KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİBONACCİ SAYILARI İLE BAĞLANTILI BAZI DİZİLERİN BÖLÜNEBİLME ÖZELLİKLERİ

GÖKHAN KUZUOĞLU

KOCAELİ 2019

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİBONACCİ SAYILARI İLE BAĞLANTILI BAZI DİZİLERİN BÖLÜNEBİLME ÖZELLİKLERİ

GÖKHAN KUZUOĞLU

Doç.Dr. Yücel TÜRKER ULUTAŞ **Danışman, Kocaeli Üniv.**	Y. Türker ....
Prof. Dr. Refik KESKİN **Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.**	....
Doç.Dr. Neşe ÖMÜR **Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.**	....

Tezin Savunulduğu Tarih: 11.07.2019

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Matematiğin en eski alanlarından biri olan sayılar teorisi, sayılar arasındaki ilişkiyi inceleyen bir alandır. Fibonacci sayı dizileri, Lucas sayı dizileri, genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri sayılar teorisinin en çok ilgi çeken sayı dizilerinden olup sayılar teorisi uygulamalarında oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu çalışmada bazı sayı dizileri ve bu sayı dizilerinin alt dizileri tanımlanmış ve tanımlanmış olan bu sayı dizilerinin Fibonacci sayı dizilerinin bölünebilme özelliklerine benzer özelliklere sahip oldukları gösterilmiştir.

Tez çalışmam boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, beni yönlendiren, çalışmalarıma yön veren, bana güvenen danışmanım Sayın Doç. Dr. Yücel TÜRKER ULUTAŞ'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca bana maddi ve manevi destek veren, yardımlarını esirgemeyen sevgili aileme sevgi ve minnetlerimi sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim süresince eğitimimi tamamlamam için iş hayatımdaki gerekli izinleri sağlayan ve destek veren Sayın Müdürüm Yusuf Sert'e vermiş olduğu destekten ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Haziran – 2019 Gökhan KUZUOĞLU

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	:	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif tamsayılar kümesi
$a\mid b$	:	a böler b
$a \nmid b$	:	a bölmez b
(a, b)	:	a ve b'nin en büyük ortak böleni
$a^k \parallel b$	:	$a^k\mid b$ ve $a^{k+1} \nmid b$
$\vartheta_p(.)$	:	p-adic mertebesi veya p-adic değeri
$a \approx b$	:	a ve b ilgili sayılar
$a \leq b$	:	a küçük eşit b
$a < b$	:	a küçük b
$a \geq b$	:	a büyük eşit b
$a > b$	:	a büyük b
$\equiv$	:	Denk
$\left(\frac{a}{p}\right)$	:	Legendre sembolü
$\binom{n}{k}$	:	Binom katsayısı
$n!$	:	n faktöriyel
$z(n)$	:	n'nin Entry Point'i
$\{W_n(a, b; r, s)\}$	:	Horadam dizisi
$\{U_n\}$	:	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{F_n\}$	:	Fibonacci dizisi
$\{L_n\}$	:	Lucas dizisi
$\{T_n\}$	:	$\left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ dizisi
$\{H_k(n)\}$	:	$\{T_n\}$ dizisinin bir alt dizisi
$\{S_n\}$	:	$\left\{\frac{F_{7n}}{F_7F_n}\right\}$ dizisi
$\{Q_k(n)\}$	:	$\{S_n\}$ dizisinin bir alt dizisi
$\{S_{p,n}\}$	:	$\left\{\frac{U_{pn}}{U_pU_n}\right\}$ dizisi
$\{Q_k(p, n)\}$	:	$\{S_{p,n}\}$ dizisinin bir alt dizisi

FİBONACCİ SAYILARI İLE BAĞLANTILI BAZI DİZİLERİN BÖLÜNEBİLME ÖZELLİKLERİ

ÖZET

Bu çalışmada, ilk olarak $\{S_n\} = \left\{\frac{F_{7n}}{F_7F_n}\right\}$ dizisinin bazı bölünebilirlik özellikleri verilmiştir. $\{S_n\}$ sayı dizisinin $n \neq 7k$ olduğunda tamsayı olduğu ve $\{S_n\}$ sayı dizisinin tamsayı olduğu değerler için hangi koşullar altında $S_m|S_n$ ve $(S_m, S_n) = S_{(m,n)}$ ifadelerinin sağlandığı gösterilmiştir. Ayrıca $\{S_n\}$ sayı dizisi kullanılarak tanımlanan $\{Q_k(n)\}$ altdizisi için $n \neq 7k$ olduğunda $S_n^k|Q_k(n)$ olduğu elde edilmiştir. 2017 yılında Panraksa ve Tangboonduangjit tarafından tanımlanan $\{T_n\} = \left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ dizisinin ve tanımladığımız $\{S_n\} = \left\{\frac{F_{7n}}{F_7F_n}\right\}$ dizisinin bazı bölünebilirlik özellikleri genelleştirilmiş Fibonacci dizileri üzerine taşınmış ve $\{S_{p,n}\} = \left\{\frac{U_{pn}}{U_pU_n}\right\}$ dizisi tanımlanmıştır. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve p tek asal sayı olmak üzere $n \neq pt$ iken $S_{p,n} = \frac{U_{pn}}{U_pU_n}$ sayısının bir tamsayı olduğu gösterilmiştir. $\{S_{p,n}\}$ sayı dizisi için $S_{p,m}\big|S_{p,n}$ ve $(S_{p,m}, S_{p,n}) = S_{p,(m,n)}$ özelliklerinin hangi şartlar altında sağlandığı elde edilmiştir. Ayrıca $\{S_{p,n}\}$ sayı dizisi kullanılarak tanımlanan $\{Q_k(p,n)\}$ altdizisi için $n \neq pk$ olduğunda $S_{p,n}^k|Q_k(p,n)$ olduğu elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bölünebilme, Fibonacci Dizisi, Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi.

ON DIVISIBILITY PROPERTIES OF A SEQUENCE RELATED TO THE QUOTIENT OF FIBONACCI NUMBERS

ABSTRACT

In this study, some divisibility properties of sequence $\{S_n\} = \left\{\frac{F_{7n}}{F_7 F_n}\right\}$ are given. It is shown that $\{S_n\}$ is an integer sequences when $n \neq 7k$ and under which conditions $S_m|S_n$ and $(S_m, S_n) = S_{(m,n)}$ are provided for the sequence $\{S_n\}$. For subsequence $\{Q_k(n)\}$ defined using the sequence $\{S_n\}$, it is also shown that $S_n^k|Q_k(n)$ when $n \neq 7k$. Some divisibility properties of sequence $\{T_n\} = \left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ given by Panraksa and Tangboonduangjit in 2017 and the sequence $\{S_n\}$ defined by us are moved over to the generalized Fibonacci numbers and sequence $\{S_{p,n}\} = \left\{\frac{U_{pn}}{U_p U_n}\right\}$ are defined. It is shown that $\{S_{p,n}\}$ is an integer sequences for $n \neq pt$. Also $S_{p,m}|S_{p,n}$ and $(S_{p,m}, S_{p,n}) = S_{p,(m,n)}$ under which conditions has been obtained for the integer values of the sequence $\{S_{p,n}\}$, where n is a positive integer and p is an odd prime number. In addition, for subsequence $\{Q_k(p,n)\}$ defined by using the sequence $\{S_{p,n}\}$, it has been obtained that $S_{p,n}^k|Q_k(p,n)$ when $n \neq pt$.

Key Words: Divisibility, Sequence of Fibonacci, Sequence of Generalized Fibonacci.

GİRİŞ

Bu çalışma genel bilgiler, $\{T_n\} = \left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ dizisinin bazı bölünebilirlik özellikleri, $\{S_n\} = \left\{\frac{F_{7n}}{F_7F_n}\right\}$ dizisinin bazı bölünebilirlik özellikleri, $\{S_{p,n}\} = \left\{\frac{U_{pn}}{U_pU_n}\right\}$ dizisinin bazı bölünebilirlik özellikleri ile sonuçlar ve öneriler olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmamızda kullandığımız bölünebilme ile ilgili tanım ve teoremler, Fibonacci dizisi ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi tanımları, bu dizilere ait Binet formülleri, özdeşlikler ve bölünebilme özellikleri ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, Panraksa ve Tangboonduangjit tarafından tanımlanan $\{T_n\} = \left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ dizisinin terimlerinin bölünebilme özellikleri verilmiştir. m,n $\in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $m|n$ ve $\vartheta_5(m) = \vartheta_5(n)$ iken $T_m|T_n$ ve $(T_m, T_n) = T_{(m,n)}$ olduğu gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\{T_n\} = \left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ dizisinden esinlenerek tanımladığımız $\{S_n\} = \left\{\frac{F_{7n}}{F_7F_n}\right\}$ dizisinin bazı bölünebilirlik özellikleri verilmiştir. Hangi koşullar altında $S_m|S_n$ ve $(S_m, S_n) = S_{(m,n)}$ olduğu araştırılmıştır. Ayrıca $\{S_n\}$ dizisi kullanılarak tanımlanan $\{Q_k(n)\}$ alt dizisinin terimlerinin $\{S_n\}$ dizisinin terimleri tarafından bölünebilmesi ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, ikinci ve üçüncü bölümde yapılan çalışmalar genelleştirilmiş Fibonacci sayıları üzerine genelleştirilerek elde edilen yeni dizinin bölünebilme özellikleri araştırılmıştır.

Beşinci bölümde, elde edilen sonuçlar verilmiş ve bundan sonraki çalışmalar için öneriler sunulmuştur.

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, Fibonacci sayıları tanıtılıp bu sayıların bölünebilme ile ilgili özellikleri ele alınacaktır. Bunun için ilk olarak tamsayılarda bölünebilme ile ilgili temel kavram ve teoremlerini verelim.

1.1. Tamsayılarda Bölünebilme ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1: $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $b = a.t$ olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}$ tamsayısı varsa a , b'yi böler denir ve bu $a|b$ şeklinde gösterilir. Eğer $b = t.a$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{Z}$ tamsayısı yoksa a, b'yi bölmez denir ve bu $a \nmid b$ şeklinde gösterilir.

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a^k|b$ ve $a^{k+1} \nmid b$ ise a^k'ya b'nin tam böleni denir ve bu $a^k \| b$ şeklinde gösterilir [4].

Lemma 1.1.1: $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a|b$ ve $b|a$ ise $a = \pm b$'dir [4].

$a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a|b$ ve $b|a$ ise a ve b tamsayıları ilgili sayılar olarak adlandırılır ve $a \approx b$ yazılır. Lemma 1.1.1. den $a \approx b$ iken $a = \pm b$ olduğu açıktır. Ayrıca $a|b \Leftrightarrow \pm a|\pm b$ olduğundan ilgili elemanlar bölünebilme açısından aynı özelliklere sahip sayılardır. Bu durumda bölünebilmeyi pozitif tamsayılar kümesi üzerinde incelemek yeterlidir.

Teorem 1.1.1: (Bölme Algoritması) $a \in \mathbb{Z}$ ve $b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

olacak şekilde tek türlü belirli $q, r \in \mathbb{Z}$ vardır [4].

Tanım 1.1.2: $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere a ve b'yi bölen en büyük pozitif tamsayı a ve b'nin en büyük ortak böleni olarak adlandırılır ve bu sayı (a, b) ile gösterilir. Eğer $(a, b) = 1$ ise a ile b aralarında asal tamsayılar olarak adlandırılır [4].

Teorem 1.1.2: En az biri sıfır olmayan $a, b \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için $(a, b) = d$ olsun. Bu durumda $ax + by = d$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır [4].

Lemma 1.1.2: $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer $a|c$, $b|c$ ve $(a, b) = 1$ ise $a.b|c$'dir [4].

İspat: $a|c$, $b|c$ ve $(a, b) = 1$ olsun. $a|c$ ve $b|c$ olduğundan $c = ma$ ve $c = nb$ olacak şekilde m ve n tamsayıları vardır. Aynı zamanda $(a, b) = 1$ olduğundan Teorem 1.1.2. gereği $ax + by = 1$ olacak şekilde x ve y tamsayıları da vardır. Bu son eşitliğin her iki yanı $c \in \mathbb{Z}^+$ ile çarpılırsa

$$cax + cby = c \tag{1.1}$$

elde edilir. (1.1) eşitliğinde $c = ma$ ve $c = nb$ eşitlikleri kullanılırsa

$$(nb)ax + (ma)by = c \tag{1.2}$$

olarak yazılır. Böylece (1.2) eşitliğinden $ab(nx + my) = c$ olup $ab|c$ dir.

Teorem 1.1.3: (Öklid Algoritması) $a \in \mathbb{Z}$ ve $b \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bölme algoritmasının art arda uygulanması ile

$$a = q_0 b + r_0, \quad 0 \leq r_0 < b$$

$$b = q_1 r_0 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < r_0$$

$$r_0 = q_2 r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir. Burada öyle bir en küçük $t \geq 0$ tamsayısı vardır ki $r_t = 0$ dır. Eğer $t = 0$ ise $r_0 = 0$ ve $b|a$ dır. Bu durumda $(a, b) = a$ olur. Eğer $t \geq 1$ ise $(a, b) = r_{t-1}$ dir ve yukarıdaki eşitliklerden sırasıyla $r_{t-2}, r_{t-1}, \ldots, r_0$ yokedilerek

$$r_{t-1} = ax + by$$

olacak şekilde x ve y tamsayıları bulunur [4].

