak Euler metodunun iterasyon adımlarını yazalım;

$$\underline{y_{n+1}}(r)=\underline{y_n}(r)+hF\left(t_n,\underline{y_n}(r),\overline{y_n}(r)\right)$$
$$\overline{y_{n+1}}(r)=\overline{y_n}(r)+hG\left(t_n,\underline{y_n}(r),\overline{y_n}(r)\right) \qquad (5.106)$$

denklemlerini kullanarak;

$$\underline{y_1}=\underline{y_0}+h\left(-\underline{y_0}+\sin(t)\right)=\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r+h\left(-\frac{24}{25}-\frac{1}{25}r+\sin(t)\right) \qquad (5.107)$$

$$\underline{y_2}=\underline{y_1}+h\left(-\underline{y_1}+\sin(t)\right)=\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r+h\left(-\frac{24}{25}-\frac{1}{25}r+\sin(t)\right)$$

$$-h\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r+h\left(-\frac{24}{25}-\frac{1}{25}r+\sin(t)\right)-\sin(t)\right) \qquad (5.108)$$

$$\overline{y_1}=\overline{y_0}+h\left(-\overline{y_0}+\sin(t)\right)=\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r-h\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r-\sin(t)\right) \quad (5.109)$$

$$\overline{y_2}=\overline{y_1}+h\left(-\overline{y_1}+\sin(t)\right)=\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r-h\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r-\sin(t)\right)$$

$$-h\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r-\hbar\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r-\sin(t)\right)-\sin(t)\right) \quad (5.110)$$

$$\begin{aligned}&\underline{y}_{m+1}(r)=\underline{y}_m(r)+hF_m(r)\\&\overline{Y_{m+1}}(r)=\overline{Y_m}(r)+hG_m(r)\end{aligned} \quad (5.111)$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}&\underline{y}_{m+1}(r)=\underline{y}_m(r)+hF_m\left(t_M,\underline{y}_m(r),\overline{y_m}(r)\right)\\&\overline{y_{m+1}}(r)=\overline{y_m}(r)+hG_m\left(t_M,\underline{y}_m(r),\overline{y_m}(r)\right)\end{aligned} \quad (5.112)$$

çözüm denklemleri elde edilir (Friedman, 1994), (Ma, 1999).

(b) Homotopi analiz metodu ile çözüm:

Denklem (5.104) ve Denklem (5.105) bulanık başlangıç değer problemi için;

(i) t>0 durumunda;

$$\begin{aligned}&\underline{y}_r'(t)=-\underline{y}_r(t)+\text{sint}\\&\overline{y}_r'(t)=-\overline{y}_r(t)+\text{sint}\end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\underline{y}_r(0)=\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r,$$

$$\overline{y_r}(0)=\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r.$$

$$\underline{y}_1=\hbar\int_0^t\left[\underline{y}_0'+\underline{y}_0-\text{sint}\left(1-\chi_1\right)\right]dt=\hbar\int_0^t\left[\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)-\text{sint}\right]dt$$

$$=\hbar t\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)+\hbar\left(\cos t-1\right) \tag{5.114}$$

$$\overline{y_1}=\hbar\int_0^t\left[\overline{y_0}'+\overline{y_0}-\sin t\left(1-\chi_1\right)\right]=\hbar\int_0^t\left[\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)-\sin t\right]dt$$

$$=\hbar t\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)+\hbar\left(\cos t-1\right) \tag{5.115}$$

$$\underline{y_2}=\underline{y_1}+\hbar\int_0^t\left[\underline{y_1}'+\underline{y_1}-\sin t\left(1-\chi_2\right)\right]dt=\hbar t\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)+\hbar\left(\cos t-1\right)$$

$$+\hbar\int_0^t\left[\hbar\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)-\hbar\sin t+\hbar t\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)+\hbar(\cos t-1)\right]dt=\hbar t\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)+\hbar\left(\cos t-1\right)$$

$$+\hbar^2 t\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)+\hbar^2\left(\cos t-1\right)+\hbar^2 t^2\left(\frac{12}{25}+\frac{1}{50}r\right)+\hbar^2\sin t-\hbar^2 t=\hbar\left(\cos t-1\right)+$$

