

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

YAPI ELEMANLARININ YANAL VE
EĞİLMELİ BURULMALI BURKULMA PROBLEMLERİNİN
YARI ANALİTİK YÖNTEMLERLE ANALİZİ

AHMET YÜCESOY

KOCAELİ 2021

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

YAPI ELEMANLARININ YANAL VE
EĞİLMELİ BURULMALI BURKULMA PROBLEMLERİNİN
YARI ANALİTİK YÖNTEMLERLE ANALİZİ

AHMET YÜCESOY

Prof.Dr. Safa Bozkurt COŞKUN

Danışman, Kocaeli Üniv.

.....

Doç.Dr. Utkan MUTMAN

Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.

.....

Doç.Dr. Baki ÖZTÜRK

Jüri Üyesi, Hacettepe Üniv.

.....

Doç.Dr. Mehmet Tarık ATAY

Jüri Üyesi, Abdullah Gül Üniv.

.....

Dr.Öğr. Üyesi Hakan ERDOĞAN

Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 08.09.2021

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

İnce cidarlı açık kesite sahip çelik yapı elemanlarında eğilmeli burulmalı burkulma ve yanal burulmalı burkulmaya sebep olan kritik yükün gerçeğe en yakın şekilde belirlenebilmesi, çelik tasarımı ile alakalı tasarım süreçlerinin daha kapsamlı olmasını ve çelik konstrüksiyonların daha etkin imal edilebilmesini sağlayacaktır.

Bana, konuya ufak dahi olsa, bir katkımın olmasını sağlayacak bu çalışmayı öneren, sürekli beni teşvik edip destekleyen ve Kocaeli Üniversitesi tarafından hızlı destek kapsamında kendisine temin edilen yazılımı tez çalışması için kullanmama izin veren değerli hocam Prof. Dr. Safa Bozkurt COŞKUN'a, şekillerin çizimini yapan İnş. Yük. Mühendisi Burcu YILMAZ'a, hep yanımda olan eşim Meral ve kızım İpek Su'ya teşekkürlerimi sunarım. Eğitime önem veren ve kardeşlerimle beni bu konuda hep teşvik etmiş olan annem Vasfiye YÜCESOY'a ve rahmetli babam Abdurrahman YÜCESOY'a sonsuz şükranlarımı sunarım.

Eylül-2021

Ahmet YÜCESOY

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
TABLolar DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
ÖZET.....	xiv
ABSTRACT.....	xv
GİRİŞ	1
1. BURULMALI BURKULMA, EĞİLMELİ BURULMALI BURKULMA VE YANAL BURULMALI BURKULMA	27
1.1. Yapısal Elemanların Burulma Yüğü ve Deformasyon Karakteristikleri	28
1.1.1. St. Venant burulması	28
1.1.2. Üniform olmayan burulma	30
1.2. Burulmanın Şekil Değiştirme Enerjisi	33
1.2.1. St. Venant burulmasında Şekil değiştirme enerjisi	33
1.2.2. Çarpılma burulmasında Şekil değiştirme enerjisi	33
1.3. Kolonların Burulmalı ve Eğilmeli Burulmalı Burkulması.....	34
1.4. Kirişlerin Yanal Burulmalı Burkulması.....	44
1.4.1. Yanal burulmalı burkulmanın hakim diferansiyel eşitlikleri	44
1.4.2. Enerji metodu ile I kirişlerin burkulmasının incelenmesi	53
2. YARI-ANALİTİK YÖNTEMLER	66
2.1. Analitik Tahmin Yöntemlerinin Özet Açıklaması.....	66
2.1.1. Pertürbasyon metodu (klasik pertürbasyon) (PM)	66
2.1.2. Parametrize edilmiş pertürbasyon metodu (PPM).....	67
2.1.3. Varyasyonel iterasyon metodu (VIM).....	68
2.1.4. Homotopi pertürbasyon metodu (HPM).....	68
2.1.5. İterasyon pertürbasyon metodu (İPM)	69
2.1.6. Enerji dengesi metodu (EBM).....	69
2.1.7. Parametre genişletme metodu (PEM).....	70
2.1.8. Varyasyonel yaklaşım (VA).....	70
2.1.9. Homotopi analiz metodu (HAM)	71
2.1.10. Adomian ayrıştırma metodu (ADM)	72
2.1.11. Diferansiyel dönüşüm metodu (DTM)	74
3. YARI ANALİTİK YÖNTEMLERLE YAPILAN UYGULAMALAR.....	76
3.1. Bazı Analitik Tahmin Teknikleri Kullanılarak Dikdörtgen Prizmatik Kirişlerin Yanal-Burulmalı Stabilitesi.....	76
3.1.1. Hakim eşitlik	76
3.1.2. Kullanılan ADM ve VIM yöntemleri	77
3.1.3. Problem için ADM ve VIM vasıtasıyla çözüm prosedürü	78
3.1.3.1. ADM formülasyonu	78
3.1.3.2. VIM formülasyonu	78
3.1.4. Çözüm prosedürü	78

3.1.5. Durum çalışmaları	79
3.2. Serbest Uçta Tekil Yüke Maruz Bırakılmış Bir Konsol Kirişte Burulma-Eğilme Kararsızlığının HPM İle Analizi	84
3.2.1. Problem	84
3.2.2. HPM'nin çalışmaya uygulanması	86
3.2.3. Nümerik sonuçlar	87
3.3. Serbest Uçta Tekil Yüke Maruz Bırakılmış Bir Konsol Kirişte Burulma-Burkulma Analizinin ADM ve VIM İle Yapılması	88
3.3.1. Problem	88
3.3.2. ADM'nin çalışmaya uygulanması	88
3.3.3. VIM'in çalışmaya uygulanması	89
3.3.4. Çözüm prosedürü	89
3.3.5. Nümerik sonuçlar	89
3.4. İnce Duvarlı Açık Sabit ve Değişken Enkesitli Elemanların Eğilmeli-Burulmalı Burkulmalarının Yarı Analitik Analizi	90
3.4.1. Kolonların eğilmeli-burulmalı burkulması	90
3.4.2. Analizlerde kullanılan analitik tahmin yöntemleri	93
3.4.3. Uygulamalar	93
3.4.3.1. Sabit enkesitli eleman	93
3.4.3.2. Değişken enkesitli eleman	98
3.5. Prizmatik Olmayan İnce Duvarlı Kirişlerin Yanal-Burulmalı Burkulmalarının ADM ve HPM ile Analizi	104
3.5.1. Problem	104
3.5.2. Analizlerde kullanılan analitik tahmin yöntemleri	106
3.5.3. Problem için ADM ve HPM vasıtasıyla çözüm prosedürü	106
3.5.3.1. ADM formülasyonu	107
3.5.3.2. HPM formülasyonu	107
3.5.4. Durum çalışmaları	108
3.5.5. Nümerik sonuçlar	110
3.6. Çelik I Kesitli Konsol Kirişlerin Yanal Burulmalı Burkulmasının Analitik Tahmin Yöntemleriyle Analizi ve Sonuçların Yönetmelik Sonuçları ile Karşılaştırılması	120
3.6.1. Problem	120
3.6.2. Analizlerde kullanılan analitik tahmin yöntemleri	121
3.6.3. Problem için ADM ve VIM vasıtasıyla çözüm prosedürü	121
3.6.3.1. ADM formülasyonu	122
3.6.3.2. VIM formülasyonu	122
3.6.4. Çelik Yapılar Yönetmeliği (ÇYY), Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapımına Dair Esaslar'da yanal burulmalı burkulma momenti hesabı	123
3.6.4.1. Kuvvetli eksenleri etrafında eğilme etkisindeki kompakt U enkesitli ve çift simetrik kompakt veya kompakt gövdeli-kompakt olmayan/narin başlıklı I enkesitli elemanlar	124
3.6.4.2. Kuvvetli eksenleri etrafında eğilme etkisindeki kompakt veya kompakt olmayan gövdeli diğer I enkesitli elemanlar	126
3.6.4.3. Kuvvetli eksenleri etrafında eğilme etkisindeki çift ve tek simetri eksenli narin gövdeli I enkesitli	

elemanlar	128
3.6.5. Durum alışmaları	129
3.6.6. Nümerik sonuçlar	130
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	134
KAYNAKLAR	137
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER	149
ÖZGEÇMİŞ	150



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Burkulma Formları	27
Şekil 1.2. Dairesel kesitte burulma	29
Şekil 1.3. Çarpılma serbestisi bulunan dairesele olmayan kesitlerin burulması.....	29
Şekil 1.4. Serbestçe çarpılması sınırlandırılmış dairesele olmayan kesitin burulması.....	30
Şekil 1.5. Eğilmeli Burulmalı Burkulma Davranışı	36
Şekil 1.6. Boyuna Doğrultudaki Fiberde Eğilme Sebebiyle Oluşan Kısalma.....	37
Şekil 1.7. Lifteki Eğilme Kaynaklı Yanal Deformasyonlar	38
Şekil 1.8. Boyuna Fiberde Kayma Merkezi Etrafındaki Dönme Kaynaklı Yanal Ötelenme.....	39
Şekil 1.9. Kirişlerde Yanal Burulmalı Burkulma.....	44
Şekil 1.10. Koordinat Sistemi ve w_y Yüklemesi	45
Şekil 1.11. w_y Yüğü Altında Yanal Burulmalı Deformasyon.....	47
Şekil 1.12. w_y Yüğü Altında Bir Diferansiyel Elemanın Serbest Cisim Diyagramı.....	47
Şekil 1.13. u'' ve v'' Arasındaki İlişki.....	49
Şekil 1.14. Koordinat Sistemi ve w_x Yüklemesi	50
Şekil 1.15. w_x Yüğü Altında Yanal Burulmalı Deformasyon.....	50
Şekil 1.16. w_x Yüğü Altında Bir Diferansiyel Elemanın Serbest Cisim Diyagramı	51
Şekil 1.17. Basit Mesnetli Bir I Kirişin Basit Eğilme Altında Yanal Burulmalı Burkulması	54
Şekil 1.18. Basit Mesnetli Bir I Kirişin Basit Eğilme Altında Yanal Burulmalı Burkulması	55
Şekil 1.19. M_x momentinin x' , y' , z' Eksenleri Doğrultusundaki Bileşenleri.....	57
Şekil 1.20. Yanal Burulmada Oluşan Uç Dönmeleri	60
Şekil 1.21. Kiriş ve Kısalmada Oluşan Kemer Arasındaki Boy Farkı.....	61
Şekil 1.22. Flanşların Burkulmaya Bağlı Yanal Sapması	62
Şekil 3.1. Basit Mesnetli Dikdörtgen Kesitli Kirişte Yanal-Burulmalı Burkulma.....	77
Şekil 3.2. Seçilen Yükleme Çeşitleri.....	80
Şekil 3.3. Üniform Yüğü Altındaki Kirişte Katsayılar Matrisinin Determinantı.....	82
Şekil 3.4. Lineer Yüğü Altındaki Kirişte Katsayılar Matrisinin Determinantı	82
Şekil 3.5. Sinüzoidal Yüğü Altındaki Kirişte Katsayılar Matrisinin Determinantı.....	83
Şekil 3.6. Konsantre Uç Kuvvetli Konsol Kiriş	84
Şekil 3.7. Boyuna Doğrultudaki Fiberde Eğilme Sebebiyle Oluşan Kısalma.....	91
Şekil 3.8. Sabit Kesitli Eleman ve Koordinat Sistemi	94
Şekil 3.9. Değişken Kesitli Eleman ve Koordinat Sistemi.....	99
Şekil 3.10. Koordinat Sistemi ve Yer Değiştirmelere Ait Notasyonlar	104
Şekil 3.11. Basit Mesnetli Kiriş ve Kesit Boyutları	108
Şekil 3.12. Konsol Kiriş ve Kesit Boyutları.....	109
Şekil 3.13. Konsol Kiriş ve Yüklemelele	120

Şekil 3.14. Çözümde Kullanılan I Enkesit..... 130



TABLolar DİZİNİ

Tablo 1.1. Şekil 1.10'da Eksenler Arasındaki Açılarının Kosinüs İfadeleri.....	46
Tablo 2.1. DTM'nin Temel Dönüşüm Teoremleri.....	75
Tablo 3.1. Yanal-Burulmalı Burkulma Yüklerinin Karşılaştırılması.....	81
Tablo 3.2. Sinüzoidal Yük Durumunun Maclaurin Yaklaşımı için Sonuçların Kıyası	83
Tablo 3.3. Sadece HPM Uygulaması ile kL^2 yakınsaması	87
Tablo 3.4. kL^2 İçin 21 Terimli Kuvvet Serisi Çözümü.....	87
Tablo 3.5. ADM ve VIM Uygulanması İle kL^2 'nin Yakınsaması.....	90
Tablo 3.6. kL^2 İçin 21 Terimli Kuvvet Serisi Çözümü.....	90
Tablo 3.7. Üniform Kesite Sahip Kolonlarda Kritik Burkulma Yüklerinin Karşılaştırılması	98
Tablo 3.8. Değişken Kesite Sahip Kolonlarda Kritik Burkulma Yüklerinin Karşılaştırılması	103
Tablo 3.9. Gövde Değişimli İnce Duvarlı Çift simetrik Enkesite Sahip Basit Mesnetli Kiriş Lineer Kritik Momentleri (M_{kr}).....	114
Tablo 3.10. Gövde Değişimli İnce Duvarlı Tek simetrik Enkesite Sahip Basit Mesnetli Kiriş Lineer Kritik Momentleri (M_{kr}).....	115
Tablo 3.11. Doğrusal Değişimli Konsol Kirişte Elastik Kritik Yükler (P_{kr}).....	116
Tablo 3.12. Eşit Başlıkları Doğrusal Değişken Konsol Kirişlerde Elastik Kritik Yükler (q_{kr}).....	117
Tablo 3.13. Şekil 3.14'teki Enkesit İçin Kritik Yanal Burulmalı Burkulma Momentleri (kNm)	132

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A	: Kenar uzunluğu, (m)
\bar{a}_y	: Kayma merkezi ile yanal yükün uygulanma noktası arasındaki mesafe, (m)
A	: PM’de tam çözüm
A	: HPM’de genel diferansiyel operatör
A_0	: PM’de kesin çözümlü problemin çözümü
A_1, A_2, \dots	: PM’de yüksek mertebeden sistematik prosedürde tekrarlanarak bulunan terimler
b	: Kesit genişliği, (m)
c	: Bir katsayı
b_f	: Flanş genişliği, (m, mm)
b_{f1}, b_{fc}	: Basınç flanşı genişliği, (m, mm)
b_{f2}	: Çekme flanşı genişliği, (m)
B	: HPM’de sınır operatör
C	: Burulma rijitliği, (tm^4)
C_b	: Moment düzeltme katsayısı
d, h, h_0	: flanş eksenleri arası yükseklik, (m, mm)
dA	: Eleman lifinin kesiti, (m^2)
e	: PM’de küçük parametre
e_z	: Yükün etkime noktası ile kayma merkezi arasındaki mesafe, (m)
E	: Elastisite modülü, (t/m^2 , GPa, MPa)
$f(x)$: ADM’de x ’e bağlı fonksiyon
$f(x)$: DTM’de ilk fonksiyon
$f_n(\xi)$: ξ ’ya bağlı bir fonksiyon
F_L	: Eğilme etkisinde basınç başlığında azaltılmış akma gerilmesi, (N/mm^2)
F_y	: Yapısal çelik karakteristik akma gerilmesi, (N/mm^2)
$\bar{F}[k]$: DTM’de diferansiyel dönüşüm
$g(x)$: VIM’de kaynak terimleri içeren x ’e bağlı fonksiyon
G	: Elastik kayma modülü, (t/m^2)
h	: Kesit yüksekliği, (m)
h_c	: Ağırlık merkezi ile basınç başlığı tarafının gövde parçası üzerindeki eğrilik bitim noktası arasındaki uzaklığın iki katı, (mm)
i_y	: y eksenine göre atalet yarıçapı, (mm)
i_{ts}	: Etkin atalet yarıçapı, (mm)
I	: Atalet momenti, (m^4)
$I_{\bar{w}}$: Tek simetrikli enkesite ait çarpılma sabiti, (m^6)
I_x	: x eksenine göre atalet moment, (m^4)
I_y	: y eksenine göre atalet moment, (m^4 , cm^4)
I_z	: z eksenine göre atalet momenti, (m^4)
I_f	: Kuvvetli aksa göre atalet momenti, (m^4)
I_0	: Kutupsal atalet momenti, (m^4)
I_t, J, K_T	: Burulma sabiti, (m^4 , cm^4)

l, L	: Elemanın boyu, (m)
L	: Doğrusal diferansiyel operatör
L^{-1}	: Ters operatör
L_b	: Basınç başlığında yanal yer değiştirmenin ve enkesit burulmasının önlendiği noktalar arasındaki eleman uzunluğu (stabilite bağlantısı ile desteklenmeyen eleman uzunluğu), (mm)
L_p	: Akma sınır durumu için yanal olarak desteklenmeyen sınır uzunluk, (mm)
L_r	: Elastik olmayan yanal burulmalı burkulmada sınır uzunluk, (mm)
M	: Eğilme momenti, (tm)
M_f	: Flanş eğilme momenti, (tm)
M_n	: Karakteristik eğilme momenti dayanımı, (kNm)
M_p	: Plastik eğilme momenti, (kNm)
M_x	: x eksenine göre eğilme moment, (tm)
M_y	: y eksenine göre eğilme momenti, (tm)
M_{yc}	: Dış basınç lifinde akma gerilmesine ulaşıldığı akma momenti, (kNm)
M_{yt}	: Dış çekme lifinde akma gerilmesine ulaşıldığı akma momenti, (kNm)
$M_{x'}$: M_x momentinin deforme olmuş kesitteki x' eksenini etrafındaki yansıması, (tm)
$M_{y'}$: M_x momentinin deforme olmuş kesitteki y' eksenini etrafındaki yansıması, (tm)
$M_{z'}$: M_x momentinin deforme olmuş kesitteki z' eksenini etrafındaki yansıması, (tm)
\bar{M}_y	: Boyutsuz eğilme momenti
M_{bx}	: w_y yayılı yükünden oluşan iç moment, (tm)
M_{by}	: w_x yayılı yükünden oluşan iç moment, (tm)
M_{kr}	: Kritik moment, (tm, kNm)
M_{maks}	: Yanal stabilite bağlantısı ile desteklenen noktalar arasındaki kiriş uzunluğu boyunca en büyük eğilme momentinin mutlak değeri, (kNm)
$M_{sağ}$: Sağ uca etkiyen moment, (tm)
M_{sol}	: Sol uca etkiyen moment, (tm)
M_t	: Yükün kayma merkezi dışından etkimesi kaynaklı ikinci mertebe burulma momenti
M_A	: Yanal stabilite bağlantısı ile desteklenen noktalar arasındaki kiriş uzunluğunun 1/4 noktasındaki eğilme momentinin mutlak değeri, (kNm)
M_B	: Yanal stabilite bağlantısı ile desteklenen noktalar arasındaki kiriş uzunluğunun 1/2 noktasındaki eğilme momentinin mutlak değeri, (kNm)
M_C	: Yanal stabilite bağlantısı ile desteklenen noktalar arasındaki kiriş uzunluğunun 3/4 noktasındaki eğilme momentinin mutlak değeri, (kNm)
M_0	: Eğilme Momenti, (tm)
N	: Doğrusal olmayan diferansiyel operatör
O	: Kayma merkezi
O'	: Şekil değiştirmiş elemanın kayma merkezi
p	: HPM'de bir gömülü parametre
P	: Elemene uygulanan tekil yük, (t)
P_x	: x eksenini etrafında basit eğilmeli burkulmaya karşılık gelen yük, (t)

P_y	: y ekseninde etrafında basit eğilmeli burkulmaya karşılık gelen yük, (t)
P_\emptyset	: Basit burulmalı burkulmaya karşılık gelen yük, (t)
P_{TF}, P_{kr}	: Kritik yük, (t, kN)
q	: HAM'da sıfırdan farklı yardımcı parametre
$q_z(x)$: x ekseninde z yönünde etkiyen yanal yayılı yük, (t/m, kN/m)
q_0	: Kirişe etkiyen yayılı yükün pik değeri, (t/m)
q_{kr}	: Kritik yayılı yük, (kN/m)
Q_{wx}	: w_x yayılı yükünden oluşan kesme kuvveti, (t)
Q_{wy}	: w_y yayılı yükünden oluşan kesme kuvveti, (t)
r_0	: Enkesitin kayma merkezine göre kutupsal yarıçapı, (m)
R	: VIM'de Lineer operatörden arta kalan ve L'den daha düşük mertebeden türevler içeren operatör
R_{pc}	: Gövde plastikleşme katsayısı
S	: Burkulmuş elemanın yay boyu, (m)
t	: Kesit kalınlığı, (m)
t	: HAM'da bağımsız değişken
t_f	: Flanş kalınlığı, (m, mm)
t_{f1}, t_{fc}	: Basınç flanş kalınlığı, (m, mm)
t_{f2}	: Çekme flanş kalınlığı, (m, mm)
t_w	: Gövde kalınlığı, (m, mm)
T	: Toplam Burulma direnci, (tm)
T	: VA'da nonlineer osilatörün periyodu
T_{sv}	: St. Venant burulması, (tm)
T_w	: Çarpılma burulması, (tm)
u	: x yönündeki yer değiştirme, (m)
u_t, u_b	: Gövde yüzeyinin üst ve alt yatay deplasmanları, (m)
u_m, w_m	: HAM'da m. mertebeden deformasyonlar
u_n	: IPM'de n. tahmini çözüm
$u(t)$: HAM'da bilinmeyen değişken
u_0	: HPM'de sınır koşulunu sağlayan ilk tahmin
\bar{u}	: Dönme kaynaklı ilave deplasmanı içeren x yönündeki toplam yer değiştirme, (m)
U	: Toplam şekil değiştirme enerjisi, (J)
U_{sv}	: St. Venant burulmasında şekil değiştirme enerjisi, (J)
U_w	: Çarpılma burulmasında şekil değiştirme enerjisi, (J)
v	: y yönündeki yer değiştirme, (m)
\bar{v}	: Dönme kaynaklı ilave deplasmanı içeren y yönündeki toplam yer değiştirme, (m)
V	: Harici yüklerin potansiyel enerjisi, (J)
V_f	: Flanş kayma kuvveti, (t)
V_{wx}	: w_x yayılı yükünün potansiyel enerji kaybı, (J)
V_{wy}	: w_y yayılı yükünün potansiyel enerji kaybı, (J)
ω	: Tekil yükün yayılı yük toplamına oranı
w_x	: x ekseninde yönünde elemana etkiyen yanal yayılı yük, (t/m)
w_y	: y ekseninde yönünde elemana etkiyen yanal yayılı yük, (t/m)
W_{ex}	: x ekseninde etrafında elastik mukavemet momenti, (cm^3)
W_{exc}	: Basınç bölgesi için x ekseninde etrafında elastik mukavemet momenti, (cm^3)
W_{ext}	: Çekme bölgesi için x ekseninde etrafında elastik mukavemet momenti,

	(cm ³)
W_{px}	: x eksenine etrafında plastik mukavemet momenti, (cm ³)
W_x	: x eksenine göre mukavemet momenti, (m ³)
x	: Yatay eksen
x	: ÇYY'de enkesite ait kuvvetli eksen
x_0	: x yönündeki ağırlık merkezi koordinatı, (m)
x_s	: Eleman kesitinin ilk hali ile şekil değiştirmiş halinde kayma merkezleri arasında x yönündeki mesafe, (m)
x'	: Şekil değiştirmiş elemanın yatay eksen karşılığı
\bar{x}	: Boyutsuz mesafe
y	: Düşey eksen
y_c	: Ağırlık merkezine göre kayma merkezinin koordinatı, (m)
y_0	: y yönündeki ağırlık merkezi koordinatı, (m)
y_s	: Eleman kesitinin ilk hali ile şekil değiştirmiş halinde kayma merkezleri arasında y yönündeki mesafe, (m)
y'	: Şekil değiştirmiş elemanın düşey eksen karşılığı
z	: xy düzlemine dik eksen
z_c	: Ağırlık merkezine göre kayma merkezinin koordinatı, (m)
Z	: Ağırlık merkezi
Z'	: Şekil değiştirmiş elemanın ağırlık merkezi
α	: Gövde yüksekliği azaltma oranı
β	: Flanş genişliği azaltma oranı
β_z	: Wagner çarpanı, (m)
Γ, I_w, C_w	: Çarpılma sabiti, (m ⁶)
Γ	: HPM'de Ω çözüm alanının sınırı
δ	: Kiriş ucunun düşey deplasmanı, (m)
Δ_b	: Eleman boyundaki kısalma, (m)
Δ_b	: Eleman uç kesitlerinin alt lifindeki deplasman, (m)
Δ_t	: Eleman uç kesitlerinin üst lifindeki deplasman, (m)
η	: Şekil değiştirmiş elemanda y ekseninin karşılığı
λ	: Lagrange çarpanı
λ	: Narinlik
λ_w	: Enkesitin gövde parçası narinliği
λ_{pw}	: Kompakt gövde parçası için narinlik sınır değeri
λ_{rw}	: Kompakt olmayan gövde elemanı için narinlik sınır değeri
ν	: poisson oranı
ξ	: Şekil değiştirmiş elemanda x ekseninin karşılığı
Π	: Toplam potansiyel enerji, (J)
ζ	: Şekil değiştirmiş elemanda z ekseninin karşılığı
σ_{kr}, F_{cr}	: Kritik gerilme, (t/m ² , N/mm ²)
σ	: Eğilme gerilmesi, (t/m ²)
$\emptyset, \varphi, \theta$: Burulma açısı, (°)
ψ	: Burkulma esnasında elemanın uç kesitlerinin dönmesiyle oluşan açı, (°)
ψ	: Moment azaltma oranı

Kısaltmalar

AAK	: Alüminyum Alaşım Kiriş
ADM	: Adomian Ayrıştırma Metodu

AEM	: Analitik Eleman Metodu
AISI	: American Iron and Steel Institute (Amerikan Demir ve Çelik Enstitüsü)
AISC	: American Institute of Steel Construction (Amerikan Çelik Yapı Enstitüsü)
AS/NZS	: Australian/New Zealand Standard (Avustralya/Yeni Zelanda Standardı)
BS	: British Standard (İngiliz Standardı)
CCFF	: Clamped Clamped (Boundary Conditions) Free Free (Warping Conditions) (Ankastre Ankastre (Sınır Koşulları) Serbest Serbest (Çarpılma Koşulları))
CCRF	: Clamped Clamped (Boundary Conditions) Restrained Free (Warping Conditions) (Ankastre Ankastre (Sınır Koşulları) Ankastre Serbest (Çarpılma Koşulları))
CCRR	: Clamped Clamped (Boundary Conditions) Restrained Restrained (Warping Conditions) (Ankastre Ankastre (Sınır Koşulları) Ankastre Ankastre (Çarpılma Koşulları))
CHFF	: Clamped Hinged (Boundary Conditions) Free Free (Warping Conditions) (Ankastre Mafsalsal (Sınır Koşulları) Serbest Serbest (Çarpılma Koşulları))
CHRF	: Clamped Hinged (Boundary Conditions) Restrained Free (Warping Conditions) (Ankastre Mafsalsal (Sınır Koşulları) Ankastre Serbest (Çarpılma Koşulları))
CHRR	: Clamped Hinged (Boundary Conditions) Restrained Restrained (Warping Conditions) (Ankastre Mafsalsal (Sınır Koşulları) Ankastre Ankastre (Çarpılma Koşulları))
ÇS	: Çözüm Süresi
ÇYY	: Çelik Yapılar Yönetmeliği
DTM	: Diferansiyel Dönüşüm Metodu
EBM	: Enerji Dengesi Metodu
EN	: European Norm (Avrupa Standardı)
EUMF	: Equivalent Uniform Moment Factor (Eşdeğer Üniform Moment Faktörü)
HHFF	: Hinged Hinged (Boundary Conditions) Free Free (Warping Conditions) (Mafsalsal Mafsalsal (Sınır Koşulları) Serbest Serbest (Çarpılma Koşulları))
HHRF	: Hinged Hinged (Boundary Conditions) Restrained Free (Warping Conditions) (Mafsalsal Mafsalsal (Sınır Koşulları) Ankastre Serbest (Çarpılma Koşulları))
HHRR	: Hinged Hinged (Boundary Conditions) Restrained Restrained (Warping Conditions) (Mafsalsal Mafsalsal (Sınır Koşulları) Ankastre Ankastre (Çarpılma Koşulları))
FRP	: Fiber Reinforced Polymer (Fiber Donatılı Polimer)
HAM	: Homotopi Analiz Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
IPM	: İterasyon Pertürbasyon Metodu
KT	: Kaçınıcı Terim
LRFD	: Load and Resistance Factor Design of Single-Angle Members (Köşebentlerin Yük ve Direnç Faktörü Dizayını)
PEM	: Parametre Genişletme Metodu
PM	: Pertürbasyon Metodu
PPM	: Parametrize Edilmiş Pertürbasyon Metodu

SEM : Sonlu Elemanlar Metodu
SY : Sunulan Yöntem
TS : Terim Sayısı
VA : Varyasyonel Yaklaşım
VIM : Varyasyonel İterasyon Metodu



YAPI ELEMANLARININ YANAL VE EĞİLMELİ BURULMALI BURKULMA PROBLEMLERİNİN YARI ANALİTİK YÖNTEMLERLE ANALİZİ

ÖZET

Üniform olmayan çelik elemanlarda eğilmeli burulmalı burkulma ve yanal burulmalı burkulma problemleri için analitik yöntemlerle çözüm elde etmek zor olduğundan bir takım analitik tahmin yöntemlerinin kullanılması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Literatürde yarı analitik yöntemler olarak da adlandırılan bu yöntemler, uygulamalı matematik alanında değişken katsayılı doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde başarıyla kullanılmaktadır. Yapı elemanlarında eğilmeli burulmalı burkulma ve yanal burulmalı burkulma problemlerinde değişken katsayılı ve girişimli, ikili veya üçlü diferansiyel denklem sistemleri ile karşılaşılmaktadır. Yönetici denklemi sabit katsayılı denklem sistemleri olan üniform elemanlar için analitik çözümler elde edilmiştir ve bu çözümler halen tasarım süreçlerinde kullanılmaktadır. Bununla birlikte yönetici denklemi değişken katsayılı denklem sistemleri olan üniform olmayan elemanlar için analitik çözüm elde etmek, belki çok sınırlı durumlar haricinde mümkün olmadığından bu alandaki araştırmalarda çoğunlukla sonlu eleman yöntemi gibi sayısal yöntemler kullanılmaktadır.

Bu çalışmada eğilmeli burulmalı burkulma veya yanal burulmalı burkulmaya maruz kalan üniform olmayan yapı elemanlarının stabilitesi incelenmiş ve kritik burkulma yükleri için analitik çözüm elde etmek amacıyla analitik tahmin yöntemlerinden yararlanılmıştır. Çok sayıda yöntem içerisinden en yaygın kullanılan Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM), Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) ve Adomian Ayırıştırma Metodu (ADM) tercih edilmiştir. Yöntemler literatürde var olan bazı problemlere uygulanarak yöntemlerin etkinliği değerlendirilmiştir. Elde edilen sonuçlar uygulanan yöntemlerin üniform olmayan yapı elemanlarının eğilmeli burulmalı burkulma veya yanal burulmalı burkulma problemlerinde başarıyla kullanılabileceğini göstermiştir. Son olarak Çelik Yapılar Yönetmeliği (ÇYY) de incelenerek, belirli profiller için uygulanan yöntemlerle elde edilen sonuçların yönetmelikle birlikte bir değerlendirmesi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Analitik Tahmin Yöntemleri, Eğilmeli Burulmalı Burkulma, İnce Cidarlı Açık Kesit, Yanal Burulmalı Burkulma, Yarı Analitik Yöntemler.

ANALYSIS OF LATERAL AND FLEXURAL TORSIONAL BUCKLING PROBLEMS OF STRUCTURAL ELEMENTS BY SEMI-ANALYTICAL METHODS

ABSTRACT

Since it is difficult to obtain solutions using analytical methods for flexural torsional buckling and lateral torsional buckling problems for non-uniform structural elements, the necessity of using analytical approximation methods arises. These methods, also called semi-analytical methods in the literature, are successfully used in the solution of linear differential equations with variable coefficients and nonlinear differential equations in applied mathematics. In flexural torsional buckling and lateral torsional buckling problems of structural elements, differential equation systems including coupled double or triple simultaneous equations with variable coefficients are encountered. Analytical solutions have been obtained for uniform elements whose governing equation is a system of coupled linear differential equations with constant coefficients, and these solutions are still used in design processes. However, since it is not possible to obtain analytical solutions for non-uniform elements whose governing equations are coupled systems of equations with variable coefficients, except perhaps in very limited situations, numerical methods such as the finite element method are mostly used in research in this field.

In this study, the stability of non-uniform structural members subjected to flexural torsional buckling or lateral torsional buckling was investigated using analytical approximation methods that were used to obtain analytical solutions for critical buckling loads. Among the many methods, the most widely used ones; Variational Iteration Method (VIM), Homotopy Perturbation Method (HPM) and Adomian Decomposition Method (ADM) were selected. The effectiveness of the techniques was evaluated by applying them to some existing problems in the literature. The results show that the applied methods can be used successfully in flexural torsional buckling or lateral torsional buckling problems of non-uniform structural members. Finally, the Steel Structures Regulation has been examined and the results obtained with the proposed methods applied for certain profiles have been evaluated together with the regulation.

Keywords: Analytical Approximation Methods, Flexural-Torsional Buckling, Open Thin-Walled Cross Sections, Lateral-Torsional Buckling, Semi-Analytical Methods.

GİRİŞ

Çelik yapılarla ilgili tasarımlarda çoğunlukla üniform veya çözümün bulunabildiği çift veya tek simetri eksenli olan klasik kesitler kullanılmaktadır. Oysa günümüzde, yeni tasarımlarda, bunların dışında ince cidarlı açık kesitli üniform veya üniform olmayan elemanların kullanılması da gerekebilmektedir. Bununla birlikte bu tarz elemanlar için araştırmalar yetersiz olup, gerçek çözümler ise neredeyse yok gibidir. Oysa böyle elemanlar daha ekonomik ve daha hafif olabilmekte, özellikle havacılık mühendisliğinde hafif olmak oldukça kritik önem arz etmektedir. Ayrıca inşaat ve makine mühendisliğinde de özellikle üniform olmayan kesitlerin kullanımı giderek yaygınlaşmaktadır. Şartnamelerde ise bu elemanlara ait tasarım kriterleri ya yoktur ya da az olup yetersizdir [1].

Uzun yıllar boyunca basınç elemanlarının basit eğilme burkulması nedeniyle stabilite problemlerinin bozulduğu varsayılmaktaydı. Bu varsayım kalın cidarlı ve kapalı kesitli kolonlar için oldukça makul sonuçlar elde edilmesini sağlamıştır. Bu durumlarda, eğilme burkulmasına neden olan yük genellikle Euler Teorisi ile elde edilmekteydi.

Üniform olmayan ve üniform kesitlerin açık kesit olması durumunda eğilmeli burulmalı burkulma ve yanal burulmalı burkulma bir problem haline gelmektedir. Özellikle soğuk şekillendirilmiş çelik elemanlarda kayma merkezi ile geometrik merkez çakışmadığı için burulmalı burkulma problemi ortaya çıkmaktadır. Açık kesitli kolonların burkulmaları için iki mod bulunmaktadır. Bu kolonlar burulabilir veya aynı anda hem eğilip hem burulabilir. Bu davranışa neden olan esas etken, açık kesitlerde burulma rijitliğinin et kalınlığının küpüne bağlı olarak değişmesidir. Bu nedenle et kalınlığı az olan ince cidarlı açık kesitler düşük burulma rijitliklerine bağlı olarak burulmalı burkulmaya maruz kalırlar ve burkulma yükleri Euler burkulma yükünden oldukça küçüktür.

Değişken açık kesitlerin eğilmeli burulmalı burkulma davranışına ait girişimli diferansiyel denklem sistemi ilk Vlasov [2] tarafından verilmiştir. Üniform açık kesit

olması durumunda söz konusu denklemler Timoshenko ve Gere [3], Chen ve Atsuta [4] ve Yu [5] tarafından verilmektedir. Chajes ve Winter [6] üniform ve simetrik kesitli kolonlar için çeşitli çözümler elde etmiştir. Hone [7] simetrik olmayan kesitleri ele almıştır. Barsoum ve Gallagher [8] açık kesitli elemanların eğilmeli burulmalı burkulmalarının analizi için yaklaşık bir sonlu eleman yöntemi önermişlerdir. Bu çalışmanın da temelini oluşturan çalışmalarında, Eisenberger ve Cohen [9] değişken açık kesitli elemanların eğilmeli burulmalı burkulmalarının sonlu eleman yöntemi ile analizi için bir analitik rijitlik matrisi önermişlerdir.

Yanal burkulma konusunda ilk teorik çalışmalar Prandtl [10] ve Michell [11] tarafından dikdörtgen enkesitli kirişler üzerinde ve Timoshenko [12] tarafından I kirişler üzerine yapılmıştır. Winter [13], Hill [14] ve Galambos [15] çeşitli şekillerin elastik ve inelastik burkulması üzerine yaptıkları çalışmalar bu konuda yapılmış çalışmaların bir kısmını oluşturmaktadır.

Çoğu mühendislik probleminde açık kesitli ince duvarlı elemanlar için analitik çözüm elde etmek zordur. Gerçek çözümlerin kısıtlı olması pek çok nümerik yöntemin problemlerin çözümünde kullanılmasını sağlamıştır. Bu tezde yapı elemanlarının, eğilmeli ve yanal burulmalı burkulma davranışları bazı analitik tahmin yöntemleri ile incelenerek çözümler elde edilmeye çalışılacaktır. Elde edilen bu çözümler, analitik ve diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılıp analitik tahmin yöntemlerinin problemin çözümündeki katkısı hakkında sonuç çıkarılmaya çalışılacaktır. Açık kesitli ince duvarlı yapı elemanlarının burulmalı burkulma davranışını incelemek için bugüne kadar çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Duerr, vinçlerde bulunan kaldırma kirişleri tarzında, askıdaki I kirişinin eğilmeli burulmalı burkulma davranışını incelemiştir. Mesnetli kirişler için geçerli olan eşitliklerde bir düzeltme faktörü uygulayarak çıkan sonuçları yayınlanmış deneysel verilerle kıyaslamıştır [16].

Piotrowski ve Szychowski çalışmalarında mesnetlerde çarpılmaya karşı elastik olarak desteklenmiş iki simetrik I kirişlerin yanal burulmalı burkulmalarına ait teorik araştırma sonuçlarını sunmuşlardır. Burada pratikte karşılaşılan yükleme şekilleri kullanılmıştır. Serbest çarpılmadan tamamen sınırlandırılmış çarpılmaya kadar mesnet noktalarındaki bütün rijitlik olasılıkları dikkate alınmıştır. Kritik momentin

tespiti için enerji metodu kullanılmıştır. Kirişe ait burulma açısı fonksiyonu, yalın fiziksel yoruma sahip, basit kuvvet polinomları ile tariflenmiştir. Nümerik analizler için sembolik dilde yazılmış bilgisayar programları geliştirilmiş ve genel yaklaşım formülleri ortaya konulmuştur. Uçtan levha destekli birleşimler için detaylı hesaplamalar yürütülmüş, programlar ve yaklaşık formüllerle tespit edilen kritik momentler diğer çalışma sonuçları ve sonlu elemanlar metodu (SEM) ile üretilmiş olanlarla karşılaştırıldığında doğruluk derecesi yüksek sonuçlar elde edildiği görülmüştür [17].

Mascolo ve Pasquino çalışmalarında flanşları ve gövdesi z aksı boyunca lineer olarak değişen ince açık kesitli bir C profili kullanılarak konuyu ifade eden ana eşitlikler elde edilmiştir. Kesitin değişken yapısı sebebiyle, elde edilen eşitliklerin karmaşık ve uzun olması kaynaklı, gerçek kritik yükün bulunmasını sağlayacak nümerik çözümdeki zorluktan dolayı, minimum total potansiyel enerji (Ritz-Rayleigh metodu) teorisi vasıtasıyla çözüm için etkili bir formülasyon verilmiştir. Sonuç olarak çalışılan modele deneysel doğrulama sağlayan bir çalışma umulmuştur [18].

Kovac sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan sonuçları referans kabul ederek Gol'denvejer tarafından 1941 yılında geliştirilen yaklaşım metodu ile ince duvarlı bir açık kesitli profilin eğilmeli burulmalı burkulmasına sebep olan kritik eksenel yükün tespit edilmesini çalışmıştır [19].

Aydın ve Doğan çalışmalarında köşebentleri dikkate almışlardır. İnce cidarlı ve narin yapılar olarak addedilen köşebentler, genellikle yüklenme şekli sebebiyle, eş zamanlı olarak çift eksenli eğilmeye maruz kaldıklarından, çözümlerinde elastik ve plastik moment kapasitelerinden başka yerel burkulma ve yanal burulmalı burkulma davranışlarının da dikkate alınması gerekir. İkincil akstaki eğilme momentinin birincil akstakinden küçük veya eşit olduğu farz edilerek, elastik eğilme momenti kapasiteleri ile plastik eğilme momenti kapasiteleri ve kritik yanal burulmalı burkulma moment etkileşim diyagramları hesaplanmıştır. Bu değerler boyutsuz katsayılar vasıtasıyla elde edilmiş ve köşebentlerin yük ve direnç faktörü dizaynı (load and resistance factor design of single-angle members) LRFD kurallarını hesaba katan dizayn prosedürleri verilmiştir [20].

Park, Stallings ve Kang, üst başlıktan desteklenmiş ve uç momentleri ile birlikte üst başlığında düzgün yayılı yük bulunan çelik bir I kesitinden oluşan sürekli bir kirişi incelemişlerdir. Öncelikle burkulma analizleri SEM ile yürütülmüştür. Aşına olunan moment gradyan faktörleri gözden geçirilmiş ve SEM sonuçları ile kıyaslanmıştır. Köprü ve binalarda sıkça kullanılan bu tür yapılar için SEM'in sonuçları kullanılarak yeni moment gradyan faktörleri üretilmiş ve mevcut dizayn metotlarını iyileştiren yeni bir eşitlik önerilmiştir [21].

Serna, Lopez, Puente ve Yong makalelerinde elastik kritik momentin hesabında kullanılan "equivalent uniform moment factor" (eşdeğer üniform moment faktörü) (EUMF)'nün hesabına odaklanılmıştır. Çelik yapı Standartlarında verilenlerle son zamanlarda hesaplamalı yöntemlerle bulunan EUMF değerleri arasındaki çelişkilere açıklık getirmek maksadı ile sonlu farklar yöntemi ve SEM ile bulunmuş dikkate değer bir EUMF değer seti çalışmada sunulmuştur. Az çalışma bulunan, mesnetlerde yanal eğilme ve çarpılmanın önleendiği örneklere öncelik verilmiştir. Ayrıca çalışma Amerikan ve İngiliz standartlarının aksine mesnetlerdeki sınırlamaları da dikkate alan ve mevcut faktörleri geliştiren genel bir formata sahiptir [22].

Larue, Khelil ve Gueury çalışmalarında rijit ve sürekli yatay hareket sınırlamalı çelik bir kirişin elastik burkulmasının basit bir modeli geliştirilmiştir. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için bir sayısal prosedür önerilmiştir. Kirişte oluşan elastik burkulma üzerinde moment dağılımının ve sürekli yatay hareket sınırlamasının etkileri de çalışılmış ve dizayn için yaklaşımlar ve prosedürler geliştirilmiştir. Gerilen bölgede uygulanan baskının, yanal burkulmayı sınırlamada yeterli olmadığına vurgu yapan makalede, önerilen çözümün kullanımı iki örnek ile gösterilmiştir [23].

Zhang ve Tong makalelerinde gövde yüksekliği tedricen azalan I kesitler için yeni bir teori sunulmuştur. Burada deformasyon şekli ince cidarlı elemanlarınkine benzediğinin basit bir varsayımı ile gövdesi daralan I kesitlerde daralmanın etkisini dikkate alan lineer analizler yürütülerek yanal burkulma analizi için toplam potansiyel geliştirilmiştir [24].

Taras ve Greiner, zayıf aksın eğilmeli burkulmaya karşı yanal olarak desteklendiği I kesitlerde burkulmanın destek noktası etrafında burulmalı olarak

gerçekleşebildiğinden bahisle bu tip burkulmalarda oluşan spesifik burkulma modlarının sunumu ve geliştirilmesi üzerine odaklanmışlardır. Çalışma malzemedeki lineer olmama, geometrik düzensizlik ve artık gerilmeleri dikkate alan nümerik simülasyonlar üzerine bina edilmiştir. Burulmalı burkulma için bir Avrupa Standardı olan ve çelik yapıların dizaynı ile alakalı Eurocode 3 Bölüm 1.1’de verildiği şekliyle zayıf aks burkulması katsayıları kullanıldığında birçok durumda oldukça makul sonuçların elde edildiği de görülmüştür [25].

Cheng, Kim ve Li, ana ve tali aksında birleşik basınç ve eğilme etkisindeki soğuk şekillendirilmiş bir U kesitinin eğilmeli burkulması ve yanal burulmalı burkulması üzerine analitik bir çalışma yürütmüşlerdir. Birleşik basınç ve ana eksen eğilmesine maruz kalan bir kesit için, kesitteki en büyük basınç gerilmesinin kritik değeri uygulanan eğilme momenti ile birlikte, gerçekte, artmasına rağmen, eğilme momenti kritik basınç yükünü aşağı çekecektir. Bununla birlikte birleşik baskı ve tali eksen eğilmesine maruz bir kesitte eğilme momentinin kritik basınç yükü üzerindeki etkisi eğilmenin uygulandığı yöne bağlıdır [26].

Yuan, Kim ve Chen makalelerinde düzgün yayılı yük ile uçta bir tekil yük etkisinde bulunan ve uca doğru gövdesi lineer daralan konsol bir T kirişte yanal burulmalı burkulmayı tanımlamak için bir analitik model sunulmuştur. Analitik sonucu kıyaslamak için ANSYS yazılımını kullanan bir SEM çalışması da kullanılmıştır. Genişlik/derinlik oranı 0,96 olan geniş başlıklı, uca doğru gövdesi azalan konsol bir T kirişte kritik burkulma yükü %2 artarken 0,19 oranına sahip dar başlıklı bir kirişte kritik burkulma yükü, yayılı yükte %6, tekil yükte %10 kadar düşmektedir [27].

Amit ve Durgesh, geometrik aks boyunca etkiyen, eğilme yükleme modelleri için eşit kollu köşebentleri analiz etmişlerdir. Değişik yükleme şekilleri ile üniform, üçgensel, çift eğrili ve parabolik eğilme momentleri üretilmiştir. Yükleme yönlerinde ve kısmi veya bütünde narinlik oranlarında çeşitli varyasyonlar, malzemesel ve geometrik lineer olmama kusurları düşünülerek normalize edilmiş moment eğrileri elde edilmeye çalışılmıştır. Bu eğriler American Institute of Steel Construction (Amerikan Çelik Yapı Enstitüsü) AISC spesifikasyonlarının hükümleri ile karşılaştırılarak kritik burkulma yükünün üst limitinin geçerliliğinin ispatlanmasına çalışılmıştır. Çift ve tek simetrik enkesitlerin yanal burulmalı burkulmasının limit

durumu için dizayn esasları geliştirmek amacıyla Hint standartları kullanılmış, önerilen dizayn esasları AISC ile kıyaslanmış ve güvenli oldukları bulunmuştur [28].