Teorem 1.1.4: (Aritmetiğin Temel Teoremi) $n > 1$ bir tamsayı olsun. Bu durumda $t \geq 1$ tamsayı ve $p_1, p_2, \ldots, p_t$ asallar olmak üzere $n = p_1 p_2 \ldots p_t$ şeklinde, çarpanların sırası hariç, tek türlü yazılır [4].

Tanım 1.1.3: $b \in Z$ ve $b \neq 0$ olsun. p bir asal sayı olmak üzere p'nin b'yi bölen en büyük pozitif tamsayı kuvvetine p-adic mertebesi veya p-adic değeri denir ve bu $\vartheta_p(b)$ ile gösterilir [3].

$b \in Z$ ve $b \neq 0$ sayısı için $\vartheta_p(b) = r$ ise $p^r \| b$ olduğu Tanım 1.1.3 den açıktır.

Tanım 1.1.4: $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer $n | a - b$ ise a, b'ye n moduna göre denktir denir ve bu $a \equiv b \pmod{n}$ olarak yazılır [4].

Lemma 1.1.3: $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $a \equiv b \pmod{n}$ ise $(a, n) = (b, n)$ dir [20].

Tanım 1.1.5: $a \in \mathbb{Z}$ ve p bir asal sayı olmak üzere $x^2 \equiv a \pmod{p}$ denkleminin bir çözümü varsa a'ya p modülünde "Kuadratik rezidü" veya "ikinci dereceden kalan", $x^2 \equiv a \pmod{p}$ denkleminin bir çözümü yoksa a'ya p modülünde "Kuadratik nonrezidü" veya "ikinci dereceden kalan değil" denir [20].

Tanım 1.1.6: $a \in \mathbb{Z}$ ve p bir asal sayı olmak üzere

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & a, p \text{ modülünde ikinci dereceden kalan ise} \\ -1, & a, p \text{ modülünde ikinci dereceden kalan değil ise} \\ 0, & a \equiv 0 \pmod{p} \text{ ise} \end{cases}$$

ifadesi "Legendre sembolü" olarak adlandırılır [4].

Tanım 1.1.7: $k, n \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

eşitliği ile verilen tamsayılar binom katsayıları olarak adlandırılır [20].

Teorem 1.1.5: (Hermite) $k, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\frac{n}{(n,k)} \Big| \binom{n}{k} \tag{1.3}$$

dir [8].

İspat: k, n pozitif tamsayılar olmak üzere $(k, n) = d$ olsun. Euclid algoritması yardımıyla

$$\mathrm{d} = \mathrm{kx} + \mathrm{ny} \tag{1.4}$$

olacak şekilde x ve y tamsayıları vardır. (1.4) eşitliğinin her iki tarafı $\binom{n}{k}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} d\binom{n}{k} &= kx\binom{n}{k} + ny\binom{n}{k} \\ &= n\left[x\binom{n-1}{k-1} + y\binom{n}{k}\right] \end{aligned} \tag{1.5}$$

elde edilir. $z = x\binom{n-1}{k-1} + y\binom{n}{k}$ olarak alınırsa z bir tamsayı olup (1.5) eşitliği

$$d\binom{n}{k} = nz \tag{1.6}$$

olarak yazılır. Tanım 1.1.1 gereği, (1.6) eşitliğinden $\frac{n}{d}\Big|\binom{n}{k}$ elde edilir. $(k,n) = d$ olduğundan dolayı $\frac{n}{(n,k)}\Big|\binom{n}{k}$ sonucuna varılır.

1.2. U_n Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılarını İçeren Bazı Özdeşlikler

Fibonacci sayı dizisi, en ilgi çekici sayı dizilerinden bir olup profesyonel veya amatör matematikçilere varsayım yapma ve ufkunu genişletme konusunda geniş fırsatlar sunmaktadır. Bu bölümde U_n genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını ve bu sayıları içeren çalışmamızda kullandığımız bazı özdeşlikleri vereceğiz.

Fibonacci sayı dizisi ilk olarak Leonardo of Pisa, bilinen adıyla Fibonacci, tarafından 1202 yılında yayınlanmış olan “Liber Abaci” adlı kitabında ele alınan “Tavşan Problemi” ile ortaya çıkan sayı dizisidir [2].

Fibonacci sayı dizisinin terimleri $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları altında $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-1}$$

tekrarlama bağıntısı kullanılarak elde edilir. $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları herhangi iki tamsayı olarak alındığında da yeni sayı dizileri elde edilebilir. Örneğin, Fransız matematikçi Edward Lucas başlangıç değerleri olarak $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ tamsayılarını alıp aynı tekrarlama bağıntısını kullanarak $\{L_n\}$ Lucas sayı dizisini oluşturmuştur [2,5,16].

1965 yılında A.F. Horadam Fibonacci sayı dizisini en genel hali ile aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 1.2.1: $r, s \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $W_0(a, b; r, s) = a$ ve $W_1(a, b; r, s) = b$ başlangıç koşulları altında $n > 1$ için

$$W_n(a, b; r, s) = rW_{n-1}(a, b; r, s) + sW_{n-2}(a, b; r, s) \qquad (1.7)$$

ikinci dereceden tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan $\{W_n(a, b; r, s)\}$ sayı dizisi Horadam dizisi olarak adlandırılır [1].

Tanım 1.2.1 de $a = 0$, $b = 1$, $s = 1$ ve $r \neq 0$ alındığında elde edilen dizi

$$\{U_n\} = \{W_n(0,1; r, 1)\} \qquad (1.8)$$

ile gösterilir ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olarak adlandırılır [1].

(1.8) eşitliği ile tanımlanan $\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin terimleri $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ başlangıç koşulları altında $n > 1$ için

$$U_n = rU_{n-1} + U_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile elde edilir. Böylece $\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisine karşılık gelen karakteristik denklem

$$x^2 - rx - 1 = 0$$

şeklinde olup $\Delta = r^2 + 4$ olmak üzere bu denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{r + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{r - \sqrt{\Delta}}{2}$$

dir. Burada $\alpha + \beta = r$ ve $\alpha . \beta = -1$ olduğu açıktır. $\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin Binet formülü bu kökler yardımıyla

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad (1.9)$$

eşitliği ile verilir [1,22].

(1.7) eşitliği ile verilen tekrarlama bağıntısında $a = 0, b = 1$ ve $r = s = 1$ alınırsa $\{F_n\} = \{W_n(0,1;1,1)\}$ Fibonacci dizisinin elde edildiği de açıktır. $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi için Binet formülü (1.9) eşitliğinden

$$F_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\sqrt{5}} \tag{1.10}$$

olarak elde edilir. Burada $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\delta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olduğu açıktır.

Şimdi çalışmamız esnasında sıkça kullandığımız genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili bazı özdeşlikleri verelim:

Teorem 1.2.1: $n, k \in \mathbb{Z}^+$ için $n \geq k$ olmak üzere

$$U_n^2 - U_{n-k}U_{n+k} = (-1)^{n+k}U_k^2 \tag{1.11}$$

dir [21,22].

İspat: n, k pozitif tamsayıları için $n \geq k$ olsun. (1.9) eşitliği ile verilen Binet Formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} U_n^2 - U_{n-k}U_{n+k} &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 - \frac{\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}}{\alpha - \beta} . \frac{\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^{n+k}U_k^2 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(1.11) eşitliği ile verilen özdeşlikte $k = 1$ alınırsa $n \geq 1$ tamsayıları için

$$U_n^2 - U_{n-1}U_{n+1} = (-1)^{n+1} \tag{1.12}$$

özdeşliği elde edilir [15].

Teorem 1.2.2: $m, n, k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$U_{m+n}U_{m+k} - U_mU_{m+k+n} = (-1)^mU_nU_k \tag{1.13}$$

dir [13,22].

İspat: m, n, k pozitif tamsayılar olmak üzere (1.9) eşitliği ile verilen Binet formülü kullanılarak

$$
\begin{aligned}
U_{m+n}U_{m+k} - U_mU_{m+k+n} &= \frac{\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}}{\alpha - \beta}\frac{\alpha^{m+k} - \beta^{m+k}}{\alpha - \beta} \\
&\quad - \frac{\alpha^{m} - \beta^{m}}{\alpha - \beta}.\frac{\alpha^{m+n+k} - \beta^{m+n+k}}{\alpha - \beta} \\
&= (-1)^m U_n U_k
\end{aligned}
$$

istenen sonucu elde edilir.

m, n birer pozitif tamsayı olmak üzere (1.13) özdeşliğinde $m = 1$ ve k yerine de $m - 1$ yazılırsa aşağıdaki teorem kolayca elde edilebilir.

Teorem 1.2.3: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$U_{m-1}U_n + U_mU_{n+1} = U_{m+n} \tag{1.14}$$

dir [13,22].

Yukarıda verilen (1.11) özdeşliği Fibonacci sayıları için

$$F_{n-k}F_{n+k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2 \tag{1.15}$$

olarak elde edilir. Bu özdeşlik 1879 yılında Belçikalı Matematikçi Eugene Charles Catalan tarafından bulunduğu için onun adı ile anılır. Benzer şekilde (1.13) ve (1.14) özdeşlikleri de Fibonacci sayıları için

$$F_{m+n}F_{m+k} - F_mF_{m+k+n} = (-1)^m F_n F_k \tag{1.16}$$

ve

$$F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1} = F_{m+n} \tag{1.17}$$

olarak elde edilir. Eğer (1.15) özdeşliğinde $k = 1$ alınırsa $n \geq 1$ tamsayıları için

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{1.18}$$

elde edilir. Bu özdeşlik de İtalyan asıllı Fransız Matematikçi Giovanni Domenico Cassini tarafından 1860 yılında bulunmuştur ve bu yüzden Cassini Formülü olarak adlandırılır [2,5].

Teorem 1.2.4: $m, n, r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$U_{mn+r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_{j+r} \tag{1.19}$$

dir [22].

İspat: k pozitif bir tamsayı olmak üzere (1.9) eşitliği ile verilen Binet formülü kullanılarak

$$\alpha^k - \beta^k = (\alpha - \beta)U_k \tag{1.20}$$

ve

$$\alpha.\alpha^k - \beta.\beta^k = (\alpha - \beta)U_{k+1} \tag{1.21}$$

eşitlikleri yazılabilir. (1.20) ve (1.21) eşitlikleri α^k ve β^k'ya göre çözümlenir ve $U_{k+1} = rU_k + U_{k-1}$ olduğu göz önünde tutulursa

$$\alpha^k = \alpha U_k + U_{k-1} \tag{1.22}$$

ve

$$\beta^k = \beta U_k + U_{k-1} \tag{1.23}$$

eşitlikleri elde edilir. Binet formülünden

$$(\alpha - \beta)U_{mn+r} = \alpha^{mn+r} - \beta^{mn+r} \tag{1.24}$$

olup (1.24) eşitliğinde (1.22) ve (1.23) eşitlikleri kullanılırsa

$$(\alpha - \beta)U_{mn+r} = (\alpha^m)^n\alpha^r - (\beta^m)^n\beta^r$$

$$= (\alpha U_m + U_{m-1})^n\alpha^r - (\beta U_m + U_{m-1})^n\beta^r$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\alpha U_m)^j (U_{m-1})^{n-j} \alpha^r - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\beta U_m)^j (U_{m-1})^{n-j} \beta^r$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} \left(\alpha^{r+} - \beta^{r+j}\right) \tag{1.25}$$

elde edilir. (1.25) eşitliğinden

$$U_{mn+r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} \frac{\left(\alpha^{r+j} - \beta^{r+j}\right)}{(\alpha - \beta)} \tag{1.26}$$

eşitliğine ulaşılır. (1.26) eşitliğinde Binet formülü kullanılarak

$$U_{mn+r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_{j+r}$$

olduğu görülür.

Teorem 1.2.4.'de verilen özdeşlik Fibonacci sayıları için

$$F_{mn+r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} F_m^j F_{m-1}^{n-j} F_{j+r} \tag{1.27}$$

olarak elde edilir. (1.27) denkleminde $m = 1$ olduğu durumda $0^0 = 1$ olarak alınır [11].

1.3. U_n Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılarının Bölünebilme ile İlgili Özellikleri

Şimdi U_n genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının bölünebilme ile ilgili özelliklerini ele alalım.

Teorem 1.3.1: $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(U_n, U_{n+1}) = 1$ dir [22].

İspat: d bir tamsayı olmak üzere $(U_n, U_{n+1}) = d$ olsun. Bu durumda Teorem 1.1.2 de $x = U_n$ ve $y = -U_{n-1}$ olarak alınırsa (1.12) eşitliğinden $d = \mp 1$ olarak elde edilir. En büyük ortak bölen pozitif bir tamsayı olduğundan $(U_{n+1}, U_n) = 1$ olarak bulunur.

Teorem 1.3.2: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $U_n | U_{mn}$ dir [22].

İspat: (1.19) eşitliğinde $r = 0$ alınırsa

$$U_{mn} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_j \tag{1.28}$$

olur. (1.28) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam açılırsa

$$U_{mn} = U_{m-1}^n U_0 + nU_m U_{m-1}^{n-1} U_1 + \tfrac{n(n-1)}{2} U_m^2 U_{m-1}^{n-2} U_2 + \cdots + U_m^n U_n$$

yazılır. $U_0 = 0$ olduğundan son eşitlikten

$$U_{mn} = U_m \left(nU_{m-1}^{n-1} U_1 + \frac{n(n-1)}{2} U_m U_{m-1}^{n-2} U_2 + \cdots + U_m^{n-1} U_n \right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $U_n | U_{mn}$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 1.3.3: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $U_n | U_m$ olması için gerek ve yeter şart $n|m$ olmasıdır [22].