$$+\hbar t\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)+\hbar^2 t\left(-\frac{1}{25}+\frac{1}{25}r\right)+\hbar^2\left(\cos t+\sin t-1\right)+\hbar^2 t^2\left(\frac{12}{25}+\frac{1}{50}r\right) \tag{5.116}$$

$$\overline{y_2}=\overline{y_1}+\hbar\int_0^t\left[\overline{y_1}'+\overline{y_1}-\sin t\left(1-\chi_2\right)\right]=\hbar\int_0^t\left[\hbar\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)-\hbar\sin t+\hbar t\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)+\hbar(\cos t-1)\right]dt$$

$$=\hbar t\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)+\hbar(\cos t-1)+\hbar^2 t\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)+\hbar^2(\cos t-1)+\hbar^2 t^2\left(\frac{101}{200}+\frac{1}{200}r\right)$$

$$+\hbar^2\sin t-\hbar^2 t=\hbar(\cos t-1)+\hbar t\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)+\hbar^2 t\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{100}r\right)+\hbar^2(\cos t+\sin t-1)$$

$$+\hbar^2 t^2\left(\frac{101}{200}-\frac{1}{200}r\right) \tag{5.117}$$

$\hbar$ yaklaşık parametresini -1 alalım.

$$\psi_{\underline{x_{r,4k}}}(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^i}{i!}+\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i}}{i!} \tag{5.118}$$

$$\psi_{\overline{x_{r,4k}}}(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^i}{i!}+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i}}{i!} \tag{5.119}$$

$$\psi_{\underline{x_{r,4k+1}}}(t)=-\cos(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+1}\frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^i}{i!}$$

$$+\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i}}{i!} \tag{5.120}$$

$$\psi_{\overline{x}_{r,4k+1}}(t)=-\cos(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+1}\frac{(-1)^{i}t^{2i+1}}{(2i+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+1}\frac{(-1)^{i}t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+1}\frac{(-1)^{i}t^{i}}{i!}$$

$$+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\sum_{i=0}^{4k+1}\frac{(-1)^{i}t^{2i}}{i!} \tag{5.121}$$

$$\psi_{\underline{x}_{r,4k+2}}(t)=\sin(t)-\cos(t)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{2i+1}}{(2i+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{i}}{i!}$$

$$+\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{2i}}{i!} \tag{5.122}$$

$$\psi_{\overline{x}_{r,4k+2}}(t)=\sin(t)-\cos(t)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^{i}t^{2i+1}}{(2i+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{i}}{i!}$$

$$+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{2i}}{i!}. \tag{5.123}$$

$$\begin{aligned}\underline{y}_r(t)&=\frac{1}{2}\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+\frac{1}{2}e^{-t}+\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)e^{-t}\\ \overline{y}_r(t)&=\frac{1}{2}\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+\frac{1}{2}e^{-t}+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)e^{-t}\end{aligned} \tag{5.124}$$

$$y(t)=\left[\underline{y}_r(t),\ \overline{y}_r(t)\right] \tag{5.125}$$

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+\frac{1}{2}e^{-t}+\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)e^{-t},\frac{1}{2}\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+\frac{1}{2}e^{-t}+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)e^{-t}\right)$$

(ii) $t<0$ durumunda;

$$\begin{aligned}\underline{y}_r'(t)&=-\overline{y}_r(t)+\sin t\\ \overline{y}_r'(t)&=-\underline{y}_r(t)+\sin t\end{aligned} \tag{5.126}$$

$$\underline{y_1}=\hbar\int_0^t\left[\underline{y_0}'+\overline{y_0}-\sin t(1-\chi_1)\right]dt=\hbar\int_0^t\left[0+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)-\sin t\right]dt$$

$$=\hbar t\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)+\hbar\cos t-\hbar=\left(\cos t-1\right)\hbar+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\hbar t \tag{5.127}$$

$$\overline{y_1}=\hbar\int_0^t\left[\overline{y_1}'+\underline{y_0}-\sin t\left(1-\chi_1\right)\right]dt$$

$$=\hbar\int_0^t\left[0+\left(\frac{24}{25}-\frac{1}{25}r\right)-\mathrm{sint}\right]dt=\hbar\left(\mathrm{cost}-1\right)+\hbar t\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right) \tag{5.128}$$