Küçükler, Gardner ve Macorini, makalelerinde çelik kirişlerin yanal burulmalı burkulması için geliştirilmiş rijitlik düşürme fonksiyonlarını kullanan, lineer burkulma analizlerini kullanışlı hale getiren bir rijitlik düşürme analizi yaklaşım metodunu irdelemişlerdir. Önerilen rijitlik düşürme metodu, malzemenin elastisite modülü ve kayma modülünde azalma doğrultusunda etkiye sebep olan malzemedeki kusurlar ve plastiklik etkisini dikkate alır ve dizaynda yanal burulmalı burkulma eğrilerini kullanma ihtiyacını ortadan kaldırır. Metodun yeterliliği ve pratik kullanımı düzenli, düzensiz, tek ve çok gözlü kirişler üzerinde gösterilmiştir. Sonuçlar, doğrusal olmayan sonlu elemanlar modellemesi ile bulunan değerler ile karşılaştırılmıştır [29].

Mohri, Damil ve Potier-Ferry tek simetri eksenli kesitlerde eksenel yüklerin yanal burkulma üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Yanal burkulma momenti-eksenel yük etkileşimi için özgül bir kapalı form teşkil edilerek lineer olmayan stabilite modeli ile yeni bir eşitlik türetilmiştir. Sonuçlar SEM sonuçları ile karşılaştırılmıştır [30].

Orloske, Leamy ve Parker çalışmalarında tahrik kayışları, iletim bantları, şerit testereler gibi, iki düzlemde çok büyük eğilme rijitliği farkı olan, küçük en boy oranına sahip kirişler dikkate alınmıştır. Aks yönünde harekete sahip bu kirişlerde, uçlardaki ayarsızlık etkisiyle, büyük eğilme rijitliğine sahip düzlemde, üç boyutlu burkulma durumuna ulaşan bir eğilmeli burulmalı burkulma tecrübesi yaşanır. Aktarım hızı arttıkça, uçlardaki ayarsızlığın eğilmeli burulmalı burkulmanın üzerindeki etkisi azalmaktadır [31].

Khelil ve Larue çalışmalarında tek flanşta desteklenmiş kirişlerin yanal burkulmasının analizi için bir metot tanıtılmıştır. Deforme hali, Galerkin metodu ile çözülen bir diferansiyel eşitlikler sistemi ile temsil edilmiştir. Burkulma yükü ve burkulma şeklinin belirlenmeye çalışıldığı çalışmada elastik eğilmeli burulmalı burkulma üzerinde moment dağılımının ve destekleyicilerin etkisi de çalışılmıştır. Sonuçlar desteklenmiş gerilme flanşının kritik burkulma momenti üzerinde zayıf bir etkisinin bulunduğunu göstermiştir [32].

Pi ve Bradford makalelerinde, lineer değişimli ısı dağılımını etkisinde olan ve uçlarda genleşme ve dönmelere karşı sınırlanmış bir kirişte, kısıtlanan genleşme ve dönmelerin kiriş bünyesinde iç bükülmeler ile sıkıştırıcı etkiler ortaya çıkaracağını ve bu etkilerin, lineer değişimli ısı alanındaki ısı farkları ve ortalamadaki artışlar ile artacağını belirtmişlerdir. Bu etkiler kritik değere ulaştığında bu sabitlenmiş kiriş durumu burkulmuş kiriş durumuna meyledebilir. Çalışmada, enkesitinde lineer değişimli bir sıcaklık dağılımını etkisinde bulunan ince duvarlı, çift simetri eksenli bir enkesitin termo-elastik yanal burulmalı burkulma ve düzlemde termo-elastik eğilmeli burkulma analizlerinde sistematik bir iyileştirme sunulmuştur. Burkulma öncesi ve sonrası analizlerde geometrik kütle merkezi ve kayma merkezi yerine tercihen efektif kütle merkezi ve kayma merkezinin kullanılması ve ısı etkisinin burkulma direnci üzerindeki etkisinin dikkate alınması gerektiği gösterilmiştir [33].

Vo ve Lee; rastgele şekilli, ince cidarlı, açık kesitli kompozit kirişlerde, titreşim ve burkulmanın eşlik ettiği eğilmeli burulmanın analizi için kesme-deformasyon teorisi üzerine bina edilmiş genel bir analitik modelin çalışmasını yapmışlardır. Bu model malzeme anizotropiğinden gelen yapısal bağlantıları da hesaba katar. Hamilton prensibinden eğilmeli-burulmalı-kesme vibrasyonu birleşimli durum için yedi adet olayı temsil eden diferansiyel eşitlik türetilmiştir. Kayma deformasyonu, lif yönelimi ve doğal frekanslardaki eksenel kuvvet, yük-frekans etkileşim eğrileri, karşılık gelen mod şekillerinin etkilerini incelemek için sayısal sonuçlar elde edilmiştir [34].

Erkmen ve Attard makalelerinde ince duvarlı açık kesitli kirişlerin yanal burulmalı burkulma davranışlarını, kesme deformasyonlarının etkisini göz önüne alan, geometrik olarak lineer olmayan bir formülasyonla incelemişlerdir. Artımlı-yinelemeli analiz prosedürüne sahip bir SEM nümerik çözümü, burkulma sonrası denge eğrisi kadar burkulma öncesi durumu ortaya çıkarmak için tatbik edilmiştir. Sonuçların, ayrıca, deneysel verilerle ve literatürde mevcut diğer çalışmaların sonuçlarıyla da karşılaştırma yolu ile doğrulandığı çalışmada, tamamen lineer olmayan analizler ve lineerleştirilmiş burkulma analizlerinden elde edilmiş sonuçlar ile burkulma öncesi deformasyonlar ve kayma deformasyonlarının, burkulma yükünün tahmin edilmesindeki etkisini irdelemişlerdir [35].

Lei ve Li makalelerinde, enine yayılı yük etkisinde bulunan ve kısmen desteklenmiş I kesitli kirişlerde yanal burulmalı burkulma ile kesit çarpılması arasındaki etkileşim için bir analitik model sunulmuştur. Rayleigh-Ritz metodunun kullanıldığı çalışmada sistemin toplam potansiyel enerji fonksiyoneli, katı cisim mekaniğindeki üç boyutlu gerilme-şekil değiştirme ilişkisi kullanılarak türetilmiştir. Sonlu elemanlar yönteminin de kullanıldığı çalışmada, analitik ve nümerik sonuçların karşılaştırılması, kullanılan modelin basitliğine karşın sonuçlardaki doğruluğunu ve kesinliğini göstermiştir [36].

Stump, Champneys ve van der Heijden tarafından, belirlenmiş teğet bir burulmaya maruz bırakılan, basitçe mesnetlenmiş ve yerçekimi etkisi altında bulunan belirli uzunluğa sahip bir çubuk problemi asimptotik ve nümerik metotlar kullanılarak çalışılmıştır. Teğet burulma momentinin etkisi arttırıldıkça deformasyonların yerelleşebildiği ve çubuğun iç içe geçmiş bir kıvrımlı bir şekle sıçrayabildiği görülmüştür [37].

Orloske ve Parker, uçlarda sapma bulunan aktarım kirişlerinde, üç boyutlu kararlı hareket altında, titreşim ve denge karakteristiklerine değinmişlerdir. Çalışmanın birinci bölümünde iki düzlemdeki eğilmeler, burulma ve uzamalar için sistem modellenmesi ve denge çözümleri sunulmuştur. Stabilite, düzenli harekete ait eşitliklerin lineerleştirilmesi ve sonlu fark ayrıklaştırmasını kullanan özdeğerlerin hesaplanması ile incelenmiştir. Uçlardaki sapma olmama durumu için hesaplanan özdeğerler bilinen değerlerle karşılaştırılmıştır. Kirişte sapma olduğu durumda, sistem önce düzlemsel bir konfigürasyona girer ve sonuçlar ilk çatallanma noktasından sonra düzlemsel dengede bir stabilite kaybını ortaya koyar. İlk çatallanma noktasından sonra düzlemsel dengenin özdeğer davranışının aktarım hızından kuvvetli bir şekilde etkilendiği gösterilmiştir [38].

Garcia, Sanyal, Fatemifar, Mottahedi ve Han, damarların sık bir şekilde burkulmaya maruz kaldıklarını ve burkulmuş damarlarda kan akışının kesilebildiği veya azalabildiği ifade edilerek, burkulma altındaki damarların mekanik davranışlarının çok az bilindiğini ifade etmişlerdir. Bunu anlamayı amaçlayan çalışmalarında, damarların burkulma altındaki mekanik davranışları iki lifli bir gerinim erki yoğunluk fonksiyonu ile karakterize edilmiş ve sonlu elemanlar yöntemini kullanan

bir simülasyon ortaya konmuştur. Ani kramp altında oluşan aşırı tork neticesinde bütün damarlarda burkulmanın oluşabildiğini gösteren çalışmada, damar lümen basıcının kritik burkulma yükünü önemli derecede etkilediği sonucuna varılmıştır [39].

Chroscielewski, Lubowiecka, Szymczak ve Witkowski ilk olarak, ince cidarlı, basit mesnetli I kesitli kolon-kiriş elemanda başlangıç deformasyonunun burulmasal burkulma yükü üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Pertürbasyon yaklaşımları ile kritik yük incelenmiştir. Buradan elde edilen veriler, kabukların lineer olmayan 6 parametrelili teorisiyle bulunan sonuçlarla kıyaslanmıştır. İkinci aşamada, yerel burkulma modlarının lokalizasyonu çalışılmıştır. Kabuk teorisi ile çalışma esnasında gözlemlenen bu etki, özellikle geniş flanşlı I kolonların davranışlarını kuvvetli bir şekilde etkilediği tespit edilmiştir [40].

Lee ve Kim aksenal yüklü, ince duvarlı lamine bir kompozit elemanın burkulmasını çalışmışlardır. Eğilme, burulma ve eğilmeli-burulmalı burkulmada uygulanabilir bir analitik model geliştirmişlerdir. Bu model, klasik laminasyon teorisi üzerine bina edilmiş olup, simetrik, asimetrik ve çeşitli sınır koşullarından oluşan, rastgele katman istifleme sıralamalı yapılandırılmalar için eğilmeli ve burulmalı modları hesaba katmaktadır. Deplasman tabanlı, tek boyutlu bir SEM modeli kritik yük ve burkulma şekillerini tahmin etmek için geliştirilmiştir [41].

Andrade, Camotim ve Dinis makalelerinde, ön burkulmaya ait şekil değiştirmelerini de hesaba katan, tek simetrikli, boyuna yönde kesiti lineer değişen, ince duvarlı, açık kesitli kirişlerin elastik yanal burulmalı burkulma davranışını karakterize eden tek-boyutlu modelin performansını ve temel kabullerini irdelemişlerdir. Tek-boyutlu model ve iki-boyutlu kabuk sonlu eleman analizleri (referans sonuçları) ile üretilmiş kritik yük faktörleri ve burkulma modlarının bir çalışması sunulmuş ve kıyaslanmıştır. Konsol ve basit mesnetli kirişlere ait sonuçlar; (i) üniform veya lineer şekilde değişen gövdeli, (ii) eşit veya eşit olmayan üniform flanşlı, (iii) uçta veya ortada tekil yüklü durumlar için sırasıyla üretilmiştir. Genel olarak tek-boyutlu model sonuçlarının, kabuk sonlu eleman sonuçları ile uyduğu tespit edilmiştir [42].

Andrade, Providencia ve Camotim bu makalede, farklı şekillerde yanal harekete karşın sınırlandırılmış gövde yüksekliği lineer azalan kirişlerin elastik yanal

burulmalı burkulma davranışları üzerine bir inceleme yapmışlardır. Bir uç yükü etkisinde bulunan, çift simetrikli, gövdesi lineer değişen konsoldan oluşan bir model problemi vasıtasıyla, ince cidarlı, gövdesi lineer olarak değişen kirişlerde elastik burkulma davranışını karakterize etmek için daha önceden yazarlar tarafından geliştirilen tek-boyutlu modelde, lineer olarak elastik veya rijit sınırlayıcıların etkisinin nasıl hesaba dahil edilebileceği gösterilmiştir [43].

Papangelis, Trahair ve Hancock, eğilmeli-burulmalı burkulmayla ilgili bilgilerin, genellikle, hareketi sınırlanmamış çelik kirişlerin ve kiriş-kolonların tasarımını ilgilendirdiğini, elastik burkulma hakkında birçok bilgi kaynağı olmasına rağmen, bunların kapsamlı olmadığını ve genellikle ulaşılmasının güç olduğunu belirtmişlerdir. Bu makale, geniş bir yelpazedeki kirişlerin, kiriş-kolonların ve düzlem çerçevelerinin elastik eğilmeli-burulmalı burkulma analizi için bilgisayar programı PRFELB'yi, tek kapsamlı bilgi kaynağı şeklinde tarif etmekte ve örneklendirmektedir. PRFELB'in, menüleri ve veri girişi konusunda yol göstericiliği ile kullanıcı dostu bir bilgisayar programı olduğu vurgulanarak; grafiklerinin, geometriyi kontrol etmek ve burkulma şekillerini görüntülemek için kullanılabildiği programın, standartlar doğrultusunda, burkulma analizlerini kullanan dizayn metodlarının geliştirilmesinde yardımcı olacağı belirtilmektedir. Program ilk olarak bir çerçevenin düzlemi içerisindeki davranışının birinci dereceden analizini yapmakta, sonrasında bu sonuçlarla, aynı çerçevenin, düzlemi dışında elastik eğilmeli-burulmalı burkulma davranışını bir sonlu eleman analizinde incelemektedir [44].

Gu ve Chan eksenel-eğilmeli, yanal-burulmalı ve eksenel burulmalı burkulmalara imkan veren uzay kiriş-kolon elemanlarının geometrik olarak lineer olmayan analizi için bir teğet rijitlik matrisinin tutarlı bir formülasyonunu önermişlerdir. Önerilen formülasyonda, eksenel kuvvet ve momentlere maruz kalan üç boyutlu uzay çerçevelerinde, bir dereceye kadar büyük rotasyonlar için, üç deformasyon matrisi elde edilmiştir. Bu matrisler eksenel, yanal ve burulma deformasyonları arasında bağlantı içeren, eleman deformasyonlarının fonksiyonları şeklindedir. İhmal edilebilir çarpılma etkileri içeren uzay çerçevelerin büyük şekil değiştirme davranışlarını çalışmak için önerilen matrisler, kiriş elemanlarına ait lineer ve geometrik rijitlik matrisleri ile birlikte kullanılmışlardır. Sayısal örnekler, bir ögeyi

modellemek için az sayıda eleman kullanılsa dahi, lineer olmayan uzay çerçeve davranışlarını öngörmek için tavsiye edilen formülasyonun etkili ve kesin sonuç verdiğini göstermiştir [45].

Benyamina, Meftah, Mohri ve Daya çalışmalarında çift simetrik, lineer gövde azalmalı ince duvarlı kirişlerin elastik yanal burulmalı burkulma davranışı incelenmiştir. Amaca ulaşmak için, yeni önerilmiş bir kinematik model doğrultusunda, büyük burulma bağlamı lineer olmayan bir model geliştirilmiştir. İlk olarak, hakim elastik denge eşitlikleri durağan durumdan alınmıştır. İkinci olarak, Ritz metodu cebirsel denge eşitlikleri türetmek için kullanılmıştır. Bu sistemden, klasik rijitlik terimlerinin, etki eden dış yükün düzeydeki etki noktasının ve gövde yüksekliğinin değişim parametresinin fonksiyonu şeklinde bir analitik formül önerilmiştir. Önerilen formül, sonlu eleman simülasyonu ile karşılaştırıldığında, basit olduğu ve doğru sonuç verdiği görülmüştür. Bu amaçla doğrulama işlemi bazı nümerik örnekler sunulmuştur [46].

Gunalan, Heva ve Mahendran soğuk haddelenmiş çelik kolon elemanlarının kapasiteleri için güncel dizayn kurallarının, hem ankastre hem de sabit mesnetli durum için ortam sıcaklığında, kolonlara ait boyutsuz mukavemet eğrisi üzerine kurulduğunu belirtmişlerdir. Avustralya/Yeni Zelanda (AS/NZS 4600), Amerikan (AISI S100) ve Avrupa (Eurocode 3 Part 1.3) standartları çerçevesinde verilen mevcut ortam sıcaklığı kurallarının doğruluğunu; uygun bir şekilde azaltılmış mekanik özellikler kullanılarak, üniform olarak artırılan sıcaklıklarda, soğuk haddelenmiş çelik kolonların eğilmeli burulmalı burkulması üzerinde ele almışlardır. Bu dizayn kurallarının basit mesnetli kolonların kapasitelerinin belirlenmesinde doğru sonuç verdiği gösterilmiştir. Bununla birlikte, eğilmeli burulmalı burkulma esnasında ankastre mesnetlerdeki çarpılma dayanımı için, mevcut dizayn kuralları bu faydalı kapasiteye değer vermediklerinden, hesaplanan kolon kapasiteleri de dikkate değer şekilde gerçek kapasitenin altında kalmaktadır. Makale, bu yüzden, AS/NZS 4600 ve AISI S100 hükümleri altında ortam sıcaklığı için revize edilen dizayn kurallarının, yüksek sıcaklık altında ankastre mesnetli kolonların basınç kapasitelerinin tespitinde kullanılmasını önermektedir. Önerilen metodun doğruluğu sonlu eleman analiz sonuçları ile ispatlanmıştır [47].

Küçükler, Gardner ve Macorini makalelerinde, ana eksen eğilmesi ve eksenel basınca maruz bir çelik kiriş-kolon elemanın eğilmeli burulmalı burkulma hesabı için bir rijitlik azaltma metodu sunmuşlardır. Metotta geliştirilmiş bir rijitlik azaltma fonksiyonunda, elastisite modülü ile kayma modülü düşürülmüş ve lineer burkulma analizi yürütülmüştür. Burkulmadan önceki tetikleyici ikinci dereceden kuvvetleri hesaba katmak için, elemanın düzlemi içindeki ve dışındaki burkulma analizleri ayrı tutulmuş ve düzlem dışı stabilite bozulma analizi, düzlem içi hesaplanan kuvvet tabanı üzerine kurgulanmıştır. Kesit kusurları ve plastisite yayılmasının zararlı etkisini dikkate alan metot, eleman dizayn eşitliklerine ihtiyaç duymadığından, pratik bir dizayn usulü sağlamaktadır. Sonuçların geçerliliğinin doğrulaması için, çok sayıda tek veya çok açıklıklı kiriş-kolon için elde edilen sonlu elemanlar metodu sonuçları kullanılmıştır [48].

Plaut ve Eatherton, orta kısmı dar, kenarlara doğru genişleyen simetrik şekilli, sabit kalınlıklı dikdörtgen kesitli bir elastik kirişin, yanal burulmalı burkulmasını analiz etmişlerdir. Bu tip kelebek şekilli kiriş, binaların sismik tepkisini azaltmak için bir yapısal sigorta gibi çalışan çelik plakalar içinde bir kesme linki olarak kullanılmaktadır. Yanal burulmalı burkulma önceki kuazi statik testlerde gözlemlenmiş olup kritik bir sınır durumunda gerçekleşeceği tespit edilmiştir. Uçların burulmaya karşı desteklendiği ve zayıf doğrultuda mafsallı oldukları kabul edilebilir. Üniform burulma esaslı bir shooting metodu kullanılarak yanal burulmalı burkulma için nümerik sonuçlar elde edilmiştir. Basit eğilme, zıt momentler ve farklı büyüklüklerdeki uç momentleri ilk etapta incelenmiştir. Ardından bir basınç yükü dahil edilerek, eksenel yük-moment kombinasyonu için etkileşim eğrileri incelenmiştir. Son olarak düzlemdeki kayma deformasyonunun yanal burulmalı burkulma üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Geometri ve malzeme miktarları bağlamında kritik moment için bazı analitik yaklaşımlar vasıtasıyla çeşitli parametrelerin etkisini gösteren sonuçlar çalışmada sunulmuştur [49].

Xiao, Doudak ve Mohareb makalelerinde, gerçek ölçekli ahşap kirişlerin yanal burulmalı burkulma kapasitelerinin tahmini için hem sayısal hem de deneysel çalışmaların sonuçlarını göz önüne koymaktadırlar. Çalışmada 5 adet 38x184x4200 mm ebadında ladin, 6 adet 38x235x3600 mm ebadında çam ve 7 adet 38x286x4200 mm ebadında köknar olmak üzere toplamda 18 parça kiriş elemanı kullanılmıştır.

Her bir eleman için öncelikle tahribatsız deneyler vasıtasıyla kayma ve elastik modülleri araştırılmıştır. Ardından, tüm elemanların elastik yanal burulmalı burkulma kapasitesini tespit etmek için tam ölçekli bir eğilme testi uygulanmıştır. Kapasiteler, deneysel olarak bulunmuş olan kayma ve elastisite modülleri kullanılarak geliştirilen 3 boyutlu bir sonlu elemanlar modeli ile de tahmin edilmeye çalışılmıştır. Deneysel sonuçlar ile doğrulanan model sonuçlarının, özellikle basit mesnetli kirişlerde Eurocode hükümleri ile uyumlu olduğu görülmüştür. Bununla birlikte konsol kirişlerde, alttan yüklemeli durumlarda Eurocode hükümleri ile uyumlu iken, üstten yüklemeli durumlarda uyumsuz olduğu saptanmıştır [50].

Rasheed, Ahmadi ve Abouelleil, basit eğilme etkisi altında dikdörtgen kesitli ince duvarlı anizotrop hibrit (çelik-fiber donatılı polimer (fiber reinforced polymer (FRP))) basit mesnetli kirişler için ana eşitliklerin türetilmesinde klasik lamine teorisini baz alan genelleştirilmiş bir analitik yaklaşım geliştirmişlerdir. Dikkate alınan kiriş belli sayıda anizotrop FRP tabaka ile bir adet izotrop çelik tabakadan oluşturulmuştur. İzotropik çelik; (i) FRP tabakalarından oluşan sandviç yapının tam ortasında, (ii) kirişin dış yüzünde kullanılmıştır. Yanal hareket, burulma ve kompozitin bütününe ait rijitlik katsayıları bağlamında kapalı form bir burkulma ifadesi türetilmiştir. Kirişin stabilitesi çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri altında çalışılmıştır. Sonuçlar farklı lamine oryantasyonu için ABAQUS'u kullanan SEM sonuçları ile karşılaştırıldığında mükemmel doğruluklar elde edilmiştir [51].

Kang ve Bert, kemer yapıların çarpılma etkisi de dahil, eğilmeli burulmalı burkulmasına ait öz değerlerin hesabında diferansiyel kuadratür metodunu kullanmışlardır. Kritik yükler, çeşitli sınır koşulları ve açılma açıları için aynı düzlemdeki üniform yayılı radyal yük veya zıt yönlü eşit eğilme momentleri etkisi altındaki tek açıklıklı geniş başlıklı bir kemer yük için hesaplanmıştır. Daha önceden elde edilmiş kesin ve nümerik sonuçlarla yapılan karşılaştırmalarda sınırlı sayıda karelaç olsa dahi iyi neticeler elde edildiği görülmüştür [52].

Zhang ve Tong makalelerinde, önceki çalışmalarının ince duvarlı kirişlerin eğilmeli burulmalı burkulma davranışlarının araştırılması için, aralarında küçük farklar bulunan iki teoriyi açığa çıkardığını, bu teorilerin tek simetrik kesitli basit mesnetli kirişlerin kritik yüklerinin tespitinde iki farklı çözüme öncülük ettiğini ifade ederek

bu iki çözüm ile bu tip kirişler için kritik yüklerin hesabında dikkate değer farklılıklar çıkabileceğini belirtmişlerdir. Bu makalede, yazarlar tarafından, ince duvarlı elemanların eğilmeli burulmalı burkulma davranışı için klasik varyasyon prensibine dayanan yeni önerilen bir teori ve yukarıda zikredilen iki teori konsol kirişlerin eğilmeli burulmalı burkulmasının incelemesinde kullanılmıştır. Basit eğilme ve iki tipik enine yük etkisi altında konsol kirişlerin incelemesi her üç teori ile yapılmış ve farklılıklar gösterilmiştir. Mevcut çalışmalar ve SEM analizleri ile karşılaştırmalar yapılarak kullanım kolaylıkları ve sonuçların doğruluğu yönünden kıyaslamalar yapılmıştır [53].

Ruta, Varano, Pignataro ve Rizzi, simetrisi olmayan kesitlere sahip ince duvarlı elemanların eğilmeli burulmalı burkulmasını tanımlayan bir kiriş modeli sunmayı amaçlamışlardır. İki kirişin çalışıldığı makalede kesit ve iki akstan birinin arasındaki kesme deformasyonun olmadığı farz edilmiş; çarpılmanın burulmada lineer olduğu kabul edilmiştir. Standart lokalleştirme ve statik pertürbasyon teknikleri kullanılarak lineer olmayan hiperelastik ana ilişkiler tanıtılmış, eğilmeli burulmalı burkulmayı tanımlayan alan eşitlikleri tanımlanmıştır. Temsili bir örnek verilmiş ve kirişin ucundaki çeşitli çarpılma kısıtlayıcıları kullanılarak kritik yük için bazı sayısal değerler sağlanmıştır [54].

Challamel ve Wang, ortasından ve ucundan dik tekil yük etkisi altında bulunan şerit konsol kirişlerin yanal burulmalı burkulması için tam stabilite kriteri sunmuşlardır. İki boyutlu stabilite alanını Bessel fonksiyonları bağlamında kapalı-form çözümleri şeklinde vermişlerdir. Dışbükey denge bölgesi limiti orta yük uca doğru yaklaşıkça Dunkerley eğrisine benzeme yönünde eğilim gösterdiğinden bahisle orta ve uç arasındaki mesafe yeteri derecede geniş olduğu zaman Dunkerley eğrisinin uygun olmaktan uzaklaştığı belirtilmiştir. Burkulma yükünün çabuk tahmini için yaklaşık bir formül seti önermişlerdir [55].

Wu ve Mohareb, makalelerinde ince duvarlı elemanların burkulma analizleri için sabit potansiyel enerji prensibi üzerine kurulu bir varyasyonel formülasyon geliştirmişlerdir. Formülasyon ortogonal olmayan koordinat sistemine bağlı olarak oluşturulmuş ve çarpılma ile eğilme kaynaklı kayma deformasyonunu yansıtmaktadır. Genel akssal ve enine yüklere maruz çift simetri eksenli enkesite

sahip elemanlara uygulanabilen ve doğal olarak yükün kayma merkezine olan konumuna bağlı etkisini kapsamaktadır. Sabit dengenin koşullarını varyasyonel ifadelerle uygulayarak, sabit dengenin diferansiyel eşitlikleri ve sınır koşulları oluşturulabilir. Elde edilen alan eşitlikleri kolon eğilmeli burkulması, kolon burulmalı burkulması ve kirişlerin yanal burulmalı burkulmaları ölçüt durumları için tam olarak çözülmüş ve sonuçlar klasik ve diğer modern teoriler üzerine kurulu kapalı form çözümleri ile karşılaştırılmıştır [56].

Wu ve Mohareb, makalelerinde bir üstteki makalede [56] yapılan çalışmayı bir sonlu eleman metoduyla formüle ederek çift simetriye sahip elemanların burkulma analizini yapmışlardır. Bir seri örnek ile yakınsama karakteristikleri ve geniş çeşitlilikteki problemlerde yöntemlerinin kullanımını göstermişlerdir. Örnekler, kolonların eğilmeli burkulmasını, dereceli değişen moment etkisi altındaki kirişlerin yanal-burulmalı burkulmasını, eksenel yük ve moment kombinasyonu altındaki elemanları burkulmasını, eksantrik desteklenmiş elemanları kapsamaktadır. Bütün durumlarda çözümlerin geçerliliği, iyi kurgulanmış kapalı-form ve diğer nümerik çözümlerle kıyaslanarak test edilmiştir [57].

Sapkas ve Kollar makalelerinde tekil yükler, momentler ve düzgün yayılı yük etkisinde bulunan ince duvarlı açık kesitli ortotropik kompozit basit mesnetli ve konsol kirişlerin stabilite analizlerini çalışmışlardır. Analizlerde hem enine kesme hem de kesme deformasyonu üreten sınırlandırılmış çarpılma hesaba katılmıştır. Yanal burulmalı burkulma için bir açık ifade türetilmiştir. Burkulma yükünde kesme deformasyonunun azaltıcı etkisini, yaklaşık, gösteren bir basit ifade de ortaya konulmuştur. Bu kesme deformasyonunun etkisinin ihmal edilebilirliği yönünde karar vermede yardımcı olmaktadır [58].

Ferretti, D'Annibale ve Luongo'nun bu makalelerinde uçta eksenel bir yüke maruz konsol metal levha bir kirişin salınım ve burkulma davranışı sergilenmiştir. Eğilme ve burulma davranışına eşlik etmesi için kiriş, içte ve dışta sönümlü olarak kılınmış ve kendi eksenine eksantrik olarak konumlandırılmış bir doğrusal yay sönümleyici ile uçta mesnetlenmiştir. Tam bir lineer stabilite analizi yürütülmüş ve ufak doğrusal konfigürasyonlu lineer stabilite diyagramı yük ve rijitlik parametrelerine bağlı inşa

edilmiştir. Salınım ve kritik burkulma yükü üzerinde, sönümleme kadar eğilme-burulma çiftinin etkisi tartışılmıştır [59].

Nguyen, Nguyen-Van, Han, Choi ve Kang makalelerinde çeşitli uç sınırlama şartları altında üniform moment ve moment gradyanı olmak üzere iki farklı yükleme altındaki oluklu gövde şekline sahip azalan kesitli kirişlerin elastik yanal burulmalı burkulma dayanımı ile uğraşmışlardır. SEM ile elde edilen sonuçlar ABAQUS program sonuçları ile karşılaştırılmış ve sonuçların uyumu teyit edilmiştir [60].

Kandasamy, Thenmozhi ve Jayagopal, sınırlandırılmış sınır koşulları altında soğuk şekillendirilmiş dudaklı U kesitli kirişler üzerinde eğilmeli burkulma (yanal-burulmalı) testleri tariflemişlerdir. 3 m'lik kirişte üniform eğilme momentini bulmak amacı ile eğilme testi için iki nokta yüklemeli sistem kurulmuştur. Araştırma için kesit boyutları olarak 1,6 mm ve 2,0 mm kalınlığa sahip 100×50×10 mm, 100×50×15 mm ve 100×50×20 mm elemanlar seçilmiştir. Basit mesnetlerin oluşturulduğundan emin olunarak yerçekimi etkisi altında etki gösterecek yükleme şekilleri oluşturulmuştur. Test sonuçları İngiliz Standardı BS5950: Bölüm 5 ve IS code 801-1975 ile karşılaştırılmış ve çarpılma ile burulma sınırlayıcılarının eğilme kapasitesi üzerindeki etkisi gösterilmiştir [61].

Gelera ve Park'a ait çalışmada genel yükleme koşullarına maruz kalmış sabit derinlikteki tek simetrik, basamaklı I kirişlerin yanal burulmalı burkulma dayanımları için parametrik analiz sonuçları ortaya konulmuştur. Basit mesnetli kirişler 0,1'den 0,9'a değişen monosimetri oranları ile bir sonlu elemanlar programı ABAQUS ve regresyon programı MINITAB ile analiz edilmiştir. Basamak uzunluğu oranları, flanş genişlik ve kalınlık oranları var olan bir köprüden alınmıştır. Basamaklı yapının etkisini bulmak için kirişler önce basit eğilmeye maruz bırakılmışlardır. Daha sonra on farklı yükleme durumu zayıflatılmış açıklık boyunca değişen momentin etkisini hesaplamak için uygulanmıştır [62].

Guo, Xiong ve Shen alüminyum alaşım kirişlerin (AAK) eğilmeli burulmalı burkulma davranışını araştırmışlardır. İlk olarak 14 AAK'ye tesir ettirilen tekil yükler altında başarısızlık deseni, yük-deformasyon eğrileri, taşıma kapasitesi ve eğilmeli burulmalı burkulma faktörü çalışılmıştır. Bütün kiriş numunelerinin eğilmeli burulmalı burkulma davranışı altında aşırı deformasyon deseni ile tahrip oldukları

görülmüştür. Daha da ötesi, yükleme noktası ve narinlik oranının bu kapasite üzerindeki etkisinin dikkate değeri olduğu sonucuna varılmıştır. İkinci olarak SEM ile aynı konu çalışılmış olup ana parametreler; başlangıç kusuru, malzeme özelliği, enkesit ve yükleme planı olarak alınmıştır. Sonuç olarak eğilmeli burulmalı burkulma kapasitesinin tahmini için bu çalışmaların sonuçları üzerine kurgulanmış bir teorik formül önerilmiştir [63].

Asgarian, Soltani ve Mohri makalelerinde keyfi seçilmiş sınır koşulları ve enkesitler için gövde yüksekliği tedrici değışen ince duvarlı kirişlerin yanal burkulma dengesi için kuvvet serisi metoduna dayanan bir teorik ve nümerik modeli araştırmışlardır. Başlangıç gerilmeleri ve yük eksantrikliğinin de nazara alındığı çalışmada toplam potansiyel enerji, gerilme enerjisinden kaynaklanan elastik davranış ve uygulanan yüklerin yaptığı iş için türetilmiştir. Durağan durumundan denge eşitlikleri ve sınır koşulları alınarak kuvvet serileri yaklaşımı ile 4. Derecedeki denklemlerin çözümü yapılmıştır. Ansys yazılımı ve diğeri nümerik ve analitik yaklaşımları kullanan SEM sonuçları ile yapılan karşılaştırmada önerilen metodun kullanılabilirliği gösterilmiştir [64].

Schillo ve Feldmann'ın çalışmalarında tek simetri eksenli T enkesite sahip konsol kirişlerde yanal burulmalı burkulma ve yerel burkulma kombine denge davranışının tahmini için genel bir metodun uygulanabilirliğinin gösterilmesi amaçlanmıştır. Tedrici azalan gövdeli T enkesitli elemanlar için bir burkulma eğrisi önerilmiş ve uygulanabilirlik sınırları araştırılmıştır [65].

Özbaşaran, Aydın ve Doğan çalışmalarında konsol I kirişlerin yanal-burulmalı burkulma durumlarına ait kritik yükün hesaplanmasını kolaylaştırmayı amaçlayan bir alternatif dizayn prosedürü sunmuşlardır. Birinci aşamada bir kapalı form eşitlik önerilmiş olup eşitliğin doğruluğu SEM analizleri için uygun bir yazılım olan ABAQUS ile kontrol edilmiştir. İkinci aşamada European IPE100 kesitli konsol kirişler üzerinde testler yürütülmüştür. Burada amaç analitik sonuçlarla karşılaştırma yapmak, göçme anındaki modlar ve yüklerini inceleyerek tasarım eğrisi için temel dataları bulmaktır. Neticede elastik, elastik olmayan ve tam plastik dayanımı nazara alan yöntemle bulunan dizayn momentleri, Eurocode 3-2005 ve AISC360-10 ile

kıyaslanmış ve sonuçları tatmin edici bulunmuş bir dizayn prosedürü ortaya konulmuştur [66].

Sahraei ve Mohareb çift simetri eksenli ince duvarlı elemanların yanal burulmalı burkulma davranışı için üç sonlu elemandan oluşan bir küme geliştirmişlerdir. Elemanlar, C1 sürekliliğini sağlayan özel bir enterpolasyon planı ile müştereken kesme deformasyonu etkisini içeren bir varyasyon prensibine dayanmaktadırlar. Elemanlardan biri, diğeri devamlı aşağıdan yakınsarken kendi devamlı yukarıdan yakınsayacak şekilde geliştirilmiştir. Üçüncü eleman diğerleri ile kıyaslandığında hızlı yakınsama karakteristiği gösterirken bir alt veya bir üst sınır çözümü sağlayacağı garanti değildir. Formülasyon çok noktalı lineer kinematik basıncın her bir setini sağlama yeteneğini içerir. Yapılan önerinin geçerliliği için nümerik bir takım sonuçlarla karşılaştırmalar yapılmış ve elemanlar farklı yükleme, kısıtlar ve kiriş tipleri için kullanılmıştır [67].

Yang, Kang, Xiong, Nie, Hu, Wang, Bai ve Dai'nin makalelerinde tek simetrikli Q460GJ çelik kirişlerin yanal burulmalı burkulma davranışı deneysel ve nümerik olarak çalışılmıştır. Çeşitli narinlik ve yükseklik-genişlik oranlarına sahip ortadan yanal tutulu 6 tek simetrikli kiriş dizayn edilerek tekil yükler ile test edilmişlerdir. Deneysel, kirişler eğilme momentine maruz kaldıklarında yanal burulmalı burkulma ürettiklerini göstermiştir. Deneysel ve nümerik hesap sonuçları arasında yapılan kıyaslamalar Q460GJ çeliği için birçok dizayn metodunun yetersiz olduğu görülmüştür. Birtakım ilave çalışmalar neticesinde söz konusu çelik eleman tipi için dizayn hususunda önerilerde bulunulmuştur [68].

Chellapilla ve Lokavarapu çalışmalarında Winkler-Pasternak zemini ile desteklenmiş eksenel basınç yüküne maruz ince cidarlı açık kesitli bir kirişin burkulma sonrası davranışı çalışılmıştır. Burada gerilmelerin küçük ve elastik, planda enkesit deformasyonları ile kesme deformasyonlarının ihmal edilebilir oldukları varsayılmıştır. Ankastre I kesit için burkulma eğrisi araştırılmış, çatlama noktası hesaplanmıştır. Winkler-Pasternak zemin parametrelerinin çeşitli değerleri ve çarpılma parametresi için dengeli ve simetrik olduğu görülmüştür [69].

Liu, Lu, Fu ve Pi makalelerinde ince duvarlı bir kemer yapının tam merkezinden bir düşey yüke maruz kaldığı zaman aks yönünde basınç ve eğilme aktivitelerinin

birlikte türeyeceğini, söz konusu yük arttırıldığında, kemerin ani bir şekilde yanal olarak deplasman yapacağı ve burulacağı bir noktaya varabileceğini, böylece yanal burulmalı burkulma moduna gireceğini ifade etmişlerdir. Çözümün zor olduğu bu problemin analizi amacıyla burkulma yükü için analitik çözüm, Rayleigh-Ritz metodu ile durağan potansiyel enerji prensibi müştereken kullanılarak türetilmiştir. Sonuçlar SEM sonuçları ile karşılaştırılmış ve uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Ek olarak yükün uygulandığı yüksekliğin, narinlik ve plandaki mesnet koşullarının yanal burulmalı burkulma yükü üzerindeki etkisi araştırılmış ve bunlardaki değişimlerin çok önemli sonuçlarının olduğu bulunmuştur [70].

Jiao, Borchani, Soleimani ve McGraw yaptıkları çalışmada sinüs eğrisi şeklinde oluklu gövdeye sahip kompozit I kirişlerde geometrinin burkulma kapasitesi üzerindeki etkisinin araştırılması amaçlanmıştır. Deneyler ve sayısal simülasyonlar teorik öngörülerini doğrulamak için gerçekleştirilmiştir. Sunulan model düz gövdeli bir elemana da indirgenerek var olan bir çalışmayla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalardan iyi sonuçlar alınmıştır. Geometrinin kritik burkulma yükü üzerindeki etkisini incelemek için parametrik çalışma yürütülmüş, düz yüzey ile sinüs eğrisi yüzey arasında %17,7 gibi dikkate değer bir artış tespit edilmiştir. Ek olarak gövde kalınlığı, kiriş uzunluğu ve yüksekliğinin taşıma kapasitesi üzerindeki etkisi için hassas bir çalışma yürütülmüştür [71].

Glauz makalesinde Amerikan şartnamelerdeki yanal burulmalı burkulma çözümlerinin tek simetrik ve çift simetrik kesitli kirişler için verildiğini ve yaklaşık çözümler olduklarından dolayı çalışmada söz konusu problem için soğuk şekillendirilmiş bütün kesitleri kapsayan bir formül araştırıp, geliştirmiştir [72].

Glauz soğuk şekillendirilmiş çelik kolonların dizaynında eğilme burkulması, burulma burkulması ve eğilmeli burulmalı burkulmanın hesaba katılması gerektiğini, Amerikan Demir ve Çelik Enstitüsünün kritik elastik burkulma yükleri için kullandığı eşitliklerin Kuzey Amerika şartnameleri doğrultusunda bu hassasiyetleri karşıladığını belirtmiştir. Bununla birlikte pratikte ana ve tali eksen eğilmesi ve burulmada farklı desteklenmemiş uzunluklar söz konusudur. Makalede eşit olmayan desteksiz uzunlukları ve asal olmayan eksenleri içerecek şekilde kolon burkulma denkleminin genel bir formülasyonu araştırılmış ve geliştirilmiştir [73].

Shakouri, Sharghi ve Kouchakzadeh genellikle tabakalı yapıya sahip üniform burulma etkisi altındaki basit mesnetli konik kabukların burkulmasını incelemişlerdir. Donnel tipi gerilme-yer değiştirme ilişkileri kabuğun potansiyel gerilme enerjisini bulmak için kullanılmış ve membran denge eşitliği burulmanın yaptığı işi elde etmede kullanılmıştır. Ritz metodu ile hakim eşitlikler çözülerek kritik burkulma yükü bulunmuş ve sonuçlar diğer çalışmalar ve SEM sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Kesik koninin tabakalanma sırası, açısı ve uzunluk yarıçap oranı değerlendirilmiş ve bir dizayn ölçütü bulunması amaçlanmıştır [74].

Zhang, Liu, Hou, Chen, Ji, Deng ve Deng uçta yanal elastik payandası bulunan konsol çelik kirişin yanal burulmalı burkulmasının nadiren gündeme geldiğini belirtmişlerdir. İlk olarak, belirtilen kirişin, üniform ve konsantre yük altında toplam potansiyel enerji ifadesi kurulmuştur. Yanal deplasman ve burulma açısının model deneme fonksiyonu 6 terimli trigonometrik fonksiyon olarak ifade edilmiştir. Yeni boyutsuz parametreler tanımlanarak, uçtan yanal elastik payandalı konsol kirişin yanal burulmalı burkulması için boyutsuz burkulma eşitliğinin analitik çözümü elde edilmiştir. Matematiksel optimizasyon analiz yazılımı olan 1stOpt yazılımı yardımı ile boyutsuz kritik moment formülü bulunmuştur. Sonrasında, ADINA SEM yazılımı ile formülün doğruluğu kontrol edilmiş ve formülün mühendislik pratiği adına basit ve yeterli bir çözüm sağladığı görülmüştür [75].

Luiblé ve Scharer makalelerinde saydamlığı temin etmek üzere kiriş, kolon ve rijitlik çubukları gibi yapısal cam elemanların kullanımı ile çelik cam cephe kullanımında büyüme eğiliminin olduğuna vurgu yapmışlardır. Cam büyük basınç yüklerine dayanıklı bir madde olmasına rağmen yapısal cam elemanlar yüksek narinliklerinden dolayı hasarlanmaya meyillidirler. Geçmiş yıllarda camın yanal burulmalı burkulması birçok araştırmanın konusu olduğuna değinilmiş, çalışmaların esas olarak yanal sınırlamasız basit kirişlerde yapıldığı vurgulanmıştır. Bununla birlikte pratikte cam duvar şeklindeki cam kirişlerin yapısal silikon veya mekanik sabitleyiciler ile çepçevre mesnetlendiği belirtilmiştir. Bu çalışmada yanal deplasman sınırlamalı tek parçalı ve lamine camın yanal burulmalı burkulması üzerine teorik ve deneysel çalışmalar yapılmıştır. Bulunan sonuçlar SEM ile ayrıca yürütülen çalışma değerleri ile karşılaştırılmıştır [76].

Wang, El-Khenfas ve Nethercot yarı rijit bağlantının yanal olarak desteklenmemiş kirişlerde dayanım ve davranış üzerindeki etkisini bir SEM yaklaşımı kullanarak çalışmışlardır. Bağlantı, düzlemde moment-dönme davranışını temsil eden bir çoklu-lineer model ile temsil edilmiştir. Programın doğruluğu hem analitik hem deneysel sonuçları kontrol etme yolu ile yapılmıştır. Parametrik bir çalışma, hem uç-sınırlama etkilerine ait önemi hem de ana problem değişkenlerine ait varyasyonların kiriş dayanımı üzerindeki hassasiyetini göstermek için yürütülmüştür [77].

Seah ve Khong basıncı alacak şekilde bükülmüş çaprazsız boyuna kenar takviyeleri bulunan U kirişlerin burkulma davranışlarına ait çalışmalarını sergilemişlerdir. Göreceli kısa bir kiriş uzunluğu için böylesine bir yükleme altında burkulma simetrik bir şekilde gerçekleşecektir. Bununla birlikte uzun bir kirişte yanal burulmalı burkulma çökmenin ana sebebi olacaktır. Burada sunulan çalışma basit eğilme altında dudaklı U kirişin son durumu ile sınırlandırılmıştır. Bu tür kirişlerin kritik momentini bulmak için teorik çalışmada bir yarı analitik ve yarı nümerik yaklaşım metodu kullanılmış ve var olan sonuçlar ile yapılan karşılaştırmalarda oldukça makul sonuçlar elde edilmiştir [78].

Bailey, Burgess ve Plank çalışmalarında iskelet çelik çerçevelerde ısının artırılması halinde yapının davranışını tahmin eden üç boyutlu bir bilgisayar programı kullanarak düzgün olmayan bir ısı dağılımına maruz bırakılmış hareketleri sınırlanmamış kirişlerin nihai davranışlarını araştırmışlardır. Bir sürü farklı kesit ve açıklık, değişik yükleme şekilleri ve yük oranları için çalışılmıştır. Tahmin edilen sonuçlar her durumda yanal burulmalı burkulma yıkımını göstermiştir. BS5950 Bölüm 8'e uygun şekilde limitli sıcaklıklar için bulunan sonuçlar modelden bulunan sonuçlar ile karşılaştırıldığında modeldekiler daha düşük çıkmıştır. Sınırlanmış sıcaklıklar için Eurocode 3 Bölüm 1.2 kullanılarak bulunan sonuçların modelle karşılaştırılmasından da benzer sonuçlar çıkmıştır [79].

Atanackovic yanal burulmalı burkulmaya maruz en uygun dayanıma sahip elastik bir çubuk şeklini araştırmıştır. Bir sabit enkesitli çubuğun sadece eşit uç momentleri etkisinde iken en dayanıklı durumda olduğu ifade edilmiştir. İlave basınç yüküne

maruz kaldığında çok sayıda parametre için nümerik entegrasyon ile en uygun kesit araştırılmıştır. En uygunluk durumları türetilirken Pontriyagin prensibi kullanılmıştır [80].