İspat: m, n pozitif tamsayıları için $U_n | U_m$ olsun. $m - n \geq 0$ olduğundan (1.14) özdeşliğinde m yerine n ve n yerine de $m - n$ alınırsa,

$$U_m = U_{n+(m-n)} = U_{n-1} U_{m-n} + U_n U_{m-n+1}$$

elde edilir. Kabul gereği $U_n | U_m$ olup $U_n | U_n$ olduğundan $U_n | U_{n-1} U_{m-n}$ olmalıdır. Teorem 1.3.1 gereği $(U_{n-1}, U_n) = 1$ olduğundan $U_n | U_{m-n}$ elde edilir. Benzer şekilde (1.14) özdeşliğinde m yerine n ve n yerine de $m - 2n$ alınırsa,

$$U_{m-n} = U_{n+(m-2n)} = U_{n-1} U_{m-2n} - U_n U_{m-2n+1}$$

özdeşliği yazılabilir. Yine $U_n | U_{m-n}$, $U_n | U_n$ ve $(U_{n-1}, U_n) = 1$ olduğundan

$$U_n | U_{m-2n}$$

olduğu elde edilir. Bu şekilde devam edilerek q pozitif tamsayısı için

$$U_n | U_{m-qn}$$

sonucuna ulaşılır. Bölme algoritması gereği $m = qn + t$ olacak şekilde q ve t tamsayıları vardır ve $0 \leq t < n$ dir. Böylece $m - qn = t$ elde edilir ki $U_n | U_{m-qn}$ olduğundan

$$U_n | U_t$$

olur. Bu ancak $t = 0$ olması ile sağlanır. O zaman $m = qn$ olur ki buradan $n|m$ olduğu elde edilir.

Tersine $n|m$ olsun. O zaman $q \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $m = qn$ olup Teorem 1.3.2'den dolayı $U_n | U_{qn}$ bulunur, yani $U_n | U_m$ dir.

(1.8) eşitliğinde $r = 1$ alınırsa $U_n = F_n$ olup $n = 2$ için $F_2 = 1$ olduğundan $F_2 | F_m$ için $2|m$ özelliği sağlanmaz.

Teorem 1.3.4: $n, q, t \in \mathbb{Z}^+$olmak üzere $k = qn + t$ olsun. O zaman

$$(U_k, U_n) = (U_n, U_t)$$

dir [2,5].

İspat: (1.14) özdeşliğinde m yerine qn ve n yerine t alınırsa

$$(U_k, U_n) = (U_{qn+t}, U_n) = (U_{qn-1}U_t + U_{qn}U_{t+1}, U_n) \tag{1.29}$$

yazılabilir. Teorem 1.3.2'den dolayı $U_n | U_{qn}$ olduğundan (1.29) eşitliğinden

$$(U_k, U_n) = (U_{qn-1}U_t, U_n) \tag{1.30}$$

eşitliği yazılır. Ayrıca $U_n | U_{qn}$ ve Teorem 1.3.3 gereği $(U_{qn-1}, U_{qn}) = 1$ olup $(U_{qn-1}, U_n) = 1$ elde edilir. Böylece

$$(U_k, U_n) = (U_t, U_n)$$

sonucuna varılır.

Teorem 1.3.5: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$(U_m, U_n) = U_{(m,n)}$$

dir [22].

İspat: m, n pozitif tamsayılar olmak üzere $m \geq n$ olsun. Euclid algoritması kullanılarak

$$m = q_1 n + r_1, \;\; 0 \leq r_1 < n$$

$$n = q_2 r_1 + r_2, \;\; 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \;\; 0 \leq r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k, \;\; 0 \leq r_k < r_{k-1}$$

$$r_{k-1} = q_{k+1} r_k$$

yazılabilir. Bu eşitlikler sisteminden $(m, n) = r_k$ olduğu açıktır. Böylece Teorem 1.3.4 kullanılarak

$$(U_m, U_n) = (U_n, U_{r_1}) = (U_{r_1}, U_{r_2}) = \cdots = (U_{r_{k-2}}, U_{r_{k-1}}) = (U_{r_{k-1}}, U_{r_k})$$

elde edilir. $r_{k-1} = q_{k+1} r_k$ olup $r_k | r_{k-1}$ olduğundan Teorem 1.3.3 gereği $U_{r_k} | U_{r_{k-1}}$ dir. O halde

$$(U_m, U_n) = (U_{r_{k-1}}, U_{r_k}) = U_{r_k}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden $(m, n) = r_k$ olduğundan $(U_m, U_n) = U_{(m,n)}$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 1.3.6: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(m, n) = 1$ ise $(U_m, U_n) = 1$'dir [22].

İspat: m, n pozitif tamsayılar olmak üzere $(m, n) = 1$ olsun. Teorem 1.3.5 kullanılarak $(U_m, U_n) = U_1 = 1$ sonucuna ulaşılır.

$\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için yukarıda verilen Teorem 1.3.3, Teorem 1.3.5 ve Teorem 1.3.6 deki sonuçlar m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere Fibonacci sayıları için de aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

i. $F_n | F_m \Leftrightarrow n|m,\ n \neq 2$ (1.31)

ii. $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$ (1.32)

iii. $(m, n) = 1$ ise $(F_m, F_n) = 1$ (1.33)

dir. [10,18]

Teorem 1.16: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O zaman

$$F_{(2m+1)n} = F_n \sum_{k=0}^{m} (-1)^{n(m+k)} \frac{2m+1}{m+k+1} 5^k \binom{m+k+1}{2k+1} F_n^{2k} \quad (1.34)$$

dır [9].

Tanım 1.3.1: n pozitif bir tamsayı olmak üzere n'nin böldüğü ilk Fibonacci sayısının indisine n'nin "Entry Point'i" veya "Giriş Noktası" denir ve bu $z(n)$ ile gösterilir. n pozitif tamsayısının böldüğü ilk Fibonacci sayısının indisi m ise $z(n) = m$'dir [12].

Örneğin; $z(11) = 10$ olur, çünkü 11 sayısının böldüğü ilk Fibonacci sayısı $F_{10} = 55$ sayısıdır.

Lemma 1.3.1: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n|F_m$ olması için gerek ve yeter koşul $z(n)|m$ olmasıdır [6,12].

İspat: m, n pozitif tamsayılar ve $n|F_m$ olsun. $z(n)$'nin tanımından $n\big|F_{z(n)}$ elde edilir. O halde $n\big|\big(F_m, F_{z(n)}\big)$ olur. (1.32) eşitliğinden $n\big|F_{(m,z(n))}$ elde edilir. $z(n)$'nin tanımından $\big(m, z(n)\big) \leq z(n)$ dir. Eğer $\big(m, z(n)\big) < z(n)$ olsaydı bu $z(n)$'nin tanımına aykırı olurdu. O halde $\big(m, z(n)\big) = z(n)$ olur ki buradan $z(n)|m$ olduğu elde edilir. Tersine $z(n)|m$ olsun. Bu durumda (1.31) önermesi gereği $F_{z(n)}|F_m$ olur. Ayrıca $z(n)$'nin tanımıdan $n\big|F_{z(n)}$ olup $n|F_m$ olduğu da açıktır.

Lemma 1.3.2: p bir asal sayı olmak üzere $p \equiv \left(\frac{p}{5}\right) \pmod{z(p)}$ dir [14].

2. $\{T_n\} = \left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ DİZİSİNİN BAZI BÖLÜNEBİLİRLİK ÖZELLİKLERİ

Birçok matematikçi Fibonacci sayı dizisini kullanarak yeni diziler tanımlamış ve tanımladıkları bu yeni dizilerin Fibonacci sayı dizisinin sağladığı özelliklere benzer özellikleri sağlayıp sağlamadıklarını araştırmışlardır [6,7,17,23].

2017 yılında, Panraksa ve Tangboonduangjit tarafından yapılan "On some arithmetic properties of a sequence related to the quotient of Fibonacci numbers" isimli çalışmada n pozitif tamsayı olmak üzere $\{T_n\} = \left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ dizisini tanımlanmıştır. Bu bölümde Panraksa ve Tangboonduangjit tarafından tanımlanan $\{T_n\}$ dizisi için Fibonacci sayı dizisinin sağladığı bölünebilme özelliklerinin hangi koşullar altında sağlandığı verilecektir [6].

Teorem 2.1: $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu durumda

i. $(F_n, T_n) = 1$

ii. $T_n \equiv 1 \pmod{10}$

özellikleri sağlanır [6].

İspat : (1.34) eşitliğinde $m = 2$ alınırsa

$$F_{5n} = F_n \sum_{k=0}^{2} (-1)^{n(2+k)} \frac{5}{2+k+1} 5^k \binom{2+k+1}{2k+1} F_n^{2k}$$

elde edilir. $\{T_n\}$ dizisinin tanımından

$$T_n = \frac{F_{5n}}{5F_n} = \sum_{k=0}^{2} (-1)^{n(2+k)} \frac{1}{2+k+1} 5^k \binom{2+k+1}{2k+1} F_n^{2k} \tag{2.1}$$

yazılır. (2.1) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$T_n = 5F_n^2(F_n^2 + (-1)^n) + 1 \tag{2.2}$$

eşitliği elde edilir.

i. (2.2) eşitliğini kullanılarak

$(F_n, T_n) = (F_n, 5F_n^2(F_n^2 + (-1)^n) + 1) = (F_n, 1) = 1$

sonucuna varılır.

ii. Eğer F_n^2 çift tamsayı ise $F_n^2 + (-1)^n$ bir tek tamsayı, eğer F_n^2 tek tamsayı ise $F_n^2 + (-1)^n$ bir çift tamsayı olarak elde edilir. O halde

$$10|5F_n^2(F_n^2 + (-1)^n) \qquad (2.3)$$

elde edilir. (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden

$T_n \equiv 1 \pmod{10}$

sonucuna varılır.

Teorem 2.2: m,n $\in \mathbb{Z}^+$ olsun. $m|n$ ve $\vartheta_5(m) = \vartheta_5(n)$ ise $T_m|T_n$ dir [6].

İspat: m, n pozitif tamsayılar olmak üzere $m|n$ ve $\vartheta_5(m) = \vartheta_5(n)$ olsun. $\vartheta_5(m) = \vartheta_5(n)$ olduğundan $\vartheta_p(.)$'nin tanımından ve $m|n$ olduğundan öyle pozitif r, s, l tamsayıları vardır ki

$m = 5^l r$, $n = 5^l s$, $r|s$, $5 \nmid r$ ve $5 \nmid s$

dir. Aritmetiğin temel teoremi gereği p bir asal sayı olmak üzere $p^k \parallel T_m$ olarak alınabilir. $\{T_n\} = \left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ dizisinin tanımından

$p^k | F_{5^{l+1}r}$ ve $p^k \nmid F_{5^l r}$

dir. Lemma 1.3.1.i gereği

$z(p^k)|5^{l+1}r$ ve $z(p^k) \nmid 5^l r$

olur. Buradan $r|s$ ve $5 \nmid s$ olduğundan

$z(p^k)|5^{l+1}s$ ve $z(p^k) \nmid 5^l s$

elde edilir. Burada Lemma 1.3.1.i kullanılırsa

$$p^k \big| F_{5^{l+1}s} \text{ ve } p^k \nmid F_{5^l s}$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.1.i'den $(F_{5^l s}, T_{5^l s}) = 1$ olup $\{T_n\}$ dizisinin tanımından $p^k \big| T_{5^l s}$ elde edilir. $\vartheta_p(T_m) \leq \vartheta_p(T_n)$ olduğundan $T_m | T_n$ sonucuna varılır.

Teorem 2.3: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(T_m, T_n) | T_{(m,n)}$ dir [6].

İspat: m, n pozitif tamsayılar olmak üzere $(T_m, T_n) = d$ olsun. $d | T_{(m,n)}$ olduğunu gösterelim. Eğer $d = 1$ ise $1 | T_{(m,n)}$ olup teorem doğrudur. $d > 1$ olsun. En büyük ortak bölen tanımı gereği

$$d | T_m \text{ ve } d | T_n$$

olur. O halde $\{T_n\}$ dizisinin tanımından

$$d | F_{5m} \text{ ve } d | F_{5n}$$

elde edilir. Buradan $d | (F_{5m}, F_{5n})$ olduğu görülür. Ayrıca (1.32) eşitliğinden $d | F_{5(m,n)}$ elde edilir. $\{T_n\}$ dizisinin tanımından $F_{5(m,n)} = 5F_{(m,n)} T_{(m,n)}$ olup

$$d | 5F_{(m,n)} T_{(m,n)} \tag{2.4}$$

yazılır. Teorem 2.1.i ve Teorem 2.1.ii'den

$$(d, 5) = (d, F_m) = (d, F_n) = 1 \tag{2.5}$$

olduğu açıktır. (2.5) eşitliğinde (1.32) eşitliği dikkate alınırsa

$$(d, 5) = \left(d, F_{(m,n)}\right) = 1 \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.4) ve (2.6) ifadelerinden $d | T_{(m,n)}$ elde edilir. O halde $(T_m, T_n) | T_{(m,n)}$ olduğu görülür.

Teorem 2.4: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer $\vartheta_5(m) = \vartheta_5(n)$ ise $(T_m, T_n) = T_{(m,n)}$ dir [6].