$$\underline{y_2}=\underline{y_1}+\hbar\int_0^t\left[\underline{y_1}'+\overline{y_1}-\mathrm{sint}(1-\chi_2)\right]dt=(\mathrm{cost}-1)\hbar+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\hbar t$$

$$+\hbar\int_0^t\left[-\hbar\mathrm{sint}++\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\hbar+\left(\mathrm{cost}-1\right)\hbar+\left(\frac{24}{25}-\frac{1}{25}r\right)\hbar t\right]dt=\left(\mathrm{cost}-1\right)\hbar+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\hbar t$$

$$+\hbar^2\mathrm{cost}-\hbar^2+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\hbar^2 t+\hbar^2\mathrm{sint}-\hbar^2 t+\frac{\hbar^2t^2}{2}\left(\frac{24}{25}-\frac{1}{25}r\right)=\hbar\left(\mathrm{cost}-1\right)+\hbar t\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)$$

$$+\hbar^2\left(\mathrm{cost}+\mathrm{sint}-1\right)+\hbar^2 t\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{100}r\right)+\hbar^2t^2\left(\frac{12}{25}+\frac{1}{50}r\right) \tag{5.129}$$

$$\overline{y_2}=\overline{y}_1+\hbar\int_0^t\left[\overline{y_1}'+\underline{y_1}-\mathrm{sint}(1-\chi_2)\right]dt$$

$$=\overline{y}_1+\hbar\int_0^t\left[-\hbar\mathrm{sint}+\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\hbar+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\hbar t+\left(\mathrm{cost}-1\right)h\right]dt=\hbar\left(\mathrm{cost}-1\right)+\hbar t\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)$$

$$+\hbar^2\mathrm{cost}-\hbar^2+\hbar^2 t\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)+\hbar^2\mathrm{sint}-\hbar^2 t+\frac{\hbar^2t^2}{2}\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)=\hbar\left(\mathrm{cost}-1\right)+\hbar t\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)$$

$$+\hbar^2\left(\mathrm{cost}+\mathrm{sint}-1\right)+\hbar^2 t\left(-\frac{1}{25}+\frac{1}{25}r\right)+\hbar^2t^2\left(\frac{101}{200}-\frac{1}{200}r\right) \tag{5.130}$$

$\hbar$ parametesini -1 alalım.

$$\psi_{\underline{x_{r,4k}}}(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^i}{i!}+\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\sum_{i=0}^{4k}\frac{t^{2i}}{2i!}$$

$$-\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{5.131}$$

$$\psi_{\overline{x_{r,4k}}}(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^i}{i!}+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i}}{2i!}$$

$$-\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\sum_{i=0}^{4k}\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{5.132}$$

$$\psi_{\underline{x_{r,4k+1}}}(t)=-\cos(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+1}\frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^i t^i}{i!}+\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\sum_{i=0}^{4k}\frac{t^{2i}}{2i!}$$

$$-\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\sum_{i=0}^{4k+1}\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{5.133}$$

$$\psi_{\overline{x_{r,4k+1}}}(t)=-\cos(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+1}\frac{(-1)^{i}t^{2i+1}}{(2i+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+1}\frac{(-1)^{i}t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+1}\frac{(-1)^{i}t^{i}}{i!}$$

$$+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\sum_{i=0}^{4k+1}\frac{t^{2i}}{2i!}-\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\sum_{i=0}^{4k}\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{5.134}$$

$$\psi_{\underline{x_{r,4k+2}}}(t)=\sin(t)-\cos(t)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{2i+1}}{(2i+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{i}}{i!}$$

$$+\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{t^{2i}}{(2i)!}-\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{5.135}$$

$$\psi_{\overline{x_{r,4k+2}}}(t)=\sin(t)-\cos(t)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k}\frac{(-1)^{i}t^{2i+1}}{(2i+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{2i}}{(2i)!}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{i}}{i!}$$

$$+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{(-1)^{i}t^{2i}}{i!}-\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\sum_{i=0}^{4k+2}\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{5.136}$$