Trahair makalesinde elemanları tek simetrlili ve gövdesi tedricen değişebilen elemanlardan oluşan hiperstatik kiriş yapılarının düzlem içi eğilme, düzlem dışı burkulmasına ait analiz için etkili bir sonlu eleman metodu tanımlamıştır. Yapılara uygulanan yükler; momentler ve konsantre veya üniform yayılı eksen dışı enine ve boyuna kuvvetlerden oluşabilmekte ve deformasyonlar tek noktadan veya sürekli rijit elastik sınırlayıcılar ile kısıtlanmış olabilir. Gövde yüksekliği tedrici değişen elemanlar için sonlu eleman formülasyonu, sıklıkla üniform elemanlarda kullanılan kapalı form yerine nümerik entegrasyon vasıtasıyla geliştirilmiştir. Kütle merkezi ve kayma merkezi değişkenliğinin sebep olduğu tedrici değişken gövdeli ve monosimetrik elemanlarda yük pozisyonunu belirlemekteki zorluklar gövdenin orta noktasına dayanan keyfi bir eksen sistemi kullanılarak aşılmıştır. Kayma merkezi aksının eğiminden kaynaklanan Wagner tork terimleri de hesaba katılmıştır. Konsol ve ankastre kirişlerde çözümde bir bilgisayar programı kullanılmış ve elastik düzlem içi eğilmeler için kapalı form çözümüne yakın sonuçlar elde edilmiştir. Çok sayıda üniform, değişken; çift ve tek simetrlili kiriş ve konsolların çeşitli yükleme ve sınırlama şartlarında düzlem dışı eğilmeli burulmalı burkulması için üretilen program çözümleri genelde var olan tahminler ve test sonuçlarına yakın sonuçlar vermiştir. Tedrici değişen kesitlerin sabit kesitlerle yer değiştirdiği durumlarda, genel yaklaşımların yavaşça yakınsadığı ve tek simetrlili gövdesi tedrici değişen kirişlerde yanlış tahminlere yol açtığı gösterilmiştir [81].

Panedpojaman, Sae-Long ve Chub-Uppakarn çalışmalarında hücreli kirişlerin yanal burulmalı burkulmaya karşı bilinen dizaynının kesinliğini arttırmak amacıyla Genel Eurocode 3 metoduna dayanan oransal dizayn esasları önermişlerdir. Çalışma neticesinde dayanımı etkileyen anahtar parametrelerin yük konfigürasyonu, kesitsel oran, boşluk oranı ve narinlik olduğu yansıtılmaktadır. Bütün parametrelerin kesme etkisini gösterdiği, kesitsel oran ve narinliğin ise dizayn sonuçlarının doğruluğunu önemli derecede etkilediği belirtilmiştir. Bu yüzden bu parametreler üzerine bina edilmiş bir düzeltme faktörü önerilmiş, bu sayede aşırı tahminlerin minimize edilmesiyle Eurocode 3'ün doğruluğu geliştirilmiştir [82].

Torkamani ve Roberts kolon-kirişlerin yanal burulmalı burkulması için toplam potansiyel enerjiyi düşünerek enerji eşitliklerini türetmişlerdir. Toplam potansiyel enerjinin sıfıra eşit ikinci varyasyonu, burkulma için kritik koşul olan kararlı bir durumdan kararsız bir duruma geçişi gösterir. Çift simetrik ince duvarlı kolon-kiriş elemanlarının toplam potansiyel enerjisinin ikinci varyasyonunun hesaplanması vasıtasıyla birçok enerji eşitlikleri türetilmiştir. Makalede düzlem içi deformasyonlar ihmal edilmiştir. Sonrasında enerji eşitlikleri boyutlu ve boyutsuz formlarda ifade edilmiştir. Eşitliklerin doğru sonuçlar ürettiği örneklerle gösterilmiştir [83].

Horacek, Melcher, Pesek ve Brodniansky delikli çelik Sigma kirişlerinde, yanal burulmalı burkulma açısından, dizayn ve analiz problemini çalışmışlardır. Sigma profilleri çoğunlukla depolama sistemlerinde ve pratik taban döşemesi sistemlerinde döşeme kirişi olarak kullanılmaktadırlar. İlk olarak EN 1993-1-1 Avrupa standardı ve Çek NB.3’de listelenen dizayn prosedürüne göre teorik hesaplamalar yürütülmüştür. Söz konusu hesaplarda deliklerin zayıflatıcı etkisi için herhangi bir ifade bulunmamaktadır. Bu yüzden yerine ikame edilecek kesit oluşturulmuş ve kesit karakteristikleri dolu ve boşluklarla zayıflatılmış kesitlerin karakteristiklerinin ağırlıklı ortalaması şeklinde tarif edilmiştir. İkame edilen kesit için hesaplanan elastik kritik momentler SEM ile hesaplananlar vasıtasıyla doğrulanmıştır. Bu teorik yaklaşım laboratuvar koşullarında, üç farklı boyuttaki kiriş için, test ile tahkik edilmiştir [84].

Dahmani ve Drizi U kesitli profillerin kiriş olarak sıklıkla kullanıldığını ancak yüklemenin kayma merkezinden değil de eksantrik olarak yapıldığı durumlar için Eurocode 3’de dizayn kurallarının bulunmadığını belirtmişlerdir. Makalede uyarlanmış dizayn kuralları için eksantrik yükleme altında yanal burulmalı burkulmada bulunan nihai yükler SEM sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Önerilen dizayn kurallarına dayanarak çalışma, Eurocode 3 ile uyumlu yeni bir dizayn kuralına öncülük etmiş bulunmaktadır [85].

Dahmani ve Boudjemia Eurocode 3’te kirişlerin yanal burulmalı burkulma altında taşıyabilecekleri nihai yükü tespit edecek metodun bulunduğunu, yöntemin burkulma eğrilerini kullandığını, kusurlar içeren bir kirişte geometrik ve malzemesel lineer olmayan analizler vasıtasıyla SEM metodu kullanılarak da nihai kritik yükün

hesaplanabileceği belirtilerek, çalışmalarında Eurocode ile bulunan sonuçlar ile parametre çalışması tabanlı simülasyona dayanan SEM ile bulunan sonuçların karşılaştırması yapılmıştır [86].

Asgarian ve Soltani asimetrik kesitli ince duvarlı prizmatik olmayan kirişlerin yanal burkulma yükünü hesaplamak için nümerik bir metot önermişlerdir. Bu amaçla harici kuvvetlerin yaptığı iş, elastik gerilme enerjisi ve başlangıçtaki gerilmelerin etkilerini hesaba katan potansiyel enerji ifadesi türetilerek bu ifadeden denge eşitlikleri ve sınır koşulları bulunmuştur. Sonra kuvvet serileri yardımıyla dördüncü mertebedeki diferansiyel eşitlikler çözülmüş, yer değiştirme bileşenlerinin kuvvet serileri açılımları sayesinde deplasman parametreleri için açık ifadeler elde edilmiştir. Özdeğer probleminin çözümü ile de yanal burkulma yükleri elde edilmiştir. Çok sayıda çalışma yapılmış ve elde edilen sonuçlar Ansys yazılımını kullanan SEM sonuçları ve diğer mevcut nümerik ve analitik yaklaşım sonuçları ile doğrulanmış ve metodun kullanılabilirliği ispatlanmıştır [87].

Hołubowski ve Jarczewska makalelerinde eğilme altındaki üniform olmayan yüke maruz bırakılmış kirişlerin denge analizleri için Diferansiyel Dönüşüm Metodunu (DTM) sunmuşlardır. Metodun ana avantajı yanal burulmalı burkulma etkisinde bulunan bir kirişte kritik yük için yarı-analitik bir çözüm türetilmesidir. Kritik yükü belirlemek için değişken katsayılı ve parametrelili iki bağlaşıklık adi diferansiyel eşitlikten oluşan sistemin çözülmesi şarttır. Nümerik analizler; üniform yayılı yük, lineer değişen yük ve sinüzoidal yayılı yük olmak üzere üç farklı yük tipi için yürütülmüştür. Sonuçlar SEM sonuçları ve varyasyonel iterasyon metodu (VİM) sonuçları ile kontrol edilmiştir. %3 gibi farklarla DTM'nin kullanılabilirliği gösterilmiştir [88].

Ioannidis ve Avraam tarafından planda maksimum rijitlikte üniform eğilme altındaki basit mesnetli I kirişlerin yanal burulmalı burkulma dayanımı üzerinde dıştan merkezi etki ettirilmiş çekme kuvvetinin etkisi çalışılmıştır. Lineer ve lineer olmayan birer analiz yürütülmüş, lineer analizlerin ardından aksenal çekme kuvveti etkisinin dahil olduğu yanal burulmalı burkulmanın kritik moment ifadesi verilmiştir. Bu kuvvet için, deforme durumda, dengenin söz konusu olmadığı bir üst limit mevcuttur. Lineer olmayan analizlerde, burkulma sonrası eğride hareketin başlangıç

parçası düşünülerek kritik durumun doğası çalışılmıştır. Kritik durumun dengeli bir simetrik çatlama noktası ile kaynaştığı sonucu çıkarılmıştır. Bununla beraber burkulma sonrası eğri çok sığdır. Bu yüzden kiriş pratik olarak burkulma mukavemeti gösteremez. Makale açıklayıcı bir örnek ile desteklenmiştir [89].

Coşkun çalışmasında sürekli bir şekilde elastik mesnetlenmiş ve değişken eğilme rijitliğine sahip Euler kolonlarında Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) kullanarak stabilite analizleri yapmıştır. Buradaki mesnet, temel mühendisliğinde büyük ilgi uyandıran, sürekli elastik temel modeli olarak düşünülmüştür. Değişik uç koşulları için kritik yükün araştırıldığı çalışmada, analitik çözümü zor olan probleme, HPM ile verimli alternatif çözüm yaklaşımı türetilmiştir [90].

Bu makalede Okay, Atay ve Coşkun, Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM) ile ağır dikey kolonların burkulma yüklerini ve burkulmanın sebep olduğu eğri modlarını incelemişlerdir. Çalışma, üretilen analitik yaklaşım metodu ile elde edilen sonuçların doğruluğunu ve metodun etkinliğini göstermiştir [91].

Değişken eğilme rijitliğine sahip kolonların eğilmeli burkulma çalışması konusunda başarı ile uygulanmış olan HPM'nin tanıtıldığı Coşkun'a ait çalışmada eğilme rijitliği için farklı tipteki varyasyonlar için burkulma yükleri ve onlara karşılık gelen eğilmeye ait şekil modları araştırılmıştır [92].

Coşkun ve Atay bu çalışmalarında sabit ve değişken kesitlere sahip Euler kolonlarında kritik burkulma yüklerinin elde edilmesi için VIM yaklaşımını kullanmışlardır. Adi ve kısmi türevli ifade içeren diferansiyel eşitlikler ile integral çözümünde güçlü bir metod olan VIM, analitik çözümü zor olan problemlerin analizi için uygun bir ortam sağlamaktadır. Değişik mesnet koşulları ve farklı varyasyona sahip kesitler üzerinde kritik yükün bulunması için yapılan çalışmalar elastik stabilite problemlerinde yaklaşım metodunun çok etkili olduğunu göstermiştir [93].

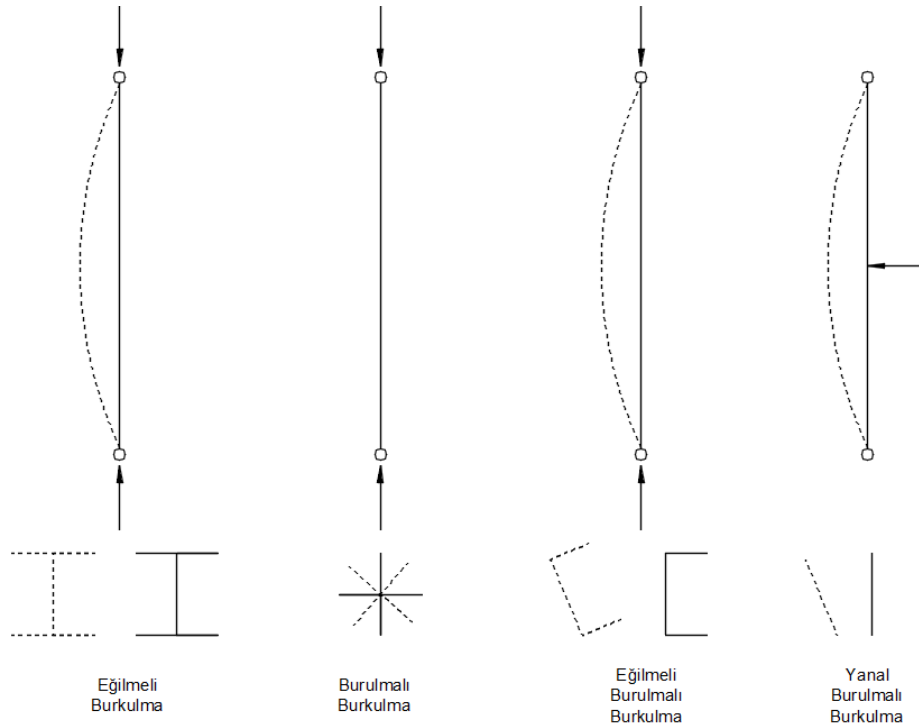
Atay ve Coşkun çalışmalarında sürekli bir şekilde mesnetlenmiş Euler kolonlarında VIM analitik yaklaşım metodunu kullanarak elastik stabilite analizleri yapmışlardır. Üniform homojen bir kolon, uzunluğu boyunca desteklenmiş olarak farz edilmiştir. Boyuna sınırlama, temel mühendisliğinde büyük ilgi uyandıran, sürekli elastik temel modeli olarak düşünülmüştür. Bu cihetle elastik temelin rijitliği ile değişik

mesnetlenme koşulları altında kritik burkulma yükünün değişimi VIM ile incelenmiştir. Denge kriterine ait doğrusal olmayan eşitliklerden dolayı bu tür problemler için analitik çözüm elde etmek oldukça zordur. Çalışma, VIM ile analitik sonuçlar elde edilebildiğini göstermesinin yanında aynı zamanda kullanılan yöntemin etkin olduğunu da göstermiştir [94].



1. BURULMALI BURKULMA, EĞİLMELİ BURULMALI BURKULMA VE YANAL BURULMALI BURKULMA

Yapı elemanlarında basit eğilmenin dışında, Şekil 1.1’de gösterildiği üzere burulmalı burkulma ve eğilme ile burulmanın eşlik ettiği eğilmeli burulmalı burkulma ile yanall burulmalı burkulma davranışları gözlenir. Bu tarz davranışlar, ya elemanın burulma rijitliğinin çok düşük olduğu durumlarda veya eğilme ve dönmenin birbirini tetiklediği ve dolayısıyla her ikisinin eşleştiği hallerde ortaya çıkar. İnce açık kesitler genellikle çok düşük bir burulma rijitliğine sahiptirler ve bu yüzden, özellikle, burulmalı burkulma davranışına meyillidirler. Eğilme ve burulma ikilisi kayma ve ağırlık merkezlerinin çakışmadığı aksenal doğrultuda yüklenmiş U, köşebent gibi kesitlerde aynı anda meydana gelir. Enine yükleme altındaki kirişlerde, kirişin basınç altındaki flanşı baskıdan dolayı stabil durumdan uzaklaşıp yanall olarak burkulmaya çalışırken ve gerilme altındaki flanşı ise eş zamanlı olarak stabil ve kararlı kalmak isterken, benzer durum ortaya çıkar.



Şekil 1.1. Burkulma Formları

1.1. Yapısal Elemanların Burulma Yüğü ve Deformasyon Karakteristikleri

Yapısal bir elemana burulma momenti uygulandığı zaman kesitin burulmasının yanında ek olarak çarpılma da meydana gelebilir. Elemanın serbest bir şekilde çarpılmasına müsaade edilmiş ise uygulanan tork sadece St. Venant kayma gerilmeleri tarafından karşılanır. Bu tarz bir davranış üniform veya basit burulma ile alakalı bir davranıştır. Diğer taraftan, eğer eleman çarpılmaya karşı sınırlandırılmış ise uygulanan torka St. Venant kayma gerilmeleri ve çarpılma burulması kombinasyonu karşı koyar. Bu davranış üniform olmayan burulma hali olarak adlandırılır.

1.1.1. St. Venant burulması

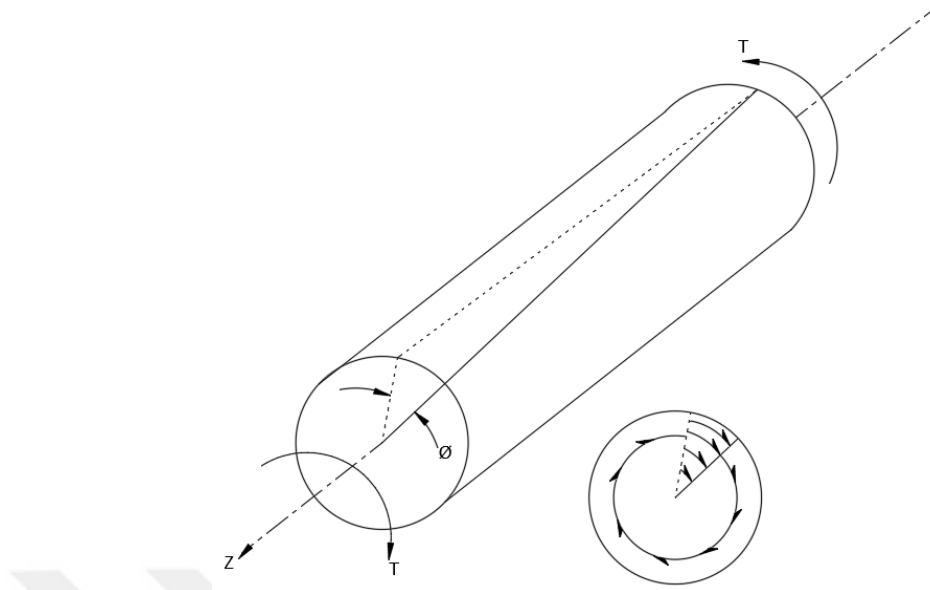
Eğer dairesel sabit kesitli bir çubuk Şekil 1.2'deki gibi bir burulma momentine maruz kalırsa, uygulanan harici torka, herhangi bir kesitte oluşan ve merkezden dışa doğru büyüklüğü artan, dahili dairesel kayma gerilmeleri direnç gösterir. Bu kayma gerilmeleri komşu iki kesitin birbirine göre göreceli dönüş direncinden ortaya çıkar. Böyle bir elemanda, G elastik kayma modülü, J burulma sabiti ve z eleman eksenine doğrultusundaki yön olmak üzere burulma açısı θ ile buna sebep olan burulma momenti T arasındaki ilişki,

$$T = GJ \frac{d\theta}{dz} \quad (1.1)$$

şeklindedir. Buradaki GJ ifadesi kesitin burulma rijitliğine karşı gelmekte olup, eğilmedeki rijitlik ifadesi olan EI'ya karşılık gelir.

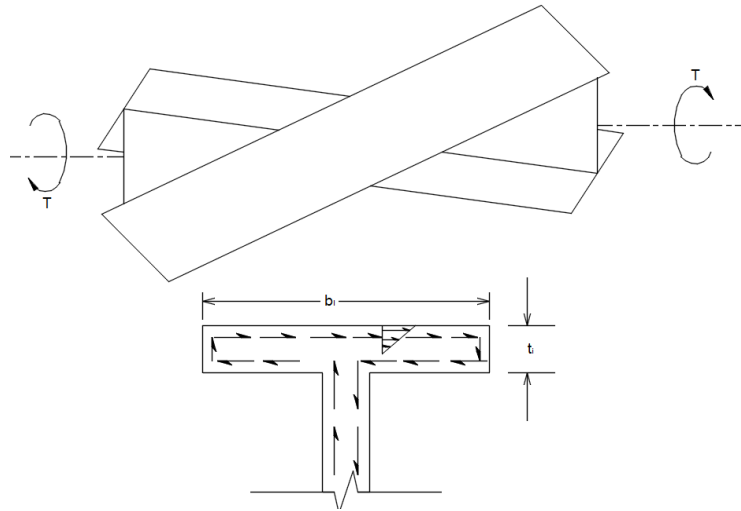
Şekil 1.2'deki gibi dairesel kesitli çubuklar, çarpılma olmadan burulurlarken, dairesel şekle sahip olmayan kesitlerin çoğu burulma esnasında çarpılırlar.

Şekil 1.3'te görüleceği üzere dairesel kesite sahip olmayan bir elemana tork uygulandığı zaman, eksen yönündeki burulmalı çarpılma öncesinde düzlemsel olan enine doğrultudaki kesitlerin düzlemselliği artık söz konusu değildir. Bununla birlikte, elemanın serbestçe çarpılmasına izin verildiği sürece, uygulanan burulma momenti Denklem (1.1)'deki geçerli olacak şekilde, dairesel kesitlerde gösterildiğine benzer kayma gerilmeleri tarafından karşılanır.



Şekil 1.2. Dairesel kesitte burulma [95]

Şekil 1.3'teki gibi dikdörtgen elemanlardan oluşan ince duvarlı açık bir kesit için, her elemandaki kayma gerilmeleri enkesitin orta çizgisine paraleldirler ve büyüklükleri bu çizgiye olan mesafe ile orantılıdır. Burulma sabiti J, böyle bir kesit için aşağıdaki gibi,



Şekil 1.3. Çarpılma serbestisi bulunan dairesel olmayan kesitlerin burulması [95]

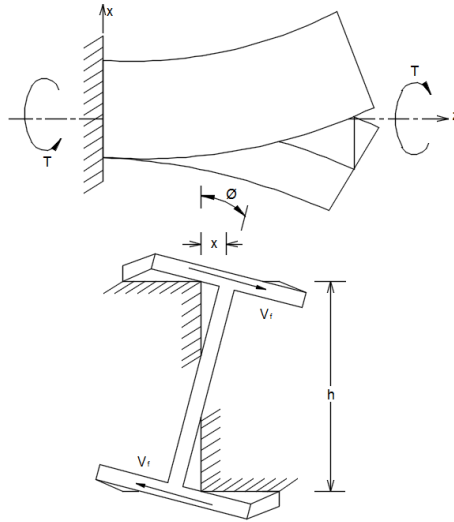
$$J = \frac{1}{3} \sum_i b_i (t_i)^3 \quad (1.2)$$

hesaplanabilir. Burada; b_i ve t_i , sırasıyla, her bir elemanın uzunluğu ve kalınlığıdır.

Burulmaya karşı, Denklem (1.1)'de tanımlanan, sadece kayma kaynaklı bu tür direnç St. Venant burulması veya üniform burulma olarak adlandırılır.

1.1.2. Üniform olmayan burulma

Çarpılma üreten boyuna doğrultudaki yer değiştirmelerin meydana gelmesine izin verilmesi halinde, boyuna doğrultudaki liflerin boyu değişmeyecek ve Şekil 1.3'de de görüleceği üzere çarpılma sonucu meydana çıkan boyuna doğrultudaki gerilmeler türemeyecektir. Bununla birlikte, birtakım mesnetlenme ve yükleme koşulları boyuna doğrultudaki yer değiştirmelerin serbestçe oluşmasını engelleyebilir. Örneğin, Şekil 1.4'de görülen konsol kirişin mesnetli ucu çarpılmaya karşı tamamen sınırlandırılmış iken, serbest ucu engel olmadan çarpılabilmektedir. Sonuç olarak, boyuna fiberler boyca değişmekte ve elemanda aksenal stresler üremektedir. Çarpılmaya karşı kısmen sınırlandırılmış Şekil 1.4 kirişi ile serbest çarpılmaya sahip Şekil 1.3 kirişi karşılaştırıldığında, çarpılma deformasyonu üzerindeki baskının flanşların farklı şekilde bükülmelerine sebep olduğunu ortaya koymaktadır. Bir flanş sağa bükülürken diğeri sola bükülmektedir.



Şekil 1.4. Serbestçe çarpılması sınırlandırılmış dairesel olmayan kesitin burulması [95]

Şekil 1.4'deki konsol kirişte ortaya çıkan flanş eğilme momentleri serbest uçta sıfır, ankastre uçta maksimum olacak şekilde değişim gösterir. Dolayısıyla, herhangi bir ara bölümde oluşan kesme kuvveti;

$$V_f = -\frac{dM_f}{dz} \quad (1.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada M_f flanş eğilme momenti, eksi işareti ise z arttıkça M_f 'in azaldığını ifade eder. Flanşlar zıt yönde büküldüklerinden dolayı, iki flanştaki kesme kuvvetleri zıt yönlü bir ikili oluştururlar. Uygulanan burulma momentine karşı koymaya çalışan bu ikili, çarpılma burulması olarak adlandırılır.

Çarpılma torsiyonu üreten aksenal gerilmeler, elemanın kendi enkesitinin serbest çarpılmasına gösterdiği direnç neticesinde husule gelir. St. Venant ise komşu kesitlerin birbirlerine karşı dönmelerinden kaynaklanan direnç orijinlidir.

Serbest bir şekilde çarpılmasına izin verilmeyen bir elemana uygulanan burulma momentine Denklem (1.4)'teki gibi St. Venant ve çarpılma burulmaları kombinasyonu ile direnç gösterir. Burada T_{sv} , St. Venant burulması,

$$T = T_{sv} + T_w \quad (1.4)$$

T_w , çarpılma burulmasıdır. Bu eşitlik ile tanımlanan davranış tipi üniform olmayan burulma olarak ifade edilir.

Burulmaya karşı toplam direncin St Venant kısmı, Eşitlik (1.1) ile verilmiştir. Çarpılma burulmasal direnci ifadesi için benzer çıkarım; elemanın serbestçe çarpılması engellendiğinde ortaya çıkan, flanşların ters yönde eğilmeleri nazara alındığında elde edilebilir.

Şekil 1.4'deki I kesiti için çarpılma burulması;

$$T_w = V_f h \quad (1.5)$$

Denklem (1.5) şeklinde veya İfade (1.3) ışığında;

$$T_w = -\frac{dM_f}{dz} h \quad (1.6)$$

Denklem (1.6)'daki gibi yazılabilir. Flanş merkezinin yatay deplasmanı Şekil 1.4'de görüleceği üzere x ile ifade edilir ise üst flanştaki eğilme momenti;

$$M_f = EI_f \frac{d^2x}{dz^2} \quad (1.7)$$

olur. İfade (1.7)'de I_f , flanşın kuvvetli aksa göre atalet momentidir. Mademki,

$$x = \frac{\varnothing h}{2} \quad (1.8)$$

dir, o halde İfade (1.7) Eşitlik (1.8)'in katkısıyla,

$$M_f = \frac{EI_f h}{2} \frac{d^2 \varnothing}{dz^2} \quad (1.9)$$

Denklem (1.9) şeklinde yazılabilir. Bu İfade (1.6)'da yerine koyulursa,

$$T_w = -\frac{EI_f h^2}{2} \frac{d^3 \varnothing}{dz^3} \quad (1.10)$$

bulunur. Denklem (1.10)'da $I_f h^2/2$ terimi enkesite ait bir özellik olup çarpılma sabiti Γ ,

$$\Gamma = \frac{I_f h^2}{2} \quad (1.11)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda Eşitlik (1.10) aşağıdaki hali alır;

$$T_w = -E \Gamma \frac{d^3 \varnothing}{dz^3} \quad (1.12)$$

Bu denklemde çarpılma burulması için $E\Gamma$, kesitin çarpılma rijitliğini ifade eder ve St. Venant'daki GJ burulmasal rijitliğin karşılığıdır.

Eşitlik (1.12) simetrik bir I kesit için üretilmesine rağmen, mükemmel bir şekilde genel bir ifadedir ve herhangi bir ince duvarlı açık kesit için kullanılabilir. Bununla birlikte, Eşitlik (1.11)'de çarpılma sabiti için verilen ifade sadece simetrik bir I kesitinde kullanılabilir. Diğer ince duvarlı açık kesitlerin çarpılma sabiti ifadeleri [3, 96, 97] referanslarında bulunabilir.

Üniform olmayan burulma için Eşitlik (1.1) ve (1.12) toplamından,

$$T = GJ \frac{d\varnothing}{dz} - E \Gamma \frac{d^3 \varnothing}{dz^3} \quad (1.13)$$

Denklem (1.13) elde edilir.

1.2. Burulmanın Şekil Değiştirme Enerjisi

Burulmuş bir elemanda depolanan şekil değiştirme enerjisi, St. Venant burulması sebebiyle oluşan ve çarpılma burulması sebebiyle oluşan şekilde iki parçaya ayrılabilir.

1.2.1. St. Venant burulmasında şekil değiştirme enerjisi

St. Venant burulması sebebi ile burulan bir dz elemanında depolanan şekil değiştirme enerjisindeki artış, tork ve burulma açısındaki değişimin çarpımının yarısına eşittir. Buradan;

$$dU_{sv} = \frac{1}{2} T d\theta \quad (1.14)$$

$d\theta$,

$$d\theta = \frac{T}{GJ} dz \quad (1.15)$$

olduğu bilindiğinden, Denklem (1.14) aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$dU_{sv} = \frac{1}{2} \frac{T^2}{GJ} dz \quad (1.16)$$

T'nin Denklem (1.1)'deki ifadesi Denklem (1.16)'da yerine konulursa,

$$dU_{sv} = \frac{1}{2} GJ \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz \quad (1.17)$$

elde edilir. Yukarıdaki Denklem (1.17) ifadesinin eleman boyunca integrali alınırsa, bütün elemanın içindeki St. Venant burulması kaynaklı şekil değiştirme enerjisi,

$$U_{sv} = \frac{1}{2} \int_0^l GJ \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz \quad (1.18)$$

şeklinde elde edilir.

1.2.2. Çarpılma burulmasında şekil değiştirme enerjisi

Bir I kiriş için, çarpılma burulmasına direnci sebebiyle elemanın içinde birikecek şekil değiştirme enerjisinin flanşların bükülme enerjilerine eşit olacağı varsayılır.

Sıradan kiriş teorisinde olduğu gibi, üniform olmayan eğilme ile birlikte görülen kesme enerjisinin, eğilme enerjisi ile kıyaslandığında ihmal edilebileceği farz edilir.

Bir I kirişin dz boyundaki bir elemanın bir flanşında depolanan eğilme enerjisi; moment, $EI_f(d^2x/dz^2)$ ile dönmenin, $(d^2x/dz^2)dz$ çarpımının yarısı olarak Denklem (1.19)'daki gibi,

$$dU_w = \frac{1}{2} EI_f \left(\frac{d^2x}{dz^2} \right)^2 dz \quad (1.19)$$

ifade edilir.

İfade (1.8) ve (1.11)'in yardımı ile,

$$dU_w = \frac{1}{4} EI_f \left(\frac{d^2\theta}{dz^2} \right)^2 dz \quad (1.20)$$

bulunur. Denklem (1.20), kiriş boyunca entegre edilir ve her iki flanş için 2 ile çarpılırsa,

$$U_w = \frac{1}{2} \int_0^l EI_f \left(\frac{d^2\theta}{dz^2} \right)^2 dz \quad (1.21)$$

tüm kiriş için çarpılma direnci nedeniyle biriken şekil değiştirme enerjisi miktarı elde edilir.

Burulmuş bir elemandaki toplam şekil değiştirme enerjisi Denklem (1.18) ve (1.21)'in toplamından elde edilir;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l GJ \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l EI_f \left(\frac{d^2\theta}{dz^2} \right)^2 dz \quad (1.22)$$

1.3. Kolonların Burulmalı ve Eğilmeli Burulmalı Burkulması

Burada, burkulma esnasında enkesitin orijinal şeklini koruduğu kabul edilmiştir. İnce duvarlı açık kesite sahip prizmatik elemanlar için boyuna yönde iki adet birbirine paralel aks mevcuttur: Bir tanesi ağırlık merkezinden geçen aks, diğeri kayma merkezi aksıdır. Kolon yükü P, bütün kesitte üniform basınç etkisi oluşturacak şekilde ağırlık merkezine yerleştirilmiş olmalıdır. Basit eğilme için enine yükler

istenmeyen burulmasal sonuçlar oluşturmamak için kayma merkezi aksı boyunca yerleştirilmelidir. Enkesitte oluşan dönme kayma merkezinin etrafındaki dönme ile ölçüldüğünden dolayı, arzu edilmeyen burulma momentinin oluşmasını engellemek ve moment kolunu elemine etmek için enine yüklerin doğrudan kayma merkezi aksına yerleştirilmesi yegane yoldur.

Burada, dönme ile veya dönme ve eğilmenin kombinasyonu ile oluşan burkulma konusu işlenecektir. Açık ince duvarlı kesitler burulmalı ve eğilmeli burulmalı burkulmaya eğilimli, aşağı yukarı yegane kesitler olmaları münasebeti ile çalışma bu kesitler ile sınırlandırılmıştır. Çalışma ayrıca elastik davranış, küçük deformasyonlar ve konsantrik yük ile daraltılmıştır.

Şekil 1.5’de verilen keyfi seçilmiş açık ince duvarlı kesit dikkate alınsın. Burkulma sırasında meydana gelen deformasyonun iki eksene göre eğilme ve burulma kombinasyonundan oluştuğunu farz edilsin. Şekil değiştirme enerjisinin en basit formu ile ifade edilmesi maksadı için deformasyonu iki öteleme ve bir dönme konumuna indirgemek gerekir. Kayma merkezi O kullanılarak, koordinat sisteminin orijin noktası olarak alınması yapılan kabule eşlik edebilir. Burkulmanın sonucu olarak, u ve v sırasıyla x ve y doğrultusundaki yer değiştirmeler; θ ise z eksenini etrafındaki dönmedir.

Kolaylık için, alınacak elemanda mesnetlerin basit mesnet olduğu farz edilirse uçlardaki x ve y yönündeki deplasmanlar ile bu eksenlerin etrafındaki momentler;

$$u=v=0 \quad z=0 \text{ ve } l\text{'de}$$

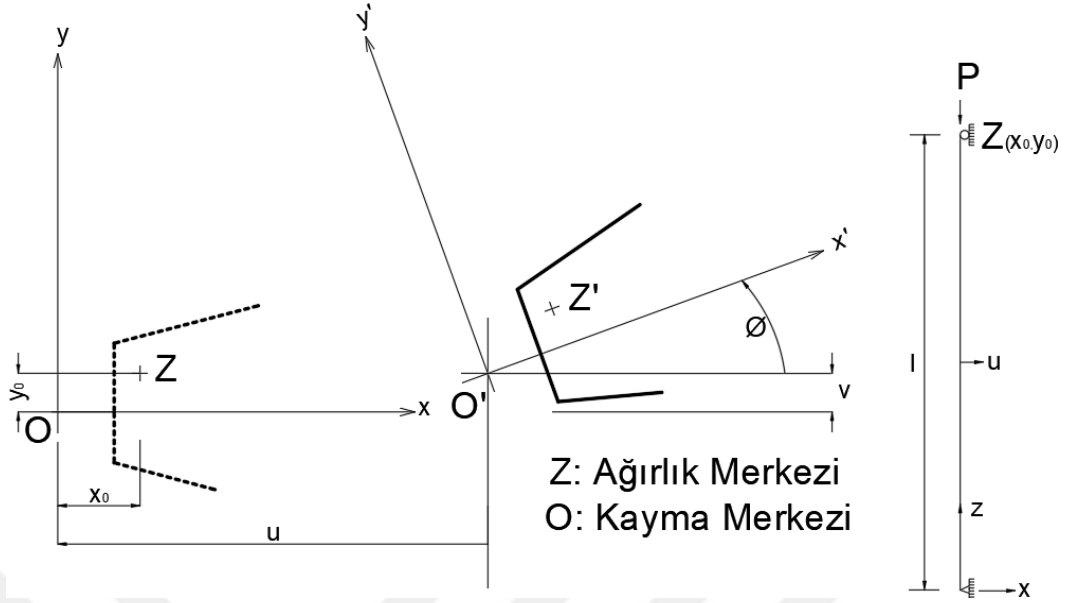
$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2v}{dz^2} = 0 \quad z=0 \text{ ve } l\text{'de} \quad (1.23)$$

yok olur.

Elemanın uçlarında eğilme koşullarına karşılık gelen burulma koşulları,

$$\theta = \frac{d^2\theta}{dz^2} = 0 \quad z=0 \text{ ve } l=0\text{'da} \quad (1.24)$$

sıfır dönme ve sıfır çarpılma sınırlamasıdır.



Şekil 1.5. Eğilmeli Burulmalı Burkulma Davranışı [95]

Elemanın içinde depolanan şekil değiştirme enerjisi dört parçadan oluşur. Bunlar; Denklem (1.25)'deki gibi [95];

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_y \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l EI_x \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l GJ \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l EI_T \left(\frac{d^2 \phi}{dz^2} \right)^2 dz \quad (1.25)$$

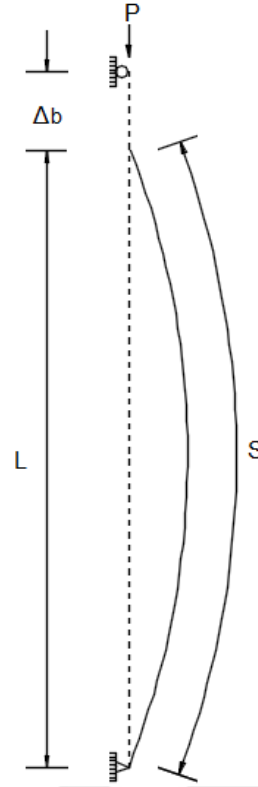
x ve y doğrultusundaki eğilme kaynaklı enerji, St. Venant kayma gerilmeleri enerjisi ve çarpılma burulması ile ilişkili boyuna gerilmelerin enerjisidir.

Harici yüklerin potansiyel enerjisi, uygulanan yükler ve bu yüklerin oluşturduğu deformasyonlarda kat edilen mesafelerin çarpımının negatif ürünüdür. Şekil 1.6, eleman büküldüğü zaman bir ucunun diğer ucuna bir Δ_b kadar yaklaştığını göstermektedir.

Δ_b mesafesi yay boyu S ile düşey izdüşümü L arasındaki farka eşittir. Fiberin kesiti dA ve bu kesitin karşıladığı yük σdA ise, elemana etkiyen kuvvete ait potansiyel enerji $-\Delta_b \sigma dA$ şeklinde ifade edilir. Toplam potansiyel enerji enkesit alanı üzerinde integrasyon ile bulunur.

$$V = - \int_A \Delta_b \sigma dA \quad (1.26)$$

Δ_b değerini bulmak için, Şekil 1.7'deki deforme olmamış haldeki koordinatları x ve y



Şekil 1.6. Boyuna Doğrultudaki Fiberde Eğilme Sebebiyle Oluşan Kısılma [95]

olan AB lifinde dikkatler dz boyundaki bir parça üzerinde yoğunlaştırılsın. Deformasyon sonrası dz elemanın alt ucundaki yer değiştirmeler \bar{u} ve \bar{v} iken üst uçta $\bar{u}+d\bar{u}$ ve $\bar{v}+d\bar{v}$ olur.

Pisagor Teoreminden faydalanarak deforme olan elemanın ds uzunluğu,

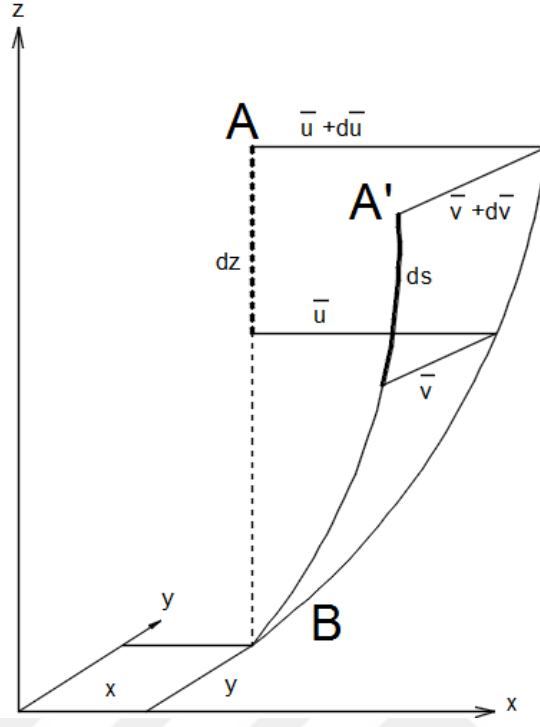
$$ds=(d\bar{u}^2+d\bar{v}^2+d\bar{z}^2)^{1/2}=\left[\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\bar{v}}{dz}\right)^2+1\right]^{1/2} dz \quad (1.27)$$

dir. $(\eta+1)^{1/2}$ şeklindeki bir ifade $\eta \ll 1$ ise $1+\frac{1}{2}\eta$ şeklinde yazılabilir. Bu bakış açısıyla

$\frac{d\bar{u}}{dz}$ ve $\frac{d\bar{v}}{dz}$ çok küçük olduklarından İfade (1.27),

$$ds=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{v}}{dz}\right)^2+1\right] dz \quad (1.28)$$

şekline dönüşür. Sol tarafın integrali 0'dan S'ye ve sağ tarafın integrali 0'dan L'ye alınırsa;



Şekil 1.7. Lifteki Eğilme Kaynaklı Yanal Deformasyonlar [98]

$$S = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{v}}{dz} \right)^2 + 1 \right] dz \quad (1.29)$$

Buradan,

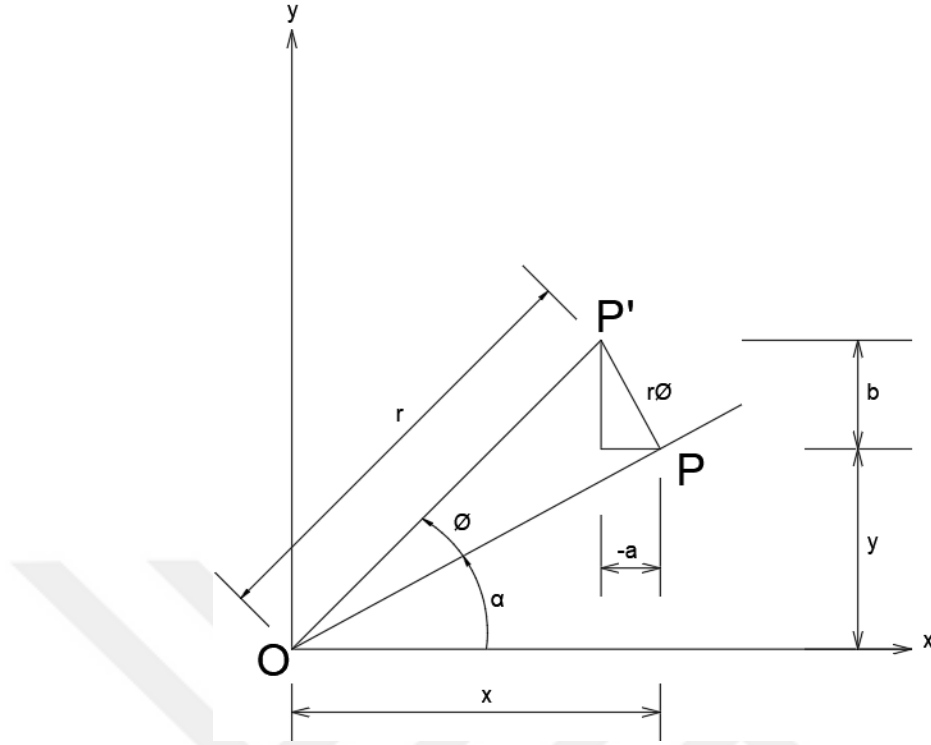
$$\Delta_b = S - L = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{v}}{dz} \right)^2 \right] dz \quad (1.30)$$

Koordinatları x ve y olan bir lifin \bar{u} ve \bar{v} yer değiştirmeleri, kayma merkezinin u ve v yer değiştirmeleri ile lifin kayma merkezi etrafında dönmesiyle oluşan ilave deplasmanların toplamından ibarettir. x ve y doğrultusundaki ikincil yer değiştirmeler, Şekil 1.8'deki gibi $-a$ ve b ile gösterilir.

Şeklin geometrisinden açıktır ki,

$$a = r\theta \sin \alpha \quad \text{ve} \quad b = r\theta \cos \alpha \quad (1.31)$$

ve



Şekil 1.8. Boyuna Fiberde Kayma Merkezi Etrafındaki Dönme Kaynaklı Yanal Ötelenme [98]

$$r \sin \alpha = y, \quad r \cos \alpha = x \quad (1.32)$$

olduğundan,

$$-a = -y\theta, \quad b = x\theta \quad (1.33)$$

yazılabilir. (x, y) 'deki lifin toplam yer değiştirmeleri,

$$\bar{u} = u - y\theta, \quad \bar{v} = v + x\theta \quad (1.34)$$

olur. Neticede İfade 1.30'daki Δ_b ,

$$\Delta_b = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 + (x^2 + y^2) \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - 2y \left(\frac{du}{dz} \right) \left(\frac{d\theta}{dz} \right) + 2x \left(\frac{dv}{dz} \right) \left(\frac{d\theta}{dz} \right) \right] dz \quad (1.35)$$

haline gelir. Bulunan sonuç İfade (1.26)'da yerine konursa;

$$V = -\frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 + (x^2 + y^2) \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - 2y \left(\frac{du}{dz} \right) \left(\frac{d\theta}{dz} \right) + 2x \left(\frac{dv}{dz} \right) \left(\frac{d\theta}{dz} \right) \right] dA dz \quad (1.36)$$

bulunur. İfade (1.36)'yı basitleştirmek için,

$$\int_A dA=A$$

$$\int_A ydA=y_0A$$

$$\int_A xdA=x_0A$$

$$\int_A (x^2+y^2)dA=r_0^2A \quad (1.37)$$

Bağıntı (1.37) kullanılabilir. Burada, x_0 ve y_0 ağırlık merkezi koordinatları, r_0 ise enkesitin kayma merkezine göre kutupsal yarıçapıdır.

Bağıntı (1.37) Eşitlik (1.36)'da yerine konulursa,

$$V=-\frac{P}{2}\int_0^L \left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + r_0^2 \left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 - 2y_0 \left(\frac{du}{dz}\right) \left(\frac{d\phi}{dz}\right) + 2x_0 \left(\frac{dv}{dz}\right) \left(\frac{d\phi}{dz}\right) \right] dz \quad (1.38)$$

haline gelir [95]. Toplam potansiyel enerjiyi temsil eden fonksiyonel Π ;

$$\Pi=U(\text{İfade(1.25)})+V(\text{İfade(1.38)})=\int_1 F(z,u',v',\phi',u'',v'',\phi'')dz \quad (1.39)$$

İfade (1.25) ve (1.38)'in toplamından elde edilir.

Varyasyon hesabı kurallarına göre eğer,

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial F}{\partial u''} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial v'} + \frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial F}{\partial v''} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \phi'} + \frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial F}{\partial \phi''} = 0 \quad (1.40)$$

Euler-Lagrange Diferansiyel Eşitlikleri (1.40) sağlanırsa Π kararlı (minimum) olacaktır. $I_w = \Gamma$ olmak üzere, eşitlikler (1.40)'ın analizinden;

$$EI_y u^{iv} + Pu'' - Py_0 \phi'' = 0 \quad (1.41a)$$

$$EI_x v^{iv} + Pv'' + Px_0 \phi'' = 0 \quad (1.41b)$$

$$EI_w \phi^{iv} + (r_0^2 P - GJ) \phi'' - y_0 Pu'' + x_0 Pv'' = 0 \quad (1.41c)$$

olarak elde edilir [98]. Buradaki üç diferansiyel denklem, sadece merkezi yüklenmiş elemanlar için burulmalı burkulma ve eğilmeli burulmalı burkulmaya ait dördüncü mertebeden girişimli diferansiyel denklemlerdir. Dördüncü mertebeden diferansiyel eşitlikler sebebiyle integral sabitlerini bulabilmek için 12 (3x4) adet sınır koşuluna ihtiyaç vardır.