İspat: m, n pozitif tamsayılar olmak üzere $\vartheta_5(m) = \vartheta_5(n)$ olsun. Teorem 2.3'den dolayı $(T_m, T_n) | T_{(m,n)}$ yazılabilir. İspat için $T_{(m,n)} \big| (T_m, T_n)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\vartheta_5(m) = \vartheta_5(n) = k$ alınırsa $\vartheta_p(.)$'nin tanımı gereği

$$m = 5^k m_1, n = 5^k n_1$$

olacak şekilde m_1, n_1 tamsayıları vardır ve $5 \nmid m_1$ve $5 \nmid n_1$ dir. $d = (m, n)$ olsun. m ve n tamsayılarının seçimi gereği $5 \nmid d_1$, $d_1 | m_1$ ve $d_1 | n_1$ olmak üzere $d = 5^k d_1$ olarak yazılabilir. O halde $\vartheta_5(m) = \vartheta_5(n) = \vartheta_5(d)$ olup Teorem 2.2 gereği

$$T_d | T_m \text{ ve } T_d | T_n$$

elde edilir. Böylece

$$T_d | (T_m, T_n)$$

olur. $d = (m, n)$ olduğundan

$$T_{(m,n)} | (T_m, T_n)$$

elde edilir. O halde $(T_m, T_n) = T_{(m,n)}$'dir.

2013 yılında Panraksa, Tangboonduangjit ve Wiboonton tarafından yapılan "Exact divisibility properties of some subsequences of Fibonacci numbers" adlı çalışmada n ve k pozitif tamsayılar olmak üzere $\{G_k(n)\}$ alt dizisini $G_1(n) = F_n$ olmak üzere

$$G_k(n) = F_{nG_{k-1}(n)}, k \geq 2$$

olarak tanımlanmış ve $F_n^k \parallel G_k(n)$ olduğu gösterilmiştir. Bunun yanı sıra çalışmalarında $F_n^k | G_k(n)$ için alternatif bir ispat da sunmuşlardır [7].

Yapılan bu çalışmadaki özelliklere benzer olan özellikler, 2017 yılında Panraksa ve Tangboonduangjit tarafından tanımlamış oldukları $\{T_n\}$ dizisine uygulanmış ve yeni tanımlanan bu dizinin bölünebilirlik özellikleri incelenmiştir [6].

Panraksa ve Tangboonduangjit, n pozitif tamsayısı için $\{T_n\}$ dizisinin bir $\{H_k(n)\}$ alt dizisini $H_1(n) = T_n$ olmak üzere $k \geq 2$ için

$$H_k(n) = T_{nH_{k-1}(n)}$$

şeklinde tanımlamışlardır [6]. Şimdi $\{T_n\}$ dizisi ile bir alt dizisi olan $\{H_k(n)\}$ dizisi için $k, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $T_n^k | H_k(n)$ olduğu gösterilecektir. Ancak öncelikle bu bölünebilirlik özelliğinin ispatı için gerekli olan bazı lemmalar vereceğiz.

Lemma 2.1: $n \in \mathbb{Z}^+$ ve p bir asal sayı olsun. O zaman $p|F_n$ ise $\left(F_n, \frac{F_{pn}}{F_n}\right) = p$ dir [6].

İspat: (1.27) özdeşliğinde m yerine n, n yerine p ve $r = 0$ alınırsa

$$F_{pn} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} {F_n}^j F_{n-1}^{p-j} F_j$$

olarak elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki toplam açılırsa

$$F_{pn} = pF_n F_{n-1}^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} F_n^2 F_{n-1}^{p-2} + \cdots + F_n^p F_{n-1} F_p \tag{2.7}$$

yazılır. Binom katsayılarının herbiri tamsayı olduğundan (2.7) eşitliğinden

$$F_{pn} \equiv pF_n F_{n-1}^{p-1} \quad (\mathrm{mod}\ F_n^2)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\frac{F_{pn}}{F_n} \equiv pF_{n-1}^{p-1} \quad (\mathrm{mod}\ F_n)$$

olduğu açıktır. Lemma 1.1.3 gereği

$$\left(\frac{F_{pn}}{F_n}, F_n\right) = (pF_{n-1}^{p-1}, F_n)$$

olup $p|F_n$ ve $(F_n, F_{n-1}) = 1$ olduğundan $\left(F_n, \frac{F_{pn}}{F_n}\right) = p$ elde edilir.

Lemma 2.1 de $p \nmid F_n$ ise $\left(F_n, \frac{F_{pn}}{F_n}\right) = 1$ olduğu açıktır.

Lemma 2.2: $k, n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $k|F_n$ ise $\left(F_n, \frac{F_{kn}}{kF_n}\right) = 1$ dir [6].

İspat: $k|F_n$ olsun. (1.27) özdeşliğinde $r = 0$ alınıp n yerine k ve m yerine n yazılırsa

$$F_{kn} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} {F_n}^j F_{n-1}^{k-j} F_j$$

olarak elde edilir. Lemma 2.1'in ispatına benzer olarak

$$F_{kn} \equiv \binom{k}{1} F_n F_{n-1}^{k-1} + \binom{k}{2} F_n^2 F_{n-1}^{k-2} \quad (\mathrm{mod}\ F_n^3) \tag{2.8}$$

denkliği elde edilir. (2.8) denkliği kF_n ile bölünürse

$$\frac{F_{kn}}{kF_n} \equiv F_{n-1}^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} F_n F_{n-1}^{k-2} \quad \left(\mathrm{mod}\ \frac{F_n}{k} F_n\right) \tag{2.9}$$

denkliği elde edilir. (2.9) denkliğinde $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\frac{F_{kn}}{kF_n} = a\frac{F_n}{k} F_n + F_{n-1}^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} F_n F_{n-1}^{k-2} \tag{2.10}$$

olarak yazılabilir. $k|F_n$ olduğundan (2.10) denkliğinden

$$\frac{F_{kn}}{kF_n} \equiv F_{n-1}^{k-1} \ (\mathrm{mod}\ F_n) \tag{2.11}$$

denkliği elde edilir. Böylece (1.33) ifadesi gereği $(F_n, F_{n-1}) = 1$ olup ve (2.11) denkliği kullanılarak

$$\left(F_n, \frac{F_{kn}}{kF_n}\right) = \left(F_n, F_{n-1}^{k-1}\right) = 1$$

sonucuna varılır.

Lemma 2.3: $k, n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O zaman $\left(F_{nH_k(n)}, T_n\right) = 1$ dir [6].

İspat: k ve n pozitif tamsayılar olmak üzere (1.32) ifadesinden

$$\left(F_{nH_k(n)}, F_{5n}\right) = F_{(nH_k(n),5n)}$$

eşitliği yazılabilir. Teorem 2.1.ii ve $\{H_k(n)\}$ dizisinin tanımından $5 \nmid H_k(n)$ elde edilir. Buradan $(nH_k(n), 5n) = n(H_k(n), 5) = n$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(F_{nH_k(n)}, F_{5n}\right) = F_n \tag{2.12}$$

bulunur. $\left(F_{nH_k(n)}, T_n\right) = d$ olsun. $\{T_n\}$ dizisinin tanımından $F_n|T_n$ olduğundan ve (2.12) eşitliğinden $d|F_n$ elde edilir. Dolayısıyla $d|(F_n, T_n)$ olur. Teorem 2.1.i'den $(F_n, T_n) = 1$ olduğundan $d = 1$ elde edilir.

Teorem 2.5: $k, n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O zaman $T_n^k|H_k(n)$ dir [6].

İspat: k ve n pozitif tamsayılar olsun. İspat k üzerinde tümevarım yapılarak elde edilebilir. $k = 1$ için $H_1(n) = T_n$ olduğundan $T_n\,|T_n$'dir. $k > 1$ tamsayıları için $T_n^k|H_k(n)$ doğru olsun. $T_n^{k+1}|H_{k+1}(n)$ olduğu gösterilmelidir. Teorem 2.2 ve $\{H_k(n)\}$ dizisinin tanımından $T_{nT_n^k}|H_{k+1}(n)$'dir. Kanıt için $T_n^{k+1}\Big|T_{nT_n^k}$ olduğunu göstermek yeterlidir. (1.27) özdeşliğinde $r = 0$ alınıp m yerine 5n ve n yerine de T_n^k alınırsa,

$$F_{5nT_n^k} = \sum_{j=0}^{T_n^k} \binom{T_n^k}{j} F_{5n}^j F_{5n-1}^{T_n^k - j} F_j \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.13) eşitliğinde Teorem 1.1.5 kullanılırsa a_j bir tamsayı olmak üzere

$$F_{5nT_n^k} = \sum_{j=0}^{T_n^k} \frac{T_n^k}{(T_n^k, j)} a_j\, F_{5n}^j F_{5n-1}^{T_n^k - j} F_j \tag{2.14}$$

yazılabilir. $\frac{{F_{5n}}^{j-1}{F_{5n-1}}^{T_n^k - j} F_j}{(T_n^k, j)}$ tamsayısı b_j olarak alınırsa (2.14) eşitliğinden

$$F_{5nT_n^k} = \sum_{j=0}^{T_n^k} T_n^k a_j\, b_j F_{5n} \tag{2.15}$$

olarak yazılabilir. (2.15) eşitliğinde $5F_nT_n = F_{5n}$ olduğu kullanılır ve $c = 5F_n \sum_{j=0}^{T_n^k} a_j\, b_j$ alınırsa

$$F_{5nT_n^k} = c.\, T_n^{k+1} \tag{2.16}$$

olduğu görülür. Buradan $\{T_n\}$ dizisinin tanımı ve (2.16) eşitliği kullanılırsa

$$T_{nT_n^k} = \frac{c.\,T_n^{k+1}}{5F_{nT_n^k}} \tag{2.17}$$

elde edilir. $k, n \in \mathbb{Z}^+$ için $\left(F_{nH_k(n)}, T_n\right) = 1$ ve $T_n^k | H_k(n)$ olduğundan

$$(F_{nT_n^k}, T_n) = 1 \tag{2.18}$$

elde edilir. $T_{nT_n^k}$ bir tamsayı olduğundan (2.17) ve (2.18) eşitliklerinden $\frac{c}{5F_{nT_n^k}}$ bir tamsayı olarak elde edilir. Böylece $T_n^{k+1} \big| T_{nT_n^k}$ olduğu görülür.

3. $\{S_n\} = \left\{\frac{F_{7n}}{F_7 F_n}\right\}$ DİZİSİNİN BAZI BÖLÜNEBİLİRLİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, ikinci bölümde Panraksa ve Tangboonduangjit tarafından tanımlanan $\{T_n\} = \left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ dizisine benzer olarak $\{S_n\} = \left\{\frac{F_{7n}}{F_7 F_n}\right\}$ dizisi tanımlanıp bu dizinin bölünebilme özellikleri incelenecektir. Bu bölüm boyunca $n \neq 7k$ olarak alınacaktır.

Lemma 3.1: $n \in \mathbb{Z}$ ve $n \neq 7k$ olsun. O zaman

i. n tek tamsayı iken $\frac{1}{F_7}(5F_n^6 + 6F_n^4 - 5F_n^2 - 6)$ bir tamsayıdır.

ii. n çift tamsayı iken $\frac{1}{F_7}(5F_n^6 - 6F_n^4 - 5F_n^2 + 6)$ bir tamsayıdır [19].

İspat: n pozitif bir tamsayı ve $n \neq 7k$ olsun.

i. n bir tek tamsayı olsun. O zaman

$$\frac{1}{F_7}(5F_n^6 + 6F_n^4 - 5F_n^2 - 6) = \frac{1}{F_7}(5F_n^2 + 6)(F_n^4 - 1)$$

$$= \frac{1}{F_7}(5F_n^2 + 6)(F_n^2 - 1)(F_n^2 + 1) \tag{3.1}$$

yazılır. (3.1) eşitliğinde (1.15) özdeşliği kullanılırsa

$$\frac{1}{F_7}(5F_n^6 + 6F_n^4 - 5F_n^2 - 6)$$

$$= \frac{1}{F_7}(5F_{n-1}F_{n+1} + 11)(F_{n-1}F_{n+1})(F_{n-1}F_{n+1} + 2) \tag{3.2}$$

olarak yazılır. (1.17) eşitliğinde $m = a - b$, $n = b + c$ ve $k = b - c$ alınırsa

$$F_{a-c}F_{a+c} - F_{a-b}F_{a+b} = (-1)^{a-b}F_{b-c}F_{b+c} \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir. (3.3) eşitliğinde $a = n$, $b = 2$ ve $c = 1$ alınırsa

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-2}F_{n+2} = (-1)^{n-2}F_1F_3 \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinde n'nin tek olduğu göz önünde bulundurulursa

$$F_{n-1}F_{n+1} + 2 = F_{n-2}F_{n+2} \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.3) eşitliğinde $a = n, b = 3$ ve $c = 1$ alınırsa

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-3}F_{n+3} = (-1)^{n-3}F_2F_4 \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) eşitliğinde n'nin tek olduğu göz önünde bulundurulursa

$$F_{n-1}F_{n+1} - 3 = F_{n-3}F_{n+3} \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.5) ve (3.7) eşitlikleri (3.2) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{F_7}(5F_n^6 + 6F_n^4 - 5F_n^2 - 6) &= \frac{1}{F_7}F_{n-1}F_{n+1}F_{n-2}F_{n+2}(5F_{n-3}F_{n+3} + 26) \\ &= \frac{5F_{n-1}F_{n+1}F_{n-2}F_{n+2}F_{n-3}F_{n+3}}{F_7} + 2F_{n-1}F_{n+1}F_{n-2}F_{n+2}\end{aligned}$$

elde edilir. $n \neq 7k$ olduğundan $\{n-1, n-2, n-3, n+1, n+2, n+3\}$ kümesinin elemanlarından bir tanesi 7 ile tam bölünür. Burada (1.31) ifadesi kullanılırsa $\frac{1}{13}(5F_n^6 + 6F_n^4 - 5F_n^2 - 6)$ tamsayı olarak elde edilir.