Böylece h=-1 alınması durumunda analitik yaklaşık çözümleri ile kesin çözümleri aynı sonucu vermektedir. h=-1 için;

$$\underline{y}_r(t)=\frac{1}{2}\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+\frac{1}{2}e^{-t}+\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\cosh(t)-\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\sinh(t)$$

$$\overline{y}_r(t)=\frac{1}{2}\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+\frac{1}{2}e^{-t}+\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r\right)\cosh(t)-\left(\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r\right)\sinh(t) \tag{5.137}$$

$$y(t)=\left[\underline{y}_r(t),\ \overline{y}_r(t)\right] \tag{5.138}$$

(c) Adomian bozunma metodu ile çözüm:

$$y'(t)=-y(t)+\sin(t)$$

$$\underline{y}_r(0)=\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r,$$

$$\overline{y}_r(0)=\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r.$$

$$\underline{y_0}=\underline{y_0}(r)+\int_0^t\sin(t)\,dt=\frac{24}{25}+\frac{1}{25}r-\cos(t)+1=\frac{49}{25}+\frac{1}{25}r-\cos(t) \tag{5.139}$$

$$\underline{y}_1=\int_0^t -\underline{y}_0(t;r)dt=-\int_0^t\left(\frac{49}{25}+\frac{1}{25}r-\cos(t)\right)dt=\sin(t)-\frac{49}{25}t-\frac{1}{25}r\,t \tag{5.140}$$

$$\underline{y}_2=\int_0^t -\underline{y}_1(t;r)dt=-\int_0^t\left(\sin(t)-\frac{49}{25}t-\frac{1}{25}rt\right)dt=\cos(t)+\frac{1}{50}rt^2+\frac{49}{50}t^2-1 \tag{5.141}$$

$$\overline{y}_0=\overline{y}_0(r)+\int_0^t \sin(t)\,dt=\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r-\cos(t)+1 \tag{5.142}$$

$$\overline{y}_1=-\int_0^t\left(\frac{101}{100}-\frac{1}{100}r-\cos(t)+1\right)dt=\sin(t)-\frac{101}{100}t+\frac{1}{100}rt-t \tag{5.143}$$

$$\overline{y}_2=-\int_0^t\left(\sin(t)-\frac{101}{100}t+\frac{1}{100}rt-t\right)dt=\cos(t)-\frac{1}{200}rt^2+\frac{201}{200}t^2-1 \tag{5.144}$$

t=0,01 için;

$$\underline{\phi}_{10}=\sum_{n=0}^{10}\underline{y}_n=\frac{1}{25}r-\frac{49}{25}t-\cos(t)+\sin(t)-\frac{1}{25}rt+\frac{1}{50}rt^2-\frac{1}{150}rt^3+\frac{1}{600}rt^4+\frac{1}{3000}rt^5$$

$$+\frac{1}{18000}rt^6+\frac{1}{126000}rt^7+\frac{1}{1008000}rt^8-\frac{1}{9072000}rt^9+\frac{12}{25}t^2-\frac{4}{25}t^3+\frac{49}{600}t^4-\frac{49}{3000}t^5$$

$$+\frac{1}{750}t^6-\frac{1}{5250}t^7+\frac{7}{144000}t^8-\frac{7}{1296000}t^9+\frac{49}{25} \tag{5.145}$$

$$\overline{\phi}_{10}=\sin(t)-\frac{201}{100}t-\cos(t)-\frac{1}{100}r+\frac{1}{100}rt-\frac{1}{200}rt^2+\frac{1}{600}rt^3-\frac{1}{2400}rt^4+\frac{1}{12000}rt^5$$

$$-\frac{1}{72000}rt^6+\frac{1}{504000}rt^7-\frac{1}{4032000}rt^8+\frac{1}{36288000}rt^9+\frac{101}{200}t^2-\frac{101}{600}t^3+\frac{67}{800}t^4-\frac{67}{4000}t^5$$

$$+\frac{101}{72000}t^6-\frac{101}{504000}t^7+\frac{67}{1344000}t^8-\frac{67}{12096000}t^9+\frac{201}{100} \tag{5.146}$$

Örnek (5.4)'deki bulanık diferansiyel denklem için sayısal çözümlerin ve bu çözümler için belirlenen yaklaşık hataların tablo ve grafiği aşağıda verilmiştir.