Eşitlikler (1.41a, 1.41b, 1.41c), lineer, homojen ve sabit katsayılıdır. Temel burkulma modları sınır koşullarını sağlayan aşağıdaki genel formlar vasıtasıyla elde edilebilir. Çözümün;

$$u=A \sin \frac{\pi z}{l}, \quad v=B \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \emptyset=C \sin \frac{\pi z}{l} \quad (1.42)$$

formunda olduğunu varsayalım Burada A, B ve C keyfi sabit katsayılarıdır. u, v ve \emptyset 'nin türevleri Denklem (1.41a), (1.41b) ve (1.41c)'de yerine konulup $\sin \pi z/l$ ortak öge indirgemesi yapılırsa,

$$(EI_y k^2 - P)A + y_0 PC = 0$$

$$(EI_x k^2 - P)B - x_0 PC = 0$$

$$y_0 PA - x_0 PB + (EI_w k^2 + GJ - r_0^2 P)C = 0 \quad (1.43)$$

Denklem Takımı (1.43) elde edilir. Burada $k^2 = \pi^2/l^2$ 'dir. $P_x = EI_x k^2$, $P_y = EI_y k^2$ ve $P_\emptyset = (EI_w k^2 + GJ)/r_0^2$ şeklinde alınıp Denklem Takımı (1.43)'deki homojen eşitliklerin katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenir ise istenen çözüme ulaşılabilir. Böylece;

$$\begin{vmatrix} P_y - P & 0 & y_0 P \\ 0 & P_x - P & -x_0 P \\ y_0 P & -x_0 P & r_0^2 (P_\emptyset - P) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.44)$$

Determinant (1.44)'ün açılımı,

$$(P_y - P)(P_x - P)(P_\emptyset - P) - (P_y - P) \frac{P^2 x_0^2}{r_0^2} - (P_x - P) \frac{P^2 y_0^2}{r_0^2} = 0 \quad (1.45)$$

olur [95]. Kübik Eşitlik (1.45)'in çözümü kolonun aranan kritik yükünü verir.

Eğer kesit iki simetri eksenine veya nokta simetriye sahip ise, kayma merkezi ağırlık merkezi ile çakışır ve $x_0=y_0=0$ olur. Bu durum için Eşitlik (1.45) aşağıdaki gibi olur;

$$(P_y - P)(P_x - P)(P_\emptyset - P) = 0 \quad (1.46)$$

Köklerinin ise,

$$P = P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}$$

$$P = P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}$$

$$P = P_\emptyset = \frac{1}{r_0^2} \left(GJ + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \right) \quad (1.47)$$

olacağı aşikardır. Üç kökten her biri Denklem Takımı (1.43)'de yerine konulacak olursa, mod formlarına bağlı olarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

$$P = P_y: \quad A \neq 0 \quad B = C = 0$$

$$P = P_x: \quad B \neq 0 \quad A = C = 0$$

$$P = P_\emptyset: \quad C \neq 0 \quad A = B = 0 \quad (1.48)$$

Sonuçlar P_y ve P_x 'in y ve x eksenleri etrafında basit eğilmeli burkulmaya karşılık geldiklerini göstermektedir. Benzer şekilde P_\emptyset de basit burulmalı burkulma durumuna karşılık gelmektedir.

Böylece I ve Z kesitleri gibi kayma merkezi ve ağırlık merkezi kesişen kolonların, ana eksenler doğrultusunda eğilme yoluyla veya kayma merkezi etrafında dönme yoluyla burkuldukları sonucu çıkarılabilir. Bunların birleşimi olan eğilmeli burulmalı burkulma bu tür kesitlerde ortaya çıkmaz. Enkesitin şekline ve boyutlarına bağlı olarak Denklem Takımı (1.47)'de verilen yüklerden biri en düşük değere sahip olacak ve elemanın burkulma modunu belirleyecektir. Örneğin, sıcak haddelenmiş geniş flanşlı çelik kesitli elemanlarda, zayıf eksene ait eğilmeli burkulma yükü neredeyse her zaman üç muhtemel yükün en küçüğü olacaktır. Geniş flanşlı formların dizaynında yaygın olarak Euler yükünün kullanılması bu sebeptendir.

Enkesit tek simetri eksenine sahip olduğu zaman, diyelim ki x eksenine etrafında simetrik, kayma merkezi bu eksen üzerinde olacağından $y_0=0$ olur. Bu durumda ifade (1.45),

$$(P_y - P) \left[(P_x - P)(P_\emptyset - P) - \frac{P^2 x_0^2}{r_0^2} \right] = 0 \quad (1.49)$$

durumuna indirgenir. Bu ilişki ya,

$$P = P_y = \frac{\pi^2 E I_y}{l^2} \quad (1.50)$$

veya

$$(P_x - P)(P_\emptyset - P) - \frac{P^2 x_0^2}{r_0^2} = 0 \quad (1.51)$$

ile sağlanabilir. İfade (1.50), y eksenine etrafında yalın eğilmeli burkulmaya karşılık gelmektedir. İfade (1.51) ise ikinci mertebeden bir eşitlik olup her iki kökü de eğilmeli burulmalı burkulma formunu ortaya çıkarır. İki kökten küçük olanı;

$$P_{TF} = \frac{1}{2k} \left[P_\emptyset + P_x - \sqrt{(P_\emptyset + P_x)^2 - 4k P_\emptyset P_x} \right] = 0 \quad (1.52)$$

olup $k = \left[1 - (x_0/r_0)^2 \right]$ 'dir.

Köşebent ve U kesit gibi tek simetri eksenine sahip kesitlerin simetri düzlemi içinde eğilme ya da eğilme artı burulma kombinasyonu ile burkulacakları yukarıdaki nedenlerle açıktır. Bu iki moddan hangisinin kritik olduğu enkesitin şekline ve boyutlarına bağlıdır.

Tek simetri eksenli bir kesitin davranışı aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Merkezi yük altında bulunan kusurlu bir kolon ağırlık merkezini barındıran ana düzlemlerden birinin içinde eğilme meyli gösterir. Eğer bu ana düzlem aynı zamanda kayma merkezi eksenini de içeriyor ise (bu durumda xz düzlemi), bu düzlemde eğilme eş zamanlı burulmayı tetiklemeden gerçekleşebilir. Bununla birlikte, eğilme düzlemi kayma merkezi eksenini içermiyorsa (bu durumda yz eksenine), eğilmeye burulma kesinlikle eşlik edecektir.

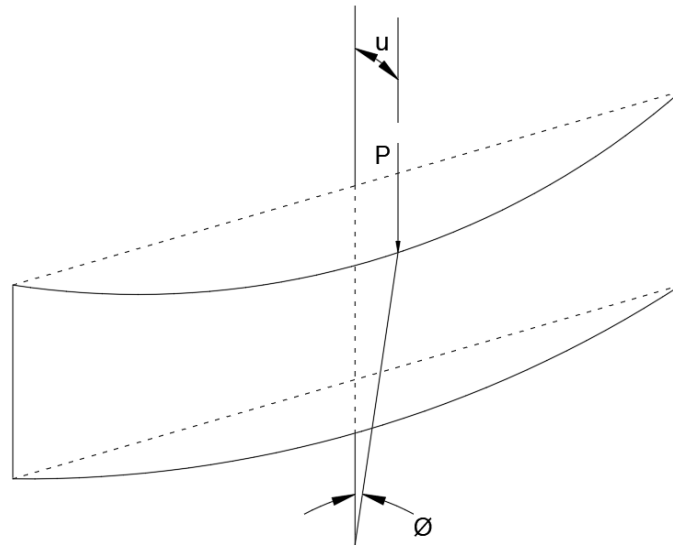
Şayet enkesit hiçbir simetri eksenine sahip değil ise, ne x_0 ne de y_0 yok olmayacağından Eşitlik (1.45) basitleşmeyecektir. Bu durumda her iki ana eksen etrafında meydana gelen eğilme, burulma ile birlikte meydana gelecek ve Eşitlik (1.45)'e ait üç kökün her biri eğilmeli burulmalı burkulmaya karşılık gelecektir. Simetrisi olmayan bir enkesite sahip eleman, enkesitin şekil ve boyutlarından bağımsız olarak her zaman eğilmeli burulmalı bir şekilde burkulacaktır. Bu tür kesitlerin kritik yükü Eşitlik (1.45)'in en küçük köküdür.

1.4. Kirişlerin Yanal Burulmalı Burkulması

Enine yüklenmiş ve bundan dolayı ana eksen etrafında eğilmiş bir eleman, basınç etkisi altındaki flanşının veya ucunun yanal olarak desteklenmemesi durumunda yana doğru burkulması da ihtimal dahilindedir. Bunun sebebi, basınç flanşının, elastik mesnede sahip bir kolonun aşırı yük altında stabilitesinin bozulmasında davrandığı gibi reaksiyon göstermesidir. Kritik yük altında basınca maruz flanş yana doğru kaçmaya çalışırken diğer taraftaki stabil flanş bu davranışı engellemeye çalışır. Bir elemanın yanal burulmalı burkulması, Şekil 1.9'da görüleceği üzere burulma ve yanal eğilmenin bir kombinasyonu şeklindedir.

1.4.1. Yanal burulmalı burkulmanın hakim diferansiyel eşitlikleri

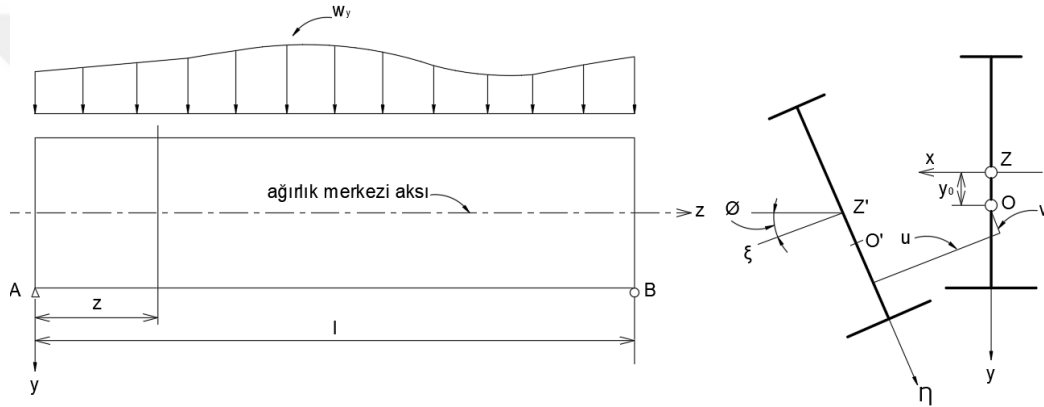
Eğer enine yükler kayma merkezinden geçmiyorsa, bunlar burulma üreteceklerdir. Eğilmesel kapasiteyi de azaltan bu ilave burulma momentinden sakınmak için enine



Şekil 1.9. Kirişlerde Yanal Burulmalı Burkulma [95]

yükün Şekil 1.10'daki gibi gövde düzleminde geçeceği şekilde en azından tek simetri eksenli eleman kullanılması tercih edilebilir. Burada kesit y eksenine göre simetrik olup u ve v kayma merkezinin ξ ve η eksenlerine paralel yer değiştirme ögeleridir. Aşağıdaki unsurların geçerli olduğu kabul edilmektedir:

- Kiriş prizmatiktir.
- Burkulma esnasında kesit orijinal durumunu korumaktadır.
- Dış yük sabittir.
- Şekil değiştirmeler elastik sınır içerisinde.
- Enine yükler eğilme düzlemindeki simetri eksenini boyunca etkimektedir.



Şekil 1.10. Koordinat Sistemi ve w_y Yüklemesi [98]

Kirişlerin yanal burulmalı burkulmasına ait ana diferansiyel eşitliklerinin türetilmesinde Şekil 1.10'daki gibi iki farklı koordinat sisteminin tanımlanması gerekmektedir: Deforme olmamış konfigürasyonda x , y , z ; deforme olmuş konfigürasyonda ise ξ , η , ζ . Burada ζ eksenini şekil değiştirmiş konfigürasyonun ağırlık merkezinden geçen aksa teğet geçmektedir. Yük sabit bir kuvvet sisteminde olduğundan sabitlenmiş koordinat sisteminde uygulanan yükleri deforme haldekilerle ilişkilendirmek gerekmektedir. Bu aşağıdaki Tablo 1.1'de verilen koordinatlar arasındaki kosinüs değerleri ile başarılabilir. Yer değiştirmiş olan aksın, xz ve yz düzlemlerindeki eğrilikleri küçük yer değiştirmeler söz konusu olduğunda $\frac{d^2u}{dz^2}$ ve $\frac{d^2v}{dz^2}$ şeklinde alınabilir. M_x ve M_y pozitif eğrilikler oluşturdukları zaman pozitif farz edilirler; $EI_x\eta''=M_x$ ve $EI_y\xi''=M_y$. Burada M_x ve M_y ; sırasıyla x ve y eksenlerine göre momentleri ifade ederler.

Tablo 1.1. Şekil 1.10'da Eksenler Arasındaki Açıların Kosinüs İfadeleri [98]

	x	y	z
ξ	1	\emptyset	$-du/dz$
η	$-\emptyset$	1	$-dv/dz$
ζ	du/dz	dv/dz	1

Lineer elastik birinci merteye analizde aksenal yük altındaki kolonun burkulması ve enine yük altındaki kirişin yanal burulmalı burkulması ayrıkt olduğundan, ana diferansiyel eşitliklerin türetilmesinde sadece yanal yükleme göz önüne alınacaktır. Burkulmadan hemen önce meydana gelen düşey yöndeki eğilmenin enerjisi küçük olduğundan ihmal edilirse, hemen ardından oluşan biçimlenimin şekil değiştirme enerjisi;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_y (u'')^2 + EI_w (\emptyset'')^2 + GK_T (\emptyset')^2] dz \quad (1.53)$$

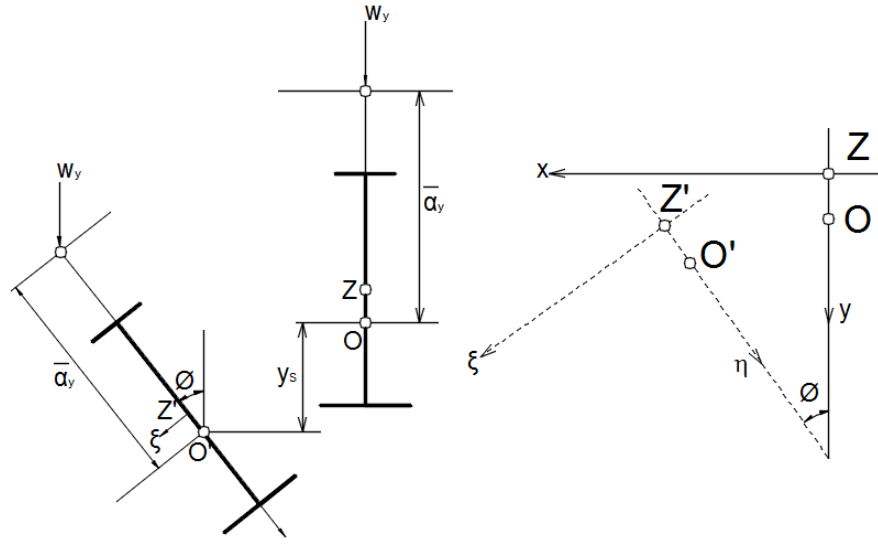
olur. Denklem (1.53)'deki K_T , J burulma sabiti ile aynıdır.

Dış kuvvetin yaptırdığı harekette meydana gelen potansiyel enerji kaybı dış yükün meydana getirdiği deplasman ile çarpımına eşit olup bu deplasmanın toplamı $y_s + |\bar{a}_y| (1 - \cos \emptyset)$ 'dir, Şekil 1.11. \emptyset çok küçük olduğundan $1 - \cos \emptyset = \emptyset^2/2$ alınabilir.

Burada y_s , eleman kesitinin ilk hali ile şekil değiştirmiş halinde kayma merkezleri arasında y yönündeki düşey mesafe, \bar{a}_y vektörü kayma merkezi ile yanal yükün aplikasyon noktası arasındaki mesafedir. Enine yük w_y 'nin potansiyel enerji kaybı;

$$V_{wy} = - \int_0^l w_y y_s dz + \frac{\bar{a}_y}{2} \int_0^l w_y \emptyset^2 dz \quad (1.54)$$

şeklindedir. Şekil 1.11'de gösterildiği gibi y_s 'nin pozitif işaretli, \bar{a}_y 'nin ise negatif işaretli olduğu dikkatten kaçmamalıdır. Ayrıca enine yükün uygulandığı pozisyon \bar{a}_y , yanal burulmalı burkulma dayanımını önemli ölçüde etkiler. Örneğin bu yük üst flanşa etkitildiği zaman Şekil 1.11'de gösterildiği üzere kesitin dönmesini arttıran bir eğilim gösterir. Bu olay kritik yükün değerini aşağı çeker. Üst flanşa etkiyen yükten



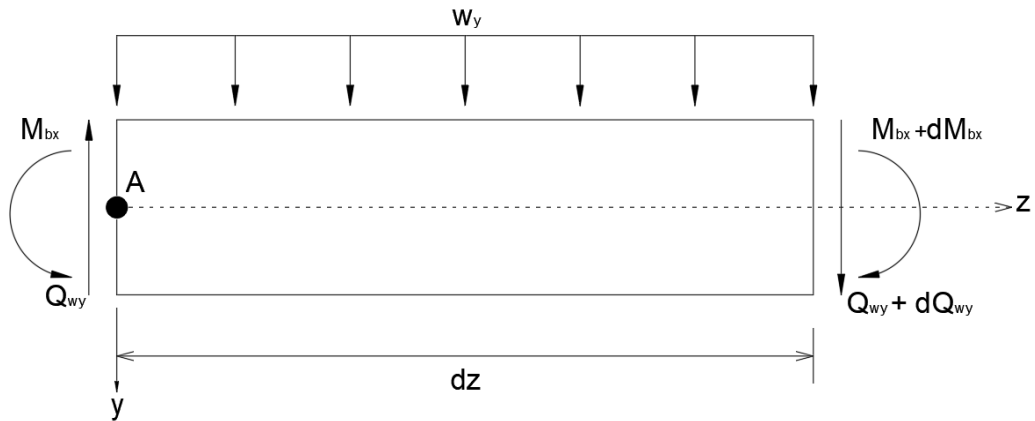
Şekil 1.11. w_y Yüğü Altında Yanal Burulmalı Deformasyon [98]

dolayı kayma merkezine veya daha aşağı noktalara uygulanan yüke göre kritik yük değerinde önemli ölçüde azalma meydana gelir. Ayrıca kritik yük değerlerindeki değişim kiriş boyu arttıkça aşamalı olarak azalmasına rağmen enine yükün konumu, ihmal edilebilecek derecede düşük olmadığı zaman, doğru bir şekilde ayarlanmalıdır.

Denklem (1.54)'deki ilk terim Şekil 1.12'den yararlanarak üretilen ilişkileri kullanarak aşağıdaki gibi düzenlenebilir;

$$\sum F_y = 0 = -Q_{wy} + Q_{wy} + dQ_{wy} + w_y dz$$

$$\frac{dQ_{wy}}{dz} = -w_y \quad (1.55)$$



Şekil 1.12. w_y Yüğü Altında Bir Diferansiyel Elemanın Serbest Cisim Diyagramı [98]

$$\sum M_A=0=+M_{bx}-w_y dz \frac{dz}{2} - (Q_{wy} + dQ_{wy}) dz - M_{bx} - dM_{bx}$$

$$\frac{dM_{bx}}{dz} = -Q_{wy} \quad (1.56)$$

Buradan bulunan İfade (1.57)'ye,

$$\begin{aligned} - \int_0^1 w_y y_s dz &= \int_0^1 \frac{dQ_{wy}}{dz} y_s dz = \left[Q_{wy} y_s \right]_0^1 - \int_0^1 Q_{wy} \frac{dy_s}{dz} dz \\ &= + \left[M_{bx} \frac{dy_s}{dz} \right]_0^1 - \int_0^1 M_{bx} \frac{d^2 y_s}{dz^2} dz \end{aligned} \quad (1.57)$$

geometrik ve doğal sınır koşulları yansıtılırsa,

$$V_{wy} = - \int_0^1 M_{bx} \frac{d^2 y_s}{dz^2} dz + \frac{\bar{a}_y}{2} \int_0^1 w_y \phi^2 dz \quad (1.58)$$

üstü çizili terimler yok olur. $\frac{d^2 y_s}{dz^2}$ terimi yz düzlemi içinde oluşan eğriliği temsil eder; tüm deformasyonların küçük olmasıyla bağlantılı, diğer düzlemlerdeki eğrilikler, Şekil 1.13'de görülebileceği gibi, $\frac{d^2 y_s}{dz^2}$ ile vektörel olarak ilişkilendirilebilir (Şekil 1.10'dan, ayrıca, $y_s = v \cos \phi + u \sin \phi$ bağıntısı da görülebilir). Buradan,

$$\frac{d^2 y_s}{dz^2} = v'' \cos \phi + u'' \sin \phi \cong v'' + \phi u'' \quad (1.59)$$

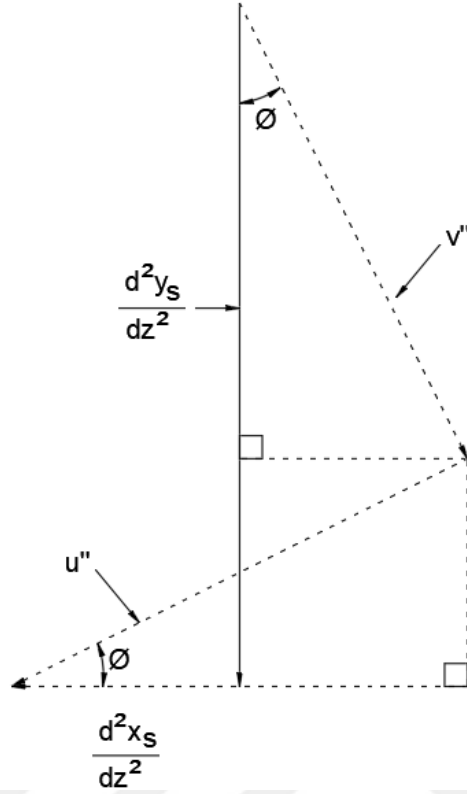
türetilir.

Buna binaen potansiyel enerji kaybı;

$$\begin{aligned} V_{wy} &= - \int_0^1 M_{bx} (v'' + \phi u'') dz + \frac{\bar{a}_y}{2} \int_0^1 w_y \phi^2 dz \\ &= - \int_0^1 M_{bx} v'' dz - \int_0^1 M_{bx} \phi u'' dz + \frac{\bar{a}_y}{2} \int_0^1 w_y \phi^2 dz \end{aligned} \quad (1.60)$$

şeklinde bulunur. Denklem (1.60) sıfır yük durumundan burkulmuş duruma kadar olan potansiyel enerji değişimini ifade eder. Hemen burkulma öncesinde $\phi = u'' = 0$ olur

ki, bu durumda durağan potansiyel enerji,



Şekil 1.13. u'' ve v'' Arasındaki İlişki [98]

$$- \int_0^1 M_{bx} v'' dz \quad (1.61)$$

Bir sonraki komşu denge durumunda, yani burkulma kaynaklı potansiyel enerji kaybı,

$$V_{wy} = - \int_0^1 M_{bx} \phi u'' dz + \frac{\bar{a}_y}{2} \int_0^1 w_y \phi^2 dz \quad (1.62)$$

Bu durumda toplam potansiyel enerji fonksiyoneli,

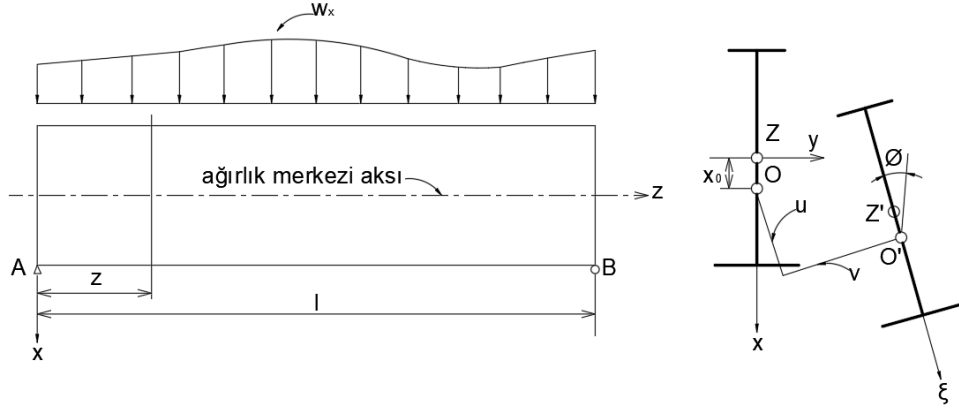
$$\Pi = U + V$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^1 [EI_y (u'')^2 + EI_w (\phi'')^2 + GK_T (\phi')^2] dz - \int_0^1 M_{bx} \phi u'' dz + \frac{\bar{a}_y}{2} \int_0^1 w_y \phi^2 dz \quad (1.63)$$

şeklinde bulunur.

Şekil 1.14'deki enine yük w_x benzer bir türetim için düşünüldüğünde, yukarıdaki prosese paralel çözüm yürütülebilir. Kabul (e)'nin avantajı ile, w_x ve w_y yüklerini

aynı problemde eş zamanlı barındırmak ve sonuç olarak çift eksenli eğilmenin ayrık olması için kiriş kesitinin çift simetriye sahip olması gerekir.

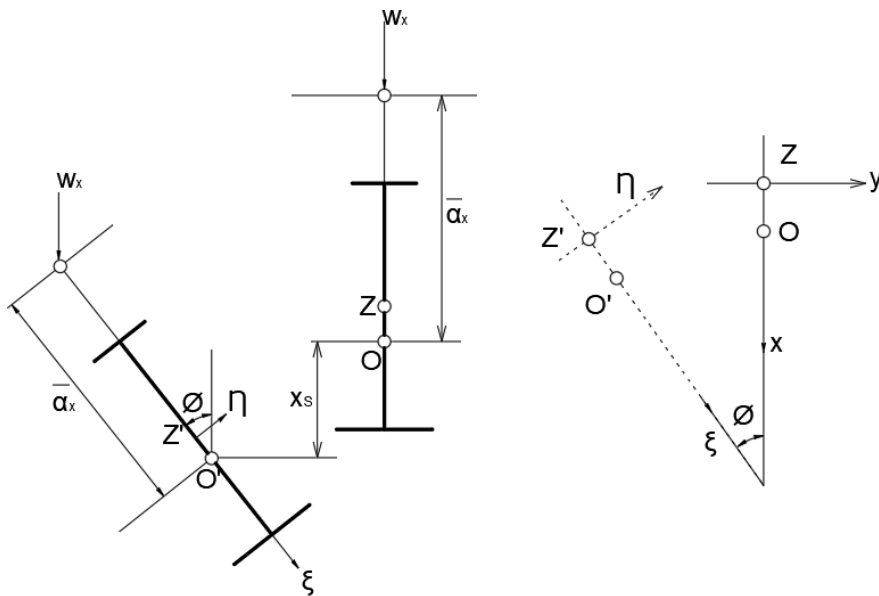


Şekil 1.14. Koordinat Sistemi ve w_x Yüklemesi [98]

Dış kuvvetin yaptırdığı harekette meydana gelen potansiyel enerji kaybı dış yükün meydana getirdiği deplasman ile çarpımına eşit olup bu deplasmanın toplamı $x_s + |\bar{a}_x|(1 - \cos \phi)$ 'dir, Şekil 1.15. ϕ çok küçük olduğundan $1 - \cos \phi = \phi^2/2$ alınabilir.

Burada x_s eleman kesitinin ilk hali ile şekil değiştirmiş halinde kayma merkezleri arasında x yönündeki düşey mesafe, \bar{a}_x vektörü kayma merkezi ile yanal yükün aplikasyon noktası arasındaki mesafedir. Buradan;

$$V_{w_x} = - \int_0^l w_x x_s dz + \frac{\bar{a}_x}{2} \int_0^l w_x \phi^2 dz \quad (1.64)$$



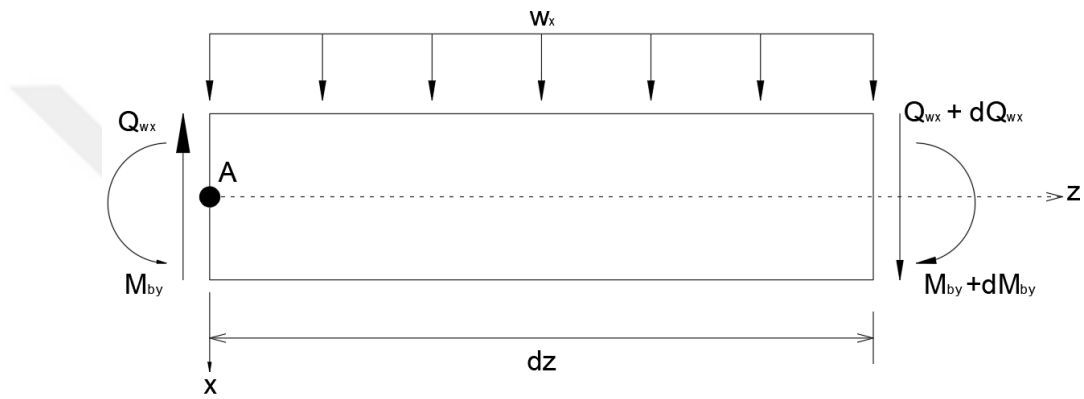
Şekil 1.15. w_x Yüğü Altında Yanal Burulmalı Deformasyon [98]

olur. Şekil 1.15’de gösterildiği gibi x_s ’nin pozitif işaretli, \bar{a}_x ’nin ise negatif işaretli olduğu dikkatten kaçmamalıdır.

Denklem (1.64)’deki ilk terim Şekil 1.16’den yararlanarak üretilen ilişkiler ışığında aşağıdaki gibi düzenlenebilir;

$$\sum F_x = -Q_{wx} + Q_{wx} + dQ_{wx} + w_x dz = 0$$

$$\frac{dQ_{wx}}{dz} = -w_x \quad (1.65)$$



Şekil 1.16. w_x Yüğü Altında Bir Diferansiyel Elemanın Serbest Cisim Diyagramı [98]

ve

$$\sum M_A = -M_{by} + w_x dz \frac{dz}{2} + (Q_{wx} + dQ_{wx}) dz + M_{by} + dM_{by} = 0$$

$$\frac{dM_{by}}{dz} = -Q_{wx} \quad (1.66)$$

Buradan,

$$\begin{aligned} - \int_0^1 w_x x_s dz &= \int_0^1 \frac{dQ_{wx}}{dz} x_s dz = \left[Q_{wx} x_s \right]_0^1 - \int_0^1 Q_{wx} \frac{dx_s}{dz} dz \\ &= + \left[M_{by} \frac{dx_s}{dz} \right]_0^1 - \int_0^1 M_{by} \frac{d^2 x_s}{dz^2} dz \end{aligned} \quad (1.67)$$

olur. İfade (1.67)’ye geometrik ve doğal sınır koşullarını yansıtırsak üstü çizili terimler yok olur. Buradan;

$$V_{wx} = - \int_0^1 M_{by} \frac{d^2 x_s}{dz^2} dz + \frac{\bar{a}_x}{2} \int_0^1 w_x \phi^2 dz \quad (1.68)$$

formuna dönüşür. $\frac{d^2 x_s}{dz^2}$ terimi xz düzlemi içinde oluşan eğriliği temsil eder; tüm deformasyonların küçük olmasıyla bağlantılı, diğer düzlemlerdeki eğrilikler, Şekil 1.13'de gösterildiği üzere vektörel toplam olarak ilişkilendirilebilir.

$$\frac{d^2 x_s}{dz^2} = u'' \cos \phi - v'' \sin \phi \cong u'' + \phi v'' \quad (1.69)$$

eşitliğine binaen potansiyel enerji kaybı;

$$\begin{aligned} V_{wx} &= - \int_0^1 M_{by} (u'' - \phi v'') dz + \frac{\bar{a}_x}{2} \int_0^1 w_x \phi^2 dz \\ &= - \int_0^1 M_{by} u'' dz + \int_0^1 M_{by} \phi v'' dz + \frac{\bar{a}_x}{2} \int_0^1 w_x \phi^2 dz \end{aligned} \quad (1.70)$$

olur. Denklem (1.70), sıfır yük durumundan burkulmuş duruma kadar olan potansiyel enerji değişimini ifade eder. Hemen burkulma öncesinde $\phi = v'' = 0$ ve durağan potansiyel enerji;

$$- \int_0^1 M_{by} u'' dz \quad (1.71)$$

Bir sonraki komşu denge durumunda, yani burkulma kaynaklı potansiyel enerji kaybı;

$$V_{wx} = \int_0^1 M_{by} \phi v'' dz + \frac{\bar{a}_x}{2} \int_0^1 w_x \phi^2 dz \quad (1.72)$$

İki eksenli eğilme için Denklem (1.63)'de verilen toplam enerji fonksiyoneli,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^1 [EI_y (u'')^2 + EI_x (v'')^2 + EI_w (\phi'')^2 + GK_T (\phi')^2 \\ &\quad - \int_0^1 M_{bx} \phi u'' + \int_0^1 M_{by} \phi v'' + \frac{1}{2} \int_0^1 (\bar{a}_x w_x + \bar{a}_y w_y) \phi^2] dz \\ &= \int_0^1 F(u'', v'', \phi, \phi', \phi'') dz \end{aligned} \quad (1.73)$$

Denklem (1.73)'deki şekilde genişletilebilir [98]. Şu husus nazardan kaçmamalıdır ki

iki eksenli eğilme sadece Kabul (e)'nin varlığı altında iki taraflı simetrik kesitler için düşünülebilir. II, aşağıdaki Euler-Lagrange eşitliklerinin sağlanması halinde kararlı (minimum) olacaktır:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial F}{\partial u''} = 0 \quad (1.74a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial v'} + \frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial F}{\partial v''} = 0 \quad (1.74b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \phi'} + \frac{d}{dz^2} \frac{\partial F}{\partial \phi''} = 0 \quad (1.74c)$$

F'nin u, u' ve u'' için türevleri, $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$ ve $\frac{\partial F}{\partial u''} = EI_y u'' - M_{bx} \phi$ Denklem (1.74a)'da yerine konulursa;

$$EI_y u^{iv} - \frac{d^2}{dz^2} (M_{bx} \phi) = 0 \quad (1.75)$$

Benzer işleme,

$$EI_x v^{iv} + \frac{d^2}{dz^2} (M_{by} \phi) = 0 \quad (1.76)$$

olur. $\frac{\partial F}{\partial \phi} = -M_{bx} u'' + M_{by} v'' + (\bar{a}_x w_x + \bar{a}_y w_y) \phi$, $\frac{\partial F}{\partial \phi'} = GK_T \phi'$ ve $\frac{\partial F}{\partial \phi''} = EI_w \phi''$ türev sonuçları Denklem (1.74c)'de yerlerine konulur ise,

$$EI_w \phi^{iv} - GK_T \phi'' - M_{bx} u'' + M_{by} v'' + (\bar{a}_x w_x + \bar{a}_y w_y) \phi = 0 \quad (1.77)$$

bulunur.

Eşitlikler (1.75), (1.76) ve (1.77) prizmatik doğrusal kirişlerin yanal burulmalı burkulma davranışına ait genel diferansiyel ifadelerdir [98].

1.4.2. Enerji metodu ile I kirişlerin burkulmasının incelenmesi

Yanal burulmalı burkulmanın el ile klasik yöntemlerle araştırılması, özellikle üniform olmayan eğilme için değişken katsayılı diferansiyel eşitliklerden oluşan bir sistemle sonuçlanacağından, çok karmaşık ve yorucudur. Aşağıda basit mesnetli ve basit eğilme altındaki bir I kirişinde, tam çözüme çok yakın bir kritik yükün

bulunmasının pratiği yapılacaktır.

Winter [13] tarafından ortaya konulmuş bir analizin genel hatlarını takip edecek şekilde, Rayleigh-Ritz metodu kullanılarak kritik yük araştırılacaktır.

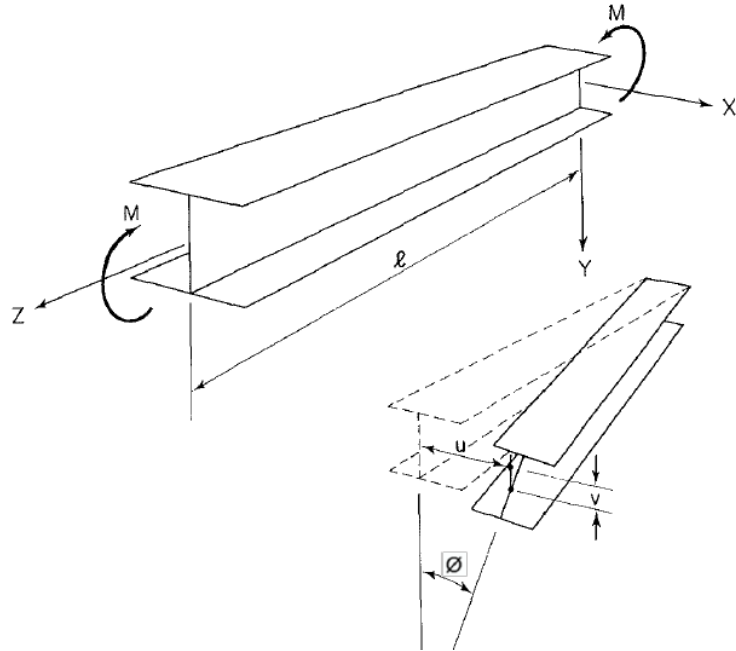
Aşağıdaki Şekil 1.17'de gösterilen ve M basit eğilme yüküne maruz basit mesnetli kirişi dikkate alalım. Kesitin ana akslarından geçen koordinatlar x ve y, boyuna yönde olup kesitin ağırlık merkezinden geçen koordinat ise z koordinatıdır. Basit mesnede karşılık gelen eğilmesel ve burulmasal sınır koşulları;

$$u=v=\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2v}{dz^2}=0 \quad z=0, l'de$$

$$\varnothing=\frac{d^2\varnothing}{dz^2}=0 \quad z=0, l'de \quad (1.78)$$

Burada u ve v, x ve y doğrultusundaki yer değiştirmeleri, \varnothing ise z eksenini etrafındaki burulmanın açısıdır. $\frac{d^2\varnothing}{dz^2}=0$ ifadesi mesnetlerde çarpılmanın kısıtlanmadığını ifade eder.

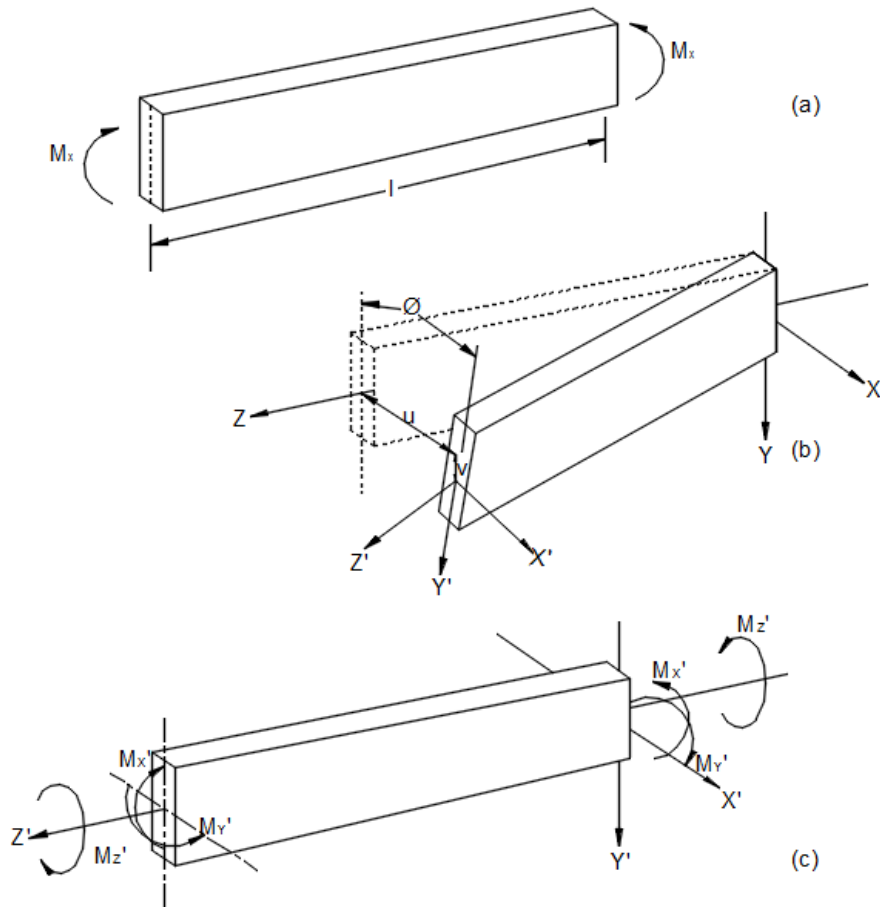
Momentin kritik değere ulaştığı anda eleman, çok hafif bir şekilde burkulmuş olarak denge halinde olabilir. Bu yüzden, Enerji metodu ile kritik momenti belirlemek için,



Şekil 1.17. Basit Mesnetli Bir I Kirişin Basit Eğilme Altında Yanal Burulmalı Burkulması [95]

burkulmuş sistemin durağan bir toplam enerji seviyesine sahip olduğu momenti belirlemek gereklidir.

Konuya devam etmeden önce, burkulmanın mekanizmasını basit bir şekilde anlamak için kirişin en yalın halini, basit eğilme altında ve basit mesnetli olarak dikkate alalım. Şekil 1.18a'daki elemanın Hooke kanununa uyduğu ve kesitin geometrisinin burkulma esnasında değişmediği kabul edilsin. Şekil 1.18b'de sabit x,y,z koordinat sistemi elemanın ilk durumuna, x',y',z' koordinat sistemi ise burkulmadan sonraki haline aittir. x' ve y' enkesitin ana eksenlerinden geçmekte olup z' ise elemanın ağırlık merkezine teğettir. Burkulmuş elemanın x ve y eksenleri yönündeki yer değiştirmeleri sırasıyla u ve v ; z etrafındaki dönmesi ise θ ile gösterilmiş olup gösterildikleri yönde pozitif işaretlidirler. Basit mesnetli sistemde sınır koşulları ifade (1.78)'deki gibidir.



Şekil 1.18. Basit Mesnetli Bir I Kirişin Basit Eğilme Altında Yanal Burkulmalı Burkulması [95]

M_x 'in deforme olmuş kesitteki yansımaları olan $M_{x'}$, $M_{y'}$ ve $M_{z'}$ momentlerinin Şekil 1.18c' deki yönleri pozitif olarak alınırsa eğilme ve burulmaya ait diferansiyel eşitlikler,

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -M_{x'} \quad (1.79)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -M_{y'} \quad (1.80)$$

$$GJ \frac{d\theta}{dz} = -M_{z'} \quad (1.81)$$

şeklinde yazılabilir. İlk iki ifade olan Eşitlik (1.79) ve (1.80) bilindiği üzere eğilme kaynaklı x' ve y' eksenlerine göre yazılmış terimler olup üçüncü ifade olan Eşitlik (1.81) z' eksenini etrafındaki burulma kaynaklıdır. Böyle bir elemanda çarpılma rijitliği ihmal edilebilir düzeyde olduğundan Denklem (1.13)'teki ikinci terim düşer.

Denklem (1.79), (1.80) ve (1.81)'de görülen $M_{x'}$, $M_{y'}$ ve $M_{z'}$ momentlerinin bulunabilmesi için x' , y' , z' eksenlerinin x ile yaptıkları açılarının bilinmesi gerekmektedir. Şekil 1.19a'dan açıktır ki $x-x'$ arasındaki açı θ değerine ve $y'-x$ arasındaki açı $\theta+90^\circ$ 'a eşittir. Bu durumda;

$$M_{x'} = M_x \cos \theta = M_x \quad (1.82)$$

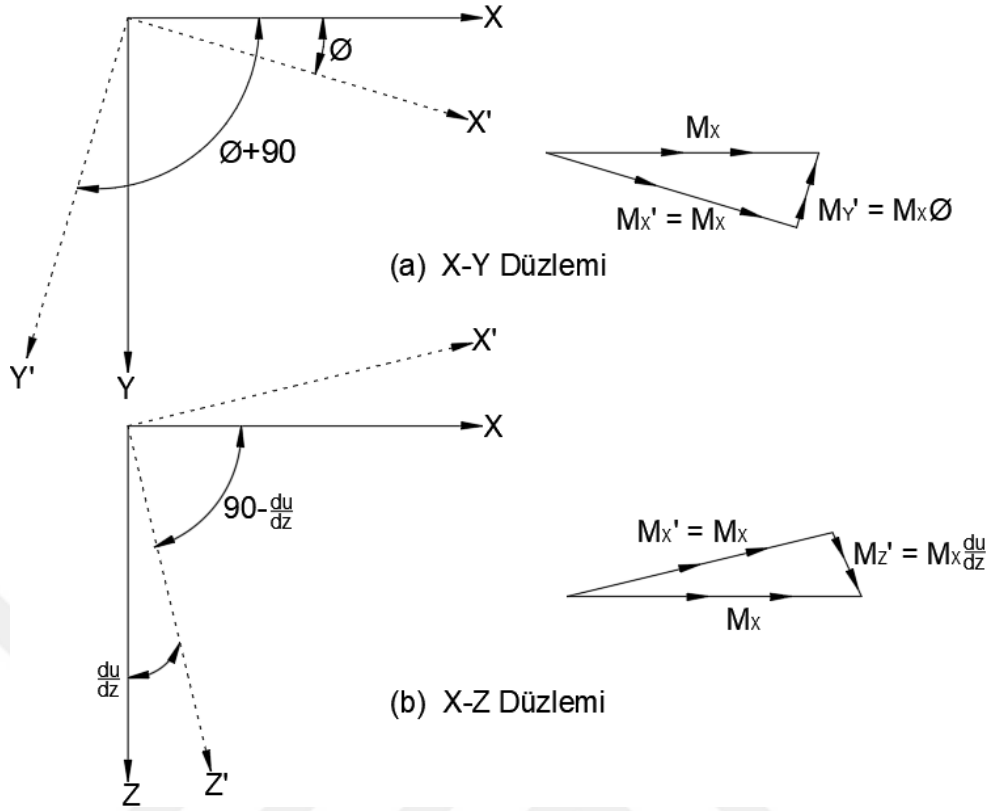
$$M_{y'} = M_x \cos (\theta+90) = -M_x \sin \theta = -M_x \theta \quad (1.83)$$

olur. z' eksenini elemanın defleksiyon eğrisine teğettir. Şekil 1.19b'den görüleceği üzere $z'-z$ arasındaki açı du/dz 'ye eşit olup buradan $z'-x$ arasındaki açı $90-(du/dz)$ 'dir. Bundan dolayı $M_{z'}$,

$$M_{z'} = M_x \cos (90 - \frac{du}{dz}) = M_x \sin \frac{du}{dz} = M_x \frac{du}{dz} \quad (1.84)$$

haline gelir. Son üç ifade Denklem (1.79), (1.80) ve (1.81)'de yerine konulursa aşağıdaki diferansiyel eşitlikler elde edilir;

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + M_x = 0 \quad (1.85)$$



Şekil 1.19. M_x momentinin x' , y' , z' Eksenleri Doğrultusundaki Bileşenleri [95]

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + M_x \varnothing = 0 \quad (1.86)$$

$$GJ \frac{d\varnothing}{dz} - M_x \frac{du}{dz} = 0 \quad (1.87)$$

Üç eşitlikten birincisi değişken olarak sadece v 'yi içermektedir. Bu ilk eşitlik elemanın düşey düzlemdeki eğilmesini tarifler ve diğer ikisinden bağımsız çözülebileceğini ifade eder. İkinci ve üçüncü eşitlik yanal burkulma ve burulmayı içermekte olup birlikte çözülmeyi gerektiren akuple bir yapıya sahiptir. Burkulma probleminin hakim eşitlikleri olan Diferansiyel Denklem (1.86) ve (1.87), böylelikle, Diferansiyel Denklem (1.85)'deki ilk eşitlikten bağımsızdırlar. Bu durum, Euler kolonunda burkulma esnasında meydana gelen ve ona öncülük yapan aksenal basınçtan bağımsız olan eğilme fiiline karşılık gelir. Euler kolonu düşünüldüğü zaman, burkulma problemi tarif edildiğinde aksenal kısalmanın zımnem ihmal edilebileceği kabul edilebilmektedir. Bu yüzden kısalmayı temsil eden bir diferansiyel eşitlik asla dikkate alınmamıştır.