ii. n çift bir tamsayı olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\frac{1}{F_7}(5F_n^6 - 6F_n^4 - 5F_n^2 + 6) &= \frac{1}{F_7}(5F_n^2 - 6)(F_n^4 - 1) \\ &= \frac{1}{F_7}(5F_n^2 - 6)(F_n^2 - 1)(F_n^2 + 1) \qquad (3.8)\end{aligned}$$

yazılır. (3.8) eşitliğinde (1.15) özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{F_7}(5F_n^6 - 6F_n^4 - 5F_n^2 + 6) \\ &\qquad = \frac{1}{F_7}(5F_{n-1}F_{n+1} - 11)(F_{n-1}F_{n+1})(F_{n-1}F_{n+1} - 2) \qquad (3.9)\end{aligned}$$

olarak yazılır. (3.3) eşitliğinde $a = n, b = 2$ ve $c = 1$ alınırsa

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-2}F_{n+2} = (-1)^{n-2}F_1F_3 \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinde n'nin çift olduğu göz önünde bulundurulursa

$$F_{n-1}F_{n+1} - 2 = F_{n-2}F_{n+2} \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.3) eşitliğinde $a = n,\ b = 3$ ve $c = 1$ alınırsa

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-3}F_{n+3} = (-1)^{n-3}F_2F_4 \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.6) eşitliğinde n'nin çift olduğu göz önünde bulundurulursa

$$F_{n-1}F_{n+1} + 3 = F_{n-3}F_{n+3} \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.11) ve (3.13) eşitlikleri (3.8) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{F_7}(5F_n^6 - 6F_n^4 - 5F_n^2 + 6) &= \frac{1}{F_7}F_{n-1}F_{n+1}F_{n-2}F_{n+2}(5F_{n-3}F_{n+3} - 26)\\ &= \frac{5F_{n-1}F_{n+1}F_{n-2}F_{n+2}F_{n-3}F_{n+3}}{F_7} - 2F_{n-1}F_{n+1}F_{n-2}F_{n+2}\end{aligned}$$

elde edilir. $n \neq 7k$ olduğundan $\{n-1, n-2, n-3, n+1, n+2, n+3\}$ kümesinin elemanlarından bir tanesi 7 ile tam bölünür. Burada (1.31) ifadesi kullanılırsa $\frac{1}{13}(5F_n^6 - 6F_n^4 - 5F_n^2 + 6)$ tamsayı olarak elde edilir.

Lemma 3.2: $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \neq 7k$ olsun. O zaman $S_n = \frac{F_{7n}}{F_7F_n}$ bir tamsayıdır [19].

İspat: (1.34) eşitliğinde $m = 3$ olarak alınırsa

$$F_{7n} = F_n[(-1)^n 7 + 70F_n^2 + (-1)^n 175F_n^4 + 125F_n^6] \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.14) eşitliğinin her iki yanı F_7F_n ile bölünürse

$$\frac{F_{7n}}{F_7F_n} = \frac{(-1)^n 7 + 70F_n^2 + (-1)^n 175F_n^4 + 125F_n^6}{F_7} \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15) deki eşitliği iki durumda inceleyelim.

1. Durum: Eğer n bir tek pozitif tamsayı ise S_n'nin tanımından,

$$S_n = \frac{F_{7n}}{F_7F_n} = 10F_n^6 - 13F_n^4 + F_n^2 - 1 - \frac{5F_n^6 + 6F_n^4 - 5F_n^2 - 6}{F_7}$$

olarak elde edilir. n bir tek pozitif tamsayı olduğundan Lemma 3.1.i'den $S_n = \frac{F_{7n}}{F_7F_n}$ sayısının bir tamsayı olduğu görülür.

2. Durum: Eğer n bir çift pozitif tamsayı ise S_n'nin tanımından,

$$S_n = \frac{F_{7n}}{F_7F_n} = 10F_n^6 + 13F_n^4 + F_n^2 + 1 - \frac{5F_n^6 - 6F_n^4 - 5F_n^2 + 6}{F_7}$$

olarak yazılır. n bir çift pozitif tamsayı olduğundan Lemma 3.1.ii'den $S_n = \frac{F_{7n}}{F_7F_n}$ sayısının bir tamsayı olduğu görülür.

Lemma 3.3: $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer $F_7 \nmid n$ ise $(S_n, F_7) = 1$ dir [19].

İspat: $F_7 \nmid n$ olsun. (1.27) eşitliğinde $m = 7$ ve $r = 0$ olarak alınırsa

$$F_{7n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} F_7^j F_6^{n-j} F_j \tag{3.16}$$

yazılır. (3.16) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam açılırsa

$$F_{7n} = nF_7F_6^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}F_7^2F_6^{n-2} + \cdots + F_7^nF_n \tag{3.17}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı F_7 ile bölünürse

$$\frac{F_{7n}}{F_7} = nF_6^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}F_7F_7^{n-2} + \cdots + F_7^{n-1}F_n \tag{3.18}$$

olur. (3.18) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamın herbir terimi birer tamsayı olduğundan

$$\frac{F_{7n}}{F_7} \equiv nF_6^{n-1} \pmod{F_7} \tag{3.19}$$

denkliği yazılabilir. (3.19) denkliğinde $F_7F_nS_n = F_{7n}$ olduğu dikkate alınırsa

$$F_nS_n \equiv nF_6^{n-1} \pmod{F_7} \tag{3.20}$$

denkliği yazılır. (1.33) den dolayı $(F_7, F_6) = 1$ ve kabulümüz gereği $(n, F_7) = 1$ olduğundan Lemma 1.1.3 kullanılarak

$$(nF_6^{n-1}, F_7) = 1 \tag{3.21}$$

elde edilir. $n \neq 7t$ olduğundan (1.33) ifadesinden dolayı

$$(F_n, F_7) = 1 \tag{3.22}$$

dir. (3.21) ve (3.22) eşitlikleri (3.20) denkliğinde göz önüne alınırasa $(S_n, F_7) = 1$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.1: $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $F_7 \nmid n$ olsun. Eğer $n \neq z(7)t$ ise $(S_n, F_n) = 1$ dir [19].

İspat: $n \neq z(7)t$ olsun. (1.27) eşitliğinde $m = 7$ ve $r = 0$ olarak alınırsa

$$F_{7n} = \sum_{j=0}^{7} \binom{7}{j} F_n^j F_{n-1}^{7-j} F_j \tag{3.23}$$

yazılır. (3.23) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam açılır ve elde edilen eşitliğin her iki tarafı F_n ile bölünürse

$$\frac{F_{7n}}{F_n} = 7F_{n-1}^6 + \frac{7.6}{2} F_n F_{n-1}^5 + \cdots + F_n^6 F_7 \tag{3.24}$$

eşitliği elde edilir. (3.24) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamın herbir terimi tamsayı olduğundan

$$\frac{F_{7n}}{F_n} \equiv 7F_{n-1}^6 \pmod{F_n} \tag{3.25}$$

denkliği elde edilir. $F_7 F_n S_n = F_{7n}$ olduğu (3.25) denkliğinde dikkate alınırsa

$$F_7 S_n \equiv 7F_{n-1}^{n-1} \pmod{F_n} \tag{3.26}$$

denkliği yazılır. (1.33) ifadesinden $(F_n, F_{n-1}) = 1$ ve $n \neq z(7)t$ olduğundan dolayı $(7, F_n) = 1$ olduğundan Lemma 1.1.3 kullanılarak

$$(7F_{n-1}^{n-1}, F_n) = 1 \tag{3.27}$$

olduğu görülür. $n \neq 7t$ olduğundan Teorem 1.3.6'ya göre

$$(F_n, F_7) = 1 \tag{3.28}$$

dir. (3.27) ve (3.28) eşitlikleri (3.26) denkliğinde gözönüne alınırsa $(S_n, F_n) = 1$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.2: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $F_7 \nmid m$, $F_7 \nmid n$ olsun. Eğer $(F_m, S_m) = (F_n, S_n) = 1$ ise $(S_m, S_n) \big| S_{(m,n)}$ dir [19].

İspat: m, n pozitif tam sayılar, $F_7 \nmid m$, $F_7 \nmid n$ ve $(F_m, S_m) = (F_n, S_n) = 1$ olsun. $(S_m, S_n) = d$ alalım. $d = 1$ ise $(S_m, S_n) \big| S_{(m,n)}$ olduğu açıktır. $d > 1$ olsun. En büyük ortak bölen tanımından $d|S_m$ ve $d|S_n$ 'dir. Tanım gereği $F_7 F_m S_m = F_{7m}$ ve $F_7 F_n S_n = F_{7n}$ olduğundan $d|F_{7m}$ ve $d|F_{7n}$'dir. O halde

$$d|(F_{7m}, F_{7n})$$

olup (1.32) ifadesinden

$$d \big| F_{7(m,n)}$$

elde edilir. Böylece S_n'nin tanımından

$$d \ \big| F_7 F_{(m,n)} S_{(m,n)}$$

yazılır. İspatı tamamlamak için $(F_7, d) = (F_{(m,n}, d) = 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(F_7, d) = d_1$ olsun. O halde $d_1|F_7$ ve $d_1|d$ olur. $(S_m, S_n) = d$ olduğundan $d_1|S_n$ dir. Buradan $(S_n, F_7) \geq d_1$ olup Lemma 3.3 gereği $(S_n, F_7) = 1$ olduğundan $d_1 = 1$ yani $(F_7, d) = 1$ olur. Benzer şekilde $(F_{(m,n)}, d) = d_2$ olsun. O halde $d_2 \big| F_{(m,n)}$ ve $d_2|d$ olur. (1.32) ifadesinden $F_{(m,n)} = (F_m, F_n)$ ve kabul gereği $(S_m, S_n) = d$ olduğundan $d_2|F_n$ ve $d_2|S_n$ dir. Buradan $(S_n, F_n) \geq d_2$ olup kabul gereği $(F_n, S_n) = 1$ olduğundan $d_2 = 1$ yani $(F_{(m,n)}, d) = 1$ elde edilir. Böylece $d \ \big| S_{(m,n)}$ elde edilir. $S_{(m,n)} = d$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3.3: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $F_7 \nmid m$, $F_7 \nmid n$ olsun. Eğer $m|n$, $(F_m, S_m) = (F_n, S_n) = 1$ ve $\vartheta_7(m) = \vartheta_7(n)$ ise $S_m|S_n$ dir [19].

İspat: $m|n$, $(F_m, S_m) = (F_n, S_n) = 1$ ve $\vartheta_7(m) = \vartheta_7(n)$ olsun. $\vartheta_p(.)$ tanımından $m = 7^l r$ ve $n = 7^l s$ olacak şekilde l, r, s tamsayıları vardır ve $r|s$, $7 \nmid r$ ve $7 \nmid s$'dir. Kabul edelim ki p bir asal sayı olmak üzere $p^k \parallel S_{7^l r}$ olsun. $S_{7^l r}$'nin tanımından

$$p^k | F_{7.7^l r}$$

dir. Burada (1.31) koşulu ve $7.7^l r | 7.7^l s$ olduğu kullanılırsa

$$p^k | F_{7.7^l s} \tag{3.29}$$

elde edilir. $(F_{7^l r}, S_{7^l r}) = 1$ olduğundan $p^k \nmid F_{7^l r}$ yazılır. (1.31) ifadesi gereği

$$p^k \nmid F_{7^l s} \tag{3.30}$$

olduğu görülür. (3.29) ve (3.30) eşitliklerinden $S_{7^l s}$'nin tanımı kullanılarak

$$p^k | 13 S_{7^l s}$$

elde edilir. Buradan

$$p^k | 13 \text{ veya } p^k | S_{7.7^l s}$$

dir. Kabul edelim ki $p^k | 13$ olsun. O zaman $p^k = 13$ elde edilir. Ancak bu durumda $13 \parallel S_{7^l r}$ olur ki bu Lemma 3.3 gereği$(S_{7^l r}, F_7) = 1$ olması ile çelişir. Bu durumda $p^k | S_{7^l s}$ olmalıdır. $\vartheta_p(S_m) = \vartheta_p(S_n)$ olduğundan $S_m | S_n$ elde edilir.

Teorem 3.4: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer $(F_m, S_m) = (F_n, S_n) = 1$ ve $\vartheta_7(m) = \vartheta_7(n)$ ise $S_{(m,n)} | (S_m, S_n)$ dir [19].

İspat: $(F_m, S_m) = (F_n, S_n) = 1$ ve $\vartheta_7(m) = \vartheta_7(n)$ olsun. $\vartheta_p(.)$'nin tanımından

$$m = 7^k m_1,\ n = 7^k n_1 \text{ ve } d = (m, n) = 7^k d_1$$

olacak şekilde m_1, n_1, d_1 tamsayıları vardır ve $(m_1, 7) = (n_1, 7) = (d_1, 7) = 1$'dir. Burada $d_1 | m_1$, $d_1 | n_1$ ve $\vartheta_7(m) = \vartheta_7(n) = \vartheta_7(d)$ olduğu açıktır. Teorem 3.3'den $d|m$ ve $d|n$ olduğundan $S_d | S_m$ ve $S_d | S_n$ elde edilir. Buradan $S_d | (S_m, S_n)$ yazılır. Böylece $d = (m, n)$ olduğundan $S_{(m,n)} | (S_m, S_n)$ sonucuna varılır.