Tablo 5.1. Örnek (5.4)'deki BDD'nin $r\in[0,1]$ için Euler metodu, Homotopi analiz metodu ve Adomian metodu ile yaklaşık çözümleri

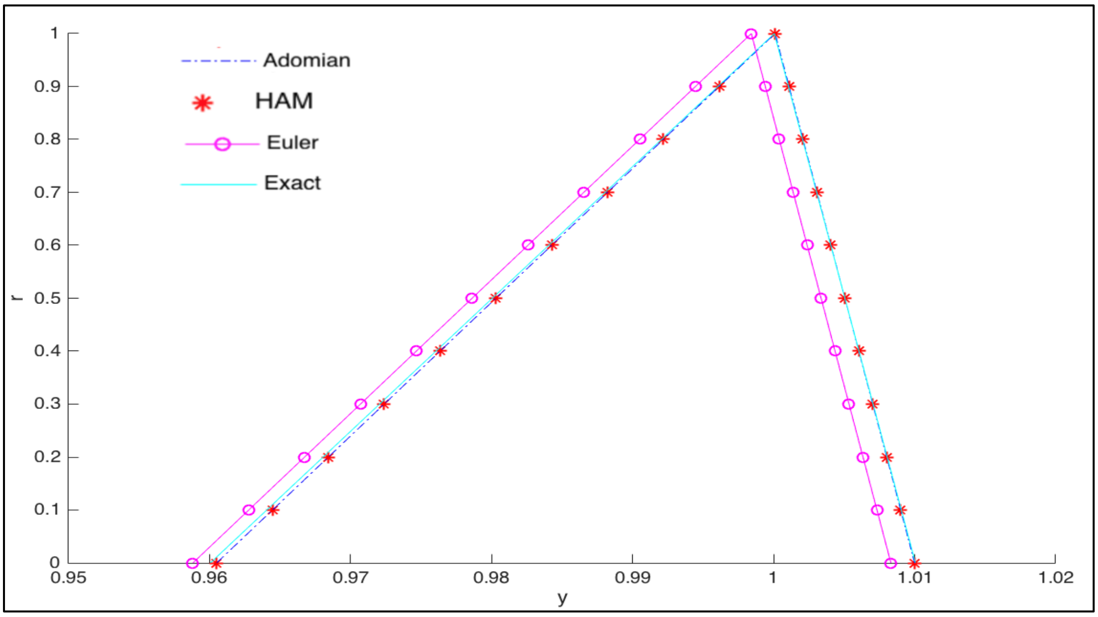
	Euler		ADM		HAM		Exact	
r	$\underline{y}$	$\overline{y}$	$\underline{y}$	$\overline{y}$	$\underline{y}$	$\overline{y}$	$\underline{y}$	$\overline{y}$
0	0,958814709848079	1,00831470984808	0,960497673732536	1,01000016541999	0,960497677764858	1,01000016966351	0,960050334166661	1,01005033416666
0.1	0,962774709848079	1,00732470984808	0,964457873067533	1,00901011558625	0,964457877116751	1,00901011982554	0,964050334166661	1,00905033416666

Tablo 5.1. (Devam) Örnek (5.4)'deki BDD'nin $r \in [0,1]$ için Euler metodu, Homotopi analiz metodu ve Adomian metodu ile yaklaşık çözümleri