Denklem (1.87)'nin türevi alınıp buradan elde edilen $\frac{d^2u}{dz^2}$ ifadesi Denklem (1.86)'da yerine konulursa u elemine edilir,

$$GJ \frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{M_x^2}{EI_y} \theta = 0 \quad (1.88)$$

veya

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + k^2 \theta = 0 \quad (1.89)$$

olur. Burada $k^2 = M_x^2 / GJ EI_y$ olup İfade (1.89)'un çözümü;

$$\theta = A \sin kz + B \cos kz \quad (1.90)$$

$\theta = 0$, $z=0$ ve l 'de sınır koşulundan,

$$B=0 \text{ ve } A \sin kl=0 \quad (1.91)$$

bulunur. Nötr denge durumu için, eleman deforme olmamış konfigürasyonda olduğu gibi deforme olmuş bir halde de denge içinde olmalıdır. $A=0$, $A \sin kl=0$ ifadesini her k değeri için sağlayacağından dolayı deforme olmamış konfigürasyon için denge, herhangi bir yük için mümkündür. Bununla birlikte deforme olmuş bir yapıda denge sadece $\sin kl=0$ olduğu zaman mümkündür. Bu durumda $kl=\pi$ olacağından kritik moment;

$$M_{kr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{GJ EI_y} \quad (1.92)$$

şeklinde bulunur. Denklem (1.92) üniform eğilme altındaki basit mesnetli bir dikdörtgen kiriş için kritik burulma momentini vermektedir. Yanal burulmalı burkulma, y eksenine göre eğilme ve burulmanın kombinasyonu olduğuna göre kritik momentin eğilme rijitliği EI_y ve burulma rijitliği GJ ile orantılı olması sürpriz değildir [95].

Ekstrem gerilme kritik momentin kesitin mukavemet momentine bölünmesi ile elde edilir. Böylece kritik gerilme;

$$\sigma_{kr} = \frac{M_{kr}}{W_x}$$

veya,

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi}{1W_x} \sqrt{GJ E I_y} \quad (1.93)$$

haline gelir. Dikdörtgen kesit için aşağıdaki J ve x eksenine göre mukavemet momenti, W_x ifadeleri Denklem (1.93)'de yerine yerleştirilirse;

$$J = \frac{hb^3}{3}, W_x = \frac{2I_x}{h}, I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi}{1} \sqrt{GE} \sqrt{\frac{hb^3 I_y h^2}{3 4I_x bh^3}} = \frac{\pi \sqrt{GE}}{1/b} \sqrt{\frac{I_y}{I_x}} \quad (1.94)$$

bulunur. Bu ilişki kritik gerilmenin ana rijitlikler, I_y/I_x oranı ile doğru orantılı olduğunu ve uzunluğun genişliğe oranı ile ters orantılı olduğunu gösterir. Bundan dolayı yanal burkulma göreceli derin, dar ve uzun kirişlerde görülür [95].

Konuya tekrar dönülecek olunursa, yukarıda burkulmanın mekanizmasının anlatıldığı dikdörtgen kirişin incelenmesinde bir düşey deplasman v, bir yatay deplasman u ve bir dönme θ unsurlarından oluşan elemanın nihai deformasyonuna bariz olarak iki aşamada ulaştığı görülür. İlk olarak, eleman düşey düzlem içinde bükülür, sonra kritik yükte yanal olarak burulur ve bükülür. Aynı zamanda düşey deplasmanın yer aldığı deformasyonun ilk aşamasında, o ana kadar uygulanan tüm moment değerlerinin altında elemanın dengede olduğu gösterilmiştir. Bundan dolayı, düşey eğilmeye karşılık gelen potansiyel enerjideki değişim kısmı özdeş olarak sıfıra eşit olacaktır ve analizlerde dikkate alınması zorunluluğu yoktur [95]. Kirişlerde düşey yöndeki eğilmenin enerjisini dışarıda tutma olayı, kolondaki aksenal sıkışmanın enerjisini dışarıda tutmanıniki ile eşdeğerdir.

Şekil değiştirme enerjisi, x eksen yönündeki kısmı ve z eksen etrafında burulmadan oluşan kısmı olmak üzere iki parçadan oluşur. Buna göre şekil değiştirme enerjisi;

$$U = \frac{1}{2} E I_y \int_0^l \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} G J \int_0^l \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{2} E \Gamma \int_0^l \left(\frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)^2 dz \quad (1.95)$$

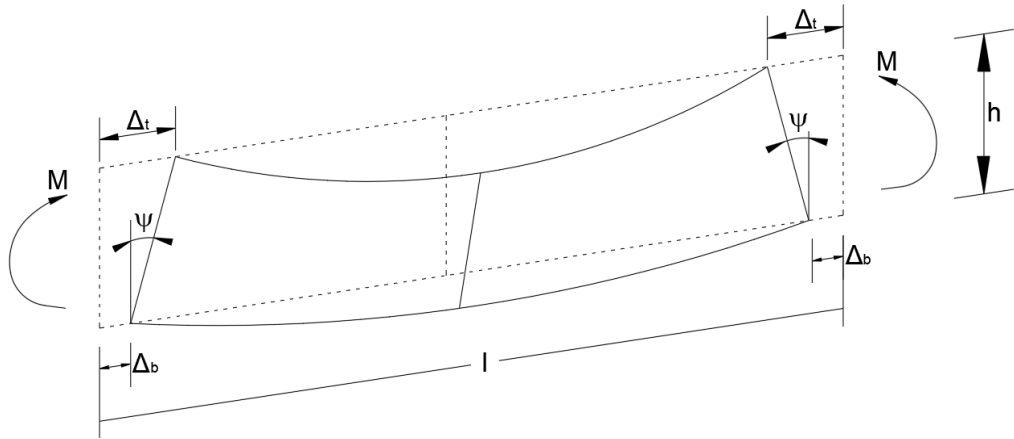
I kiriş, yukarıda ek bilgi olarak verilen dikdörtgen kirişten farklı olarak kayda değer bir çarpılma rijitliğine sahiptir. Bu yüzden burulma enerjisi, St Venant kaynaklı enerji ve çarpılma enerjisi olmak üzere iki parçadan oluşur.

Toplam enerji için Denklem (1.95)'teki şekil değiştirme enerjisine ayrıca harici yüklerin potansiyel enerjisi de eklenmelidir. M eğilme momenti olmak üzere basit eğilme etkisindeki bir kiriş için potansiyel enerji V,

$$V = -2M\psi \quad (1.96)$$

uygulanan momentler ile bunların ürünü olan burkulma esnasında oluşan açıyla çarpımının negatif değerine eşittir.

Şekil 1.20'de gösterildiği üzere, burkulma kirişteki boyuna liflerin uçlarının karşılıklı olarak yaklaşmasına sebep olur. Şayet deformasyon sadece yanal eğilmeden oluşsa idi kirişin içindeki her fiberin uçları birbirine aynı ölçüde yaklaşacaktı. Bununla birlikte yanal eğilmeye burulma da eşlik etmekte olduğundan üstteki liflerin uçları alttaki liflerin uçlarından daha büyük ölçekte birbirine yaklaşır. Bu, elemanın uç kesitlerinin ψ dönmesinde artışa yol verir. Uç kesitlerin en üst lifindeki deplasman Δ_t , en alt lifindeki deplasman da Δ_b olsun. Burkulma esnasında oluşan ψ açısı;



Şekil 1.20. Yanal Burkulmada Oluşan Uç Dönmeleri [95]

$$\psi = \frac{\Delta_t - \Delta_b}{h} \quad (1.97)$$

şeklinde yazılabilir. Burada h kirişin yüksekliğini ifade eder.

Alt ve üst liflerdeki yer değiştirmeleri bulmak için aşağıdaki ilave bilgilendirme

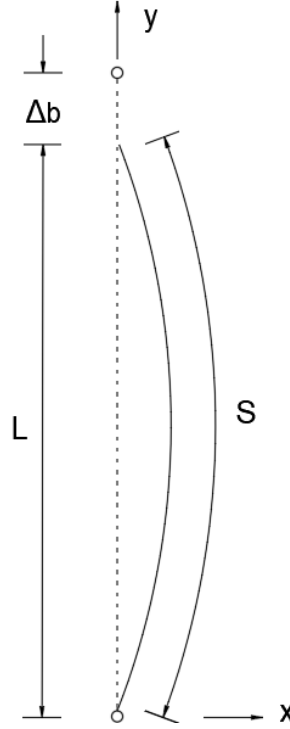
yapılsın. Şekil 1.21 kirişindeki kısalma $\Delta_b = S - L$ 'dir. Pisagor teoremi yardımıyla ds,

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx \quad (1.98)$$

denkleminde sol taraf 0'dan S'ye, sağ taraf 0'dan L'ye entegre edildiğinde,

$$S = \int_0^L \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx \quad (1.99)$$

bulunur. Binom Teoremindeki $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots$ açılımının kullanılması yoluyla, integrali alınacak bölümün açılımı yapıldığında ve deformasyonlarının çok küçük olacağı varsayıldığında $(dy/dx)^2$ ifadesinde daha yüksek dereceli terimler ihmal edilerek,



Şekil 1.21. Kiriş ve Kısalmada Oluşan Kemerli Arasındaki Boy Farkı [95]

$$S = \int_0^L \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (1.100)$$

formu elde edilir. Buradan,

$$S-L = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (1.101)$$

$\Delta_b = S-L$ olduğundan;

$$\Delta_b = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (1.102)$$

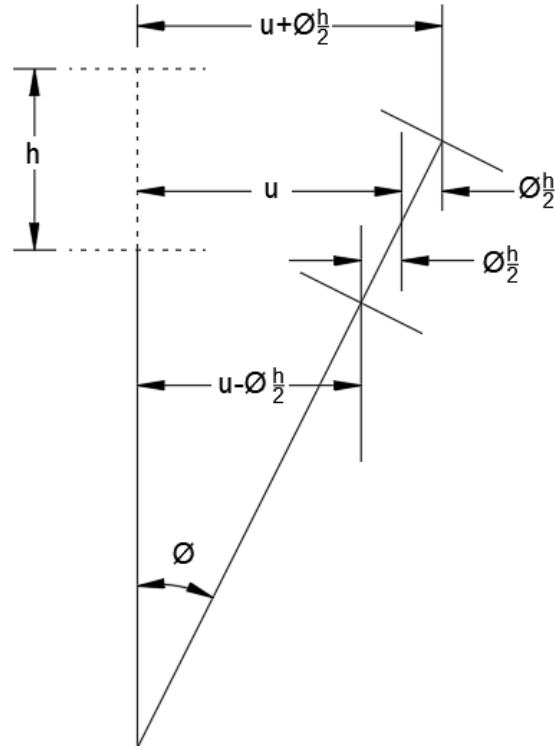
elde edilir [95].

Bu bilgilendirmenin ardından problemde Denklem (1.102) ifadesi yorumundan faydalanılarak,

$$\Delta_t = \frac{1}{4} \int_0^L \left(\frac{du_t}{dz} \right)^2 dz \quad (1.103)$$

$$\Delta_b = \frac{1}{4} \int_0^L \left(\frac{du_b}{dz} \right)^2 dz \quad (1.104)$$

sonucuna ulaşılır. Denklem (1.103) ve (1.104) eşitliklerindeki u_t ve u_b değerleri gövde yüzeyinin üst ve alt yanal deplasmanlarıdır. Şekil 1.22'den bu deplasmanlar,



Şekil 1.22. Flanşların Burkulmaya Bağlı Yanal Sapması [95]

$$u_t = u + \varnothing \frac{h}{2} \quad (1.105)$$

$$u_b = u - \varnothing \frac{h}{2} \quad (1.106)$$

şeklinde bulunur. Böylece;

$$\Delta_t = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d}{dz} \left(u + \varnothing \frac{h}{2} \right)^2 dz \quad (1.107)$$

ve

$$\Delta_b = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d}{dz} \left(u - \varnothing \frac{h}{2} \right)^2 dz \quad (1.108)$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu ifadeler Denklem (1.97)'de yerine konular ve sadeleştirme yapılırsa,

$$\Psi = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{du}{dz} \frac{d\varnothing}{dz} dz \quad (1.109)$$

Böylece Denklem (1.96)'daki dış yüklerin potansiyel enerji denklemi aşağıdaki gibi olur;

$$V = -M \int_0^1 \frac{du}{dz} \frac{d\varnothing}{dz} dz \quad (1.110)$$

Finalde Denklem (1.95) ve (1.110) toplanarak, sistemin,

$$U + V = \frac{1}{2} E I_y \int_0^1 \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} G J \int_0^1 \left(\frac{d\varnothing}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{2} E \Gamma \int_0^1 \left(\frac{d^2 \varnothing}{dz^2} \right)^2 dz - M \int_0^1 \frac{du}{dz} \frac{d\varnothing}{dz} dz \quad (1.111)$$

toplam potansiyel enerjisine ulaşılır. İfade (1.78)'de verilen sınır koşulları,

$$u = A \sin \frac{\pi z}{l} \quad (1.112)$$

$$\varnothing = B \sin \frac{\pi z}{l} \quad (1.113)$$

Denklem (1.112) ve (1.113)'teki u ve \varnothing ifadeleri ile sağlanabilecektir. Eğer bu formlar Denklem (1.111)'de yerlerine adapte edilirlerse sistemin toplam enerjisinin A ve B değişkenlerine bağlı olarak ifade edildiği bir fonksiyon elde edilir. Minimum toplam potansiyel enerji prensibi hatırlanırsa, U+V'nin değişiminin sifıra eşit olması

sağlanarak kritik moment analiz edilebilir. Diğer bir yaklaşım yöntemi ise Denklem (1.86) ilişkisini kullanarak A'yı B cinsinden yazmaktır. Bu sayede fonksiyon sadece B değişkenine bağlı olarak basitleştirilebilir. Bu önceki metoda göre daha az hesap gerektireceğinden aşağıda bu yönteme göre ilerlenecektir. İlk prosedür u ve Ø arasında bir ilişkinin olup olmadığına bakılmasıdır.

Denklem (1.86)'dan,

$$\delta = -\frac{EI_y}{M} \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (1.114)$$

ve İfade (1.112) ve (1.113)'ü kullanarak,

$$A = B \frac{l^2}{\pi^2} \frac{M}{EI_y} \quad (1.115)$$

elde edilir. Buradan tahmini u fonksiyonu,

$$u = \frac{Bl^2}{\pi^2} \frac{M}{EI_y} \sin \frac{\pi z}{l} \quad (1.116)$$

şekline gelir. Denklem (1.113) ve (1.116) vasıtasıyla toplam potansiyel enerji için;

$$U+V = \frac{1}{2} \frac{B^2 M^2}{EI_y} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz + \frac{1}{2} GJB^2 \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz + \frac{1}{2} E\Gamma B^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz - \frac{M^2 B^2}{EI_y} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz \quad (1.117)$$

ve $\int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{l}{2}$ olacağından,

$$U+V = \frac{1}{4} \left[\frac{GJB^2 \pi^2}{l} + \frac{E\Gamma B^2 \pi^4}{l^3} - \frac{M^2 B^2 l}{EI_y} \right] \quad (1.118)$$

neticesine ulaşılır. Nötr denge durumunda kritik moment durumuna ulaşılır ve bu ancak U+V'nin türevinin sıfıra eşitlenmesi ile elde edilebilir. Buradan,

$$\frac{d(U+V)}{dB} = \frac{B}{2} \left[\frac{GJ\pi^2}{l} + \frac{E\Gamma\pi^4}{l^3} - \frac{M^2 l}{EI_y} \right] = 0 \quad (1.119)$$

Eğer denge bir deforme olmuş moda karşılık gelecek ise B sıfır olamaz. Bu durumda

köşeli parantezin içindeki kısmın yok olması gerekir. Böylece, $\frac{GJ\pi^2}{l} + \frac{E\Gamma\pi^4}{l^3} - \frac{M^2 l}{EI_y} = 0$, ifadesinden kritik moment,

$$M_{kr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y \left(GJ + E\Gamma \frac{\pi^2}{l^2} \right)} \quad (1.120)$$

şeklinde elde edilir [95]. Denklem (1.120)'deki ifade, basit mesnetli bir I kirişin saf eğilme etkisi altındaki kritik momentini verir. Yukarıda dikdörtgen kiriş analizinde olduğu gibi I kirişte kritik moment yanal eğilme rijitliği ve burulma rijitliği ile orantılıdır. İki durum arasındaki tek fark I kirişlerin burulmasal rijitliği çarpılma ve St. Venant rijitliğini içerirken, dikdörtgen kesitli kirişte sadece St. Venant rijitliği bulunmaktadır.

2. YARI-ANALİTİK YÖNTEMLER

Çoğu mühendislik probleminde analitik çözüm elde etmek zordur. Gerçek çözümlerin kısıtlı olması pek çok nümerik yöntemin ve analitik tahmin yöntemlerinin araştırılmasını sağlamıştır. Bu yöntemlerden en çok kullanılanlardan bir tanesi pertürbasyon tekniğidir [99-104].

Mühendislik problemlerinin analitik ve yarı analitik çözümlerini içeren pek çok kitap yazılmıştır [105-117].

Ayrıca bu yöntemlerle ilgili pek çok araştırma makalesi de yapılmıştır [16-94, 118-141].

Tez çalışmasında kullanılacak ve yukarıdaki çalışmalarda bir kısmı kullanılmış olan bazı yöntemler aşağıda sıralanmaktadır. Bu yöntemlerin matematiksel teorisi için [109, 142-155] ile verilen kaynaklar okunabilir.

- 1-) Pertürbasyon Metodu (Klasik Pertürbasyon) (PM)
- 2-) Parametrize Edilmiş Pertürbasyon Metodu (PPM)
- 3-) Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM)
- 4-) Homotopi Perturbasyon Metodu (HPM)
- 5-) İterasyon Perturbasyon Metodu (IPM)
- 6-) Enerji Dengesi Metodu (EBM)
- 7-) Parametre Genişletme Metodu (PEM)
- 8-) Varyasyonel Yaklaşım (VA)
- 9-) Homotopi Analiz Metodu (HAM)
- 10-) Adomian Ayrıştırma Metodu (ADM)
- 11-) Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM)

2.1. Analitik Tahmin Yöntemlerinin Özet Açıklaması

2.1.1. Pertürbasyon metodu (klasik pertürbasyon) (PM)

Tam olarak çözümlenemeyen bir problemin, bu probleme bağlı başka bir problemden

yola çıkılarak yaklaşık bir çözüm elde etmek için matematiksel metotlar içeren yöntemdir. Kesin olarak çözümlenebilen problemin matematiksel tanımına "küçük" bir terim eklenerek eldeki problem formüle edilebiliyorsa, pertürbasyon teorisi uygulanabilir.

Pertürbasyon teorisi, istenilen çözümün, kesin çözümlü problemden sapmanın miktarını belirleyen "küçük" parametre kullanılarak kuvvet serisi terimleri ile ifade edilmesine öncülük eder. Kuvvet serisinin ana terimi, kesin çözümlü problemin çözümü; diğer terimler ise ilk problemden sapma miktarına göre belirlenen, çözümdeki sapmayı tanımlar.

ϵ : küçük parametre

A : tam çözüm

olmak üzere tam çözüme yaklaşımlı çözüm;

$$A = \epsilon^0 A_0 + \epsilon^1 A_1 + \epsilon^2 A_2 + \dots \quad (2.1)$$

Denklem (2.1) ile ifade edilir. Burada;

A_0 : kesin çözümlü problemin çözümü,

A_1, A_2, \dots : Yüksek mertebeden sistematik prosedürde tekrarlanarak bulunan terimlerdir.

Pertürbasyon çözümü, yaklaşım serilerini belli bir noktada kesmekle yapılır. Genellikle çözüm, ilk iki terim $A_0 + \epsilon^1 A_1$ 'de kesilebilir. Bu I. dereceden pertürbasyon düzeltilmesi ve ilk çözümdür.

2.1.2. Parametrize edilmiş pertürbasyon metodu (PPM)

$$L(u) + N(u) = 0 \quad (2.2)$$

doğrusal olmayan denklemde $u = \epsilon v$ gibi lineer dönüşüm yapılabilir. Denklem (2.2)'de L doğrusal, N ise doğrusal olmayan diferansiyel operatördür. v 'nin ϵ cinsinden bir kuvvet serisi olarak açılabilmesi varsayılırsa yöntem aşağıdaki gibi elde edilmiş olur;

$$v=v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2+\dots \quad (2.3)$$

2.1.3. Varyasyonel iterasyon metodu (VIM)

Bu yöntemde Denklem (2.4) formundaki gibi bir diferansiyel denklem,

$$L(u)+N(u)=g(x) \quad (2.4)$$

ele alınmaktadır. Yönteme göre aşağıdaki gibi bir fonksiyonel türetilebilir;

$$u_{(n+1)}(t)=u_n(t)+\int_0^t \lambda \{Lu_n(\tau)+N\tilde{u}_n(\tau)-g(\tau)\}d\tau \quad (2.5)$$

Burada λ Lagrange çarpanı olup varyasyonel teori yardımıyla elde edilmektedir.

2.1.4. Homotopi pertürbasyon metodu (HPM)

Yöntem aşağıdaki formda bir diferansiyel denkleme uygulanacaktır;

$$A(u)-f(r)=0 \quad r \in \Omega \quad (2.6)$$

Denklem (2.6)'ya,

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)=0 \quad r \in \Gamma \quad (2.7)$$

sınır koşulu uygulanmaktadır. Burada A genel diferansiyel operatör, B sınır operatörü Γ ise Ω çözüm alanının sınırıdır. Genellikle A iki kısma ayrılır. Doğrusal kısım L ve doğrusal olamayan kısım N'dir. Bu durumda denklem,

$$L(x)+N(x)-f(r)=0 \quad r \in \Omega \quad (2.8)$$

formunu alır. Buna bağlı olarak,

$$H(v,p)=(1-p)[L(v)-L(u_0)]+p[A(v)-f(r)]=0 \quad (2.9)$$

$$V(r,p):\Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.10)$$

homotopi denklemi kurulabilir. Denklem (2.9) ve (2.10)'da $p \in [0,1]$ bir gömülü parametredir. u_0 ise sınır koşulunu sağlayan ilk tahmindir. Bu durumda çözüm p cinsinden,

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+ \quad (2.11)$$

şeklinde kuvvet serisi olarak elde edilebilir.

2.1.5. İterasyon pertürbasyon metodu (IPM)

Aşağıdaki formda,

$$\ddot{u}+u+\epsilon f(u,\dot{u})=0 \quad (2.12)$$

doğrusal olmayan bir denklemin çözümünü ele alınsın. Denklem (2.12) aşağıdaki başlangıç koşullarına maruz bırakılırsa;

$$u_0=A, \dot{u}(0)=0 \quad (2.13)$$

ve başka bir formda tekrar yazılırsa,

$$\ddot{u}+u+\epsilon u.g(u,\dot{u})=0 \quad (2.14)$$

bulunur. Burada $g(u,\dot{u})=f/u$ 'dur.

Denklem (2.14) için bir iterasyon formülü,

$$\ddot{u}_{n+1}+u_{n+1}+\epsilon u_{n+1}.g(u_n,\dot{u}_n)=0 \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir. Burada u_n n. tahmini çözüm olup u_{n+1} 'i bulmak için kullanılacak pertürbasyon metoduna İterasyon Pertürbasyon Metodu denir.

2.1.6. Enerji dengesi metodu (EBM)

Bir doğrusal olmayan osilatörün,

$$\ddot{u}+f(u(t))=0 \quad (2.16)$$

formunda denklemi ele alınsın. Bu denklemin varyasyonel prensibi,

$$J(u)=\int_0^t \left(-\frac{1}{2}\dot{u}^2+F(u)\right) dt \quad (2.17)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre Hamiltonyan aşağıdaki gibi elde edilir;

$$H = \frac{1}{2} \dot{u}^2 + F(u) + F(A) \quad (2.18)$$

veya

$$R(t) = -\frac{1}{2} \dot{u}^2 + F(u) + F(A) = 0 \quad (2.19)$$

Başlangıç koşullarının uygulanması ve uygun bir deneme fonksiyonu seçimi ile çözüm elde edilir.

2.1.7. Parametre genişletme metodu (PEM)

Yöntem aşağıdaki örnek denklem ile açıklansın;

$$\ddot{u} + \alpha u + \beta u^3 = F_0 \cos \omega t, \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (2.20)$$

Bu doğrusal olmayan osilatör denklemi,

$$\ddot{u} + \alpha u + 1 \cdot (\beta u^3 - F_0 \cos \omega t) = 0 \quad (2.21)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Çözüm bir p parametresi cinsinden kuvvet serisi olarak varsayılacak olursa,

$$u = u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + \dots \quad (2.22)$$

elde edilir. Denklemdeki α ve 1 katsayıları da yine p cinsinden bir kuvvet serisi olarak açılacaktır. p 'nin denk katsayılarının terimlerinin eşitlenmesi ile çözüm buradan elde edilmiş olur.

2.1.8. Varyasyonel yaklaşım (VA)

Aşağıdaki formda bir denklem için,

$$u'' + f(u) = 0 \quad (2.23)$$

varyasyonel prensip yarı-ters yöntemle şu şekilde tanımlanır;

$$J(u) = \int_0^{T/4} \left(-\frac{1}{2} \dot{u}^2 + F(u) \right) dt \quad (2.24)$$

Burada T nonlinear osilatörün periyodu ve $\frac{\partial F}{\partial u}=f$ çözümünün aşağıdaki formda varsayılması ile ve Ritz metodunun aşağıdaki koşullarla uygulanması ile,

$$\frac{\partial J}{\partial A}=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial w}=0 \quad (2.25)$$

sonuç elde edilmiş olur.

2.1.9. Homotopi analiz metodu (HAM)

Doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için genel analitik bir yöntemdir. Uygulama için bir nonlinear ifade olan,

$$N[u(t)]=0 \quad (2.26)$$

Denklem (2.26) ele alınsın. Burada N doğrusal olmayan operatör, t bağımsız değişken, u(t) ise bilinmeyen değişkendir. Bu denkleme ait homotopi fonksiyonu,

$$\bar{H}(\emptyset; q, h, H(t)) = (1-q)L[\emptyset(t; q) - u_0(t)] - qhH(t)N[\emptyset(t; q)] \quad (2.27)$$

gibi oluşturulur. Bu denklemde \emptyset , h ve H(t) fonksiyonları t'nin bir fonksiyonu, q ise sıfırdan farklı yardımcı parametredir. L doğrusal operatördür. q sıfırdan 1'e doğru arttıkça $\emptyset(t; q)$ başlangıç tahmininden gerçek çözüme doğru değişmektedir.

$$\bar{H}(\emptyset; q, h, H(t)) = 0 \quad (2.28)$$

koşulunun sağlanması ile sıfıncı merteye deformasyon ve sınır koşulları,

$$(1-q)L[\emptyset(t; q) - u_0(t)] = qhH(t)N[\emptyset(t; q)],$$

$$\emptyset(0; q) = a, \quad \frac{d\emptyset(0, q)}{dt} = 0 \quad (2.29)$$

şeklinde elde edilir. $\emptyset(t; q)$ ve w(q) Taylor Teoremi yardımıyla bir kuvvet serisi olarak açılır;

$$\emptyset(t; q) = \emptyset(t, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \emptyset(t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m = u_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) q^m$$

$$w(q) = w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m w(q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m = w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m q^m \quad (2.30)$$

Denklem (2.30)'da u_m ve w_m m. mertebeden deformasyonlardır. Sıfırıncı mertebeden deformasyonun q 'ya göre türevinin alınması ve $q=0$ bağıntısıyla,

$$L[u_1(t)] = hH(t)N[u_0(t), w_0] \Big|_{q=0},$$

$$u_1(0) = 0, \dot{u}_1(0) = 0 \quad (2.31)$$

1. mertebe tahmini veren 1. mertebe deformasyon elde edilir. Üst mertebeden tahminlerin de elde edilmesi ile,

$$L[u_m(t) - u_{m-1}] = hH(t)R_m(\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}),$$

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\emptyset(t, q), w(q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}, \quad (2.32)$$

$$\vec{u}_{m-1} = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}\}$$

$$\vec{w}_{m-1} = \{w_0, w_1, w_2, \dots, w_{m-1}\}$$

$$u_m(0) = \dot{u}_m(0) = 0$$

çözüm oluşturulur.

2.1.10. Adomian ayrıştırma metodu (ADM)

ADM'de bir diferansiyel eşitlik aşağıdaki formda tasarlanır;

$$Lu + Ru + Nu = g(x) \quad (2.33)$$

Burada L lineer operatör, R lineer operatörden arta kalan ve L'den daha düşük mertebeden türevler içeren operatör, Nu lineer dışı terimleri ve g(x) kaynak terimleri içerir. Eşitlik (2.33),

$$Lu = g(x) - Ru - Nu \quad (2.34)$$

şeklinde yazılabilir.

Ters operatör L^{-1} Denklem (2.34)'ün her iki tarafına uygulanırsa;

$$u=L^{-1}\{g(x)\}-L^{-1}(Ru)-L^{-1}(Nu) \quad (2.35)$$

elde edilir. Kaynak terimin integralini aldıktan ve problemin koşullarından elde edilenlerle birleştirdikten sonra,

$$u=f(x)-L^{-1}(Ru)-L^{-1}(Nu) \quad (2.36)$$

Denklem (2.36)'daki gibi bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlanır. Doğrusal olmayan operatör $Nu=F(u)$ özel olarak türetilmiş Adomian polinomlarının bir sonsuz serisi ile temsil edilir. Nu analitik olarak farz edilerek,

$$F(u)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k \quad (2.37)$$

yazılır. A_k polinomları sadece u_0, u_k unsurlarına bağlı olacak şekilde lineer dışılığın bütün çeşitleri için aşağıdaki algoritma ile çoğaltılabilirler;

$$A_0=F(u_0) \quad (2.38)$$

$$A_1=u_1F'(u_0) \quad (2.39)$$

$$A_2=u_2F'(u_0)+\frac{1}{2!}u_1^2F''(u_0) \quad (2.40)$$

$$A_3=u_3F'(u_0)+u_1u_2F''(u_0)+\frac{1}{3!}u_1^3F'''(u_0) \quad (2.41)$$

Adomian polinomlarının formüle edilmesinde kullanılan algoritmalar için [150] kaynağına başvurulabilir.

Çözüm $u(x)$,

$$u=\sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad (2.42)$$

serisi ile tanımlanır. Burada seri elemanları,

$$u_0=f(x) \quad (2.43)$$

$$u_{k+1}=-L^{-1}(Ru_k)-L^{-1}(A_k), \quad k \geq 0 \quad (2.44)$$

Denklem (2.43) ve (2.44)'deki şekilde yinelemeli olarak saptanır.

2.1.11. Diferansiyel dönüşüm metodu (DTM)

DTM kısmi ve adi diferansiyel eşitliklerin yaklaşık çözümünü elde etmede kullanılan bir dönüşüm tekniğidir. Metot, ana diferansiyel eşitlik ve buna ait sınır koşullarının belirli dönüşüm kuralları dahilinde cebirsel eşitliklerden oluşan bir set içerisine dönüştürüldüğü Taylor serisi açılımı üzerine bina edilmiş olup adı geçen eşitliklerden oluşan setin çözümü arzulanan çözümdür. Böylece daha üst türevlerle ait hesaplamaların zorlaştığı Taylor Serisi Metodunun aksine DTM, daha üst mertebelerde seri üretilmesi için yinelemeli bir prosedür sağlar.

Tanım kümesi D içerisinde analitik olan $f(x)$ fonksiyonu düşünölsün. $x=x_0$ D tanım kümesi içinde herhangi bir noktayı temsil etsin Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$\bar{F}[k] = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (2.45)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $f(x)$ ilk fonksiyon ve $\bar{F}[k]$ diferansiyel dönüşümdür. $f(x)$ fonksiyonu diferansiyel dönüşümün tersi ile tariflenebilir;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f}{dx^k} \right)_{x=x_0} (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}[k] (x-x_0)^k \quad (2.46)$$

Kullanım kolaylığı açısından $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \bar{F}[k] (x-x_0)^k \quad (2.47)$$

gibi bir sonlu seri olarak temsil edilir. Çünkü $\sum_{k=N+1}^{\infty} \bar{F}[k] (x-x_0)^k$ ihmal edilecek kadar küçüktür. N öz değerlerin yakınsamasına göre belirlenir.

Diferansiyel dönüşümün temel teoremleri Tablo 2.1'de listelenmiştir.

Tablo 2.1. DTM'nin Temel Dönüşüm Teoremleri

Orijinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$f(x)=g(x)\pm h(x)$	$F[k]=G[k]\pm H[k]$
$f(x)=c \cdot g(x)$	$F[k]=c \cdot G[k]$
$f(x)=g(x)h(x)$	$F[k]=\sum_{l=0}^k G[l]H[k-l]$
$f(x)=\frac{d^n g(x)}{dx^n}$	$F[k]=(k+1)(k+2)\dots(k+n)G[k+n]$
$f(x)=\alpha x^n$	$F[k]=\alpha \delta(k-n); \text{burada } \delta(k-n)=\begin{cases} 1, & k=n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$

3. YARI ANALİTİK YÖNTEMLERLE YAPILAN UYGULAMALAR

3.1. Bazı Analitik Tahmin Teknikleri Kullanılarak Dikdörtgen Prizmatik Kirişlerin Yanal-Burulmalı Stabilitesi

Burada açıklanacak çözüm, Yücesoy ve Coşkun tarafından tez makalesi olarak hazırlanmış ve International Journal of Structural Stability and Dynamics’de yayınlanmıştır [1].

Çalışmada ADM ve VIM metotları vasıtasıyla üniform ve üniform olmayan yükler altında eğilme etkisinde bulunan dikdörtgen kesitlere sahip prizmatik kirişlerin yanal-burulmalı burkulma analizi için basit hesaplamalı algoritmalar sunulmaktadır. Ayırıklaştırma işlemine yol açan sayısal yöntemlerin aksine, önerilen yöntem, düşünülen problem için analitik bir fonksiyonun terimleri çerçevesinde, çözüm alanında, sürekli bir çözüm üretilmesine izin verir. Probleme ait hakim denklemler iki bağlı değişken katsayılı adi diferansiyel eşitlikler şeklinde olarak görünmelerine rağmen, dikdörtgen kirişlerde tek bir eşitliğe indirgenebilirler. Çalışmada değişik yükleme durumları için burkulma yükleri hesaplanarak daha önceden basit kiriş için DTM, VIM ve SEM yöntemleri ile benzer yüklemeler için birleşik hakim eşitlikler üzerine temellenmiş hesaplarla bulunan kritik burkulma yükleri ile karşılaştırılmıştır.

3.1.1. Hakim eşitlik

Şekil 3.1’de gösterildiği gibi xz düzlemindeki eğilmeden kaynaklanan yanal burulmalı burkulma etkisi altındaki basit mesnetli ve çift simetrlili prizmatik kirişe ait hareketi temsil eden ana diferansiyel eşitlikler aşağıdaki gibidir [88];

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} + M_y(x) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + 2 \frac{dM_y(x)}{dx} \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} \varphi(x) = 0 \quad (3.1)$$

$$M_y(x) \frac{d^2 y}{dx^2} - GI_t \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = 0 \quad (3.2)$$

Burada EI_z ve GI_t sırasıyla eğilme ve burulma rijitliklerini, $M_y(x)$; $q_z(x)$ yayılı yükünden kaynaklanan eğilme momentini, $y(x)$ yanal yer değiştirmeyi ve $\varphi(x)$ ise dönmeyi ifade etmektedir. Basit mesnetlenmiş bir kirişte sınır şartı olarak dönmenin ve yer değiştirmenin olmadığı farz edilir;

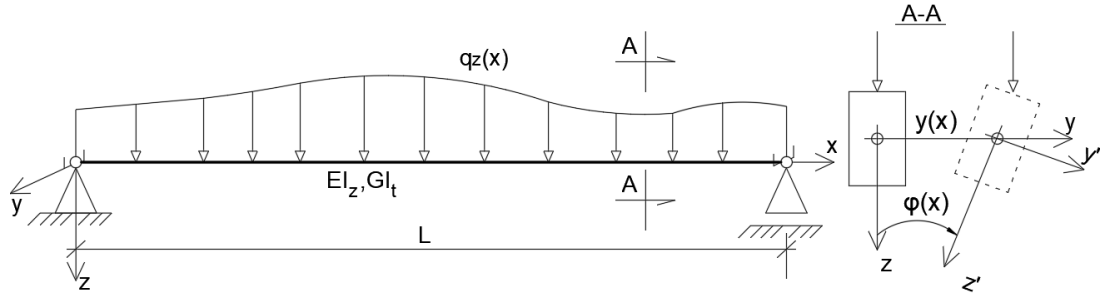
$$y=0, \quad y''=0, \quad \varphi=0 \quad \text{x}=0 \text{ ve } \text{x}=L \text{ 'de} \quad (3.3)$$

Bu durumda sınır koşulları Denklem (3.3) gibidir. Denklem (3.1),

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2}{dx^2} [M_y(x)\varphi(x)] = 0 \quad (3.4)$$

Denklem (3.4)'deki gibi düzenlenebilir. Denklem (3.4)'ün iki kez integrali alınıp ve Denklem (3.2)'deki $y''(x)$ 'in yerine konulursa,

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{M_y(x)^2}{EI_z GI_t} \varphi(x) = 0 \quad (3.5)$$



Şekil 3.1. Basit Mesnetli Dikdörtgen Kesitli Kirişte Yanal-Burulmalı Burkulma [88]

Denklem (1.88)'dekine benzer şekilde tek bir hakim eşitlik elde edilebilir. Denklem (3.5) dikdörtgen kirişlerin yanal burulmalı-burkulması teorisinde [3, 156]'da verilmiş olup sayısal hesaplamalarda bu eşitliğin kullanımı Denklem (3.1) ve (3.2) eşitliklerine göre çok daha kolaydır. Yükün üniform olması halinde basit bir analitik çözüm mevcut iken üniform olmayan yük dağılımında kapalı formda bir analitik çözüm bulmak zordur. Bundan dolayı analitik tahmin yöntemleri çözüm için faydalı araçlardır.

3.1.2. Kullanılan ADM ve VIM yöntemleri

ADM ve VIM metotlarının temel felsefesi Madde 2.1.10 ve 2.1.3'te açıklanmıştır.

3.1.3. Problem için ADM ve VIM vasıtasıyla çözüm prosedürü

3.1.3.1. ADM formülasyonu

ADM yönteminin, Denklem (2.33)-(2.44)'de verilen eşitlikleri ışığında, Denklem (3.5)'e uygulanması sonucu sayısal amaçlar için aşağıdaki özyinelemeli algoritma,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x - \frac{1}{EI_z G I_t} \int_0^x \int_0^t [M_y(z)^2 \varphi(z)] dz dt \quad (3.6)$$

elde edilir. Sınır koşullarından $\varphi(0)=0$ kullanılarak Denklem (3.6)'ya göre aşağıdaki ardışık yinelemeli algoritma,

$$\varphi_0(x) = Ax \quad (3.7)$$

$$\varphi_n(x) = -\frac{1}{EI_z G I_t} \int_0^x \int_0^t [M_y(z)^2 \varphi_{n-1}(z)] dz dt, \quad n \geq 1 \quad (3.8)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) \quad (3.9)$$

elde edilebilir. Denklem (3.9) ifadesi Denklem (3.5)'de verilen ana eşitlik için N. mertebeden çözümdür.

3.1.3.2. VIM formülasyonu

$L = d^2/dx^2$ ifadesi kullanılarak VIM metodunun uygulanmasıyla aşağıdaki fonksiyonel inşa edilebilir;

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \int_0^x (\tau-x) \left[\varphi_{n-1}''(\tau) + \frac{M_y(\tau)^2}{EI_z G I_t} \varphi_{n-1}(\tau) \right] d\tau, \quad n \geq 1 \quad (3.10)$$

Burada $(\tau-x)$, lineer operatör $L = d^2/dx^2$ için Lagrange çarpanıdır. $\varphi_0(x) = Ax$, sınır koşulunu $x=0$ 'da otomatik olarak sağladığından VIM yaklaşımında da aynen kullanılabilir.

3.1.4. Çözüm prosedürü

Başlangıç tahmini $x=0$ 'da sınır koşulunu otomatik sağladığından, sadece $x=L$ 'deki sınır koşulunun sağlanması yeterli olacaktır. Sonrasında, bir bilinmeyenli tekil bir eşitlik elde edilir ve bu matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$[K(q_0)]\{\alpha\}=\{0\} \quad (3.11)$$

Burada eğilme momenti ifadesi ve $\{\alpha\}=\langle A \rangle$ vektöründe bulunan q_0 , kirişe etkiyen yayılı yükün pik değeridir. Denklem (3.11) için bayağı olmayan bir çözüm $[K]$ katsayılar matrisi determinantının sıfır olması ile mümkündür. Determinantın q_0 'ın fonksiyonu olmasından dolayı buradan bulunacak olan çözüm, aranılan yanal-burulmalı burkulma yükleridir.

3.1.5. Durum çalışmaları

Burada, prizmatik bir kirişin yanal-burulmalı burkulma yüklerine yaklaşım için ADM ve VIM uygulaması yapılmıştır. Burulma olmadığı ve mafsallı kiriş uçları farz edilmiştir. Karşılaştırmanın sağlıklı olması için sayısal işlem literatürde mevcut çalışmaya [88] uygun sayısal veri ile yürütülmüştür. Dolayısıyla, makalede 10 m uzunluğunda, 0,64 m yüksekliğinde ve 0,24 m genişliğinde basit mesnetli bir dikdörtgen kiriş nazara alınmıştır. Kirişin eğilme ve burulma rijitlikleri sırasıyla $EI_z=7520,26 \text{ kNm}^2$ ve $GI_t=1434,30 \text{ kNm}^2$ 'dir. Kıyas alınacak çalışmada [88], birbiriyle ilintili Denklem (3.1) ve (3.2)'deki eşitliklere uygun olarak DTM formülasyonu elde edilmiştir. Aynı kaynak çalışmada, çözümü çok zorlaştıran dördüncü dereceden bir diferansiyel denklem olan Denklem (3.1) ve ikinci dereceden diferansiyel denklem olan Eşitlik (3.2) için VIM formülasyonu da yapılmıştır.

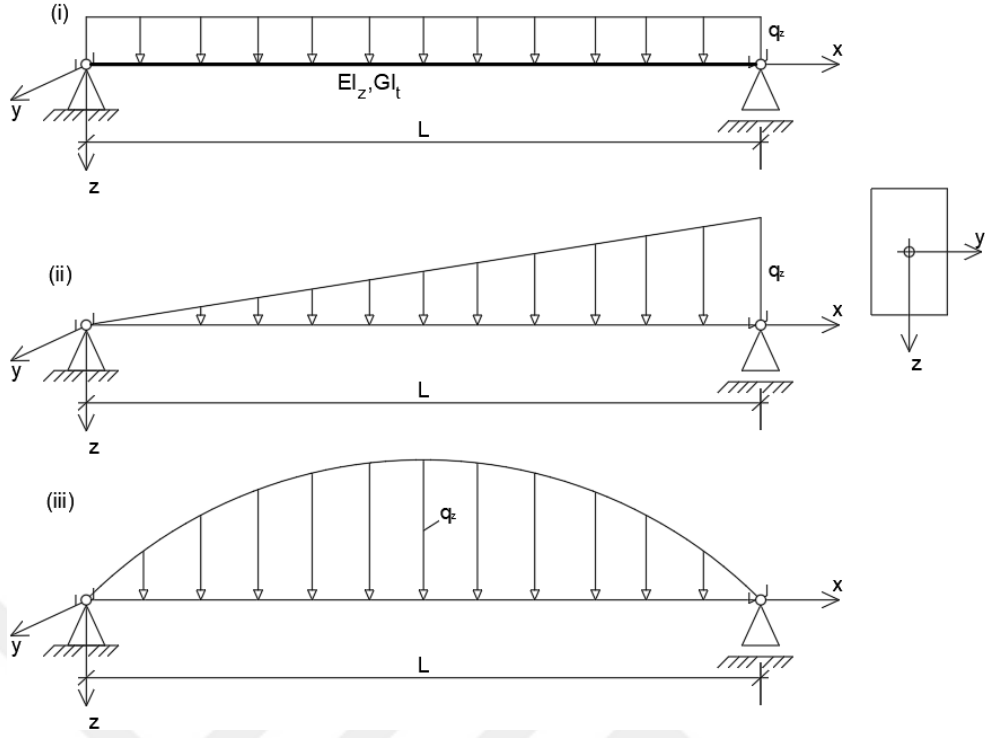
Tez makalesi çalışmasında elde edilen sayısal algoritmalar boyutsuz terimler içeren tek bir ikinci mertebeye ana diferansiyel denklem sayesinde çok daha basit bir formdadırlar. Şekil 3.2'de gösterildiği üzere, üniform yayılı yük, lineer yayılı yük ve sinüzoidal yayılı yük olmak üzere üç değişik yük tipi alınmış olup her bir yük tipi için boyutsuz eğilme moment fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir;

$$(i) \bar{M}_y(\bar{x}) = \frac{\bar{q}_0}{2} (\bar{x} - \bar{x}^2), \text{ üniform yayılı yük } q_z(x) = q_0 \text{ için,}$$

$$(ii) \bar{M}_y(\bar{x}) = \frac{\bar{q}_0}{6} (\bar{x} - \bar{x}^3), \text{ lineer yayılı yük } q_z(x) = q_0 \frac{x}{L} \text{ için,}$$

$$(iii) \bar{M}_y(\bar{x}) = \frac{\bar{q}_0}{\pi^2} \sin(\pi\bar{x}), \text{ sinüzoidal yayılı yük } q_z(x) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{ için,}$$

Burada $\bar{x}=x/L$, $\bar{q}_0=q_0L^3/EI_z$ ve $\bar{M}_y=M_yL/EI_z$ şeklindedir.