Teorem 3.5: $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(F_m, S_m) = (F_n, S_n) = 1$ ve $\vartheta_7(m) = \vartheta_7(n)$ olsun. O zaman $(S_m, S_n) = S_{(m,n)}$ dir [19].

İspat: Teorem 3.2 ve Teorem 3.4'ten açıktır.

3.1. $\{S_n\} = \left\{\frac{F_{7n}}{F_7 F_n}\right\}$ Dizisinin Bir Alt Dizisinin Bölünebilirlik Özelliği

Bu bölümde $\{S_n\} = \left\{\frac{F_{7n}}{F_7 F_n}\right\}$ dizisi kullanılarak tanımlanan bir $\{Q_k(n)\}$ alt dizisinin bölünebilirlik özelliğini vereceğiz.

$\{Q_k(n)\}$ alt dizisi,

$$Q_k(n) = \begin{cases} S_n, & k = 1 \\ F_{7nQ_{k-1}(n)}, & k > 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\{Q_k(n)\}$ dizisinin ilk birkaç terimi

$S_n, F_{7nS_n}, F_{7nF_{7nS_n}}, \ldots$

şeklindedir [19].

Lemma 3.1.1: $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $F_{7n-1}^2 \equiv (-1)^n \pmod{S_n}$ dir [19].

İspat: (1.18) ile verilen Cassini özdeşliğinden

$$F_{7n-1}F_{7n+1} - F_{7n}^2 = (-1)^{7n+2}$$

yazılabilir. Bu özdeşlik $\{F_n\}$ dizisinin tekrarlama bağıntısı kullanılarak

$$F_{7n-1}F_{7n} + F_{7n-1}^2 - F_{7n}^2 = (-1)^{7n+2} \tag{3.31}$$

şeklinde yazılır. S_n'nin tanımından $F_7 F_n S_n = F_{7n}$ olup bu (3.31) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$F_{7n-1}F_7 F_n S_n + F_{7n-1}^2 - (F_7 F_n S_n)^2 = (-1)^{7n+2} \tag{3.32}$$

elde edilir. Böylece (3.32) eşitliğinden $F_{7n-1}^2 \equiv (-1)^n \pmod{S_n}$ sonucuna varılır.

Teorem 3.1.1: $k, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n \neq 7k$ olsun. $S_n^k \mid Q_k(n)$ dir [19].

İspat: k, n pozitif tamsayılar olmak üzere $n \neq 7k$ olsun. İspat k üzerinde tümevarım yapılarak elde edilebilir. $k = 1$ için $Q_1(n) = S_n$ olduğundan $S_n \mid S_n$'dir. $k > 1$ için $S_n^k | Q_k(n)$ doğru olsun. $S_n^{k+1} | Q_{k+1}(n)$ olduğu gösterilmelidir. (1.27) eşitliğinde $r = 0$ alınıp m yerine $7n$ ve n yerine de S_n^k alınırsa

$$F_{7nS_n^k} = \sum_{j=0}^{S_n^k} \binom{S_n^k}{j} {F_{7n}}^{j} {F_{7n-1}}^{S_n^k - j} F_j \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.33) eşitliğinde Teorem 1.1.5 kullanılırsa a_j bir tamsayı olmak üzere

$$F_{7nS_n^k} = \sum_{j=0}^{S_n^k} \frac{S_n^k}{(S_n^k, j)} a_j \, {F_{7n}}^{j} {F_{7n-1}}^{S_n^k - j} F_j \tag{3.34}$$

yazılabilir. S_n'nin tanımı ve Lemma 3.1.1 kullanılarak elde edilen $\frac{{F_{7n}}^{j-1} {F_{7n-1}}^{S_n^k - j} F_j}{(S_n^k, j)}$ tamsayısı b_j olarak alınırsa (3.34) eşitliğinden

$$F_{7nS_n^k} = \sum_{j=0}^{S_n^k} S_n^k a_j \, b_j F_{7n} \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.35) eşitliğinde $F_7 F_n S_n = F_{7n}$ olduğu kullanılır ve $d = 13 F_n \sum_{j=0}^{S_n^k} a_j \, b_j$ alınırsa

$$F_{7nS_n^k} = d. S_n^{k+1} \tag{3.36}$$

olduğu görülür. $S_n^k | Q_k(n)$ olduğundan Tanım 1.1.1'den öyle bir m tamsayısı vardır ki $Q_k(n) = mS_n^k$'dır. Son eşitlikte (3.36) eşitliği kullanılırsa

$$Q_{k+1}(n) = F_{7nQ_k(n)} = F_{7nmS_n^k} \tag{3.37}$$

elde edilir. (1.27) eşitliğinde $r = 0$ alınıp m yerine $7n$ ve n yerine de mS_n^k alınır ve işlemler tekrarlanırsa (3.37) eşitliğinden $\dot{d} \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$Q_{k+1}(n) = \dot{d}. S_n^{k+1} \tag{3.38}$$

elde edilir. Bölünebilme tanımı ve (3.38) eşitliğinden $S_n^{k+1} | Q_{k+1}(n)$ sonucuna varılır.

4. $\{S_{p,n}\} = \left\{\frac{U_{pn}}{U_p U_n}\right\}$ DİZİSİNİN BAZI BÖLÜNEBİLİRLİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, n bir pozitif tamsayı ve p bir tek asal sayı olmak üzere ikinci ve üçüncü bölümde tanımlanan $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ dizileri U_n genelleştirilmiş Fibonacci sayıları kullanılarak genelleştirilecek ve bu şekilde elde edilen yeni $\{S_{p,n}\} = \left\{\frac{U_{pn}}{U_p U_n}\right\}$ dizisinin bölünebilme özellikleri verilecektir.

Şimdi ilk olarak temel teoremlerimizin ispatında kullanacağımız birkaç lemma verelim.

Lemma 4.1: $n \in \mathbb{Z}^+$ ve p tek asal sayı olmak üzere $n \neq pt$ ise $S_{p,n} = \frac{U_{pn}}{U_p U_n}$ bir tamsayıdır.

İspat: n pozitif tamsayı ve p tek asal sayı olmak üzere $n \neq pt$ olsun. Teorem 1.3.3 den

$$U_p | U_{pn} \text{ ve } U_n | U_{pn}$$

olduğu açıktır. $n \neq pt$ ve p asal olduğundan $(n, p) = 1$'dir. Teorem 1.3.5 kullanılarak

$$(U_p, U_n) = U_{(p,n)} = 1$$

olduğu elde edilir. Böylece Lemma 1.1.2 den $U_p U_n | U_{pn}$ olur. O halde $S_{p,n} = \frac{U_{pn}}{U_p U_n}$ bir tamsayıdır.

$\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisinde $r = 1$ alınarak elde edilen $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi için $\left\{\frac{F_{pn}}{F_p F_n}\right\}$ dizisinin de $n \neq pt$ olmak üzere herbir teriminin bir tamsayı olduğu elde edilir.

Bu çalışmada $S_{p,n}$ sayılarının bölünebilirlik özelliklerini inceleyeceğimiz için $\{S_{p,n}\}$ dizisinin terimlerinin tamsayı olduğu değerler dikkate alınacaktır. Bu yüzden bu çalışma boyunca $n \neq pt$ olarak alınacaktır.

Lemma 4.2: $n \in \mathbb{Z}^+$, p tek asal sayı olsun. $(n, U_p) = 1$ ise

$$(S_{p,n}, U_p) = 1$$

dir.

İspat: $(n, U_p) = 1$ olsun. (1.19) eşitliğinde $r = 0$ ve m yerine p alınırsa

$$U_{pn} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_p^j U_{p-1}^{n-j} U_j \tag{4.1}$$

elde edilir. (4.1) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam açılırsa

$$U_{pn} = nU_pU_{p-1}^{n-1}U_1 + \frac{n(n-1)}{2}U_p^2U_{p-1}^{n-2}U_2 + \cdots + U_p^nU_n \tag{4.2}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı U_p ile bölünürse

$$\frac{U_{pn}}{U_p} = nU_{p-1}^{n-1}U_1 + \frac{n(n-1)}{2}U_pU_{p-1}^{n-2}U_2 + \cdots + U_p^{n-1}U_n \tag{4.3}$$

eşitliği elde edilir. (4.3) eşitliğinde sağ taraftaki her bir toplamın birer tamsayı olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{U_{pn}}{U_p} \equiv nU_{p-1}^{n-1} \pmod{U_p} \tag{4.4}$$

denkliği yazılabilir. $\{S_{p,n}\}$ dizisinin tanımından $U_pU_nS_{p,n} = U_{pn}$ olup bu (4.4) denkliğinde dikkate alınırsa

$$U_nS_{p,n} \equiv nU_{p-1}^{n-1} \pmod{U_p} \tag{4.5}$$

denkliği elde edilir. (4.5) denkliğinden $(U_nS_{p,n}, U_p) = (nU_{p-1}^{n-1}, U_p)$ yazılabilir. Teorem 1.3.1'den dolayı $(U_p, U_{p-1}) = 1$ ve kabulümüz gereği $(n, U_p) = 1$ olduğundan Lemma 1.1.3 kullanılarak

$$(nU_{p-1}^{n-1}, U_p) = 1 \tag{4.6}$$

elde edilir. $n \neq pt$ olduğundan Teorem 1.3.6'den

$$\left(U_n, U_p\right) = 1 \tag{4.7}$$

yazılır. (4.6) ve (4.7) eşitlikleri (4.5) denkliğinde göz önünde bulundurulursa $\left(S_{p,n}, U_p\right) = 1$ sonucuna ulaşılır.

Benzer şekilde $\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisininde $r = 1$ alınarak oluşturulan $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi kullanılarak tanımlanan $\left\{\frac{F_{pn}}{F_p F_n}\right\}$ dizisinde $\left(n, F_p\right) = 1$ iken $\left(\frac{F_{pn}}{F_p F_n}, F_p\right) = 1$ olduğu kolayca görülür.

Fibonacci sayıları için Tanım 2.1'de verilen Giriş Noktası tanımını $\{U_n\} = \{W_n(0,1; r, 1)\}$ genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 4.1: s pozitif bir tamsayı olmak üzere s pozitif tamsayısının böldüğü ilk U_n genelleştirilmiş Fibonacci sayısının indisine s pozitif tamsayısının "Giriş Noktası" denir ve bu $z(s)$ olarak gösterilir. m pozitif tamsayısı için s pozitif tamsayısının böldüğü ilk genelleştirilmiş Fibonacci sayısının indisi m ise $z(s) = m$'dir.

Örneğin; $s = 7$ pozitif tamsayısı için U_n genelleştirilmiş Fibonacci sayısında $r = 2$ alınırsa $7|U_6$ olduğundan $z(7) = 6$'dır.

Lemma 4.3: $n \in \mathbb{Z}^+$, p bir tek asal sayı olmak üzere $n \neq z(p)k$ ise

$$\left(S_{p,n}, U_n\right) = 1$$

dir.

İspat: $n \neq z(p)k$ olsun. $\left\{S_{p,n}\right\}$ dizisinin tanımı ve (1.19) eşitliğinde $r = 0$, m yerine n ve n yerine p alınarak

$$U_{pn} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} U_n^j U_{n-1}^{p-j} U_j$$

elde edilir. Bu eşitliğinin sağ tarafındaki toplam açılırsa

$$U_{pn} = pU_n U_{n-1}^{p-1} U_1 + \frac{p(p-1)}{2} U_n^2 U_{n-1}^{p-2} U_2 + \cdots + U_n^p U_p$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı U_n ile bölünürse

$$\frac{U_{pn}}{U_p} = pU_{n-1}^{p-1}U_1 + \frac{p(p-1)}{2}U_nU_{n-1}^{p-2}U_2 + \cdots + U_n^{p-1}U_n \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir. $\{S_{p,n}\}$ dizisinin tanımından $U_pU_nS_{p,n} = U_{pn}$ olup bu (4.8) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$U_pS_{p,n} \equiv pU_{n-1}^{p-1} \pmod{U_n} \tag{4.9}$$

denkliği elde edilir. $n \neq z(p)k$ olduğundan $z(p)$'nin tanımından

$$(p, U_n) = 1 \tag{4.10}$$

dir. Teorem 1.3.1'dan

$$(U_n, U_{n-1}) = 1 \tag{4.11}$$

olup (4.10) ve (4.11) eşitlikleri (4.9) denkliğinde göz önüne bulundurulursa $\left(U_pS_{p,n}, U_n\right) = 1$

olur. $\left(U_p, U_n\right) = 1$ olduğundan $\left(S_{p,n}, U_n\right) = 1$ sonucuna ulaşılır.

Lemma 4.4: $n \in \mathbb{Z}^+$, p bir tek asal sayı olmak üzere $n \neq z(p)k$ ise

$$\left(S_{p,n}, p\right) = 1$$

dir.

İspat: $n \neq z(p)k$ olsun. p bir tek asal sayı olduğundan $\left(S_{p,n}, p\right) = 1$ veya $\left(S_{p,n}, p\right) = p$'dir. $\left(S_{p,n}, p\right) = p$ olduğu kabul edilirse

$$p \mid U_n^{p-1} \tag{4.12}$$

elde edilir. $n \neq z(p)k$ olduğundan

$$(p, U_n) = 1 \tag{4.13}$$

dir. O halde $p \nmid U_n$'dir. Bu durum (4.12) denklemi ile bir çelişki oluşturur. Böylece $\left(S_{p,n}, p\right) = 1$ olarak elde edilir.