0.2	0,966734709848079	1,00633470984808	0,968418072402529	1,00802006575250	0,968418076468642	1,00802006998756	0,968050334166661	1,00805033416666
0.3	0,970694709848079	1,00534470984808	0,972378271737526	1,00703001591875	0,972378275820535	1,00703002014959	0,972050334166661	1,00705033416666
0.4	0,974654709848079	1,00435470984808	0,976338471072523	1,00603996608500	0,976338475172427	1,00603997031162	0,976050334166661	1,00605033416666
0.5	0,978614709848079	1,00336470984808	0,980298670407519	1,00504991625125	0,980298674524319	1,00504992047364	0,980050334166661	1,00505033416666
0.6	0,982574709848079	1,00237470984808	0,984258869742516	1,00405986641750	0,984258873876211	1,00405987063567	0,984050334166661	1,00405033416666
0.7	0,986534709848079	1,00138470984808	0,988219069077513	1,00306981658375	0,988219073228103	1,00306982079770	0,988050334166661	1,00305033416666
0.8	0,990494709848079	1,00039470984808	0,992179268412509	1,00207976675000	0,992179272579994	1,00207977095972	0,992050334166661	1,00205033416666
0.9	0,994454709848079	0,999404709848079	0,996139467747506	1,00108971691625	0,996139471931888	1,00108972112175	0,996050334166661	1,00105033416666
1	0,998414709848079	0,998414709848079	1,00009966708250	1,00009966708250	1,00009967128378	1,00009967128378	1,00005033416666	1,00005033416666

Tablo 5.2. Örnek (5.4)'deki BDD'nin $r \in [0,1]$ ve h'nin farklı değerleri için tahmini hatası

Euler		ADM		HAM	
$\underline{y}$_error	$\overline{y}$_error	$\underline{y}$_error	$\overline{y}$_error	$\underline{y}$_error	$\overline{y}$_error
0,0000228471890251404	0,0000312656227772756	0,000000852629996577922	0,0000000108925601114895	0,000000852652340537162	0,0000000108925122404276



Şekil 5.1. Örnek (5.4)'deki BDD'nin Euler, Homotopi ve Adomian metotları ile yaklaşık ve kesin çözümleri

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde Hukuhara diferansiyellenebilirlik kullanılarak bulanık diferansiyel denklemlerin çözümleri ve bazı nümerik metotlarla bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerine yer verilmiştir.

Örneklerde görüleceği üzere bulanık diferansiyel denklem ile klasik adi diferansiyel denklemlerin yapıları aynıdır ancak bulanık diferansiyel denklemde başlangıç koşulu klasik adi diferansiyel denklemden farklı olarak bulanık sayılardan oluşmaktadır. Hukuhara diferansiyellenebilirlik ile çözüm yapıldığında çözümlerin destek bölgesi aralığının arttığı görülmektedir. Destek bölgesi genişliği arttıkça çözüm gerçek çözümden uzaklaşmaktadır. Hukuhara diferansiyellenebilirliğinin en belirgin dezavantajı da budur.

Bu çalışmada bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için Euler metotu, Homotopi analiz metodu ve Adomian bozunma metodu kullanılmıştır. Öncelikle bu üç nümerik yöntemin klasik adi diferansiyel denklemler için uygulama şekli, daha sonra da bulanık diferansiyel denklemler üzerindeki uygulama şekli verilmiştir. Bu üç metodun uygulamalardaki hata analizleri ve bu hata analizlerinin karşılaştırılması tablo ve grafikte açık şekilde gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Adomian G., *Nonlinear Stochastic Systems and Application to Physics*, 1st ed., Kluwer, Dordecht, 1989.

Adomian G., A Review of the Decomposition Method and Some Results for Nonlinear Equations, Math. *Compute Model*., 1990, **7**, 17–43.

Adomian G., *The Decomposition Method, Solving Frontier Problems of Physics*, 1st ed., Kluwer, Dordrecht, 1994.

Allahviranloo T., Abbasbandy S., Numerical Solution of Fuzzy Differential Equation by Runge-Kutta Method, *Nonlinear Studies*, 2004, **11**(1), 117-129.

Allahviranloo T., Kiani N. A., Barkhodari M., Toward the Existence and Uniqueness of Solution of Second-Order Fuzzy Differential Equations, *Information Sciences*, 2009, **179**, 1207-1215.

Argub O. A., El-Ajou A., Momani S., Shawagfeh N., *Appl. Math. Inf. Sci*., 2013, **7** (5), 1903-1919.

Baykal N., Beyan T., *Bulanık Mantık Uzman Sistemler ve Denetleyiciler*, 1st ed., Bıçaklar Yayınevi, 2004.

Babolian E., Sadeghi H., Javadi S., Numerically Solution of Fuzzy Differential Equations by Adomian Method, *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **149**(2), 547–557.