Şekil 3.2. Seçilen Yükleme Çeşitleri

Basit mesnetli prizmatik bir dikdörtgen kirişin yanal-burulmalı dengesinin hesabı, [88]'de DTM, VIM ve SEM SOFİSTİK yazılımı kullanılarak yürütülmüştür. Yazarlar DTM analizi ile, üniform yükleme altında, burkulmaya ait ilk iki mod için 90 ve 190 terime ihtiyaç bulunduğunu, üçüncü moda yakınsamak için ise 350 terimin dahi yeterince iyi olmadığını rapor etmişlerdir. Sinüzoidal yük altında ilk iki mod için 140 ve 270 terim gerekli iken üçüncü moda ait burkulma yükü elde edilememiştir. En iyi sonuçlar lineer yük altında bulunmuş ve burkulmanın ilk üç modu için 80, 140 ve 200 terimle yakınsama sağlanmıştır. Yazarlar ayrıca 60 iterasyona kadar VIM'i kullanmış, ancak çok büyük zaman gerektiren kompleks analitik integrasyon yüzünden sinüzoidal olarak yüklenmiş kirişte metodu işletememişlerdir. SEM hesaplamaları her uçta altı serbestlik dereceli 50 kiriş elemanı ile yürütülmüştür. Tez için hazırlanan makalede yapılan tüm çalışmalar

şağıda verilecek olup önceki hesaplamalar ile yapılan karşılaştırma Tablo 3.1'de verilmiştir.

Makalede üniform yayılı yük altındaki kiriş için yapılan analizler ADM için 13 terim ile, VIM için ise 12 iterasyon ile; lineer yayılı yük altındaki kiriş için analizler ADM için 16 terim ile, VIM için ise 16 iterasyon ile; sinüzoidal yayılı yük altındaki kiriş

için ise analizler ADM için 11 terim ile yürütülmüşlerdir. Sinüzoidal yük altındaki giriş için VIM'in içinde fonksiyon her adımda kümülatif olarak hesaplandığından dolayı VIM yöntemi işlemi sonuçlandırabilmek için çok daha fazla bir zamana ihtiyaç duyar. Bu sebepten dolayı sinüzoidal yük altında VIM için ilk mod hariç bir sonuç gösterilmemiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, Denklem (3.1) ve (3.2) eşitliklerini kullanan DTM ve VIM ile yürütülmüş çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında, [88]'de VIM kullanılarak çoğu durumlar için çözüm bulunamadığı da dikkate alındığında, çok daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Bununla birlikte, üniform yayılı yük için karşılaştırma yapıldığında, önceki çalışmada üçüncü mod için değer hesaplanamadığı görülür. Üç farklı yükleme durumu için katsayılar matrisine ait determinantın değişimi Şekil 3.3-3.5 arasında verilmiş olup fonksiyona ait sıfırlardaki yük değerleri her bir mod için aranan kritik yükü vermektedir.

Tablo 3.1. Yanal-Burulmalı Burkulma Yüklerinin Karşılaştırılması

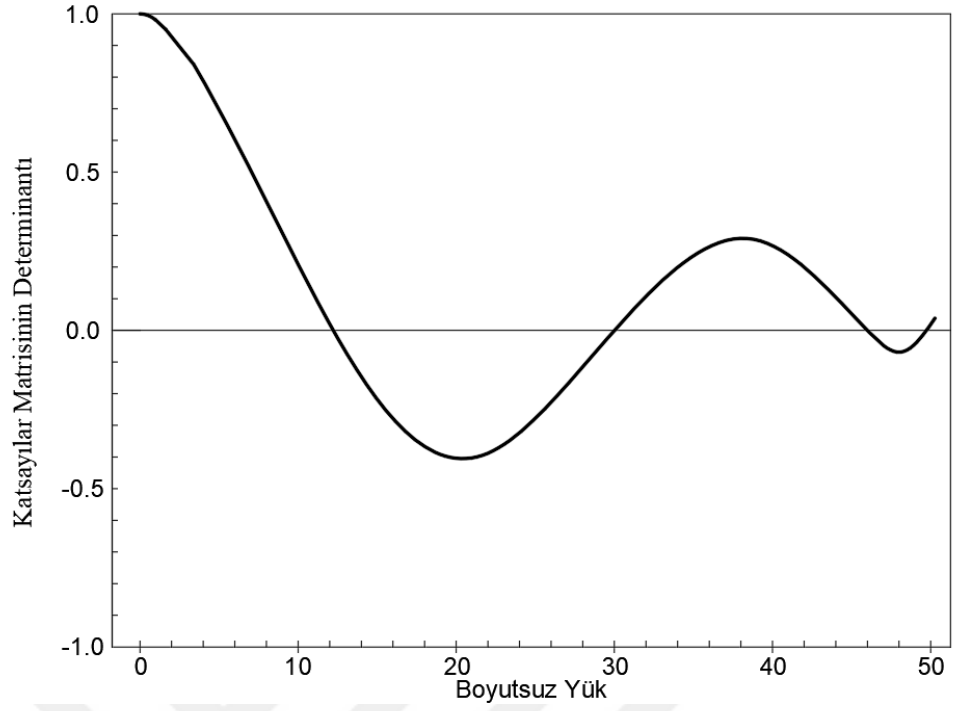
Mod	Metot	Üniform Yayılı Yük	Lineer Yayılı Yük	Sinüzoidal Yay.Yük
1	DTM[88]	92,99	184,46	116,82
	VIM[88]	92,99	184,46	-
	SEM[88]	90,21	178,94	113,36
	ADM	92,9934 (12,3657)	184,4597 (24,5284)	116,8202 (15,5341)
	VIM	92,9934 (12,3657)	184,4597 (24,5284)	116,8202 (15,5341)
2	DTM[88]	216,42	431,92	277,63
	VIM[88]	216,43	-	-
	SEM[88]	210,08	419,26	269,59
	ADM	216,4245 (28,7789)	431,9145 (57,4335)	277,6283 (36,9174)
	VIM	216,4247 (28,7789)	431,9145 (57,4335)	-
3	DTM[88]	-	679,75	-
	VIM[88]	-	-	-
	SEM[88]	330,67	660,61	426,08
	ADM	344,2149 (45,7717)	679,7494 (90,3891)	436,9564 (58,1039)
	VIM	333,2433 (44,3127)	679,7494 (90,3891)	-

Not: Tablodaki değer bulunamayan hücreler elde edilemeyen sonuçları göstermekte olup koyu olan değerler boyutsuz, diğerleri kN/m cinsindedir.

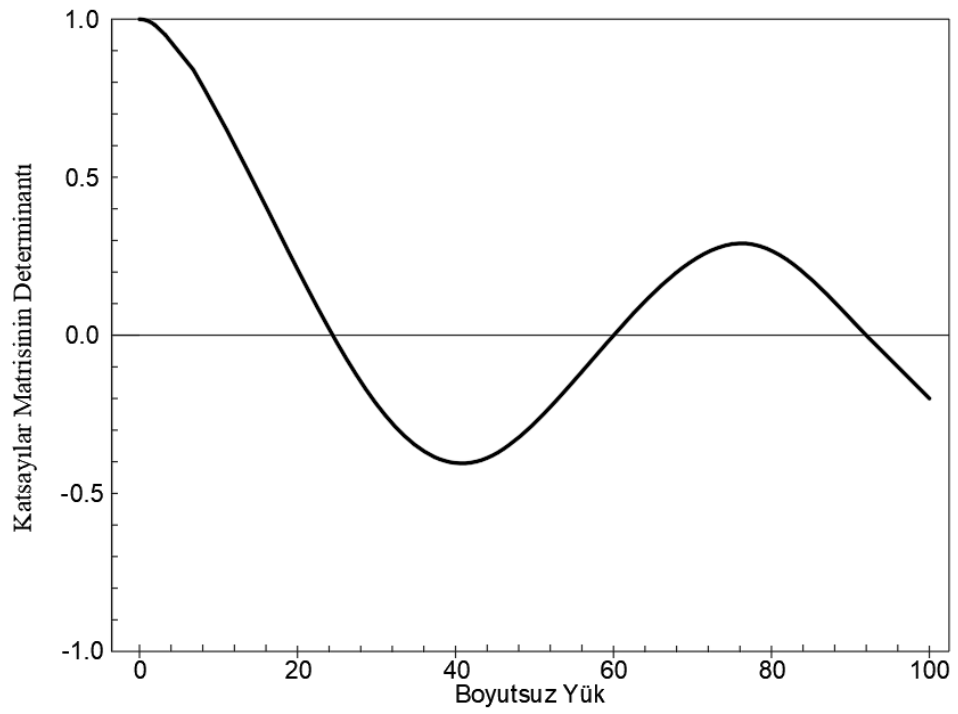
Sinüzoidal yayılı yük durumu için sinüs fonksiyonunun karesi yerine,

$$\bar{M}_y(\bar{x})^2 = \frac{\bar{q}_0^2}{2\pi^4} [1 - \cos(2\pi\bar{x})] \quad (3.12)$$

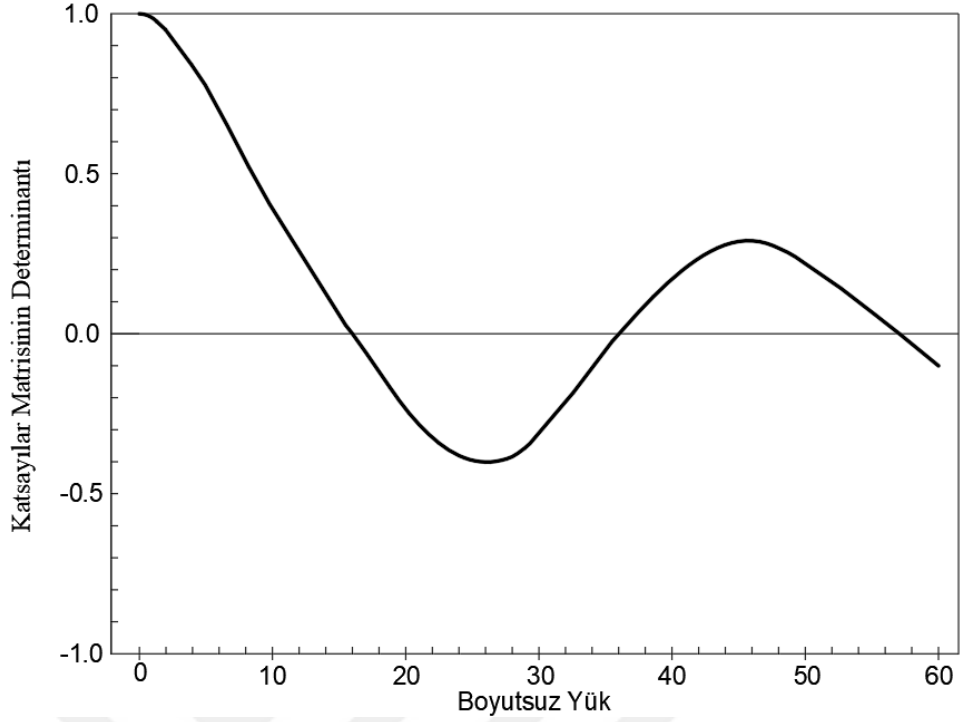
eşdeğer ifadesi kullanılabilir. Polinom fonksiyonlu moment ifadelerine nazaran Denklem (3.12)'deki trigonometrik fonksiyon yüzünden, başarılı bir çözüm için analitik integrasyon çok zaman gerektirmektedir. Bu sebepten dolayı Denklem (3.12) için Maclaurin seri yaklaşımı kullanılmıştır. Tablo 3.2'de farklı terim sayıları için sonuçlar özetlenmiştir.



Şekil 3.3. Üniform Yük Altındaki Kirişte Katsayılar Matrisinin Determinanı



Şekil 3.4. Lineer Yük Altındaki Kirişte Katsayılar Matrisinin Determinanı



Şekil 3.5. Sinüzoidal Yük Altındaki Kirişte Katsayılar Matrisinin Determinantı

VIM için sıfırdan farklı 10 terim için 6 sn, sıfırdan farklı 30 terim için 598 sn (10 dakika) ve sıfırdan farklı 50 terim için 12 saatten fazla zaman gerekli iken ADM için sıfırdan farklı 10 terim için 3 sn, sıfırdan farklı 30 terim için 12 sn ve sıfırdan farklı 50 terim için 26 sn zaman gerekmektedir. Tablo 3.2, sinüzoidal yayılı yük durumunda, Denklem (3.12) fonksiyonunda Maclaurin seri yakınsaması kullanılmasıyla, ADM yönteminin VIM yöntemine göre daha iyi yakınsadığını göstermektedir. VIM 10 iterasyon ile işlem yaparken ADM ile çözüm 10 terim ile elde edilmektedir. Mathematica programının yürütülmesinde 6 Gb Ram kapasiteli, Intel® Core™ i5-4200U CPU @ 1.60GHz 2.30 GHz işlemcili ve 297 GB'ı dolu 465 GB sabit disk kapasiteli bir bilgisayar kullanılmıştır.

Tablo 3.2. Sinüzoidal Yük Durumunun Maclaurin Yaklaşımı için Sonuçların Kıyası

Mod	Metot	10 Sıfırdan Farklı Terim	30 Sıfırdan Farklı Terim	50 Sıfırdan Farklı Terim
1	ADM	116,8198 (15,5340)	116,8202 (15,5341)	116,8202 (15,5341)
	VIM	116,8198 (15,5340)	116,8202 (15,5341)	116,8202 (15,5341)
2	ADM	277,6254 (36,9170)	277,6283 (36,9174)	277,6283 (36,9174)
	VIM	277,6259 (36,9171)	277,6304 (36,9177)	277,6292 (36,9175)
3	ADM	434,9722 (57,8400)	437,5462 (58,1823)	438,3330 (58,2869)
	VIM	435,7983 (57,9499)	426,6951 (56,7394)	432,8074 (57,5522)

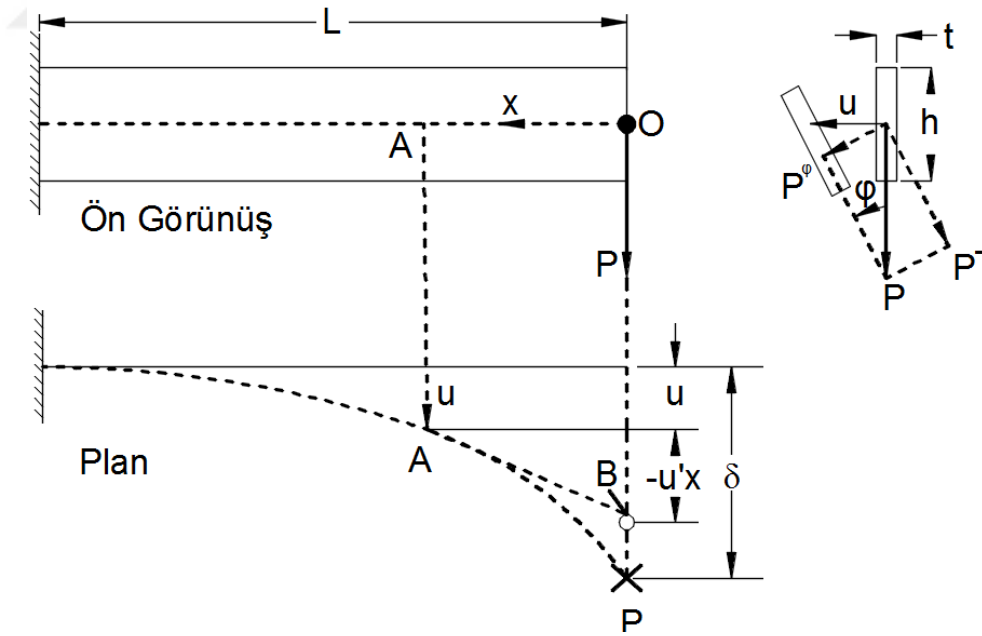
Not: Koyu olan değerler boyutsuz, diğerleri kN/m cinsindedir.

3.2. Serbest Uçta Tekil Yüke Maruz Bırakılmış Bir Konsol Kirişte Burulma-Eğilme Kararsızlığının HPM İle Analizi

Burulma-Eğilme burkulması davranışının analitik tahmin yöntemleri ile analizi için yapılan bu çalışma Yücesoy, Coşkun ve Atay tarafından ayrıca bildiri olarak da sunulmuştur [2].

3.2.1. Problem

Önerilen HPM tekniğinin etkinliğini anlatmak için analitik çözümü mevcut olan bir durum çalışması seçilmiştir. Bu amaçla, tekil yük etkisinde bir konsol kiriş dikkate alınmıştır. Den Hartog [157], problem için kapalı formda bir çözüm üretmiştir. Problemden bir noktada yoğunlaşmış yükün kirişe ait rijit yüzeyin eksen hattına etkidiği farz edilmiş ve kiriş yüksekliğinin kalınlığa oranla epey büyük olduğu varsayılmıştır. Analitik çözüm [157] aşağıdaki gibi verilmektedir. Başlangıç noktası kuvvetin uygulandığı noktaya yerleştirilmiştir. Şekil 3.6'da görüleceği üzere u yan doğrultudaki ötelenme, ϕ dönmeye ait açıdır.



Şekil 3.6. Konsantre Uç Kuvvetli Konsol Kiriş [157]

P uç kuvveti x noktasında, enkesitte boyuna ve enine olmak üzere bileşenlerine ayrılmıştır. A noktasında $P(\delta+u'x-u)$ büyüklüğünde bir burulma bulunmaktadır.

A noktasında küçük bir dz kesitindeki bir elemanda,

$$P(\delta+u'x-u)=-C\phi' \quad (3.13)$$

$$P\phi x=+EI_f u'' \quad (3.14)$$

bükülme ve burulmanın diferansiyel eşitlikleri Denklem (3.13) ve (3.14)'deki gibidir. Bu ifadelerde C, $Ght^3/3$ değerinde burulma rijitliği, EI_f ise $Eht^3/12$ değerinde eğilme rijitliğidir. İşaretler, doğrultu x'in işaretinin sol yönde pozitif olmasına göre oluşmaktadır. Denklem (3.13)'ün türevi,

$$P(u''x+u'-u')=-C\phi'' \quad (3.15)$$

sonucunu verir. Sadeleştirilirse;

$$u'' = \frac{-C\phi''}{Px} \quad (3.16)$$

Benzer şekilde Denklem (3.14)'ten,

$$u'' = \frac{P\phi x}{EI_f} \quad (3.17)$$

elde edilir. Denklem (3.16) ve (3.17) birbiriyle eşitlenirse,

$$\phi'' + k^2 x^2 \phi = 0, \quad k^2 = \frac{P^2}{C.EI_f} \quad (3.18)$$

bulunur.

Denklem (3.18) için analitik çözüm aşağıda görülebilir;

$$\phi(x) = \sqrt{x} \left[c_1 J_{1/4} \left(\frac{kx^2}{2} \right) + c_2 Y_{1/4} \left(\frac{kx^2}{2} \right) \right] \quad (3.19)$$

Denklem (3.19)'daki sabitler sınır koşulları yardımıyla elde edilebilir. Örnekle uyuşan sınır koşulları,

$$x=0 \text{ da } \phi'=0 \text{ ve } x=L \text{ de } \phi=0 \quad (3.20)$$

şeklinindedir. Sınır koşullarını uygulamak için, ϕ 'nin türevine ihtiyaç vardır;

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = & c_1 \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} J_{1/4} \left(\frac{kx^2}{2} \right) + \frac{1}{2} kx^{3/2} \left(J_{-3/4} \left(\frac{kx^2}{2} \right) - J_{5/4} \left(\frac{kx^2}{2} \right) \right) \right] \\ & + c_2 \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} Y_{1/4} \left(\frac{kx^2}{2} \right) + \frac{1}{2} kx^{3/2} \left(Y_{-3/4} \left(\frac{kx^2}{2} \right) - Y_{5/4} \left(\frac{kx^2}{2} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

İfade (3.20)'de verilen sınır koşulları ile Denklem (3.19) ve (3.21)'den özel bir değer üretmek çok zordur. Den Hartog aşağıdaki kuvvet terimleri serisini,

$$\varphi(x) = a_0 \left(1 - \frac{k^2 x^4}{12} + \frac{k^4 x^8}{672} - \frac{k^6 x^{12}}{88704} + \dots \right) + a_1 x \left(1 - \frac{k^2 x^4}{20} + \frac{k^4 x^8}{1440} - \frac{k^6 x^{12}}{224640} + \dots \right) \quad (3.22)$$

elde etmiştir. Bu eşitliğe sınır koşulları uygulandıktan sonra üç terim kullanılarak aşağıdaki kL^2 ,

$$kL^2 = 4,17 \text{ ve } kL^2 = 6,2 \quad (3.23)$$

değerleri elde edilmiştir. İlk değer birinci burkulma moduna, sonraki değer ikinci burkulma moduna aittir. İlave birkaç terim daha katılarak yapılan iyileştirme ile ilk değer 4,01'e yakınsamıştır. Buradan Denklem (3.18) ifadesinden P için kritik değer,

$$P_{kr} = 4,01 \frac{\sqrt{C.EI_f}}{L^2} \quad (3.24)$$

olarak elde edilir [157].

3.2.2. HPM'nin çalışmaya uygulanması

HPM metodunun temel felsefesi Madde 2.1.4'te açıklanmıştır. Coşkun, değişken rijitliğe sahip bir Euler kolonunun eğilmeli-burkulmasının çözümünde HPM'yi uygulamıştır [92]. Benzer yaklaşım Denklem (3.18)'de verilen $\varphi'' + k^2 x^2 \varphi = 0$, $k^2 = \frac{P^2}{C.EI_f}$ ana eşitliği için kullanılacaktır.

$\frac{d^2}{dx^2}$ terimi lineer operatör, x^2 terimi lineer olmayan operatör olarak alınarak, HPM aşağıdaki başarılı yaklaşımın üretilmesini sağlar;

$$v_0'' - u_0'' = 0 \quad (3.25)$$

$$v_1'' + u_0'' + k^2 v_0 = 0 \quad (3.26)$$

$$v_n'' + k^2 v_{n-1} = 0, \quad n \geq 2 \quad (3.27)$$

Birinci dereceden polinom olan Lineer operatör L için çözüm olarak başlangıç tahmini seçilmiş ve yirminci terime kadar çözümler yapılarak başarılı yaklaşımlar sergilenmiştir.

3.2.3. Nümerik sonuçlar

HPM 5, 10, 15 ve 20 terim ile uygulanarak burkulma modları için Tablo 3.3'teki sonuçlar elde edilir.

Den Hartog [157], Eşitlik (3.22)'yi kullanarak kuvvet serisinin beş terimi ile 4,01 değerine ulaşmıştır. Denklem (3.25)-(3.27)'deki HPM eşitliklerinin kolaylıkla ikame edilebileceği ve önerilen teknikle Tablo 3.3'te görüleceği üzere istenen sonuca 15 terim sayısı ile çabucak ulaşılabileceği görülür. Bir kıyaslama sağlamak için, kuvvet

Tablo 3.3. Sadece HPM Uygulaması ile kL^2 yakınsaması

HPM Çözüm Derecesi	Mod 1	Mod 2	Mod 3
5	4,0126	-	-
10	4,0126	10,2461	16,7748
15	4,0126	10,2461	16,5159
20	4,0126	10,2461	16,5159

serisi çözümü farklı terim sayıları için tekrarlanarak 21 terim çözümü ile tam sonuca ulaşıldığı görülür.

Tablo 3.4. kL^2 İçin 21 Terimli Kuvvet Serisi Çözümü

Terim Sayısı	Mod 1	Mod 2	Mod 3
21	4,0126	10,2461	16,5159

Tablo 3.3 ve Tablo 3.4'ten görülebileceği gibi çalışmada sunulan problem için HPM mükemmel sonuçlar vermektedir. Her ne kadar çözümlenen denklem sabit katsayılı olsa da Denklem (3.19)'dan burkulma modlarını sıralı olarak elde etmek kolay değildir. Herhangi bir nümerik yöntem için başlangıç değerinin problemi çözen tarafından verilmesi gereklidir. Uygulanan yöntem ise istenen moda değil, bir başka moda yakınsayabilir. Oysa HPM elde edilen sonuçları sırasıyla vermektedir. Çözümü bu şekilde elde etmek, analitik çözümü uygulamaktan çok daha kolay ve etkilidir.

3.3. Serbest Uçta Tekil Yüke Maruz Bırakılmış Bir Konsol Kirişte Burulma-Burkulma Analizinin ADM ve VIM İle Yapılması

3.2'deki problemin farklı iki yöntemle daha analizi için yapılan çözüm Yücesoy, Coşkun ve Kutsal tarafından ayrıca bildiri olarak da sunulmuştur [3].

3.3.1. Problem

Bölüm 3.2'de çözülen problemin aynısı ADM ve VIM kullanılarak yeniden çözülmüştür. Bölüm 3.2'den hatırlanacağı üzere Den Hartog [157] problem için kapalı formda bir çözüm üretmiştir. Adı geçen çözüm ana hatlarıyla Bölüm 3.2.1'de anlatılmış olup burada $kL^2=4,01$ bulunarak kritik yük değeri Denklem (3.24)'de $P_{kr}=4,01 \frac{\sqrt{C.EI_f}}{L^2}$ olarak tespit edilmiştir.

3.3.2. ADM'nin çalışmaya uygulanması

ADM metodunun temel felsefesi Madde 2.1.10'da açıklanmıştır. Metodun Denklem (3.18)'e uygulanmasıyla çözüm için,

$$\varphi_0 = Ax + B \quad (3.28)$$

$$\varphi_{n+1} = -L^{-1}(k^2 x^2 \varphi_n), \quad n \geq 0 \quad (3.29)$$

Denklem (3.28) ve (3.29)'deki algoritma elde edilir. $\varphi(x)$ 'in çözümü aşağıdaki seri ile,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \quad (3.30)$$

ifade edilir.

3.3.3. VIM'in çalışmaya uygulanması

VIM metodunun temel felsefesi Madde 2.1.3'te açıklanmıştır. Metodun İfade (3.18)'e uygulanması,

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \int_0^x \lambda(\xi) \left\{ \varphi_{n-1}'' + k^2 \xi^2 \varphi_{n-1} = 0 \right\} d\xi \quad (3.31)$$

Denklem (3.31)'deki n. mertebeden çözüme ulaştırır. Problemin VIM çözümü için başlangıç yaklaşımı ADM'de kullanıldığı gibi aynı şekilde alınmıştır. Bu yaklaşım ana eşitlikte ikincil türev olarak kabul edilen lineer operatör sayesinde elde edilen çözümdür.

3.3.4. Çözüm prosedürü

Buraya kadar özetlenen metotlar n. dereceden çözüm olarak bir polinomal yaklaşım üretirler. Burada n-terim başarılı bir şekilde başlangıç yaklaşımına dahil edilir. Başlangıç koşulları İfade (3.20)'de verilmiştir. Yaklaşık çözüme sınır koşulları uygulandığında,

$$[M]\{\alpha\} = \{0\} \quad (3.32)$$

matris formunda İfade (3.32) elde edilir. $\{\alpha\} = \langle A \ B \ C \ T \rangle^T$ vektörü başlangıç yaklaşımındaki bilinmeyen katsayıları içerir. $[M]$ matrisinin determinanı k^2 'nin bağımlısı olup saçma olmayan bir sonuç için sifira eşit olmak zorundadır. Determinant ifadesinin k için reel sifirları ardışık modların burkulma yüklerini verir.

3.3.5. Nümerik sonuçlar

ADM ve VIM'in Denklem (3.18)'e uygulanması ile burkulma modları için Tablo 3.5'teki sonuçlar elde edilmiştir. İlk üç modu tam olarak verdikleri için her iki yöntemde 15. mertebeden çözümler yöntemlerin karşılaştırılabilmesi amacıyla hesaplanmıştır. Bölüm 3.2'de yapılan çalışmanın 15. dereceden sonuçları [2] bu çalışmanın 15. Mertebeden çözümleri ile aşağıdaki tabloda kıyaslanmıştır.

Denklem (3.28)-(3.30)'daki ADM ve (3.31) VIM formülasyonlarının kolaylıkla ikame edilebileceği ve önerilen tekniklerle Tablo 3.5'te görüleceği üzere analitik

Tablo 3.5. ADM ve VIM Uygulanması İle kL^2 'nin Yakınsaması

Metot	Mod 1	Mod 2	Mod 3
ADM	4,0126	10,2461	16,5159
VIM	4,0126	10,2461	16,5159
[2]	4,0126	10,2461	16,5159

çözümüne ulaşılabileceği görülür. Bir diğer kıyaslamayı sağlamak için, kuvvet serisi çözümü farklı terim sayıları için tekrarlanabilir. Analitik çözüm [157] sadece ilk mod için yapılmıştır. Terim sayısı artırılarak ilk üç mod için analitik çözüm elde edilebilir. Sayısal denemeler ile 21 terim yardımıyla ilk üç mod için analitik çözüm elde edileceği saptanmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda görülmektedir.

Tablo 3.6. kL^2 İçin 21 Terimli Kuvvet Serisi Çözümü

Terim Sayısı	Mod 1	Mod 2	Mod 3
21	4,0126	10,2461	16,5159

Tablo 3.5 ve Tablo 3.6'dan görülebileceği gibi çalışmada sunulan problem için ADM ve VIM mükemmel sonuçlar vermektedir. Metotlar kesin sonucu bulmak için analitik çözümde karşılaşılan tüm zorlukların üstesinden kolayca gelmektedir. Bundan dolayı bu metotlar burulma-eğilme burkulması altındaki kirişlerin denge problemlerinin yarı-analitik çözümlerini elde etmede iyi birer seçenektirler.

3.4. İnce Duvarlı Açık Sabit ve Değişken Enkesitli Elemanların Eğilmeli-Burulmalı Burkulmalarının Yarı Analitik Analizi

Burada, eğilmeli-burulmalı burkulma yüklerine maruz ince duvarlı, sabit ve değişken açık enkesite sahip kolonların analitik tahmin yöntemleri ile çözümü incelenecektir. Analizler sırasıyla ADM, HPM ve VIM gibi çeşitli analitik tahmin yöntemleri ile yürütülecektir. Bu metotların etkinliği şu ana kadar çözülen problemler ile gösterilmiştir.

3.4.1. Kolonların eğilmeli-burulmalı burkulması

Eğilmeli-burulmalı burkulma konusu 1.3. Bölümde detaylı bir şekilde irdelenmiş ve

hakim diferansiyel eşitlikler türetilmiştir. Kısa bir hatırlatma yapılacak olursa bir elemanın şekil değiştirme enerjisi,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L EI_x \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L GJ \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 \phi}{dz^2} \right)^2 dz \quad (3.33)$$

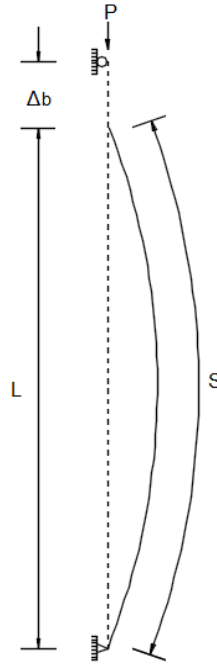
iki yöndeki eğilme, St. Venant ve çarpılma burulmaları olmak üzere dört kısımdan oluşur. Uygulanan yükün potansiyel enerjisi, Şekil 3.7’de gösterildiği şekilde,

$$V = - \frac{P}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 + r_0^2 \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - 2y_0 \left(\frac{du}{dz} \right) \left(\frac{d\theta}{dz} \right) + 2x_0 \left(\frac{dv}{dz} \right) \left(\frac{d\theta}{dz} \right) \right] dz \quad (3.34)$$

etkilen kuvvet ile bu kuvvetin sebep olduğu kısalmanın çarpımının negatif değerine eşit olup buradan Denklem (3.34) türetilir. Toplam potansiyel enerji fonksiyoneli,

$$\Pi = U + V = \int_0^L F(z, u', v', \phi', u'', v'', \phi'') dz \quad (3.35)$$

gerilme enerjisi ile dış yükten dolayı oluşan potansiyel enerjinin toplanması ile elde edilir. Varyasyonel hesap vasıtasıyla ve Euler-Lagrange denklemlerini devreye sokarak değişken özelliklere sahip ince duvarlı bir elemanın ana eşitlikleri;



Şekil 3.7. Boyuna Doğrultudaki Fiberde Eğilme Sebebiyle Oluşan Kısalma [95]

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EI_y(z) \frac{d^2 u}{dz^2} \right] + \frac{d}{dz} \left[P(z) \left(\frac{du}{dz} - Y(z) \frac{d\phi}{dz} \right) \right] = 0 \quad (3.36a)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EI_x(z) \frac{d^2 v}{dz^2} \right] + \frac{d}{dz} \left[P(z) \left(\frac{dv}{dz} + \chi(z) \frac{d\phi}{dz} \right) \right] = 0 \quad (3.36b)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EI_w(z) \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right] - \frac{d}{dz} \left\{ \left[GJ(z) - \frac{I_0(z)}{A(z)} P(z) \right] \frac{d\phi}{dz} + P(z) \left[\chi(z) \frac{dv}{dz} - Y(z) \frac{du}{dz} \right] \right\} = 0 \quad (3.36c)$$

şeklinde elde edilebilir. Eğer uygulanan kuvvet ve kesit sabit ise eşitlikler;

$$EI_y u^{iv} + Pu'' - Py_0 \phi'' = 0 \quad (3.37a)$$

$$EI_x v^{iv} + Pv'' + Px_0 \phi'' = 0 \quad (3.37b)$$

$$EI_w \phi^{iv} + (r_0^2 P - GJ) \phi'' - y_0 Pu'' + x_0 Pv'' = 0 \quad (3.37c)$$

olur. Eğer kayma merkezi ağırlık merkezi ile çakışırsa;

$$EI_y u'' = -Pu \quad (3.38a)$$

$$EI_x v'' = -Pv \quad (3.38b)$$

$$EI_w \phi^{iv} + (r_0^2 P - GJ) \phi'' = 0 \quad (3.38c)$$

Denklem Takımı (3.38) elde edilir. Basit mesnetli bir kolon düşünüldüğünde, çarpılmaya karşı bir sınırlandırma yok ise, uçlardaki sınır koşulları;

$$u=v=\phi=0, \quad z=0 \text{ ve } z=l \text{ de} \quad (3.39a)$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \quad z=0 \text{ ve } z=l \text{ de} \quad (3.39b)$$

Denklem (3.39) şeklinde olup aşağıdaki formda bir çözüm,

$$u=A_1 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad v=A_2 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \phi=A_3 \sin \frac{\pi z}{l} \quad (3.40)$$

sınır koşullarını doğrudan sağlayacaktır. Buradaki A1, A2 ve A3 sabitlerdir. Denklem (3.40)'da verilen çözümün türevleri alınıp Denklem (3.37)'de yerlerine konulursa adı geçen sabitleri içeren üçlü bir denklem sistemi matris formda,

$$\begin{bmatrix} P-P_y & 0 & P_{y_0} \\ 0 & P-P_x & -P_{x_0} \\ P_{y_0} & -P_{x_0} & \frac{I_0}{A}(P-P_\emptyset) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \{0, 0, 0\} \quad (3.41)$$

gibi bulunur. Bayağı olmayan bir çözüm için katsayılar matrisinin determinanı sıfır olmalıdır. Bu şekilde elde edilen çözüm sayesinde kritik yüklerin en küçükleri elde edilir.

Eğer çubuk iki ucu ankastre mesnetlerle destekleniyorsa sınır koşulları aşağıdaki şekle gelir;

$$u=v=\emptyset=0 \quad z=0 \text{ ve } z=l' \text{ de} \quad (3.42a)$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = \frac{d\emptyset}{dz} = 0 \quad z=0 \text{ ve } z=l' \text{ de} \quad (3.42b)$$

Bu durumda sınır koşulları,

$$u=A_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l}\right), v=A_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l}\right), \emptyset=A_3 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l}\right) \quad (3.43)$$

Denklem Takımı (3.43) ile sağlanabilir. Kritik yükler bir önceki durumda izlenen yolun benzeri ile tespit edilebilir. Aşağıda, çalışmada kullanılacak analitik tahmin yöntemleri özetlenecek ve Denklem (3.36) ile (3.37)'de verilen hakim eşitliklere uygulanacaktır.

3.4.2. Analizlerde kullanılan analitik tahmin yöntemleri

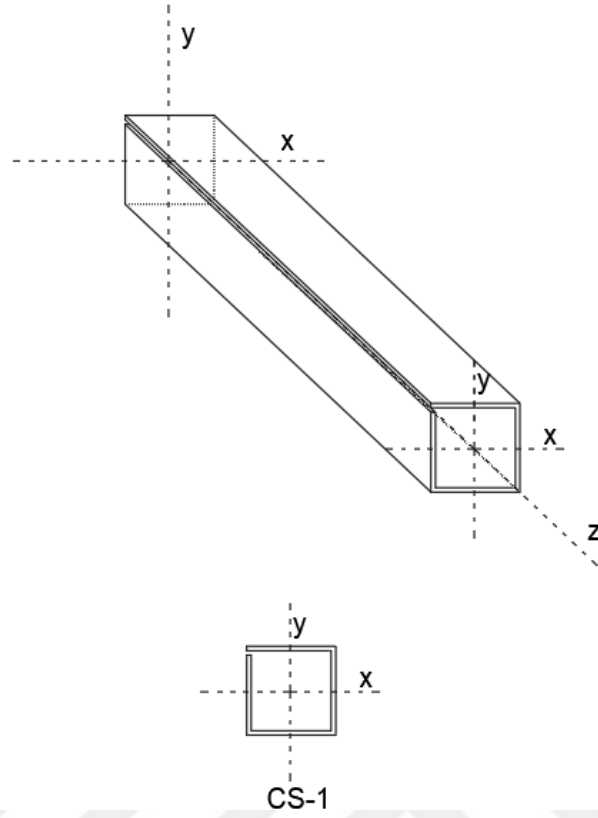
ADM Madde 2.1.10'da, HPM Madde 2.1.4'te ve VIM Madde 2.1.3'te anlatılmıştır.

3.4.3. Uygulamalar

İnce duvarlı açık bir sabit kesit ele alınacaktır. Problem daha önceden Eisenberger ve Cohen [9] tarafından geliştirilmiş analitik element metodu ile çözülmüştür.

3.4.3.1. Sabit enkesitli eleman

Burada eleman sabit eğilme ve burulma rijitliklerine sahiptir. Şekil 3.8'de gösterilen sabit kesit ve boyutlara sahip elemanın kenar uzunluğu $a=0,20$ m, et kalınlığı $t=0,03$ m, uzunluğu $L=1$ m ve $x_0 = y_0 = 0,5a'$ dir.



Şekil 3.8. Sabit Kesitli Eleman ve Koordinat Sistemi [9]

Elemanın malzeme sabitleri $E= 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$, $G=8 \times 10^6 \text{ t/m}^2$; enkesit özellikleri ise $I_x=I_y=0.00016 \text{ m}^4$, $J= 0.0000072 \text{ m}^4$, $I_0=0.0008 \text{ m}^4$, $A=0.024 \text{ m}^2$, $C_w=0.0000056 \text{ m}^6$ dır.

Aşağıda, analitik yaklaşım çözüm teknikleri Denklem (3.37)'deki ana diferansiyel bağıntılara farklı dereceden çözümlere olanak veren farklı sayıdaki terimlerle uygulanacaktır. Çıkan sonuçlar, Analitik Eleman Metodu (AEM) vasıtasıyla aynı problemi çözen Eisenberger ve Cohen [9] tarafından bulunan sonuçlar ile karşılaştırılacaktır.

Aşağıda verilen çözüm prosedürleri önceden açıklanan analitik tahmin yöntemleri üzerine bina edilmiştir. Denklem (3.37)'deki ana diferansiyel eşitlikler için ADM çözümü aşağıda özetlenmiştir;

$$u_{n+1}(z) = \frac{1}{EI_y} \left\{ \int_0^z \int_0^f \int_0^s \int_0^t -Pu_n''(x) + Py_0 \phi_n''(x) dx dt ds dr \right\} \quad (3.44a)$$

$$v_{n+1}(z) = \frac{1}{EI_x} \left\{ \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t -Pv_n''(x) - Px_0 \phi_n''(x) dx dt ds dr \right\} \quad (3.44b)$$

$$\phi_{n+1}(z) = \frac{1}{EC_w} \left\{ \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t (GJ - Pr_0^2) \phi_n''(x) - Px_0 v_n''(x) + Py_0 u_n''(x) \right\} dx dt ds dr \quad (3.44c)$$

HPM çözümü;

$$u_1(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t -u_0^{iv}(x) + \frac{1}{EI_y} \left\{ -Pu_0''(x) + Py_0 \phi_0''(x) \right\} dx dt ds dr \quad (3.45a)$$

$$u_{n+1}(z) = \frac{1}{EI_y} \left\{ \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t -Pu_n''(x) + Py_0 \phi_n''(x) \right\} dx dt ds dr \quad (3.45a1)$$

$$v_1(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t -v_0^{iv}(x) + \frac{1}{EI_x} \left\{ -Pv_0''(x) - Px_0 \phi_0''(x) \right\} dx dt ds dr \quad (3.45b)$$

$$v_{n+1}(z) = \frac{1}{EI_x} \left\{ \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t -Pv_n''(x) - Px_0 \phi_n''(x) \right\} dx dt ds dr \quad (3.45b1)$$

$$\phi_1(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t -\phi_0^{iv}(x) + \frac{1}{EC_w} \left\{ (GJ - Pr_0^2) \phi_0''(x) - Px_0 v_0''(x) + Py_0 u_0''(x) \right\} dx dt ds dr \quad (3.45c)$$

$$\phi_{n+1}(z) = \frac{1}{EC_w} \left\{ \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t (GJ - Pr_0^2) \phi_n''(x) - Px_0 v_n''(x) + Py_0 u_n''(x) \right\} dx dt ds dr \quad (3.45c1)$$

VIM çözümü;

$$u_{n+1}(z) = u_n(z) + \int_0^z \lambda(\zeta) \left\{ u_n^{iv}(\zeta) + \frac{1}{EI_y} [Pu_n''(\zeta) - Py_0 \phi_n''(\zeta)] \right\} d\zeta \quad (3.46a)$$

$$v_{n+1}(z) = v_n(z) + \int_0^z \lambda(\zeta) \left\{ v_n^{iv}(\zeta) + \frac{1}{EI_x} [Pu_n''(\zeta) + Px_0 \phi_n''(\zeta)] \right\} d\zeta \quad (3.46b)$$

$$\phi_{n+1}(z) = \phi_n(z) + \int_0^z \lambda(\zeta) \left\{ \phi_n^{iv}(\zeta) + \frac{1}{EC_w} [(-GJ + Pr^2) \phi_n''(\zeta) + Px_0 v_n''(\zeta) - Py_0 u_n''(\zeta)] \right\} d\zeta \quad (3.46c)$$

şeklindedir. Burada $\lambda(\zeta) = (\zeta - z)^3 / 6$ varyasyonsal formülasyonla elde edilen Lagrange çarpanıdır.

Probleme dönülecek olursa, her mesnette altı adet sınır koşulu vardır. Bunlardan ikişer tanesi ötelemeler için iki tanesi de burulma kaynaklı dönme açısı içindir. Bununla birlikte, bir uçtaki sınır koşullarını otomatik olarak sağlayan uygun bir başlangıç yaklaşımının seçimi sayesinde başlangıç tahmini daha az bilinmeyen parametre içereceğinden, sadece diğer ucun sınır koşullarına çözümde ihtiyaç

duyulacaktır. Yatay ve düşey yer değiştirmeler ile burulma açısı için başlangıç yaklaşımları,

$$u_0=A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1 \quad (3.47a)$$

$$v_0=A_2x^3+B_2x^2+C_2x+D_2 \quad (3.47b)$$

$$\emptyset_0=A_3x^3+B_3x^2+C_3x+D_3 \quad (3.47c)$$

dört bilinmeyenli kübik polinomlar olarak seçilmiştir. Bir mesnetteki sınır koşullarını sağlatarak bir basitleştirme sağlanabilir. Bu sayede iki bilinmeyen elemine olur. Basit mesnetli kiriş için $x = 0$ 'daki mesnet şartları,

$$u_0=A_1x^3+C_1x \quad (3.48a)$$

$$v_0=A_2x^3+C_2x \quad (3.48b)$$

$$\emptyset_0=A_3x^3+C_3x \quad (3.48c)$$

Denklem Takımı (3.48) başlangıç tahmini ile dönüşümsel unsurlar için otomatikman sağlanır. Bu yaklaşım çalışmada düşünölen bütün durumlar için kullanılmıştır. Çarpılmaya karşı serbestlik durumuna bağlı olarak burulma açısı için çubuğun uç koşulları;

$$\emptyset=0 \text{ ve } \frac{d^2\emptyset}{dz^2}=0, \quad \text{serbest çarpılma için} \quad (3.49a)$$

$$\emptyset=0 \text{ ve } \frac{d\emptyset}{dz}=0, \quad \text{bastırılmış çarpılma için} \quad (3.49b)$$

Denklem (3.49) gibi bulunur. Son olarak da;

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad v(x)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \text{ ve } \emptyset(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \emptyset_n(x) \quad (3.50a)$$

$$u(x)=u_0(x)+u_1(x)+\sum_{n=2}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

$$v(x)=v_0(x)+v_1(x)+\sum_{n=2}^{\infty} v_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \text{ ve}$$

$$\emptyset(x)=\emptyset_0(x)+\emptyset_1(x)+\sum_{n=2}^{\infty} \emptyset_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \emptyset_n(x) \quad (3.50b)$$

$$u(z)=u_n(z), v(z)=v_n(z) \text{ ve } \emptyset(z)=\emptyset_n(z) \quad (3.50c)$$

ADM, HPM ve VIM yöntemleri için sırasıyla Denklem Takımları (3.50a), (3.50b) ve (3.50c) ile sonuca gidilir. Her bir yöntemde diğer mesnedin sınır şartları uygulanarak A_i ve C_i 'lere ait katsayılar matrisinin determinantının sifıra eşitlenmesi ile bulunan P yükleri modlara ait aranan eğilmeli burulmalı burkulmaya sebep olan kritik yüklerdir.