$\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisininde $r = 1$ alınarak oluşturulan $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi için tanımlanan $\left\{\frac{F_{pn}}{F_p F_n}\right\}$ alt dizisinde $n \neq z(p)k$ ise $\left(\frac{F_{pn}}{F_p F_n}, F_n\right) = 1$ ve $\left(\frac{F_{pn}}{F_p F_n}, p\right) = 1$ olduğu benzer şekilde elde edilir.

Teorem 4.1: $m, n \in \mathbb{Z}^+$, p bir tek asal sayı olmak üzere $m, n \neq pk$ olsun. Eğer $m, n \neq z(p)k$ ve $\left(n, U_p\right) = \left(m, U_p\right) = 1$ ise

$$\left(S_{p,m}, S_{p,n}\right) \big| S_{p,(m,n)}$$

dir.

İspat: m, n pozitif tam sayılar olmak üzere $m, n \neq z(p)k$ ve $\left(n, U_p\right) = \left(m, U_p\right) = 1$ olsun. $d = \left(S_{p,m}, S_{p,n}\right)$ alalım. $d = 1$ ise $\left(S_{p,m}, S_{p,n}\right) \big| S_{p,(m,n)}$ olduğu açıktır. $d > 1$ olsun. En büyük ortak bölen tanımından $d \big| S_{p,m}$ ve $d \big| S_{p,n}$ 'dir. Tanım gereği $U_p U_m S_{p,m} = U_{pm}$ ve $U_p U_n S_{p,n} = U_{pn}$ olduğundan $d \big| U_{pm}$ ve $d \big| U_{pn}$'dir. O halde

$$d \big| (U_{pm}, U_{pn})$$

olup Teorem 1.3.5'den

$$d \big| U_{p(m,n)}$$

elde edilir. Böylece $S_{p,n} = \frac{U_{pn}}{U_p U_n}$ olduğundan

$$d \big| U_p U_{(m,n)} S_{p,(m,n)} \tag{4.14}$$

bulunur. İspatı tamamlamak için

$$(U_p, d) = (U_{(m,n}, d) = 1 \tag{4.15}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $(U_p, d) = d_1$ olsun. O halde $d_1 \big| U_p$ ve $d_1 | d$ olur. $\left(S_{p,m}, S_{p,n}\right) = d$ olduğundan $d_1 \big| S_{p,n}$ dir. Buradan $\left(S_{p,n}, U_p\right) \geq d_1$ olup Lemma 4.2

gereği $\left(S_{p,n}, U_p\right) = 1$ olduğundan $d_1 = 1$ yani $(U_p, d) = 1$ olur. Benzer şekilde $(U_{(m,n)}, d) = d_2$ olsun. O halde $d_2 \big| U_{(m,n)}$ ve $d_2 | d$ olur. Teorem 1.3.5 gereği $U_{(m,n)} = (U_m, U_n)$ ve kabul gereği $\left(S_{p,m}, S_{p,n}\right) = d$ olduğundan $d_2 | U_n$ ve $d_2 \big| S_{p,n}$ dir. Buradan $\left(S_{p,n}, U_n\right) \geq d_2$ olup kabul gereği $(U_n, S_{p,n}) = 1$ olduğundan $d_2 = 1$ yani $(U_{(m,n)}, d) = 1$ elde edilir. Böylece $d \,\big| S_{p,(m,n)}$ elde edilir. $\left(S_{p,m}, S_{p,n}\right) = d$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.2: $m, n \in \mathbb{Z}^+$, p tek asal sayı olmak üzere $m, n \neq z(p)k$ olsun. Eğer $m|n$ ve $\left(n, U_p\right) = 1$ ise $S_{p,m} \big| S_{p,n}$'dir.

İspat: m, n pozitif tamsayılar olmak üzere $m, n \neq z(p)k$, $m|n$ ve $\left(n, U_p\right) = 1$ olsun. Aritmetiğin Temel Teoremi'nden $S_{p,m} = \frac{U_{pm}}{U_p U_m}$ tamsayısı

$$S_{p,m} = q_1^{t_1} q_2^{t_2} \dots q_j^{t_j} \tag{4.16}$$

şeklinde tek türlü yazılabilir, burada q_i'ler farklı asal sayılar ve t_i'ler pozitif tamsayılardır. (4.16) eşitliğinden her i= $1, 2, \dots,$ j için $q_i^{t_i} \big| S_{p,m}$ yazılabilir. $S_{p,m}$ ve $z(p)$ tanımlarından her $i = 1, 2, \dots, j$ için

$$q_i^{t_i} \big| U_{pm} \quad \text{ve} \quad z(q_i^{t_i}) \ |pm \tag{4.17}$$

elde edilir. $m|n$ olduğundan

$$z(q_i^{t_i}) \ |pn \tag{4.18}$$

dir. Burada $z(p)$ tanımı kullanılırsa her $i = 1, 2, \dots, j$ için

$$q_i^{t_i} \big| U_{pn} \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.19)'da $U_p U_n S_{p,n} = U_{pn}$ eşitliği göz önüne alınırsa her $i = 1, 2, \dots, j$ için

$$q_i^{t_i} \big| U_p U_n S_{p,n} \tag{4.20}$$

olduğu görülür. $m, n \neq z(p)k$ olduğundan Lemma 4.3'e göre

$$\left(S_{p,m}, U_m\right) = \left(S_{p,n}, U_n\right) = 1 \tag{4.21}$$

olduğu açıktır. Böylece (4.16) eşitliği kullanılırsa her $i = 1, 2, \dots,\ j$ için $q_i^{t_i} \nmid U_m$ elde edilir. Teorem 1.3.3 göz önüne alındığında kabul gereği $m|n$ olduğundan her $i = 1, 2, \dots,\ j$ için

$$q_i^{t_i} \nmid U_n \tag{4.22}$$

yazılabilir. $\left(n, U_p\right) = 1$ olduğundan Lemma 4.2'den $\left(S_{p,m}, U_p\right) = 1$ elde edilir. Böylece (4.16) eşitliğinden her $i = 1,2, \dots, j$ için

$$q_i^{t_i} \nmid U_p \tag{4.23}$$

olur. (4.18), (4.19) ve (4.21)'den her $i = 1, 2, \dots, j$ için $q_i^{t_i} \big| S_{p,n}$ olduğu görülür. Burada (4.14) eşitliği kullanılarak $S_{p,m} \big| S_{p,n}$ sonucuna varılır.

$\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisinde $r = 1$ alınarak elde edilen $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi kullanılarak tanımlanan $\left\{\frac{F_{pn}}{F_p F_n}\right\}$ dizisi için de $m, n \neq z(p)k$ iken $m|n$ ve $\left(m, F_p\right) = 1$ ise $\frac{F_{pm}}{F_p F_m} \Big| \frac{F_{pn}}{F_p F_n}$ olduğu benzer şekilde elde edilir.

Teorem 4.3: $m, n \in \mathbb{Z}^+$, p tek asal sayı olmak üzere $m, n \neq z(p)k$ olsun. Eğer $\left(n, U_p\right) = \left(m, U_p\right) = 1$ ise

$$S_{p,\,(m,n)} \big| (S_{p,m}, S_{p,n})$$

dir.

İspat: m, n pozitif tamsayılar olmak üzere $m, n \neq z(p)k$, $\left(n, U_p\right) = \left(m, U_p\right) = 1$ olsun. $(m, n) = d$ olarak alalım. $m, n \neq z(p)k$ olduğundan Lemma 4.3 kullanılarak

$$\left(S_{p,m}, U_m\right) = \left(S_{p,n}, U_n\right) = 1 \tag{4.24}$$

yazılabilir. $(m, n) = d$ olduğundan Teorem 1.3.5 kullanılarak $U_d | U_m$ ve $U_d | U_n$ elde edilir. Buradan (4.24) eşitliği kullanılarak

$\left(S_{p,m}, U_d\right) = \left(S_{p,n}, U_d\right) = 1$

olduğu görülür. $\left(n, U_p\right) = \left(m, U_p\right) = 1$ ve $m, n \neq z(p)k$ olduğundan $\left(d, U_p\right) = 1$ ve $d \neq z(p)k$ dır ve burada Teorem 4.2 kullanılarak

$$S_{p,d} \mid S_{p,m} \tag{4.25}$$

ve

$$S_{p,d} \mid S_{p,n} \tag{4.26}$$

yazılabilir. (4.25) ve (4.26) ifadelerinden $S_{p,d} \mid (S_{p,m}, S_{p,n})$ elde edilir. $(m, n) = d$ olduğundan $S_{p,(m,n)} \mid (S_{p,m}, S_{p,n})$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.4: m,n pozitif tamsayılar, p tek asal sayı olmak üzere $m, n \neq z(p)k$ olsun. Eğer $\left(n, U_p\right) = \left(m, U_p\right) = 1$ ise

$$S_{p,(m,n)} = (S_{p,m}, S_{p,n})$$

dir.

İspat: Teorem 4.1 ve Teorem 4.3'den açıktır.

$\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisinde $r = 1$ alınarak elde edilen $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi kullanılarak tanımlanan $\left\{\frac{F_{pn}}{F_p F_n}\right\}$ dizisi için de $m, n \neq z(p)k$ iken $\left(n, F_p\right) = \left(m, F_p\right) = 1$ ise $\frac{F_{p(m,n)}}{F_p F_{(m,n)}} = \left(\frac{F_{pm}}{F_p F_m}, \frac{F_{pn}}{F_p F_n}\right)$ olduğu benzer şekilde elde edilir.

4.1. $\{S_{p,n}\} = \left\{\frac{U_{pn}}{U_p U_n}\right\}$ Dizisinin Bir Alt Dizisinin Bölünebilirlik Özelliği

Bu bölümde $\{S_{p,n}\}$ dizisinin terimleri kullanılarak tanımlanan $\{Q_k(p,n)\}$ alt dizisinin bölünebilirlik özelliği verilecektir.

k, n pozitif tamsayılar, p tek asal sayı olmak üzere $\{Q_k(p,n)\}$ alt dizisini

$$Q_k(p,n) = \begin{cases} S_{p,n} & , \ k = 1 \\ S_{p,nQ_{k-1}(p,n)}, & k > 1 \end{cases} \tag{4.27}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan $\{Q_k(p,n)\}$ dizisinin ilk birkaç terimi

$S_{p,n}, S_{p,nS_{p,n}}, S_{p,nS_{p,nS_{p,n}}}, \cdots$

şeklindedir. Örneğin; $k = 3$ ve $p = 3$ için $\{Q_3(3,n)\} = \left\{S_{3,nS_{3,nS_{3,n}}}\right\}$ alt dizisi elde edilir.

Lemma 4.1.1: $n, k \in \mathbb{Z}^+$, p tek asal sayı olmak üzere $n \neq z(p)t$ olsun. O zaman

$$(Q_k(p,n), p) = 1$$

dir.

İspat: $n \neq z(p)t$olsun. $(Q_k(p,n), p) = 1$ olduğunu göstermek için k pozitif tamsayısı üzerinde tümevarım yapalım.

$k = 1$ için $(Q_k(p,n), p) = (S_{p,n}, p)$ 'dir. $n \neq z(p)t$ olduğundan Lemma 4.4'den $(S_{p,n}, p) = 1$ olduğu açıktır.

$k > 1$ tamsayıları için $(Q_k(p,n), p) = 1$ olsun. $k + 1$ için $(Q_{k+1}(p,n), p) = 1$ olduğunu gösterelim.

p tek asal bir sayı olduğundan $(Q_{k+1}(p,n), p) = 1$ veya $(Q_{k+1}(p,n), p) = p$'dir. Kabul edelim ki $(Q_{k+1}(p,n), p) = p$ olsun. (1.19) eşitliğinden $r = 0$, m yerine $nQ_k(p,n)$ ve n yerine de p alınarak

$$U_{pnQ_k(p,n)} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} U_{nQ_k(p,n)}^{j} U_{nQ_k(p,n)-1}^{p-j} U_j$$

elde edilir. Bu eşitliğinin sağ tarafındaki toplam açılırsa

$$U_{pnQ_k(p,n)} = pU_{nQ_k(p,n)} U_{nQ_k(p,n)-1}^{p-1} U_1$$

$$+ \frac{p(p-1)}{2} U_{nQ_k(p,n)}^{2} U_{nQ_k(p,n)-1}^{p-2} U_2 + \cdots + U_{nQ_k(p,n)}^{p} U_p$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $U_p U_{nQ_k(p,n)}$ ile bölünürse

$$\frac{U_{pnQ_k(p,n)}}{U_p U_{nQ_k(p,n)}} =$$

$$p\frac{U_{nQ_k(p,n)-1}^{p-1}U_1+\frac{(p-1)}{2}U_{nQ_k(p,n)}U_{nQ_k(p,n)-1}^{p-2}U_2+\cdots+U_{nQ_k(p,n)}^{p-2}U_{nQ_k(p,n)-1}U_{p-1}}{U_p}$$

$$+U_{nQ_k(p,n)}^{p-1} \tag{4.28}$$

elde edilir. Kabul gereği

$$p\,\Big|U_{nQ_k(p,n)}^{p-1} \tag{4.29}$$

elde edilir. $n \neq z(p)t$ ve tümevarım kabulü gereği $(Q_k(p,n),p)=1$ olduğundan

$$\big(p,U_{nQ_k(p,n)}\big)=1 \tag{4.30}$$

dir. Buradan $p \nmid U_{nQ_k(p,n)}$ elde edilir ki bu (4.29) ifadesi ile çelişki oluşturur. Böylece $(Q_{k+1}(p,n),p)=1$ olarak elde edilir.