Biazar J., Babolian E., Islam R., Solution of System of Ordinary Differential Equations by Adomian Decomporsition Method, *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **147**, 713-719.

Bede B., Gal S. G., Almost Periodic Fuzzy Number Valued Functions, *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, **147**, 385-403.

Bede B., Gal S.G., Generalizations of the Differentiability of Fuzzy Number Valued Functions with Applications to Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, **151**, 581-599.

Bede B., Stefanni L., Solution of Fuzzy Differential Equations with Generalized Differentiability Using LU-Parametric Representation, Proceedings of the 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology EUSFLAT, 2011, 785-790.

Buckley J.J., Feuring T., Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets Systems*, 2000, **110**, 43–54.

Byrne P., Fuzzy Analysis A Vague Way of Dealing With Uncertainty in Real Estate Analysis, *Journal of Property Valuation &Investment*, 1995, **13** (3), 22-41.

Chalco-Cano Y., Román-Flores H., On The New Solution of Fuzzy Differential Equations, *Chaos Solitons Fractals*, 2006, **38**, 112–119.

Chalco-Cano Y., Román-Flores H., Rufián-Lizana A., Jiménez-Gamero M.D., Calculus for Interval-Valued Functions Using Generalized Hukuhara Derivative and Applications, *Fuzzy Sets and Systems*, 2012, **219**, 49–67.

Chang S.L., Zadeh L.A., On Fuzzy Mapping and Control, *IEEE Transactions On Systems, Man and Cybernetics*, 1972, **2**, 330-340.

Chen C. T., Lin C. T., Huang S. F., A Fuzzy Approach for Supplier Evaluation and Selection in Supply Chain Management, *International Journal of Production Economies*, 2005, **102**, 1-13.

Cheng S., Chan C.W., Huang G.H., Using Multiple Criteria Decision Analysis for Supporting Decisions of Solid Waste Management, *Journal of Environment Science Health*, 2002, **37** (6), 975-990.

Cong-Xin W., Ming M., Embedding Problem on Fuzzy Number Space, *Fuzzy Sets and Systems*,1992, **46** (3), 281-286.

Diamond, P., Stability and Periodicity in Fuzzy Differential Equations, *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, 2000, **8**, 583-590.

Duan J.S., Rach R., Baleanu D., Wazwaz A.M, A Review of the Adomian Decomposition Method and Its Applications to Fractional Differential Equations, *Communications in Fractional Calculus*, 2012, **3**(2), 73-79.

Dubois D., Prade H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, 1st ed., Academic Press, Orlando, 1980.

Dubois D., Prade, H., *Towards Fuzzy Differential Calculus*, Differentiation, Fuzzy Sets and Systems, 1982, **8**(3), 225-233.

Elmas Ç., *Bulanık Mantık Denetleyiciler*, 5. Baskı, Seçkin Yayıncılık, 2003.

Friedman M., Kandel A., *Fundamentals of Computer Numerical Analysis*, CRC Pres, Boca Raton, CRC Press, Boca Raton, 1994, 390-400, 441-444.

Gomes L.T., Barros B. C., Bede B., *Fuzzy Differential Equations in Various Approaches*, 1st ed., Springer Briefs in Mathematics, 2015.

Hukuhara M., Intégration Des Applications Measurables Dont La Valeur Est Un Compact Convexe, *Funkcial. Ekvac.*, 1967, **10**, 205–223.

Kaleva O., Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, **24**, 301-317.

Kaleva O., The Cauchy Problem for Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, **35**, 389-396.

Kaleva O., A Note on Fuzzy Differential Equations, *Nonlinear Analysis*, 2006, **64**, 895-900.

Kandel, A., Byatt W. J., Fuzzy Differential Equations, *Proceedings of International Conference Cybernetics and Society*, Tokyo, 1978, 1213-1216.

Kandel A., Byatt W. J., Fuzzy Processes, *Fuzzy Sets and Systems*, 1980, **4**, 117-152.

Karanfil S., Fuzzy Lojik Problemlerinde Üyelik Fonksiyonunun Belirlenmesinde Deneysel Verilere Dayanarak Bir Yöntem Geliştirilmesi, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 1997.

Kasabov N. K., *Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems and Knowledge Engineering*, 2nd ed., The MIT Press, Cambridge, 1998.