Eğilmeli-burulmalı burkulma için ADM, HPM ve VIM metotları Mathematica programı ile yürütüldüğünde ADM, HPM ve VIM için yedinci dereceden bir çözüm ile yeterli yakınsama yakalanabilmektedir. Aşağıda Tablo 3.7'de ADM, HPM ve VIM sonuçları, Eisenberger ve Cohen [9] tarafından aynı problem için elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Tablodan uygulanan metotlar ile bulunan sonuçların Eisenberger ve Cohen [9] sonuçları ile iyi uyduğu görülebilmektedir. ADM, HPM ve VIM yöntemlerinin tamamı aynı sonuca yakınsadıklarından dolayı tabloda 10. ve 15. dereceden çözümlerden kritik olan değerler seçilerek tek sütunda verilmiştir. Yapılan çözümlerde 10. ve 15. mertebeler için yürütülen işlemlerden elde edilen sonuçların tamamına yakını örtüşmekte olup; ankastre-ankastre sistemde ikinci ve üçüncü modda, diğer sistemlerde sadece üçüncü modda; çözüm için ilave terime ihtiyaç duyuran uçtaki çarpılma sınırlamasından kaynaklanan çok küçük bir farklılık oluşmaktadır. Örnek olarak basit mesnetli sınırlamasız bir sistemde 10 dereceden çözümde $P_1=19588,0$, $P_2=33161,9$ ve $P_3=154686,6$ iken 15 dereceden çözümde de $P_1=19588,0$, $P_2=33161,9$ ve $P_3=154686,6$ şeklindedir. Aynı basit mesnetli sistemin iki tarafında da çarpılmaya karşı bir sınırlama öngörülmüş ise 10 dereceden çözümde $P_1=29602,5$, $P_2=33161,9$ ve $P_3=104170,6$ iken 15 dereceden çözümde $P_1=29602,5$, $P_2=33161,9$ ve $P_3=104130,4$ olmaktadır. Buradan görüleceği üzere yukarıda açıklanan sebepten dolayı sadece P_3 değerinde, aradaki farkın oranı onbinde dördün altında, ihmal edilebilecek bir düzeydedir. Analitik sonuçlar [9] ile elde edilen sonuçların uyuşmasından hareketle eğilmeli-burulmalı burkulma yüküne maruz açık kesit ve ince duvarlı üniform kolonların kritik yüklerinin analizinde önerilen çözümlerin başarılı bir şekilde uygulanabileceği söylenebilir.

Tablo 3.7. Üniform Kesite Sahip Kolonlarda Kritik Burkulma Yüklerinin Karşılaştırılması

Eleman Sınır Koşulları	Kritik Yükler					
	P ₁		P ₂		P ₃	
	[9] (1)	Bu Çalışma	[9](1)	Bu Çalışma	[9] (1)	Bu Çalışma
HFFF	19192,1	19588,0	33161,9	33161,9	151242,5	154686,6
HHRF	26010,9	26147,5	33161,9	33161,9	82386,5	82842,7
HRRR	29564,7	29602,5	33161,9	33161,9	103991,4	104130,4
CHFF	26696,8	27523,0	67840,8	67840,8	83076,3	83800,8
CHRF	39208,9	39611,4	67840,8	67840,8	115793,6	116200,3
CHRR	53195,6	53340,5	67840,8	67840,8	123072,8	123456,5
CCFF	30800,8	31961,3	106472,3	107310,3	132647,5	132644,0
CCRF	54476,0	55301,0	123947,8	124551,4	132647,5	132644,0
CCRR	76615,5	77019,1	132647,5	132644,0	156682,7	156003,5

Not: İlk iki hanedeki H basit mesnet ve C ankastre mesnet anlamına gelmektedir. Son iki hanedeki F çarpılma sınırlaması yok, R çarpılma sınırlaması var anlamındadır. (1) sabit kesiti ifade etmektedir.

3.4.3.2. Değişken enkesitli eleman

Bu bölümde açık, ince duvarlı, lineer olarak azalan değişken kesitli kolon nazara alınmıştır. Ele alınan problem yukarıdakine benzer şekilde yine Eisenberger ve Cohen [9] tarafından aynı makalede AEM uygulanarak çözülmüştür. Eleman Şekil 3.9'da gösterilmiş olup değişken kesitli kolona ait enkesitsel özellikler Denklem Grubu (3.51)'deki gibidir;

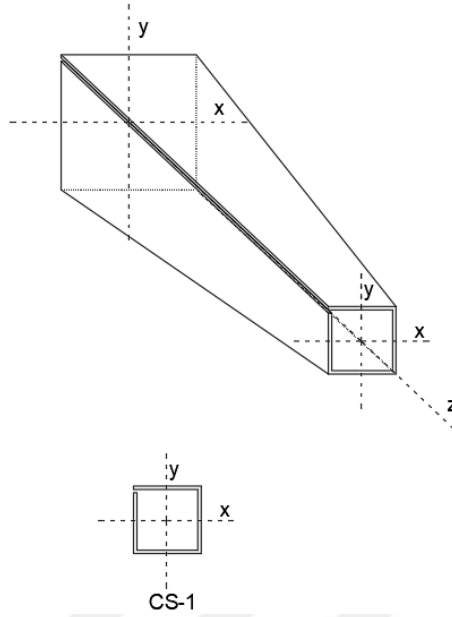
$$I_x=I_y=\frac{2}{3}ta^3(1-0.5\xi)^3, J=\frac{4}{3}t^3a(1-0.5\xi), I_0=\frac{10}{3}ta^3(1-0.5\xi)^3$$

$$A=4ta(1-0.5\xi) \text{ ve } C_w=\frac{7}{12}ta^5(1-0.5\xi)^5 \quad (3.51)$$

Şekil 3.9'daki gibi koordinat sistemine sahip enkesit için,

$$x_0=y_0=0.5a(1-0.5\xi) \quad (3.52)$$

Denklem (3.52) ile ifade edilebilir. Lineer değişken kesitli eleman için analizler yürütüldüğünde ADM, HPM ve VIM için formülasyonlar değişken enkesit



Şekil 3.9. Değişken Kesitli Eleman ve Koordinat Sistemi [9]

özelliklerine bağlı olarak değişir. Denklem Takımı (3.36)'daki ana eşitliklerde Denklem (3.51) ile Denklem (3.52)'deki ifadelerin yardımıyla gereken düzenlemeler yapılarak türevler alındığında, Denklem Takımı (3.36),

$$u^{iv}-3f_1u'''+1.5f_2u''+P\left(\frac{f_3}{EI_{y0}}u''+0,5\frac{a}{EI_{y0}}f_2\phi''-0,25\frac{a}{EI_{y0}}f_3\phi'\right)=0 \quad (3.53a)$$

$$v^{iv}-3f_1v'''+1.5f_2v''+P\left(\frac{f_3}{EI_{x0}}v''-0,5\frac{a}{EI_{x0}}f_2\phi''+0,25\frac{a}{EI_{x0}}f_3\phi'\right)=0 \quad (3.53b)$$

$$\phi^{iv}-5f_1\phi'''+5f_2\phi''+\frac{1}{EC_{w0}}\left(0,5GJ_0f_5-\frac{I_{00}}{A_0}f_4P\right)\phi'+\frac{1}{EC_{w0}}\left(-GJ_0f_4+\frac{I_{00}}{A_0}f_3P\right)\phi''+\frac{P}{EC_{w0}}\left(0,05f_3v'-0,5af_4v''+0,5af_4u''-0,05f_3u'\right) \quad (3.53c)$$

formunda genişler. Denklem Takımı (3.53)'deki sıfır indisli terimler sabit enkesitteki duruma ait enkesitsel özellikleri ifade etmekte olup f_n fonksiyonu ise $f_n=(1-0,5\xi)^{-n}$ şeklinde bir forma sahiptir.

Önceki problemde yapıldığı gibi basit mesnetli durum, ankastre-mafsallı ve ankastre-ankastre kolonlar, serbest ve sınırlandırılmış çarpılma seçenekleriyle düşünülecektir.

Denklem Takımı (3.53) eşitlikleri için ADM çözümü;

$$u_{n+1}(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t (3f_1(x)u_n'''(x) - 1,5f_2(x)u_n''(x) + P(-\frac{f_3(x)}{EI_{y0}}u_n''(x) - 0,5\frac{a}{EI_{y0}}f_2(x)\varnothing_n''(x) + 0,25\frac{a}{EI_{y0}}f_3(x)\varnothing_n'(x))) dx dt ds dr \quad (3.54a)$$

$$v_{n+1}(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t (3f_1(x)v_n'''(x) - 1,5f_2(x)v_n''(x) + P(-\frac{f_3(x)}{EI_{x0}}v_n''(x) + 0,5\frac{a}{EI_{x0}}f_2(x)\varnothing_n''(x) - 0,25\frac{a}{EI_{x0}}f_3(x)\varnothing_n'(x))) dx dt ds dr \quad (3.54b)$$

$$\varnothing_{n+1}(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t (5f_1(x)\varnothing_n'''(x) - 5f_2(x)\varnothing_n''(x) + \frac{1}{EC_{w0}}(-0,5GJ_0f_5(x) + \frac{I_{00}}{A_0}f_4(x)P)\varnothing_n'(x) + \frac{1}{EC_{w0}}(GJ_0f_4(x) - \frac{I_{00}}{A_0}f_3(x)P)\varnothing_n''(x) + \frac{P}{EC_w}(-0,05f_5(x)v_n'(x) + 0,5af_4(x)v_n''(x) - 0,5af_4(x)u_n''(x) + 0,05f_5(x)u_n'(x))) dx dt ds dr \quad (3.54c)$$

Aynı eşitlikler için HPM çözümü;

$$u_1(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t (-u_0^{iv}(x) + (3f_1(x)u_0'''(x) - 1,5f_2(x)u_0''(x) + P(-\frac{f_3(x)}{EI_{y0}}u_0''(x) - 0,5\frac{a}{EI_{y0}}f_2(x)\varnothing_0''(x) + 0,25\frac{a}{EI_{y0}}f_3(x)\varnothing_0'(x)))) dx dt ds dr \quad (3.55a)$$

$$u_{n+1}(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t (3f_1(x)u_n'''(x) - 1,5f_2(x)u_n''(x) + P(-\frac{f_3(x)}{EI_{y0}}u_n''(x) - 0,5\frac{a}{EI_{y0}}f_2(x)\varnothing_n''(x) + 0,25\frac{a}{EI_{y0}}f_3(x)\varnothing_n'(x))) dx dt ds dr \quad (3.55a1)$$

$$v_1(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t (-v_0^{iv}(x) + (3f_1(x)v_0'''(x) - 1,5f_2(x)v_0''(x) + P(-\frac{f_3(x)}{EI_{x0}}v_0''(x) + 0,5\frac{a}{EI_{x0}}f_2(x)\varnothing_0''(x) - 0,25\frac{a}{EI_{x0}}f_3(x)\varnothing_0'(x)))) dx dt ds dr \quad (3.55b)$$

$$v_{n+1}(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t (3f_1(x)v_n'''(x) - 1,5f_2(x)v_n''(x) + P(-\frac{f_3(x)}{EI_{x0}}v_n''(x) + 0,5\frac{a}{EI_{x0}}f_2(x)\varnothing_n''(x) - 0,25\frac{a}{EI_{x0}}f_3(x)\varnothing_n'(x))) dx dt ds dr \quad (3.55b1)$$

$$\varnothing_1(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t (-\varnothing_0^{iv}(x) + (5f_1(x)\varnothing_0'''(x) - 5f_2(x)\varnothing_0''(x) + \frac{1}{EC_{w0}}(-0,5GJ_0f_5(x) + \frac{I_{00}}{A_0}f_4(x)P)\varnothing_0'(x))) dx dt ds dr$$

$$+ \frac{1}{EC_{w0}} (GJ_0 f_4(x) - \frac{I_{00}}{A_0} f_3(x) P) \phi_0''(x) + \frac{P}{EC_w} (-0,05 f_5(x) v_n'(x) + 0,5 a f_4(x) v_0''(x) - 0,5 a f_4(x) u_0''(x) + 0,05 f_5(x) u_0'(x)) dx dt ds dr \quad (3.55c)$$

$$\phi_{n+1}(z) = \int_0^z \int_0^r \int_0^s \int_0^t (5 f_1(x) \phi_n'''(x) - 5 f_2(x) \phi_n''(x) + \frac{1}{EC_{w0}} (-0,5 GJ_0 f_5(x) + \frac{I_{00}}{A_0} f_4(x) P) \phi_n'(x) + \frac{1}{EC_{w0}} (GJ_0 f_4(x) - \frac{I_{00}}{A_0} f_3(x) P) \phi_n''(x) + \frac{P}{EC_w} (-0,05 f_5(x) v_n'(x) + 0,5 a f_4(x) v_n''(x) - 0,5 a f_4(x) u_n''(x) + 0,05 f_5(x) u_n'(x)) dx dt ds dr \quad (3.55c1)$$

VIM çözümü;

$$u_{n+1}(z) = u_n(z) + \int_0^z \lambda(\zeta) \left\{ u_n^{iv}(\zeta) - 3 f_1(\zeta) u_n'''(\zeta) + 1,5 f_2(\zeta) u_n''(\zeta) + P \left(\frac{f_3(x)}{EI_{y0}} u_n''(\zeta) + 0,5 \frac{a}{EI_{y0}} f_2(\zeta) \phi_n''(\zeta) - 0,25 \frac{a}{EI_{y0}} f_3(x) \phi_n'(\zeta) \right) \right\} d\zeta \quad (3.56a)$$

$$v_{n+1}(z) = v_n(z) + \int_0^z \lambda(\zeta) \left\{ v_n^{iv}(\zeta) - 3 f_1(\zeta) v_n'''(\zeta) + 1,5 f_2(\zeta) v_n''(\zeta) + P \left(\frac{f_3(x)}{EI_{x0}} v_n''(\zeta) - 0,5 \frac{a}{EI_{x0}} f_2(\zeta) \phi_n''(\zeta) + 0,25 \frac{a}{EI_{x0}} f_3(x) \phi_n'(\zeta) \right) \right\} d\zeta \quad (3.56b)$$

$$\phi_{n+1}(z) = \phi_n(z) + \int_0^z \lambda(\zeta) \left\{ \phi_n^{iv}(\zeta) - 5 f_1(\zeta) \phi_n'''(\zeta) + 5 f_2(\zeta) \phi_n''(\zeta) + \frac{1}{EC_{w0}} (0,5 GJ_0 f_5(\zeta) - \frac{I_{00}}{A_0} f_4(\zeta) P) \phi_n'(\zeta) + \frac{1}{EC_{w0}} (-GJ_0 f_4(\zeta) + \frac{I_{00}}{A_0} f_3(\zeta) P) \phi_n''(\zeta) + \frac{P}{EC_w} (0,05 f_5(\zeta) v_n'(\zeta) - 0,5 a f_4(\zeta) v_n''(\zeta) + 0,5 a f_4(\zeta) u_n''(\zeta) - 0,05 f_5(\zeta) u_n'(\zeta)) \right\} d\zeta \quad (3.56c)$$

Burada $\lambda(\zeta) = (\zeta - z)^3 / 6$ varyasyonsal formülasyonla elde edilen Lagrange çarpanıdır.

Formüllerdeki f_n fonksiyonlarının açılımları olan $1/(1-0,5\zeta_1)$, $1/(1-0,5\zeta_1)^2$, $1/(1-0,5\zeta_1)^3$, $1/(1-0,5\zeta_1)^4$ ve $1/(1-0,5\zeta_1)^5$ ifadelerinin paydalarından dolayı, integraller analitik olarak kolay bir şekilde hesaplanamaz. Eşitliklerin modifiye edilmesi, polinom integrali alınacak bir forma getirilmesi bu dezavantajı bertaraf edecektir. Bu yaklaşım sayesinde integral almayı ilk formuna göre daha uygulanabilir kılar. Bunun için bu fonksiyonların $x_0=0,5$ etrafında kuvvet serileri şeklinde açılımı yapılarak

denklemlerde kuvvet serilerinin çarpan olarak kullanılması ile problemin hızlı çözümü mümkün olmuştur.

ADM, HPM ve VIM'in Denklem Takımı (3.53)'e uygulanması Şekil 3.9'daki kolonda, P aksenal yükü altında, farklı mesnet ve sınırlama koşulları altında eğilmeli burulmalı burkulmaya sebep olan kritik yük için aşağıdaki Tablo 3.8'de verilen sonuçlar elde edilir. Açık ve ince duvarlı kesitin kiriş boyunca lineer olarak değişkenliği sebebiyle kesit özelliklerinin z ekseni boyunca değişken olması, Denklem (3.53)'ün analitik çözümünün elde edilmesini zorlaştırmaktadır. Analitik tahmin yöntemleri ile elde edilen Denklem Takımları (3.54), (3.55) ve (3.56)'nın çözümü Wolfram Mathematica yazılımı ile yapılmış olup kullanılan yöntemlerin sonuca yakınsamadaki etkinliğinin yanında süre performansını göstermek üzere Tablo 3.8'de çözüm süresi için de üç sütun ayrılmıştır. Aynı sütunlarda, ayrıca, yakınsamanın (kritik değerde sabitlenmenin) ADM, HPM ve VIM yöntemlerinde kaç/kaçıncı terime ait çözümde olduğu da işlenmiştir. Mathematica programının yürütülmesinde 6 Gb Ram kapasiteli, Intel® Core™ i5-4200U CPU @ 1.60GHz 2.30 GHz işlemcili ve 297 GB'ı dolu 465 GB sabit disk kapasiteli bir bilgisayar kullanılmıştır.

Çözüm esnasında ADM ve HPM için sırasıyla 4, 6, 8 ve duruma göre 10 terimli çözümler, VIM için ise 4., 6., ve 8. terim için sonuçlar elde edilmiştir. Her üç yöntemde de modlar için bulunan sonuçlar birbirinin aynı olduğundan Tablo 3.8'de söz konusu değerler tek sütunda gösterilmiştir. Ayrıca 2. veya 3. modda 6 veya 8 iterasyon ile P yük değerleri yakınsamış ve daha sonraki ilave terim ve yinelemelerde sonuçlarda kayda değer bir değişiklik gözlenmemiştir. 1. Modda ise tersine, çoğunlukla, tam bir sabitlenme meydana gelmemiştir. Şöyle ki; örneğin, HHFF durumunda ADM'de, 4 terim için $P_1=6.964,5$, $P_2=12.340,1$, $P_3=28.774,6$; 6 terim için $P_1=7.085,7$, $P_2=12.186,0$, $P_3=28.479,9$; 8 terim için ise $P_1=7.300,7$, $P_2=12.186,4$, $P_3=28.529,2$ bulunmuştur. Eisenberger ve Cohen [9] tarafından aynı mesnetlenme ve sınırlama şartları için bulunan P değerleri ise sırasıyla; $P_1=6.973,8$, $P_2=12.189,4$ ve $P_3=28.006,7$ şeklindedir. Buradan 6 terim için P_2 değeri hedef değere yaklaşmış ve 8 terimli çözüm ile kontrol için yapılan 10 terimli çözümde kayda değer bir sapma olmadığından 6 terimli çözüm istenen çözümdür. Bu çalışmada HHFF için bulunan

Tablo 3.8. Değişken Kesite Sahip Kolonlarda Kritik Burkulma Yüklerinin Karşılaştırılması

Eleman Sınır Koşulları	Kritik Yükler (ton)						ÇS/TS	ÇS/TS	ÇS/KT
	P ₁		P ₂		P ₃				
	[9] (2)	Bu Çalışma	[9] (2)	Bu Çalışma	[9] (2)	Bu Çalışma	ADM	HPM	VIM
HHFF	6.973,8	7.085,7	12.189,4	12.186,0	28.006,7	28.479,9	48/6	52/6	205/6
HHRF	10.176,0	10.427,4	12.189,4	12.185,0	30.909,3	31.779,2	51/6	45/6	202/6
HHRR	10.967,1	11.231,3	12.189,4	12.185,0	38.032,4	38.220,5	46/6	50/6	202/6
CHFF	9.691,2	10.439,0	24.737,1	24.744,1	28.930,9	29.568,5	124/8	120/8	911/8
CHRF	15.924,1	16.328,7	24.737,1	24.744,1	43.455,5	44.045,3	113/8	116/8	1841/8
CHRR	19.506,1	19.751,9	24.737,1	24.744,1	46.845,4	47.180,0	152/8	137/8	2933/8
CCFF	10.946,1	11.892,6	39.448,8	40.614,7	48.210,9	48.209,9	130/8	130/8	543/8
CCRF	23.270,3	23.992,2	46.520,5	47.583,1	48.210,9	48.209,9	132/8	132/8	543/8
CCRR	28.743,5	29.219,9	48.210,9	48.209,9	57.634,8	58.273,2	130/8	122/8	521/8

Not: İlk iki hanedeki H basit mesnet ve C ankastre mesnet anlamına gelmektedir. Son iki hanedeki F çarpılma sınırlaması yok, R çarpılma sınırlaması var anlamındadır. ÇS saniye cinsinden Çözüm Süresi, TS kaç terimde çözüme ulaşıldığını gösteren Terim Sayısı, KT kaçınıcı terimde çözüme ulaşıldığını gösteren Kaçınıcı Terim ifadesidir. (2) değişken kesiti ifade etmektedir.

sonuçlar ile hedef sonuçlar arasındaki bağıl hata ise sırasıyla %1,6, %0,03 ve %1,6'dır. 8 ve 10 terimli çözümlerde ise P₁ için bağıl hata yüzdeleri 4,6 ve 6,7'dir.

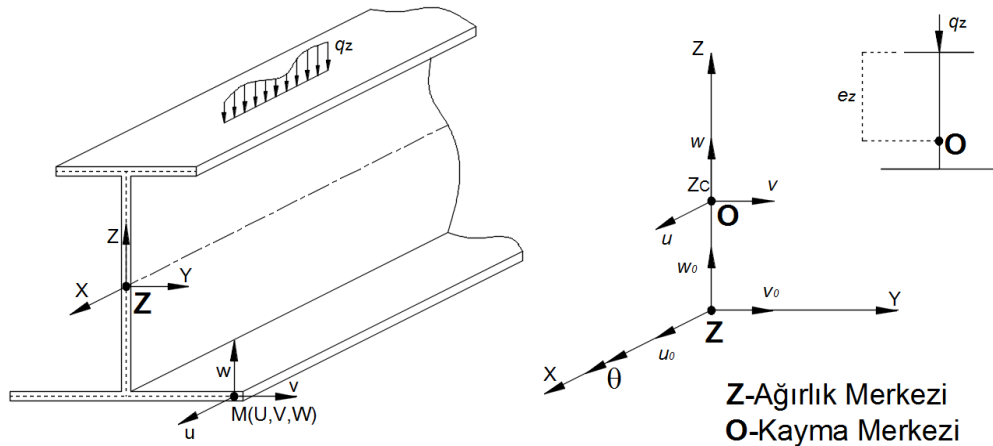
Tablo 3.8'de, sabitlenmenin sağlandığı ve istenen çözüme ulaşıldığı yineleme sayısında her bir yöntemin süresi de işlenmiştir. ADM, HPM ve VIM sonuçlarının Eisenberger ve Cohen [9] sonuçlarıyla uyumu ile çözüm için gereken terim sayıları ve süreler adı geçen yöntemlerin eksenel yük etkisi altındaki ince duvarlı açık kesitli kolonların kritik eğilmeli burulmalı burkulma yüklerinin bulunmasında kullanılabileceklerini göstermektedir. ADM ve HPM yöntemlerinin süre açısından daha avantajlı oldukları gözlemlenmiştir.

3.5. Prizmatik Olmayan İnce Duvarlı Kirişlerin Yanal-Burulmalı Burkulmalarının ADM ve HPM ile Analizi

3.5.1. Problem

Önerilen ADM ve HPM çözümlerinin etkinliğini göstermek üzere literatürde çözümü mevcut olan Ruta ve Szybinski tarafından yanal burulmalı burkulma için yapılmış olan bir durum çalışması [158] ele alınmıştır. Bu kapsamda, iki ucu basit mesnetli kiriş ve konsol kiriş, tek veya çift simetrlili enkesit, gövdesi veya flanşları sabit veya lineer olarak azalan, basit mesnetli kirişte üniform veya lineer değişen moment, konsol kirişte uçta tekil yük veya üst flanş, kayma merkezi veya alt flanştan etkileyen düzgün yayılı yük durumlarının farklı versiyonları dikkate alınmıştır. Ruta ve Szybinski tarafından yapılan çalışmada [158] hakim eşitliğinin türetilmesi için, elemanın xz simetri düzleminde q_z yükü etkisinde bulunan prizmatik olmayan ince duvarlı bir açık enkesite sahip kiriş dikkate alınmıştır. Yükün ürünü olan ve M_y ile gösterilen momentin değerinin bilindiği kabul edilsin. Analizde kullanılan koordinat sistemi ile yer değiştirmeler Şekil 3.10'da gösterilmiştir.

Ruta ve Szybinski tarafından referans çalışma olarak alınan Asgarian, Soltani ve Mohri'ye ait çalışmadaki [64] eşitlikleri türetmek için Şekil 3.10'daki kesitin kenarındaki M (U, V, W) noktasına ait yer değiştirme bileşenleri için aşağıdaki kabuller yapılmıştır:



Şekil 3.10. Koordinat Sistemi ve Yer Değiştirmelere Ait Notasyonlar [158]

$$U(x,y,z)=u_0(x)-y[v(x)+z_c(x)\theta(x)]'-z[w(x)-y_c(x)\theta(x)]'-w(y,z)\theta' \quad (3.57a)$$

$$V(x,y,z)=v(x)-\left(z-z_c(x)\right)\theta(x) \quad (3.57b)$$

$$W(x,y,z)=w(x)+\left(y-y_c(x)\right)\theta(x) \quad (3.57c)$$

Denklem (3.57)'de $y_c(x)$, $z_c(x)$ ağırlık merkezine göre kayma merkezinin koordinatlarıdır. Tek simetrik kesit durumunda $y_c(x)=0$ olacaktır.

Tek simetrik enkesite sahip kirişin yanal burulmalı burkulma problemine ait yer değiştirme eşitlikleri;

$$[EI_z v'''] + [EI_z z_c'' \theta] + [2EI_z z_c' \theta'] - [M_y \theta] = q_y = 0 \quad (3.58)$$

$$[EI_w \theta'''] - [GJ \theta'] - 4[z_c'^2 EI_z \theta'] + EI_z z_c''^2 \theta - 2[EI_z z_c' v''] - 2[EI_z z_c' z_c'] \theta + EI_z z_c'' v'' - M_y v'' - (M_y z_c'' + M_y' z_c) \theta + [\beta_z M_y \theta'] = -M_t \theta \quad (3.59)$$

Denklem (3.58) ve (3.59)'daki gibi olup, burada M_t kayma merkezi dışında bir noktaya etkiyen yükün değerinin e_z ile çarpımına eşittir. I_w tek simetrik enkesitin çarpılma sabiti, β_z ise monosimetrikliğin burulma rijitliği üzerindeki etkisini hesaplamada kullanılan Wagner çarpanı olmak üzere $I_w = I_w - z_c'^2 I_z$, $M_t = e_z q_z$,

$\beta_z = \iint_A \frac{z(y^2+z^2)dA}{I_y} - 2z_c$ şeklinde ifade edilir. Burada e_z yükün etkime noktasının kayma merkezine olan mesafesidir.

Problemi çözmek için ihtiyaç duyulan sınır koşullarını tanımlayan ilişkiler,

$$EI_z v'' + EI_z z_c'' \theta + 2EI_z z_c' \theta' - M_y \theta = 0 \text{ veya } \delta v' = 0 \quad (3.60a)$$

$$-[EI_z v'''] - [EI_z z_c'' \theta] - [2EI_z z_c' \theta'] + [M_y \theta] = 0 \text{ veya } \delta v = 0 \quad (3.60b)$$

$$EI_w \theta'' = 0 \text{ veya } \delta \theta' = 0 \quad (3.60c)$$

$$-[EI_w \theta'''] + GJ \theta' + 4z_c'^2 EI_z \theta' + 2EI_z z_c' v'' - \beta_z M_y \theta' = 0 \text{ veya } \delta \theta = 0 \quad (3.60d)$$

Denklem (3.60) şeklinde ifade edilebilir.

$$M_z = EI_z v'' + EI_z z_c'' \theta + 2EI_z z_c' \theta' - M_y \theta = 0 \quad (3.61)$$

Denklem (3.61) göz önüne alınarak;

$$v'' = -z_c'' \theta - 2z_c' \theta' + \frac{M_y}{EI_z} \theta \quad (3.62)$$

elde edilen Denklem (3.62) Denklem (3.59)'de yerine konulursa sadece θ 'ya bağlı çözümü daha kolay tek bir dördüncü mertebeden değişken katsayılı bağlaşıklık kısmi Diferansiyel Formülasyon (3.63)

$$[EI_w \theta'''] - [GJ \theta'] - 2M_y z_c' \theta - (M_y z_c'' + M_y z_c''') \theta - \frac{M_y^2}{EI_z} \theta + [\beta_z M_y \theta'] + M_t \theta = 0 \quad (3.63)$$

elde edilir [158]. Yazarlar [158], Denklem (3.63)'ün çözümüne yakınsamak için ortogonal Chebyshev Serilerini kullanmışlardır. Yaptıkları çözümleri yerine göre başka çalışma sonuçları ve SEM sofistik ile üretilen çözümlerle karşılaştırarak yöntemlerinin etkinliğini göstermişlerdir.

3.5.2. Analizlerde kullanılan analitik tahmin yöntemleri

ADM Madde 2.1.10'da ve HPM Madde 2.1.4'te anlatılmıştır.

3.5.3. Problem için ADM ve HPM vasıtasıyla çözüm prosedürü

Başlangıç fonksiyonu;

$$\theta_0(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (3.64)$$

Denklem (3.64)'deki gibi seçilip basit mesnetli kiriş için, çarpılmanın sınırlanmadığı durumda, $x=0$ için $\theta=0$ ve $\theta''=0$ mesnet şartları sağlatılırsa;

$$\theta_0(x) = Ax^3 + Cx \quad (3.65)$$

daha az bilinmeyen parametre içeren ve diğer ucun sınır koşullarına ihtiyaç duyuran Denklem (3.65)'teki başlangıç yaklaşımı elde edilir. Benzer şekilde konsol kirişte ankastre mesnedin bulunduğu $x=0$ 'da $\theta=0$ ve $\theta'=0$ mesnet şartları sağlatılırsa başlangıç fonksiyonu,

$$\theta_0(x)=Ax^3+Bx^2 \quad (3.66)$$

olur.

3.5.3.1. ADM formülasyonu

Metodun Denklem (3.63)'e uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned} \theta_{n+1}(x) = & \int_0^x \int_0^v \int_0^s \int_0^t \frac{1}{EI_w(x)} \left(-EI_w''(x)\theta_n''(x) - 2EI_w'(x)\theta_n'''(x) + (GJ(x)\theta_n'(x))' + \right. \\ & \left. 2M_y'(x)z_c'(x)\theta_n(x) + (M_y(x)z_c''(x) + M_y''(x)z_c(x)) \theta_n(x) + \frac{M_y^2(x)}{EI_z(x)} \theta_n(x) - \right. \\ & \left. (\beta_z(x)M_y(x)\theta_n')' - M_t(x)\theta_n(x) \right) dx dt ds dv, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Denklem (3.67)'deki algoritma elde edilir. $\theta(x)$ 'in çözümü aşağıdaki Seri (3.68)

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(x) \quad (3.68)$$

açılımı ile ifade edilir.

3.5.3.2. HPM formülasyonu

Metodun Denklem (3.63)'e uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned} \theta_1(x) = & \int_0^x \int_0^v \int_0^s \int_0^t -\theta_0^{iv}(x) + \frac{1}{EI_w(x)} \left(-EI_w''(x)\theta_0''(x) - 2EI_w'(x)\theta_0'''(x) + (GJ(x)\theta_0'(x))' + \right. \\ & \left. 2M_y'(x)z_c'(x)\theta_0(x) + (M_y(x)z_c''(x) + M_y''(x)z_c(x)) \theta_0(x) + \frac{M_y^2(x)}{EI_z(x)} \theta_0(x) - \right. \\ & \left. (\beta_z(x)M_y(x)\theta_0')' - M_t(x)\theta_0(x) \right) dx dt ds dv \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \theta_{n+1}(x) = & \int_0^x \int_0^v \int_0^s \int_0^t \frac{1}{EI_w(x)} \left(-EI_w''(x)\theta_n''(x) - 2EI_w'(x)\theta_n'''(x) + (GJ(x)\theta_n'(x))' + \right. \\ & \left. 2M_y'(x)z_c'(x)\theta_n(x) + (M_y(x)z_c''(x) + M_y''(x)z_c(x)) \theta_n(x) + \frac{M_y^2(x)}{EI_z(x)} \theta_n(x) - \right. \end{aligned}$$

$$\left(\beta_z(x) M_y(x) \theta_n'(x) - M_t(x) \theta_n(x) \right) dx dt ds dv, \quad n \geq 1 \quad (3.70)$$

$$\theta(x) = \theta_0(x) + \theta_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \theta_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(x) \quad (3.71)$$

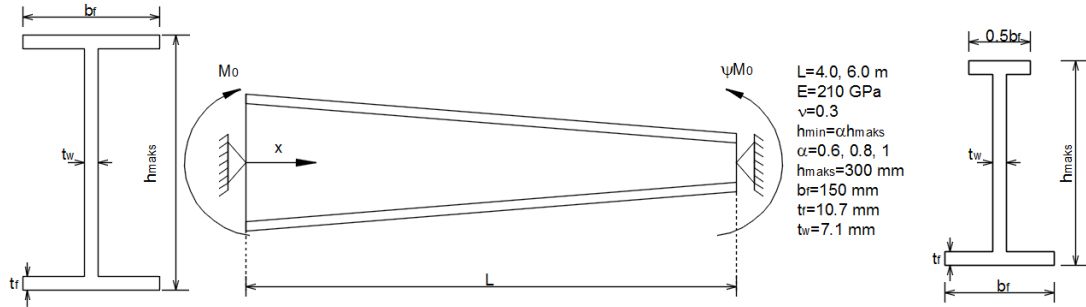
HPM ifadesi için Denklem Grubu (3.69)-(3.71) elde edilir.

3.5.4. Durum çalışmaları

Durum 1 çalışmasında dikkate alınan basit mesnetli prizmatik olmayan I kirişin parametreleri aşağıdaki gibidir;

Kiriş boyu $L=4$ m ve $L=6$ m, $E=210$ GPa, poisson oranı $\nu=0,3$, $h_{\min}=\alpha h_{\max}$

Kiriş uçlardan $M_{\text{sol}}=M_0$ ve $M_{\text{sag}}=\psi M_0$ momentleri ile yüklenmiştir. Kesit boyutları Şekil 3.11'de verilmiş olup iki farklı varyantın çözümü düşünülmüştür. Durum 1.1'de kesit çift simetrlili, Durum 1.2'de tek simetrlilidir.



Şekil 3.11. Basit Mesnetli Kiriş ve Kesit Boyutları [158]

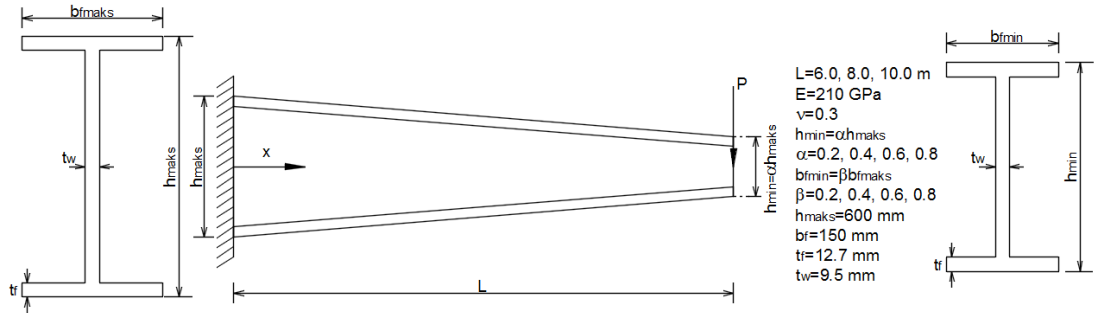
Çift simetrlili kesitte kayma merkezi ve ağırlık merkezi çakışacağından $z_c=0$ olacaktır. Tüm çalışmalarda yükün kayma merkezinden etkidiği durumlarda $e_z=0$, çarpılma sabiti I_w , çift simetrlili I enkesitlerde Denklem (1.11), tek simetrlili enkesitlerde de,

$$I_w = \frac{(d)^2 b_f^3 t_f \bar{\alpha}}{12}, \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{1 + \left(\frac{b_{f1}}{b_{f2}}\right)^3 \left(\frac{t_{f1}}{t_{f2}}\right)} \quad (3.72)$$

Galambos [159]'da verildiği şekilde Denklem (3.72) kullanılmıştır. Yukarıda d flaş eksenleri arası yükseklik, 1 rakamı basınç başlığı, 2 rakamı çekme başlığını ifade etmek üzere, b_f flaş genişliği, t_f flaş yüksekliği, α gövde yüksekliği azaltma oranı

ve ψ moment azaltma oranıdır. ADM ve HPM formülasyonlarında integraldeki $\frac{1}{I_w(x)}$ ve $\frac{1}{I_z(x)}$ ifadelerindeki paydada bulunan x değişkenine bağlı I_w , I_z ve tek simetrik enkesit durumunda, kayma merkezi ile ağırlık merkezi arasındaki z eksenindeki mesafe olan ve paydada x değişkenini barındıran z_c , Mathematica programında integral işleminin sonucunun alınamamasına sebep oldukları için yine Mathematica’da Series komutu ile $\frac{1}{I_w(x)}$, $\frac{1}{I_z(x)}$ ve z_c ifadelerinin $x_0=1$ etrafında kuvvet serileri şeklinde açılımı yapılarak denklemlerde kuvvet serisinin çarpan olarak kullanılması yolu ile işlemler hızlanmıştır.

Durum 2 çalışmasında, Şekil 3.12, bu defa kayma merkezinden etkiyen tekil yük altında bulunan 6 m, 8 m ve 10 m uzunluklara sahip konsol kirişler alınmıştır. İki tip çift simetrik I kesit kullanılmıştır. Durum 2.1’de flanş genişlikleri b_{maks} sabit, gövde $h_{min}=\alpha h_{maks}$ şeklinde lineer azalan ve Durum 2.2’de gövde yüksekliği h_{maks} sabit, flanşlar β genişlik azaltma oranı olmak üzere sağ uçta $b_{min}=\beta b_{maks}$ şeklinde tedrici azalan kesit çalışılmıştır.



Şekil 3.12. Konsol Kiriş ve Kesit Boyutları [158]

Son olarak Durum 3’te, Durum 2’deki gövde yüksekliği h_{maks} sabit, $b_{min}=\beta b_{maks}$ şeklinde tedricen azalan kesit düzgün yayılı q yükü etkisi altında analiz edilmiştir. Yük kayma merkezinden, üst başlıktan ve alt başlıktan etkime durumlarına göre kritik yük analizi yapılmıştır.

Serbest uç için sınır şartları;

$$GJ\theta' - EI_w\theta''' = 0 \text{ ve } \theta'' = 0, x=L'de \quad (3.73)$$

Denklem (3.73)’teki gibi alınmıştır [66].

3.5.5. Nümerik sonuçlar

ADM ve HPM'nin Denklem (3.63)'e uygulanması, Durum 1.1, Durum 1.2, Durum 2.1, Durum 2.2 ve Durum 3 halinde yanal burulmalı burkulmaya sebep olan kritik yükler için aşağıdaki tablolarda verilen sonuçları açığa çıkarır. Kesitin tek simetrik olması, kesitin kiriş boyunca lineer olarak değişkenliği, yükün değişken olması gibi unsurlar problemin daha karmaşık hale gelmesine sebep olmaktadır. Bu durumlar, kullanılan yazılımda, çözüm süresinin uzamasına sebep olmaktadır. Çözümü yapılan örneklerde bu unsurların biri veya birkaçı aynı anda içerildiğinden, kullanılan yöntemlerin etkinliğinin yanında süre performansını göstermek üzere tablolarda çözüm süresi için de bir sütun ayrılmıştır. Aynı sütunda, ayrıca, yakınsamanın (kritik değerde sabitlemenin) ADM ve HPM yöntemlerinde kaçınıcı terime ait çözümde olduğu da işlenmiştir. Mathematica programının yürütülmesinde 6 Gb Ram kapasiteli, Intel® Core™ i5-4200U CPU @ 1.60GHz 2.30 GHz işlemcili ve 297 GB'ı dolu 465 GB sabit disk kapasiteli bir bilgisayar kullanılmıştır.



Tablo 3.9. Gövde Değişimli İnce Duvarlı Çift simetrlili Enkesite Sahip Basit Mesnetli Kiriş Lineer Kritik Momentleri (M_{kr})

L (m)	α	Kritik Eğilme Momentleri (kNm)																				
		$\Psi=0,25$					ÇS/TS	$\Psi=0,50$				ÇS/TS	$\Psi=0,75$				ÇS/TS	$\Psi=1$				ÇS/TS
		[158]			Bu Çalışma	[158]			Bu Çalışma	[158]			Bu Çalışma	[158]				Bu Çalışma				
		SY	Asgarian [64]	SEM Sofistik		SY	Asgarian [64]	SEM Sofistik		SY	Asgarian [64]	SEM Sofistik		SY	Asgarian [64]	SEM Sofistik	SY		Asgarian [64]	SEM Sofistik		
4	0,6	206,5	207,4	205,9	206,6	13/8	174,6	175,5	174,2	174,7	12/6	150,1	150,8	149,7	150,1	12/8	131,0	131,7	130,7	131,0	11/8	
	0,8	219,6	220,1	219,0	219,8	5/6	186,4	186,9	186,0	186,5	5/6	160,7	161,1	160,3	160,8	4/6	140,6	140,9	140,3	140,6	9/6	
	1	232,8	233,0	232,2	232,8	2/6	198,3	198,3	197,7	198,3	2/6	171,3	171,3	170,9	171,3	1/6	150,2	150,2	149,8	150,2	1/4	
6	0,6	118,4	118,7	118,2	118,6	13/8	100,4	100,8	100,3	100,4	11/8	86,5	86,8	86,4	86,4	12/8	75,5	75,8	75,4	75,4	13/8	
	0,8	123,4	123,5	123,1	123,3	18/8	104,9	105,0	104,7	105,2	5/6	90,5	90,7	90,4	90,6	4/6	79,2	79,3	79,1	79,2	6/6	
	1	128,2	128,8	128,0	128,2	2/6	109,4	109,4	109,2	109,4	2/6	94,6	94,6	94,5	94,6	1/6	83,0	82,9	82,8	83,0	1/4	

Not: ÇS saniye cinsinden Çözüm Süresi, TS kaç terimde çözüme ulaşıldığını gösteren Terim Sayısı, SY referans çalışmada Sunulan Yöntem ifadesidir.

Tablo 3.10. Gövde Değişimli İnce Duvarlı Tek simetrlili Enkesite Sahip Basit Mesnetli Kiriş Lineer Kritik Momentleri (M_{kr})

L (m)	α	Kritik Eğilme Momentleri (kNm)																				
		$\Psi=0,25$					ÇS/TS	$\Psi=0,50$				ÇS/TS	$\Psi=0,75$				ÇS/TS	$\Psi=1$				ÇS/TS
		[158]			Bu Çalışma	[158]			Bu Çalışma	[158]			Bu Çalışma	[158]				Bu Çalışma				
		SY	Asgarian [64]	SEM Sofistik		SY		Asgarian [64]		SEM Sofistik	SY			Asgarian [64]	SEM Sofistik	SY			Asgarian [64]	SEM Sofistik	SY	
4	0,6	67,3	59,0	65,7	68,2	21/8	58,4	53,9	57,4	58,9	21/8	50,9	49,0	50,5	51,3	21/8	44,8	44,6	44,7	45,1	11/6	
	0,8	67,3	63,0	66,5	68,2	10/6	58,2	55,8	57,7	58,8	10/6	50,6	49,6	50,4	51,2	9/6	44,5	44,2	44,4	44,9	11/6	
	1	67,5	67,7	67,4	68,5	2/4	58,3	58,0	58,2	59,0	2/4	50,7	50,4	50,6	51,2	2/4	44,5	43,9	44,4	45,0	1/4	
6	0,6	47,9	43,5	47,1	48,3	76/12	41,8	39,3	41,3	42,4	45/10	36,6	35,6	36,4	36,9	45/10	33,2	32,1	32,2	32,6	20/8	
	0,8	47,7	46,4	47,3	48,1	42/10	41,5	40,2	41,3	42,0	21/8	36,3	35,7	36,1	36,6	21/8	31,9	31,7	31,8	32,3	12/6	
	1	47,6	46,9	47,6	48,0	4/8	41,4	41,2	41,3	41,8	2/6	36,1	35,9	36,0	36,4	3/6	31,7	31,6	31,6	31,9	2/6	

Not: ÇS saniye cinsinden Çözüm Süresi, TS kaç terimde çözüme ulaşıldığını gösteren Terim Sayısı, SY referans çalışmada Sunulan Yöntem ifadesidir.

Tablo 3.11. Doğrusal Değişimli Konsol Kirişte Elastik Kritik Yükler (P_{kr})

L(m)	α veya β	Yanal Burulmalı Burkulma Yükleri (kN)									
		Gövde Doğrusal değişimli					Başlık Doğrusal Değişimli				
		[158]			Bu Çalışma	ÇS/TS	[158]			Bu Çalışma	ÇS/TS
		SY	Asgarian [64]	SEM Sofistik			SY	Asgarian [64]	SEM Sofistik		
6	0,2	42,53	42,72	41,74	42,46	54/15	14,47	14,35	14,03	13,71	68/15
	0,4	43,92	43,58	43,12	43,69	21/10	22,13	22,34	22,02	22,12	59/15
	0,6	45,22	44,65	44,41	44,64	21/10	30,22	30,02	30,29	29,84	55/12
	0,8	46,46	45,08	45,70	45,84	12/8	38,71	38,32	38,67	38,20	18/10
8	0,2	20,95	20,92	20,60	20,88	95/18	7,40	7,33	7,18	7,86	70/15
	0,4	21,55	21,42	21,20	21,74	30/12	11,11	11,19	11,06	11,12	100/18
	0,6	22,15	21,81	21,80	21,88	27/12	14,98	14,92	14,97	14,81	57/15
	0,8	22,72	22,13	22,38	22,44	19/10	19,03	18,87	19,04	18,79	29/12
10	0,2	12,29	12,24	12,10	12,23	118/20	4,46	4,42	4,34	4,74	905/25
	0,4	12,60	12,52	12,41	12,47	85/18	6,62	6,64	6,63	6,62	145/20
	0,6	12,91	12,59	12,72	12,76	52/15	8,83	8,80	8,83	8,74	55/15
	0,8	13,22	11,60	13,03	13,06	28/12	11,12	11,04	11,13	10,99	29/12

Not: ÇS saniye cinsinden Çözüm Süresi, TS kaç terimde çözüme ulaşıldığını gösteren Terim Sayısı ve SY referans çalışmada Sunulan Yöntem ifadesidir.

Tablo 3.12. Eşit Başlıkları Doğrusal Değişen Konsol Kirişlerde Elastik Kritik Yükler (q_{kr})

L(m)	β	Yanal Burulmalı Burkulma Yükleri (kN/m)											
		Etkime Noktası Üst Flanş				Etkime Noktası Kayma Merkezi				Etkime Noktası Alt Flanş			
		[158]		Bu Çalışma	ÇS/TS	[158]		Bu Çalışma	ÇS/TS	[158]		Bu Çalışma	ÇS/TS
		SY	SEM Sofistik			SY	SEM Sofistik			SY	SEM Sofistik		
6	0,2	7,66	7,56	-	-	13,29	12,99	-	-	19,64	19,17	-	-
	0,4	9,20	9,15	9,38	263/14	17,68	17,49	17,49	116/18	26,77	26,43	26,17	760/16
	0,6	10,57	10,54	10,54	65/12	22,14	21,98	21,82	32/12	34,12	33,83	33,48	68/12
	0,8	11,84	11,82	11,78	39/10	26,71	26,57	26,31	30/10	41,79	41,52	41,00	39/10
8	0,2	3,22	3,18	-	-	4,93	4,82	4,46	868/22	6,78	6,63	6,66	2149/22
	0,4	3,90	3,87	3,98	731/16	6,45	6,38	6,38	85/16	9,10	8,99	8,90	767/16
	0,6	4,51	4,49	4,49	263/14	7,99	7,94	7,88	54/14	11,47	11,38	11,28	68/12
	0,8	5,08	5,07	5,06	39/10	9,57	9,53	9,44	21/10	13,93	13,85	13,68	39/10
10	0,2	1,65	1,62	1,82	2208/22	2,32	2,27	2,33	1152/24	3,03	2,97	3,02	1440/20
	0,4	2,00	1,99	2,03	1536/20	3,00	2,97	2,97	180/20	4,01	3,97	3,95	1273/18
	0,6	2,33	2,32	2,33	263/14	3,68	3,66	3,63	78/16	5,01	4,97	4,93	264/14
	0,8	2,64	2,63	2,62	71/12	4,38	4,36	4,32	35/12	6,03	6,00	5,93	68/12

Not: ÇS saniye cinsinden Çözüm Süresi, TS kaç terimde çözüme ulaşıldığını gösteren Terim Sayısı ve SY referans çalışmada Sunulan Yöntem ifadesidir.