Lemma 4.1.2: $n,k \in \mathbb{Z}^+$, p tek asal sayı olmak üzere $n \neq z(p)t$ olsun. O zaman

$$(U_{nQ_k(p,n)},S_{p,n})=1$$

dir.

İspat: $n,k \in \mathbb{Z}^+$, p tek asal sayı olmak üzere $n \neq z(p)t$ olsun. $(U_{nQ_k(p,n)},S_{p,n})=d$ olarak alalım. Teorem 1.3.5 kullanılarak

$$(U_{nQ_k(p,n)},U_{pn})=U_{(nQ_k(p,n),pn)}=U_{n(Q_k(p,n),p)} \tag{4.31}$$

elde edilir. Lemma 4.1.1 gereği $(Q_k(p,n),p)=1$ olduğundan (4.31) eşitliğinden

$$(U_{nQ_k(p,n)},U_{pn})=U_n \tag{4.32}$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan $\{S_{p,n}\}$ dizisinin tanımı gereği $d|U_n$ ve $n \neq z(p)t$ olduğundan Lemma 4.3'den $\big(S_{p,n},U_n\big)=1$'dir. Kabul gereği $d\big|U_{nQ_k(p,n)}$ ve $d\big|S_{p,n}$ dir. Buradan $d=1$ sonucuna varılır.

Teorem 4.1.1: $n,k \in \mathbb{Z}^+$, p tek asal sayı olmak üzere $n \neq z(p)t$ olsun. O zaman

$$S_{p,n}^k|Q_k(p,n)$$

dir.

İspat: n, k pozitif tamsayılar, p tek asal sayı olmak üzere $n \neq z(p)t$ olsun. k pozitif tamsayısı üzerinde tümevarım yapalım. Tanım gereği $k = 1$ için $Q_1(p,n) = S_{p,n}$ olup $S_{p,n} \mid S_{p,n}$ dir. $k > 1$ tamsayısı için $S_{p,n}^k \mid Q_k(p,n)$ olsun. (1.19) eşitliğinde $r = 0$, m yerine pn ve n yerine $S_{p,n}^k$ alınırsa

$$U_{pnS_{p,n}^k} = \sum_{j=0}^{S_{p,n}^k} \binom{S_{p,n}^k}{j} {U_{pn}}^j {U_{pn-1}}^{S_{p,n}^k - j} U_j \tag{4.33}$$

olarak elde edilir. Teorem 1.1.5 gereği $\frac{S_{p,n}^k}{(S_{p,n}^k, j)} \Big| \binom{S_{p,n}^k}{j}$ olduğundan a_j bir tamsayı olmak üzere

$$U_{pnS_{p,n}^k} = \sum_{j=0}^{S_{p,n}^k} \frac{S_{p,n}^k}{(S_{p,n}^k, j)} a_j\, {U_{pn}}^j {U_{pn-1}}^{S_{p,n}^k - j} U_j \tag{4.34}$$

olarak yazılabilir. Ayrıca (4.34) eşitliğinde $\frac{{U_{pn}}^{j-1} {U_{pn-1}}^{S_{p,n}^k - j} U_j}{(S_{p,n}^k, j)}$ sayısı b_j olarak alınırsa

$$U_{pnS_{p,n}^k} = \sum_{j=0}^{S_{p,n}^k} S_{p,n}^k a_j\, b_j U_{pn} \tag{4.35}$$

olarak yazılır. b_j'nin tamsayı olduğu tanım gereği açıktır. (4.35) eşitliğinde $S_{p,n}$'nin tanımı dikkate alınırsa

$$U_{pnS_{p,n}^k} = d.\, S_{p,n}^{k+1} \tag{4.36}$$

olarak yazılır, burada $d = U_p U_n \sum_{j=0}^{S_{p,n}^k} a_j\, b_j$ 'dir. $S_{p,n}^k \mid Q_k(p,n)$ olduğundan Tanım 1.1.1'den öyle bir m tamsayısı vardır ki

$$Q_k(p,n) = mS_{p,n}^k \tag{4.37}$$

eşitliği sağlanır. $Q_k(p,n)$ ve $S_{p,n}$ tanımları gereği

$$Q_{k+1}(p,n) = S_{p,nQ_k(p,n)} = \frac{U_{pnQ_k(p,n)}}{U_p U_{nQ_k(p,n)}} \tag{4.38}$$

olup (4.37)'de bulunan eşitlik burada kullanılırsa

$$Q_{k+1}(p,n) = \frac{U_{pnmS_{p,n}^k}}{U_p U_{nmS_{p,n}^k}} \tag{4.39}$$

elde edilir. (4.39) eşitliğinde (4.36) eşitliği kullanılırsa

$$Q_{k+1}(p,n) = \frac{d.S_{p,nm}^{k+1}}{U_p U_{nmS_{p,n}^k}} \tag{4.40}$$

elde edilir. Lemma 4.2 ve Lemma 4.1.2 gereği

$$(S_{p,nm}^{k+1}, U_p) = 1 \tag{4.41}$$

ve

$$\left(S_{p,nm}^{k+1}, U_{nmS_{p,n}^k}\right) = 1 \tag{4.42}$$

olduğu açıktır. (4.41) ve (4.42) eşitlikleri (4.40) eşitliğinde kullanılırsa $\frac{d}{U_p U_{nmS_{p,n}^k}}$'nın bir tamsayı olduğu görülür. Burada Tanım 1.1.1 kullanılırsa $S_{p,n}^{k+1} | Q_{k+1}(p,n)$ sonucuna ulaşılır.

$\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisininde $r = 1$ alınarak oluşturulan $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi için tanımlanan $\left\{\frac{F_{pn}}{F_p F_n}\right\}$ dizisi içinde benzer sonuçlar elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında geliştirilen algoritma, iterasyon tabanlı olup, iki baradan alınan 2017 yılında Panraksa ve Tangboonduangjit tarafından tanımlanan $\{T_n\} = \left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ dizisinin terimlerinin bölünebilme özelliklerinden yola çıkılarak hazırlanan bu çalışmada ilk olarak $\{T_n\} = \left\{\frac{F_{5n}}{5F_n}\right\}$ dizisinden esinlenerek tanımladığımız $\{S_n\} = \left\{\frac{F_{7n}}{F_7 F_n}\right\}$ dizisinin bazı bölünebilirlik özellikleri verilmiştir. Bu doğrultuda $\{S_n\}$ sayı dizisinin $n \neq 7k$ olduğunda tamsayı olduğu ve $\{S_n\}$ sayı dizisinin tamsayı olduğu değerler için hangi koşullar altında $S_m|S_n$ ve $(S_m, S_n) = S_{(m,n)}$ ifadelerinin sağlandığı gösterilmiştir. Ayrıca $\{S_n\}$ dizisi kullanılarak tanımlanan $\{Q_k(n)\}$ altdizisi için $n \neq 7k$ olduğunda $S_n^k|Q_k(n)$ olduğu gösterilmiştir. Ardından bu dizi tanımlaması genelleştirilmiş Fibonacci dizilerine taşınmış ve $n \in \mathbb{Z}^+$ ve p tek asal sayı olmak üzere $n \neq pt$ iken $S_{p,n} = \frac{U_{pn}}{U_p U_n}$ sayısının bir tamsayı olduğu gösterilerek $\{S_{p,n}\}$ sayı dizisinin tamsayı olduğu $n \neq pt$ değerleri için $S_{p,m}\middle|S_{p,n}$ ve $(S_{p,m}, S_{p,n}) = S_{p,(m,n)}$ ifadelerinin hangi şartlar altında sağlandığı gösterilmiştir.

Bu tez boyunca incelenen bölünebilme özelliklerinin Fibonacci polinomları üzerine taşınarak hangi şartlar altında bu özellikleri sağladığı araştırılıp yeni çalışmalar yapılabilir [24-26]. Ayrıca p ve q farklı tek asal sayılar olmak üzere $\{S_{p,q,n}\} = \left\{\frac{U_{pqn}}{U_p U_q U_n}\right\}$ dizisi tanımlanarak benzer bölünebilme özelliklerinin bu dizi için de hangi koşullar altında sağlandığı araştırılabilir [6,7,19].

KAYNAKLAR

[1] Horadam A. F., Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, The Fibonacci Quarterly, 1965, **3**,161-176.

[2] Koshy T., Fibonacci and Lucas numbers with applications, 2nd ed, A Wiley-Interscience Publication, New York, 2017.

[3] Gouvea F. Q., p -adic Numbers, 2nd ed., Springer- Verlag, New York, 1997.

[4] Koshy T., Elementary number theory with applications, 2nd ed. Academic Press, California, 2007.

[5] Vajda S., Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section. Theory and application, Halsted Press, New York, 1989.

[6] Panraksa C., Tangboonduangjit A., On some arithmetic properties of a sequence related to the quotient of Fibonacci numbers, The Fibonacci Quarterly, 2017, **55.1**, 21-28.

[7] Panraksa C., Tangboonduangjit, A., Wiboonton, K., Exact divisibility properties of some subsequences of Fibonacci numbers, Fibonacci Quartely,2013, **51**, 307-318.

[8] Gould H. W., Schlesinger, P., Extensions of the Hermite GCD theorems for binomial coefficients, Fibonacci Quarterly, 1995, **33**, 386-391.

[9] Freitag H. T., On summations and expansions of Fibonacci numbers, The Fibonacci Quarterly, 1973, **11.1**, 63-71.

[10] Jeffery T., Pereira, R., Divisibility properties of the Fibonacci, Lucas and related sequences, ISRN Algebra, 2014.

[11] Hoggatt V. E., John W., Phillips H. T., Twenty-four master identities, The Fibonacci Quarterly, 1971, **9.1**, 1-17.

[12] Vinson J., The relation of the period modulo m to the rank of apparition of m in the Fibonacci sequence, The Fibonacci Quarterly, 1963, **1.2**, 37-45.

[13] Muskat J. B., Generalized Fibonacci and Lucas sequences and rootfinding methods, Mathematics of Computation, 1963, **61.203**, 365-372.

[14] Sun Z. H., Congruences for Fibonacci numbers, http://www.hytc.edu.cn/xsjl/szh/ConFn.pdf, Erişim tarihi: 12.06.2019.

[15] Guta V. K., Yashwant K. P., Omprakash S., Generalized Fibonacci sequences, Theoretical Mathematics and Applications, 2012, **2.2**, 115-124.

[16] Horadam A. F., A generalized Fibonacci sequence, The American Mathematical Monthly, 1961, **68.5**, 455-459.

[17] Pongsriiam P., Pathom N., Exact divisibility by powers of the Fibonacci and Lucas numbers, Journal of Integer Sequences, 2014, **17.2**, 3.

[18] Hoggatt V. E., Bergum G. E., Numbers L., Divisibility and congruence relations, The Fibonacci Quarterly, 1974.

[19] Kuzuoglu G., Turker Ulutaş Y., On divisibility properties of a sequence related to the quotient of Fibonacci numbers, Utilitas Mathematica, 2018, **107**, 305-315.

[20] Çallıalp F., Sayılar teorisi, Birsen Yayınevi, İstanbul, 1999.

[21] Kuhapatanakul K., Alternating sums of reciprocal generalized Fibonacci numbers, SpringerPlus, 2014, **3.1**: 485.

[22] Hoggatt V. E., Long C. T., Divisibility properties of generalized Fibonacci polynomials, The Fibonacci Quarterly, 1974, **12.2**, 113-120.

[23] Hoggatt Jr. V. E., Bicknell-Johnson M., Divisibility by Fibonacci and Lucas squares, The Fibonacci Quarterly,1977, **15.1**, 3–8.

[24] Hoggatt V. E., Bicknell M., Generalized Fibonacci Polynomials, The Fibonacci Quarterly,1973, **11.5**, 457-465.

[25] Filipponi P., Horadam A. F., Derivative Sequences of Fibonacci and Lucals Polynomials, Applications of Fibonacci Numbers, Springer, Dordrecht, 1991, 99-108.

[26] Florez R., Higuita R. A. and Mukherjee A., Characterization of The Strong Divisibility Property for Generalized Fibonacci Polynomials, arXiv Preprint arXiv:1701.061722, 2017.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

[1] **Kuzuoğlu G.,** Türker Ulutaş Y., On Divisibility Properties of a Sequence Related to The Quotient Of Fibonacci Numbers, Utilitas Mathematica, 2018, **107**, 305-315.

[2] **Kuzuoğlu G.,** Türker Ulutaş Y., On Divisibility Properties of a Sequence Related to The Quotient Of Fibonacci Numbers, Antalya Algebra Days XX, 16-20 May 2018, Şirince-İzmir.

[3] Türker Ulutaş Y., **Kuzuoğlu G.,** On The Alternating Sums of Reciprocal Generalized Fibonacci Numbers, Antalya Algebra Days XX, 16-20 May 2018, Şirince-İzmir.

ÖZGEÇMİŞ

Gökhan Kuzuoğlu 1991’de İstanbul’da doğdu. İlköğretim ve Lise eğitimini İstanbul’da tamamladı. 2009 yılında girdiği Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü’nü 2014 yılında birincilik derecesi ile tamamladı. 2016 yılında Kocaeli Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. Ayrıca 2015 yılında Bayrampaşa Bilim Merkezi’nde Matematik-Bilgisayar Atölye Sorumlusu olarak başladığı görevini halen sürdürmektedir.