Kaufmann A., Gupta M. M., *Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications*, 2nd ed., Van Nostrand Reinhold Publishing, New York, 1991.

Kıyak E., Bulanık Mantık ve Uçuş Kontrol Problemine Uygulanması, *Havacılık ve Uzay Teknolojileri Dergisi*, 2003, **1**(2), 63-72.

Kleyle R., Korvin A. D., Karim K., Investing in New Companies in an Unstable Economic Environment: *A Fuzzy Set Approach, Managerial Finance*, 1997, **23**(6), 68- 80.

Knight K. G., A Fuzzy Logic Model for Predicting Commercial Building Design Cost Overruns, Master of Science Thesis, University of Alberta, Faculty of Graduate Studies and Research, Alberta, 2001.

Liao S. J., A Second-Order Approximate Analytical Solution of a Simple Pendulum by the Process Analysis Method, *ASME J. Appl. Mech*., 1992, **59**, 970–975.

Liang Y., Dynamic Strategic Planning and Justification Systems for Advanced Manufacturing Technology Acquisition, Master of Science Thesis, University of Windsor, USA, 2001.

Ma M., *Computer Science and Engineering Department*, 2nd Ed., A Bradford Book, University of South Florida, Tampa, 1997, FL 33620-5350 USA.

Ma M., Friedman M., Kandel A., Numerical Solutions of Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, **105**, 133-138.

Mamdani E. H., Assilian, S., An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller, *Int. J. Man Mach. Studies*, 1975, **7**(1), 1-13.

Munakata T., Jani Y., Fuzzy Systems: An Overview, *Communications of the ACM*, 1994, **37**(3), 69-76.

Nguyen H.T., A Note on the Extension Principle for Fuzzy Sets, *J. Math. Anal. Appl.*, 1978, **64**, 369–380.

Negoita C. V., D.A. Ralescu, *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis,* John Wiley & Sons, New York, Toronto, 1975.

Puri M.L., Ralescu D.A., Differentials of Fuzzy Functions, *J. Mathematical Analysis And Applications*, 1983,**91**, 552-558.

Radhy Z.H., International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT), 2017, **52 (9)**, 596-692.

Ross T.J., *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, Mc. Graw-Hill, Publishing Co., New York, 1995.

Seikkala, S., On The Fuzzy Initial Value Problem, *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, **24**, 3rd Ed., 319–330.

Shokri J., Numerical Solution of Fuzzy Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences,* 2007, **1**, 2231 – 2246.

Mahmut Sinecen, Klima Sistem Kontrolünün Bulanık Mantık ile Modellenmesi, Yüksek Lisans Tezi, *Pamukkale Üniv Müh Bilim Derg.,* 2004, **10**(3), 353-358.

Sugeno M., An Introductional Survey of Fuzzy Control, 1985, **36**, 59-83.

Şen Z., *Bulanık (Fuzzy) Mantık ve Modelleme İlkeleri*, Bilge Sanat Yapım Yayınevi, İstanbul, 2001.

Zadeh L.A., Fuzzy Sets, *Information and Control*, 1965, **8**, 338-353.

Zadeh L.A., *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, And Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A Zadeh,* 1st ed., World Scientific, USA, 1996.

Zadeh L.A., The Concept of Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning, *I. Inf. Sci*., 1975, **8**, 199–249.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

H. Kodal Sevindir, S. Çetinkaya, **G. Tabak**, M. A. Bayrak, Bulanık Cauchy Problemlerinin Nümerik Çözümleri, *III. Uluslararası Mesleki ve Teknik Bilimler Kongresi*, Gaziantep, 21-22 Haziran, 2018.

M. A. Bayrak, **G. Tabak**, Süleyman Çetinkaya, H. Kodal Sevindir, 2. Mertebeden Bulanık Başlangıç Değer Probleminin Homotopi Analiz Metodu ile Çözümü, *III. Uluslararası Mesleki ve Teknik Bilimler Kongresi*, Gaziantep, 21-22 Haziran, 2018.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında İstanbul/Üsküdar'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kocaeli'de tamamladı. 2009 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2013 yılında mezun oldu. 2014 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.