ADM ve HPM ile her bir durum için yapılan çözümlerinde bulunan yanal burulmalı burkulma kritik yük veya moment değerleri örtüştüğü için sonuçlar her iki yöntem için de tek bir sütunda gösterilmiştir. Kullanılan analitik tahmin yöntemlerinin etkinliği, bulunan sonuçların referans çalışmadakilere yakınsamasıyla ölçülmesinin yanında terim sayısı ve çözüm süresi ile de değerlendirilebilir.

Tablo 3.9 ve Tablo 3.10'da, mesnetlerde farklı uç momentleri etkisi altında bulunan basit mesnetli kiriş halinde, sağ uçtaki gövde yüksekliğinde azalma oranı α küçüldükçe çözüm için gerekli terim sayısı ve süre artmaktadır. Kesit çift simetrik iken, istenen sonuca ulaşmak için kullanılan en az terim sayısı 4 ve çözüm süresi 1 saniye, en çok terim sayısı 8 ve çözüm süresi 18 saniye olmuştur. Kesit tek simetrik iken, istenen sonuca ulaşmak için kullanılan en az terim sayısı 4 ve çözüm süresi 1 saniye, en çok terim sayısı 12 ve çözüm süresi 76 saniye olmuştur. Simetrik kesitte ağırlık merkezi ve kayma merkezi çakışacağından $z_c=0$ olacak ve çözüm denkleminde z_c 'nin çarpan olarak bulunduğu terimlerin yanında, ayrıca, β_z yok olacağından çözüm süresinin tek simetrik kesite göre düşeceği aşikardır. Terim sayıları her iki yöntemde aynı olup çözüm süresi anlamında tüm çalışmalarda ADM ve HPM arasında kayda değer bir fark olmayıp tablolardaki süreler ADM süreleridir.

Tablo 3.11'de uçta kayma merkezinden P tekil yükü etkisinde olan bir konsol kirişe ait yanal burulmalı burkulmaya sebep olan kritik yük değerleri bulunmaktadır. Tablonun birinci bölümünde $\beta=1$ durumunda, gövde yüksekliği soldan sağa, sağ uçta α 'nın değişik oranlarında düşerek sabitlenecek şekilde lineer azalırken, diğer bölümünde $\alpha=1$ durumunda, bu defa başlık genişlikleri, sağ uçta β 'nin farklı oranlarıyla sabitlenecek şekilde, tedrici azalmaktadır. α veya β düştükçe ve L kiriş boyu arttıkça çözüm için gereken terim sayısı ve süre artmıştır. L=6 m iken $\beta=1$ ve $\alpha=0,8$ durumunda çözüme 8 terim ile 12 saniyede, $\beta=0,8$ ve $\alpha=1$ durumunda çözüme 10 terim ile 18 saniyede, L=10 m iken $\beta=1$ ve $\alpha=0,2$ durumunda çözüme 20 terim ile 118 saniyede, $\beta=0,2$ ve $\alpha=1$ durumunda çözüme 25 terim ile 905 saniyede ulaşılabilmektedir.

Tablo 3.12'de ise aynı konsol kirişin, gövde sabit iken ($\alpha=1$), üst ve alt başlık genişliklerinin, sağ uçta β oranında azalacakları şekilde, lineer olarak değişmeleri; yayılı yükün üst başlık, kayma merkezi veya alt başlıktan etkimesi durumuna göre

ADM ve HPM analitik yaklaşım yöntemleri ile bulunan yanal burulmalı burkulma kritik yükleri referans çalışma değerleri ile karşılaştırılmıştır. Bu tablo da incelendiğinde boy arttıkça ve β azaldıkça terim sayısı ve çözüm süresi artmaktadır. Yükün merkezden etkidiği durumlarda e_z , yükün etkime noktasının kayma merkezine olan mesafesi sıfır olacağından, burada çözüm süresi daha kısadır. Yükün etkime noktası alt başlık, $L=6$ m ve $\beta=0,4$ olduğunda 16 terim sayısı ile 760 saniye ile kritik yük bulunabilirken, $L=10$ m ve $\beta=0,4$ olduğunda 18 terim sayısı ile 1273 saniyede sonuca ulaşılabilir. Yükün etkime noktası kayma merkezi olması halinde ise, $L=6$ m ve $\beta=0,4$ olduğunda 18 terim sayısı ile 116 saniye ile kritik yük bulunabilirken, $L=10$ m ve $\beta=0,4$ olduğunda 20 terim sayısı ile 180 saniyede sonuca ulaşılabilir.

$\beta=0,2$ olması halinde ise çözüm süresi için gereken terim sayısı ve süre çok artmaktadır. Örneğin yükün alt flanştan etkidiği $L=8$ m için 14 terimde süre 265 saniye, değer 4,41 kN/m; 16 terimde süre 763 saniye, değer 4,95 kN/m; 18 terimde süre 1123 saniye, değer 5,87 kN/m; 22 terimde süre 2149 saniye, değer 6,66 kN/m; 24 terimde süre 2700 saniye, değer 7,39 kN/m olarak bulunmuştur. Burada kritik yükte tam anlamıyla bir sabitleme olmamıştır. Yükün aşırı saptığı 24 terimin altında bulunan 6,66 kN/m değeri kritik yük değeri olarak kullanılabilir. Hedef değerler olan referans çalışmadaki sonuçlar 6,63 kN/m ve 6,78 kN/m olup bu değerlerden sırasıyla binde dört ve yüzde 2 civarında farklıdır. Benzer durum Tablo 3.11'deki çalışmada da yaşanmıştır. $L=6$ m ve $\beta=0,2$ için 12 terimde süre 29 saniye, değer 9,58 kN; 15 terimde süre 68 saniye, değer 13,71 kN ve 18 terimde süre 102 saniye, değer 1,81 kN bulunmuştur. Burada kritik yükte tam anlamıyla bir sabitleme olmamıştır. Yükün aşırı saptığı 18 terimin altındaki terim değerinde bulunan 13,71 kN değeri kritik yük değeri olarak kullanılabilir. Hedef değerler olan referans çalışmadaki sonuç SY'de 14,47 kN olup bu değerden yüzde 5 civarında farklıdır. Ancak Tablo 3.12'de bazı durumlarda hiç sabitleme sağlanamamış ve sonuçlar için tabloda sonuç bulunamadığını göstermek için "--" ifadesi kullanılmıştır. Bu yüzden özellikle β oranları 0,4'ün altına düştüğünde analitik tahmin yöntemleri daha dikkatli kullanılmalıdır.

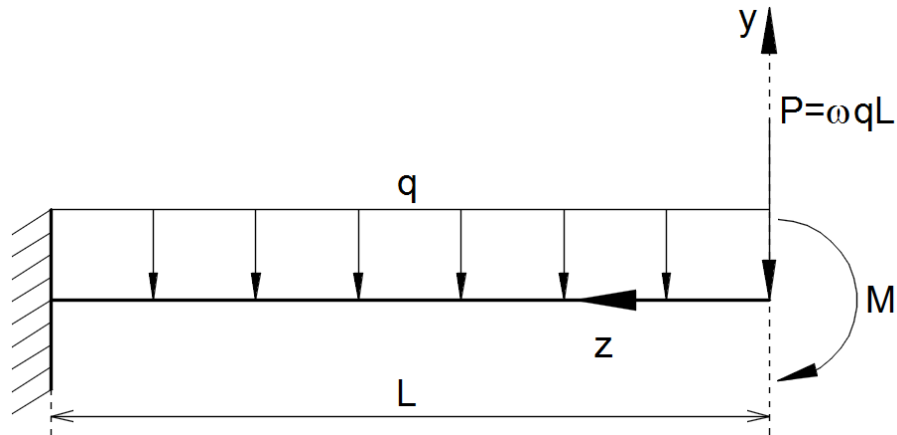
Bu çalışmadaki tüm durumlar için ADM ve HPM sonuçları hedef değerlerle örtüşmekte olup farklar, özellikle SY değerleri dikkate alındığında, çoğunlukla

ondalık bölümdedir. Bir terim sayısı için bulunan ve tablolara işlenen kritik değer bir üst terimde ya hiç değişmemiş, ya da örneğin, binde 4 gibi küçük bir farkla değişmiştir.

3.6. Çelik I Kesitli Konsol Kirişlerin Yanal Burulmalı Burkulmasının Analitik Tahmin Yöntemleriyle Analizi ve Sonuçların Yönetmelik Sonuçları ile Karşılaştırılması

3.6.1. Problem

Bu çalışmada daha önceden Başaran tarafından çalışılmış olan [159] sabit I kesitli farklı uzunluktaki konsol kirişlerin kayma merkezinden etkiyen uçta tekil yük, sabit moment, düzgün yayılı yük ve düzgün yayılı yük ile uçta tekil yükün bulunduğu farklı yüklemeler altında yanal burulmalı burkulma elastik kritik yüklerinin bulunması için olan bölümü dikkate alınmıştır.



Şekil 3.13. Konsol Kiriş ve Yüklemeler

Şekil 3.13'te bu durumun özeti gösterilmiş olup her bir yükleme durumunu ifade eden diferansiyel denklemler;

Sadece tekil yük olması durumu için;

$$\phi^{iv} - \frac{GJ}{EI_w} \phi'' - \frac{P^2 z^2}{EI_y EI_w} \phi = 0 \quad (3.74)$$

Sadece düzgün yayılı yük olması durumu için;

$$\phi^{iv} - \frac{GJ}{EI_w} \phi'' - \frac{q^2 z^4}{4EI_y EI_w} \phi = 0 \quad (3.75)$$

Serbest uçta tekil yük ve eleman boyunca düzgün yayılı yük olması durumu için;

$$\phi^{iv} - \frac{GJ}{EI_w} \phi'' - \frac{q^2 z^2 (2\omega L + z)^2}{4EI_y EI_w} \phi = 0 \quad (3.76)$$

ve sabit moment durumu için;

$$\phi^{iv} - \frac{GJ}{EI_w} \phi'' - \frac{M^2}{EI_y EI_w} \phi = 0 \quad (3.77)$$

Denklem (3.74), (3.75), (3.76) ve (3.77) ile ifade edilebilir [159]. Denklem (3.76)'daki ω , tekil yükün yayılı yükün toplamına oranını ifade etmektedir.

Özbaşaran çalışmasında [159], yanal burulmalı burkulmanın diferansiyel denkleminin Sonlu Farklar Yöntemi ile çözümü temel alınarak Enerji Yöntemi ile Sunulan Yöntem (SY) adı altında bir tasarım denklemini geliştirilmiştir. SY ile yapılan çözümler ABAQUS yazılım çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca Amerikan AISC360-10 yönetmeliğine göre hesaplanan elastik kritik yanal burulmalı burkulmaya ait momentler de çalışmada kıyaslanmıştır.

3.6.2. Analizlerde kullanılan analitik tahmin yöntemleri

ADM Madde 2.1.10'da ve VIM Madde 2.1.3'te anlatılmıştır.

3.6.3. Problem için ADM ve VIM vasıtasıyla çözüm prosedürü

Başlangıç fonksiyonu;

$$\phi_0(z) = Az^3 + Bz^2 + Cz + D \quad (3.78)$$

Denklem (3.78)'deki gibi seçilip serbest uç için $z=0$ 'da Denklem (3.73)'teki sınır şartları sağlatılırsa;

$$\phi_0(z) = Az^3 + \frac{EI_w}{GJ} 6Az + D \quad (3.79)$$

daha az bilinmeyen parametre içeren ve diğer ucun sınır koşullarına ihtiyaç duyuran Denklem (3.79)'daki başlangıç yaklaşımı elde edilir.

3.6.3.1. ADM formülasyonu

Metodun Denklem (3.74)-(3.77)'ye uygulanmasıyla;

Sadece tekil yük olması durumu için;

$$\Phi_{n+1}(z) = \int_0^z \int_0^v \int_0^s \int_0^t \frac{GJ}{EI_w} \Phi_n''(x) + \frac{\left(\frac{M}{L}\right)^2}{EI_y EI_w} x^2 \Phi_n(x) dx dt ds dv, \quad n \geq 0 \quad (3.80)$$

Sadece düzgün yayılı yük olması durumu için;

$$\Phi_{n+1}(z) = \int_0^z \int_0^v \int_0^s \int_0^t \frac{GJ}{EI_w} \Phi_n''(x) + \frac{\left(\frac{2M}{L^2}\right)^2}{4EI_y EI_w} x^4 \Phi_n(x) dx dt ds dv, \quad n \geq 0 \quad (3.81)$$

Serbest uçta tekil yük ve eleman boyunca düzgün yayılı yük olması durumu için;

$$\Phi_{n+1}(z) = \int_0^z \int_0^v \int_0^s \int_0^t \frac{GJ}{EI_w} \Phi_n''(x) + \frac{\left(\frac{M}{\left(\frac{L^2}{2} + L^2\right)}\right)^2}{4EI_y EI_w} x^2 (2\omega L + x)^2 \Phi_n(x) dx dt ds dv, \quad n \geq 0 \quad (3.82)$$

ve sabit moment durumu için;

$$\Phi_{n+1}(z) = \int_0^z \int_0^v \int_0^s \int_0^t \frac{GJ}{EI_w} \Phi_n''(x) + \frac{(-M)^2}{EI_y EI_w} \Phi_n(x) dx dt ds dv, \quad n \geq 0 \quad (3.83)$$

Denklem (3.80)-(3.83)'teki sistem elde edilir. $\Phi(z)$ 'in çözümü aşağıdaki Seri (3.84)

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) \quad (3.84)$$

açılımı ile ifade edilir.

3.6.3.2. VIM formülasyonu

Metodun Denklem (3.74)-(3.77)'ye uygulanmasıyla;

Sadece tekil yük olması durumu için;

$$\Phi_{n+1}(z) = \Phi_n(z) + \int_0^z \frac{(\xi-z)^3}{6} \left(\Phi_n^{iv}(\xi) - \frac{GJ}{EI_w} \Phi_n''(\xi) - \frac{\left(\frac{M}{L}\right)^2}{EI_y EI_w} \xi^2 \Phi_n(\xi) \right) d\xi, \quad n \geq 0 \quad (3.85)$$

Sadece düzgün yayılı yük olması durumu için;

$$\phi_{n+1}(z) = \phi_n(z) + \int_0^z \frac{(\xi-z)^3}{6} \left(\phi_n^{iv}(\xi) - \frac{GJ}{EI_w} \phi_n''(\xi) - \frac{\left(\frac{2M}{L^2}\right)^2}{4EI_y EI_w} \xi^4 \phi_n(\xi) \right) d\xi, \quad n \geq 0 \quad (3.86)$$

Serbest uçta tekil yük ve eleman boyunca düzgün yayılı yük olması durumu için;

$$\phi_{n+1}(z) = \phi_n(z) + \int_0^z \frac{(\xi-z)^3}{6} \left(\phi_n^{iv}(\xi) - \frac{GJ}{EI_w} \phi_n''(\xi) - \frac{\left(\frac{M}{\left(\frac{L^2}{2} + L^2\right)}\right)^2}{4EI_y EI_w} \xi^2 (2\omega L + \xi)^2 \phi_n(\xi) \right) d\xi, \quad n \geq 0 \quad (3.87)$$

ve sabit moment durumu için;

$$\phi_{n+1}(z) = \phi_n(z) + \int_0^z \frac{(\xi-z)^3}{6} \left(\phi_n^{iv}(\xi) - \frac{GJ}{EI_w} \phi_n''(\xi) - \frac{(-M)^2}{EI_y EI_w} \phi_n(\xi) \right) d\xi, \quad n \geq 0 \quad (3.88)$$

Denklem (3.85)-(3.88)'deki sistem elde edilir. Burada $\lambda(\xi) = (\xi-z)^3/6$ varyasyonsal formülasyona ait Lagrange çarpanıdır. $\phi(x)$ 'in çözümü,

$$\phi(z) = \phi_n(z) \quad (3.89)$$

seri açılımı ile ifade edilir. $\phi_n(z)$ n. iterasyon sonucu bulunan sonuçtur.

3.6.4. Çelik Yapılar Yönetmeliği (ÇYY), Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapımına Dair Esaslar'da yanal burulmalı burkulma momenti hesabı

Söz konusu ÇYY [1]'de karakteristik et kalınlığı 2,5 mm'den az olmayan boru ve kutu profiller ile elemanların karakteristik kalınlıkları en az 4 mm olan çelik yapı sistemlerini kapsamaktadır.

ÇYY Bölüm 9'da eğilme momenti etkisi altındaki elemanlar için çözüm esasları ortaya konulmuştur. Yönetmelik kapsamında basit eğilme etkisindeki elemanlarda yüklerin kayma merkezinden geçen asal eksene paralel olan düzlemlerden birinde etkimesi ve elemanın, yük etkime noktasında ve mesnetlerde burulmaya karşı desteklenmesi şartı koşulmuştur.

ÇYY’de çelik elemanlar, gövde ve başlıklarının kompakt ve kompakt olmayan/narin durumlarının değişik kombinasyonlarına göre sınıflandırılmışlardır. Yanal burulmalı burkulma momentinin bulunması aşağıdaki başlıklar altında incelenmiştir.

3.6.4.1. Kuvvetli eksenleri etrafında eğilme etkisindeki kompakt U enkesitli ve çift simetrlili kompakt veya kompakt gövdeli-kompakt olmayan/narin başlıklı I enkesitli elemanlar

Yanal burulmalı burkulma durumu için karakteristik eğilme momenti dayanımı;

$$L_p < L_b \leq L_r \text{ ise } M_n = C_b \left[M_p - (M_p - 0,7F_y W_{ex}) \left(\frac{L_b - L_p}{L_r - L_p} \right) \right] \leq M_p \quad (3.90)$$

$$L_b > L_r \text{ ise } M_n = F_{cr} W_{ex} \leq M_p \quad (3.91)$$

şeklinde Denklem (3.90) veya (3.91) ile hesaplanır.

$$C_b = \frac{12,5M_{maks}}{2,5M_{maks} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} \quad (3.92)$$

Denklem (3.92) ile hesaplanan moment düzeltme katsayısı C_b , çift simetri eksenine sahip tüm elemanlar ve tek simetri eksenine sahip tek eğrilikli eğilme etkisinde olan elemanlar için kullanılabilir. Mesnet enkesitinde çarpılmanın önlenildiği ve serbest ucunun yanal olarak desteklenmediği konsol kirişlerde $C_b=1$ alınabilir. Diğer terimler,

$$L_p = 1,76i_y \sqrt{\frac{E}{F_y}} \quad (3.93)$$

$$L_r = 1,95i_{ts} \frac{E}{0,7F_y} \sqrt{\frac{J_c}{W_{ex}h_0} + \sqrt{\left(\frac{J_c}{W_{ex}h_0}\right)^2 + 6,76 \left(\frac{0,7F_y}{E}\right)^2}} \quad (3.94)$$

$$M_p = F_y W_{px} \quad (3.95)$$

$$F_{cr} = \frac{C_b \pi^2 E}{\left(\frac{L_b}{i_{ts}}\right)^2} \sqrt{1 + 0,078 \frac{J_c}{W_{ex}h_0} \left(\frac{L_b}{i_{ts}}\right)^2} \quad (3.96)$$

c katsayısı;

çift simetri eksenli I enkesitlerde,

$$c=1 \quad (3.97)$$

U enkesitlerde,

$$c = \frac{h_0}{2} \sqrt{\frac{I_y}{C_w}} \quad (3.98)$$

etkin atalet yarıçapı,

$$i_{ts}^2 = \frac{\sqrt{I_y C_w}}{W_{ex}} \quad (3.99)$$

Denklem (3.93)-(3.99) ile hesaplanır. Denklemlerde geçen notasyonlar;

M_n : Karakteristik eğilme momenti dayanımı.

M_p : Plastik eğilme momenti.

F_y : Yapısal çelik karakteristik akma gerilmesi.

x : Kesite ait kuvveli eksen.

W_{px} : x eksenine etrafında plastik mukavemet momenti.

W_{ex} : x eksenine etrafındaki elastik mukavemet momenti.

E : Yapısal çelik elastisite modülü.

F_{cr} : Kritik gerilme.

I_y : y eksenine etrafında atalet momenti.

C_b : Moment düzeltme katsayısı.

M_{maks} : Yanal stabilite bağlantısı ile desteklenen noktalar arasındaki kiriş uzunluğu boyunca en büyük eğilme momentinin mutlak değeri.

M_A : Yanal stabilite bağlantısı ile desteklenen noktalar arasındaki kiriş uzunluğunun 1/4 noktasındaki eğilme momentinin mutlak değeri.

M_B : Yanal stabilite bağlantısı ile desteklenen noktalar arasındaki kiriş uzunluğunun 1/2 noktasındaki eğilme momentinin mutlak değeri.

M_C : Yanal stabilite bağlantısı ile desteklenen noktalar arasındaki kiriş uzunluğunun 3/4 noktasındaki eğilme momentinin mutlak değeri.

L_b : Basınç başlığında yanal yer değiştirmenin ve enkesit burulmasının önlendiği noktalar arasındaki eleman uzunluğu (stabilite bağlantısı ile desteklenmeyen eleman uzunluğu).

L_p : Akma sınır durumu için yanal olarak desteklenmeyen sınır uzunluk.

L_r : Elastik olmayan yanal burulmalı burkulmada sınır uzunluk.

i_y : y eksenine göre atalet yarıçapı.

i_{ts} : Etkin atalet yarıçapı.

h_0 : Enkesit başlıklarının ağırlık merkezleri arasındaki uzaklık.

C_w : Çarpılma sabiti.

J : Burulma sabiti.

3.6.4.2. Kuvvetli eksenleri etrafında eğilme etkisindeki kompakt veya kompakt olmayan gövdeli diğer I enkesitli elemanlar

Yanal burulmalı burkulma durumu için karakteristik eğilme momenti dayanımı,

$$L_p < L_b \leq L_r \text{ ise } M_n = C_b \left[R_{pc} M_{yc} - (R_{pc} M_{yc} - F_L W_{exc}) \left(\frac{L_b - L_p}{L_r - L_p} \right) \right] \leq R_{pc} M_{yc} \quad (3.100)$$

Denklem (3.100) ile belirlenecektir. Elastik olmayan burkulma sınır durumunda Denklem (3.100) ve (3.110)'de kullanılacak azaltılmış akma gerilmesi F_L ,

$$\frac{W_{ext}}{W_{exc}} \geq 0,7 \text{ için } F_L = 0,7 F_y \quad (3.101)$$

$$\frac{W_{ext}}{W_{exc}} < 0,7 \text{ için } F_L = F_y \frac{W_{ext}}{W_{exc}} \geq 0,5 F_y \quad (3.102)$$

Denklem (3.101) veya Denklem (3.102) ile hesaplanacaktır. Benzer şekilde,

$$L_b > L_r \text{ ise } M_n = F_{cr} W_{exc} \leq R_{pc} M_{yc} \quad (3.103)$$

karakteristik eğilme momenti dayanımı Denklem (3.103) vasıtası ile belirlenecektir.

Burada F_{cr} ,

$$F_{cr} = \frac{C_b \pi^2 E}{\left(\frac{L_b}{i_t} \right)^2} \sqrt{1 + 0,078 \frac{J}{W_{exc} h_0} \left(\frac{L_b}{i_t} \right)^2} \quad (3.104)$$

ile determine edilebilir. $\frac{I_{yc}}{I_y} \leq 0,23$ olması durumunda $J=0$ alınır. Basınç başlığının dış

lifinde akma gerilmesine ulaşıldığı akma momenti M_{yc} ,

$$M_{yc} = F_y W_{exc} \quad (3.105)$$

Denklem (3.105) ile, gövde plastikleşme katsayısı R_{pc} , gövde narinliğine bağlı olarak,

$\frac{I_{yc}}{I_y} > 0,23$ olması halinde;

$$\lambda = \frac{h_c}{t_w} \leq \lambda_{pw} \text{ için } R_{pc} = \frac{M_p}{M_{yc}} \quad (3.106)$$

$$\lambda = \frac{h_c}{t_w} > \lambda_{pw} \text{ için } R_{pc} = \left[\frac{M_p}{M_{yc}} - \left(\frac{M_p}{M_{yc}} - 1 \right) \left(\frac{\lambda_w - \lambda_{pw}}{\lambda_{rw} - \lambda_{pw}} \right) \right] \leq \frac{M_p}{M_{yc}} \quad (3.107)$$

Denklem (3.106) ve Denklem (3.107) ile verilmektedir. Her iki denklemde kullanılan plastik eğilme momenti M_p ,

$$M_p = F_y W_{px} \leq 1,6 F_y W_{exc} \quad (3.108)$$

İfade (3.108) ile verilen değeri aşmamalıdır.

$\frac{I_{yc}}{I_y} \leq 0,23$ olması halinde ise $R_{pc} = 1$ alınacaktır.

L_p ve L_r sınır uzunlukları ise,

$$L_p = 1,1 i_t \sqrt{\frac{E}{F_y}} \quad (3.109)$$

$$L_r = 1,95 i_t \frac{E}{F_L} \sqrt{\frac{J}{W_{exc} h_0} + \sqrt{\left(\frac{J}{W_{exc} h_0} \right)^2 + 6,76 \left(\frac{F_L}{E} \right)^2}} \quad (3.110)$$

Denklem (3.109) ve (3.110) ile belirlenir. Yanal burulmalı burkulma sınır durumu için, basınç başlığı dikdörtgen olan I enkesitlerde, basınç başlığının etkin atalet yarıçapı i_t ,

$$i_t = \frac{b_{fc}}{\sqrt{12 \left(1 + \frac{1 h_c t_w}{6 b_{fc} t_{fc}} \right)}} \quad (3.111)$$

Eşitlik (3.111) ile tespit edilir. Yukarıdaki ifadelerde geçen notasyonlar aşağıda verilmektedir:

M_{yc} : Dış basınç lifinde akma gerilmesine ulaşıldığı akma momenti.

M_{yt} : Dış çekme lifinde akma gerilmesine ulaşıldığı akma momenti.

R_{pc} : Gövde plastikleşme katsayısı.

F_L : Eğilme etkisinde basınç başlığında azaltılmış akma gerilmesi.

W_{ext} : Çekme bölgesi için x ekseninde elastik mukavemet momenti.

W_{exc} : Basınç bölgesi için x ekseninde elastik mukavemet momenti.

λ : Narinlik.

λ_w : Enkesitin gövde parçası narinliği.

λ_{pw} : Kompakt gövde parçası için narinlik sınır değeri.

λ_{rw} : Kompakt olmayan gövde elemanı için narinlik sınır değeri.

h_c : Ağırlık merkezi ile basınç başlığı tarafının gövde parçası üzerindeki eğrilik bitim noktası arasındaki uzaklığın iki katı.

h_0 : Enkesit başlıklarının ağırlık merkezleri arasındaki uzaklık.

b_{fc} : Basınç başlığı genişliği.

t_{fc} : Basınç başlığı kalınlığı.

3.6.4.3. Kuvvetli eksenleri etrafında eğilme etkisindeki çift ve tek simetri eksenli narin gövdeli I enkesitli elemanlar

Yanal burulmalı burkulma durumu için karakteristik eğilme momenti dayanımı,

$$M_n = R_{pg} F_{cr} W_{exc} \quad (3.112)$$

Denklem (3.112) ile belirlenir. Burada F_{cr} ,

$$L_p < L_b \leq L_r \text{ için } F_{cr} = C_b \left[F_y - (0,3F_y) \left(\frac{L_b - L_p}{L_r - L_p} \right) \right] \leq F_y \quad (3.113)$$

$$L_b > L_r \text{ için ise } F_{cr} = \frac{C_b \pi^2 E}{\left(\frac{L_b}{i} \right)^2} \leq F_y \quad (3.114)$$

İfade (3.113) ve (3.114) ile; L_p ve L_r ise,

$$L_p = 1,1 i_t \sqrt{\frac{E}{F_y}} \quad (3.115)$$

$$L_r = \pi i_t \sqrt{\frac{E}{0,7F_y}} \quad (3.116)$$

İfade (3.115) ve (3.116) ile bulunur. Eğilme dayanımı azaltma katsayısı R_{pg} ,

$$R_{pg} = 1 - \frac{a_w}{1200 + 300a_w} \left(\frac{h_c}{t_w} - 5,7 \sqrt{\frac{E}{F_y}} \right) \leq 1,0 \quad (3.117)$$

Denklem (3.117) ile, burada verilen a_w değeri ise,

$$a_w = \frac{h_c t_w}{b_{fc} t_{fc}} \leq 10 \quad (3.118)$$

Denklem (3.118)'de verilen sınır değeri aşamaz.

Yukarıdaki bölümlerin hepsinde $L_b \leq L_p$ olması durumunda yanıl burulmalı burkulma sınır durumunun göz önüne alınmasına gerek yoktur. Yönetmeliğe göre; $L_b \leq L_p$ ise akma sınır durumu, diğer şartlarda yanıl burulmalı burkulma sınır durumu geçerlidir. $L_p < L_b \leq L_r$ ise inelastik moment ve $L_b > L_r$ durumunda ise çelik akmadan önce burkulma olacağından elastik moment değeri etkili olacaktır.

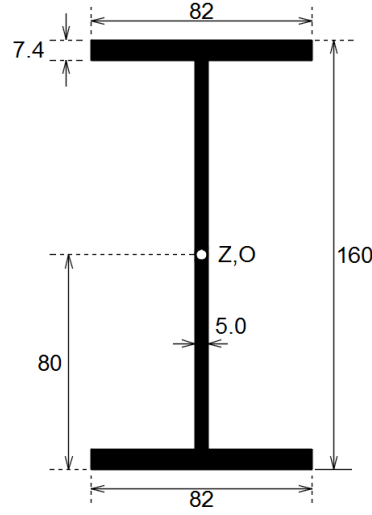
ÇYY'nin sonraki bölümlerinde, yanıl burulmalı burkulma konusu ile alakalı olarak korniyerler, T enkesitli elemanlar, dolu enkesitli elemanlar ve simetri eksenli olmayan enkesite sahip elemanlar işlenmiştir.

3.6.5. Durum çalışmaları

Şekil 3.13'te verilen ve ADM ve VIM analitik tahmin yöntemleri ile çözümü yapılan elemana ait enkesit Şekil 3.14'te verilmiştir. Söz konusu kesite ait özellikler;

Elastisite modülü $E=200000$ MPa, kayma modülü $G=76923$ MPa, kesitin zayıf eksenine göre atalet momenti $I_y=68,16 \times 10^4$ mm⁴, burulma sabiti $I_t=28,20 \times 10^3$ mm⁴, çarpılma sabiti $C_w=395,89 \times 10^7$, yapısal çelik karakteristik akma gerilmesi $F_y=235$ MPa, x eksenli etrafındaki elastik mukavemet momenti $W_{ex}=10,43 \times 10^4$ mm³ ve x eksenli etrafındaki plastik mukavemet momenti $W_{px}=11,90 \times 10^4$ mm³ olarak [159]'da verilmiştir. Eleman boyu L için 1,5 m, 2,0 m, 3,0 m ve 4,0 m olmak üzere 4 farklı seçenek çalışılmıştır.

ADM ve VIM ile bulunan $\emptyset(z)$ ifadelerinde $z=L$ için ankastre mesnede ait $\emptyset(L) = 0$ ve $\emptyset'(L)=0$ mesnet şartları uygulanıp katsayılar matrisinin determinantının sıfıra



Şekil 3.14. Çözümde Kullanılan I Enkesit [159]

eşitlenmesi ile her yükleme durumu için yanal burulmalı burkulmaya sebep olan elastik kritik moment değerlerine ulaşılır.

3.6.6. Nümerik sonuçlar

ADM ve VIM'in uygulanması ile elastik yanal burulmalı burkulmaya sebep olan kritik momentler için, farklı yüklemelerle aşağıdaki Tablo 3.13'te verilen sonuçlar bulunur. Ayrıca ÇYY ile elastik kritik yanal burulmalı burkulma momenti aşağıdaki gibi hesaplanarak aynı tabloda kıyas için verilmiştir.

ÇYY'ye göre yapma I enkesitli elemana ait kritik yükün bulunabilmesi için öncelikle kesitin başlığının ve gövdesinin sınıflandırılması gerekir.

Basınç başlığının genişlik/kalınlık oranı,

$$\lambda = \frac{b_{fc}/2}{t_{fc}} = \frac{82/2}{7,4} = 5,54 \leq 0,38 \sqrt{\frac{E}{F_y}} = 0,38 \sqrt{\frac{200000}{235}} = 11,09 \text{ olduğundan basınç başlığı kompakt}$$

ve gövde genişlik kalınlık oranı,

$$\lambda = \frac{h}{t_w} = \frac{160-2*7,4}{5} = 29,04 \leq 3,76 \sqrt{\frac{E}{F_y}} = 3,76 \sqrt{\frac{200000}{235}} = 109,69 \text{ olduğundan gövde de kompakt}$$

sınıfına ait olmaktadır. Bu durumda kesit kompakt kategorisinde olup elastik kritik moment, bu değeri veren Denklem (3.91) ile hesaplanacaktır.

Bu durumda L=1,5 m için kritik yanal burulmalı burkulma momenti hesabı aşağıda yapılmıştır.

L=1,5 m uzunluğundaki kiriş için kritik M_{cr} hesabı:

$$i_{ts}^2 = \frac{\sqrt{I_y C_w}}{W_{ex}} = \frac{\sqrt{68,16 \cdot 10^4 \cdot 395,89 \cdot 10^7}}{10,43 \cdot 10^4} = 498,04; i_{ts} = 22,31 \text{ mm},$$

Yönetmelik gereği konsol kirişlerde $C_b=1$ ve çift simetri eksenli I enkesit için $c=1$ alındığında,

$$M_{cr} = W_{ex} \frac{C_b \pi^2 E}{\left(\frac{L_b}{i_{ts}}\right)^2} \sqrt{1 + 0,078 \frac{J_c}{W_{ex} h_0} \left(\frac{L_b}{i_{ts}}\right)^2}$$

$$M_{cr} = 10,43 \cdot 10^4 \frac{1,0 \cdot \pi^2 \cdot 200000}{\left(\frac{1500}{22,31}\right)^2} \sqrt{1 + 0,078 \frac{28,20 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{10,43 \cdot 10^4 \cdot (160 - 7,4)} \left(\frac{1500}{22,31}\right)^2}$$

$M_{cr} = 58,08 \text{ kNm}$ bulunur. Benzer şekilde diğer kiriş boyları için bulunan M_{cr} değerleri Tablo 3.13'e işlenmiştir.

Tablo incelendiğinde konsol kirişlerde farklı yükleme tipleri için ADM ve VIM analitik tahmin yöntemleri ile bulunan yanal burulmalı burkulmaya sebep olan elastik kritik moment değerlerinin çözümü bilinen çalışmada Sunulan Yöntem ve ABAQUS yazılımı ile bulunan değerlerle büyük tutarlılıkla örtüştüğü görülür. Bu durum ADM ve VIM analitik tahmin yöntemlerinin bu tarz problemlerin kritik yüklerinin bulunmasında son derece etkili olduğunu gösterir.

Örnek olarak sabit moment durumu için L=1,5 m boyundaki konsol kirişte, 4 terimli polinom ile sonuç ADM ve VIM ile 2 saniyenin altındaki bir süre ile alınmaktadır. Hem yayılı hem tekil yük etkisi altında bulunan L=4 m olan konsol kirişte ise sonuç ADM için 8 terim sayısı ile 2 saniyenin altında alınırken aynı sonuç VIM ile 8 terimle 8 saniyede alınmaktadır.

Çalışmada ADM ve VIM için 4 terim sayısı ile başlanıp, 2 artımlı terim sayıları ile aranan kritik yükün, artık, sabitlendiği yere kadar devam edilmiştir.

Tablo 3.13. Şekil 3.14'teki Enkesit İçin Kritik Yanal Burulmalı Burkulma Momentleri (kNm)

L (m)	Yöntem		Yükleme Tipi			
			M	P	q+P ($\omega=1$)	q
1,5	[159]	SY	28,34	98,93	120,18	198,19
		ABQ	28,03	98,06	118,50	192,79
		AISC	58,08			
	Bu Çalışma	ADM	28,34	98,92	120,25	198,20
		VIM	28,34	98,92	120,25	198,20
		ÇYY	58,08			
2,0	[159]	SY	19,25	63,96	77,28	124,72
		ABQ	18,93	65,28	77,88	122,10
		AISC	37,24			
	Bu Çalışma	ADM	19,20	63,96	77,31	124,73
		VIM	19,20	63,96	77,31	124,73
		ÇYY	37,24			
3,0	[159]	SY	11,47	35,61	42,66	66,83
		ABQ	11,19	36,06	42,12	65,70
		AISC	21,31			
	Bu Çalışma	ADM	11,44	35,62	42,70	66,83
		VIM	11,44	35,62	42,70	66,83
		ÇYY	21,31			
4	[159]	SY	8,08	24,08	28,80	44,00
		ABQ	7,89	24,32	28,56	44,00
		AISC	14,95			
	Bu Çalışma	ADM	8,07	24,08	28,70	44,02
		VIM	8,07	24,08	28,70	44,02
		ÇYY	14,95			

Referans alınan çalışmada [159] çelik yapılarla ilgili Amerikan yönetmeliği AISC de incelenmiş ve elastik kritik yanal burulmalı burkulma momentleri her kiriş elemanı için hesaplanmış olup bu değerlere Tablo 3.13'te yer verilmiştir. Bu çalışmada, karşılaştırma yapmak maksadı ile ÇYY, Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapımına Dair Esaslar [1] ile her bir kiriş için elastik kritik yanal burulmalı burkulma moment değerleri hesaplanarak aynı tabloya işlenmiştir.

ÇYY sonuçlarının AISC sonuçları ile örtüşmesi; ÇYY'nin hazırlanmasında kullanıcıların Amerikan yönetmeliklerine aşinalığı ve Avrupa yönetmeliği olan Eurocod 3'e göre daha anlaşılır olması sebebiyle AISC yönetmeliğinin referans alınması sebebiyle, sürpriz değildir. Sabit Moment yükleme hali hariç yönetmelik değerlerinin oldukça güvenli tarafta kaldığı tablodan açıkça görülebilir. Yönetmelikler ile bulunan elastik kritik yük, konsol kirişlerde $C_b=1$ alındığından yükleme çeşidinden ve konumundan etkilenmemektedir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada enkesiti üniform olmayan yapı elemanlarının eğilmeli burulmalı burkulma ve yanal burulmalı burkulma problemleri yarı analitik veya literatürde bilinen diğer adıyla analitik tahmin yöntemleri ile ele alınmıştır. Analitik tahmin yöntemleri uygulamalı matematik alanında doğrusal/doğrusal olmayan adi/kısmi deterministik/stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlerinde başarılı sonuçlar elde edilmesini sağlamış, literatürde çeşitli yöntemlerle çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bununa birlikte uygulamalı matematik alanındaki bu gelişmelerin katı cisimler mekaniğine yansımaları halen istenen düzeyde değildir. Oysa başarılı performanslar sergileyen bu yöntemler ile mühendislik alanında da önemli çalışmalar yapabileme imkanı bulunmaktadır.

Bu tezde ele alınan problemler, analitik çözümler elde etmenin çok zor veya imkansız olduğu, değişken katsayılı üç girişimli diferansiyel denklemden oluşan bir denklem sistemi ile ifade edilmektedir. Problemin kendine has bazı durumlarda bu denklemlerin sayısı indirgenebilmekle birlikte, katsayıların değişken olduğu durumlar çözüm elde edebilmek sanıldığı kadar kolay değildir. Bütün bu koşullar dikkate alındığında analitik tahmin yöntemlerinin ele alınan problemler için yarı analitik çözümler elde edebilmek adına önemli katkılar sağlayabileceği değerlendirilebilir. Literatürde analitik tahmin çözümü yapabilmek için pek çok yöntem mevcut olmakla birlikte yaygın kullanılan ve kolay formüle edilen üç yöntem olan varyasyonel iterasyon, homotopi pertürbasyon ve Adomian ayrıştırma yöntemleri tercih edilmiştir.

Çalışmada izlenen yöntem, problemin yönetici denkleminin türetilmesi, analitik tahmin çözüm algoritmasının elde edilmesi, sayısal sonuçların hesaplanması şeklindedir. Yöntemler uygulandıkça, en basit problem olan, serbest uçta tekil yüklü dikdörtgen kesitli kiriş için söz konusu olan sabit katsayılı diferansiyel denkleminin Bessel fonksiyonlarından oluşan çözümünden bile karakteristik kritik burkulma yükü değerlerinin elde edilmesinin aslında sanıldığı kadar kolay olmadığı görülmüştür.

Basit gibi görünen bu problemin çözüm ifadesinden kritik burkulma yüklerini, mod sırasına uygun olarak türetmek hiç kolay bir süreç değildir. Sayısal yöntemlerle elde edilecek bir çözüm için bile başlangıç değerini problemi çözenin vermesi gerekecek, çözümün ise hangi moda yakınsayacağı tam bir bilinmez olacaktır. Oysa analitik tahmin çözümleri uygulandığında, çok basit bir algoritma ve birkaç satırlık bir kod ile kritik burkulma yüklerini, mod sırasına uygun şekilde sıralı ve analitik olarak elde etmek mümkündür. Serbest uçta tekil yüklü dikdörtgen kesitli kiriş probleminin kazandırdığı bu deneyim ile çözüm elde etmenin çok daha güç, analitik çözümün ise neredeyse imkansız olduğu üniform olmayan kesitli yapı elemanlarının eğilmeli burulmalı burkulma ve yanal burulmalı burkulma problemlerinin çözümü için bir ön fikir sahibi olunabilmiştir.

Takip eden süreçte önerilen çözüm yöntemleri önce üniform olmayan yüke maruz kalan kirişlerde yanal burulmalı burkulma, sonrasında üniform ve üniform olmayan açık kesitli ince duvarlı yapı elemanlarında eğilmeli burulmalı burkulma ve son olarak üniform olmayan kesitli I-kirişlerde yanal burulmalı burkulma problemlerine uygulanmıştır. Detayları tezin içerisinde verilen araştırma sonuçlarından uygulanan yöntemlerin formülasyonu kolay, etkin algoritmalar türeten ve başarılı sonuçlar elde edilmesini sağlayan teknikler oldukları literatürde var olan yukarıda tanımlanan problemlerin sonuçları ile yapılan kıyaslamalarla gösterilmiştir. Çözümler sadece sayısal sonuçlar olarak verilmekle kalmamış, aynı zamanda farklı terim sayıları ve çözüm için harcanan süre ile etkinlikleri de birbirleri ile kıyaslanmıştır. Bu çalışma kapsamında önerilen çözüm yöntemlerinin uygulanan her durumda başarılı olduğu rahatlıkla söylenebilir. İlgi çekici bir bulgu da uygulanan yöntemlerin aynı adımlarda aynı noktaya yakınsamalarıdır.

Yapı elemanlarının eğilmeli burulmalı burkulma ve yanal burulmalı burkulma problemlerinin çözümleri için bu çalışmada gelinen noktayı bundan daha ileriye taşıyacak ek çalışmalar da yapmak mümkündür.

Yarı analitik çözüm elde etmeyi sağlayacak bazı öneriler şu şekilde sıralanabilir; farklı analitik tahmin yöntemlerinin uygulanması, yer değiştirmelerin kuvvet serileri ile tanımlanması yoluyla çözüm aranması, yakınsama hızını etkileyecek ek parametre içeren homotopi analiz yöntemi ile en çabuk yakınsamayı sağlayacak durumların

incelenmesi, optimal analitik tahmin yöntemleri ile çözümde iyileşme sağlanıp sağlanmayacağını değerlendirilmesi.

Fonksiyonel derecelendirilmiş elemanların veya yerel olmayan elastisite teorisi ile yönetici denklemleri türetilmiş nano-elemanların benzer stabilite problemlerinin ele alınması da gelecekte yapılabilecek ve bu çalışma ile gelinen noktayı daha ileri taşıyabilecek öneriler olarak sıralanabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapımına Dair Esaslar, Çevre ve Şehircilik Bakanlığı, Ankara, 2018.
- [2] Vlasov V., “*Thin-walled elastic beams,*” Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Israel, 1961.
- [3] Timoshenko S., Gere J., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [4] Chen W.-F., Atsuta T., *Theory of Beam-Columns: Vol.2: Space Behavior and Design*, McGraw Hill, 1977.
- [5] Yu, W.-W., *Cold-formed Steel Structures*, McGraw Hill, 1973.
- [6] Chajes A., Winter G., Torsional-Flexural Buckling of Thin-Walled Members, *J. Struct. Engng, ASCE*, 1965, **91**(4), 103-124.
- [7] Hone C., Torsional-Flexural Buckling of Axially-Loaded Thin-Walled Elastic Struts of Open Cross-Section, *Thin-Walled Structures*, 1967, Chatto and Windus, London, 103-135.
- [8] Barsoum R., Gallagher, R., Finite Element Analysis of Torsional and Torsional- Flexural Stability Problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1970, **2**(2), 335-352.
- [9] Eisenberger M., Cohen R., Flexural-Torsional Buckling of Variable and Open Cross-Section Members, *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, **121**(2), 244-254.
- [10] Prandtl L., *Kipperscheinungen*, Dissertation, Munich Polytechnical Institute, 1899.
- [11] Michell A. G. M., Elastic Stability of Long Beams Under Transverse Forces, *Philosophic Magazine*, 1899, **48**(292), 298-309.
- [12] Timoshenko, S. P., Einige Stabilitats-Probleme der Elasticitats-Theorie, *Zeitschrift für Mathematik und phisik*, 1910, **58**,337-385.
- [13] Winter, G., Lateral Stability of Unsymmetrical I-Beams and Trusses in Bending, *Proceedings, ASCE*,**67**,1851-1864, also a transaction paper No.2178 with the same title, *Transactions, ASCE*,1941,**108**, 247-268.
- [14] Hill, H. N., Lateral Buckling of Channels and Z-Beams, *Transactions, ASCE*, 1954 .**119**, 829-841.

- [15] Galambos, T. V., Inelastic Lateral Buckling of Beams, *Journal of the Structural Div., ASCE*, 1963, **89**, 217-244,
- [16] Duer, D., Lateral-Torsional Buckling of Suspended I-Shape Lifting Beams, *Pract. Periodical on Struct. Des. Constr, ASCE*, 2016, **21**(1), 06015001, 1-4
- [17] Piotrowski R., Szychowski A., Lateral-Torsional Buckling of Beams Elastically Restrained Against Warping at Supports, *Archives of Civil Engineering*, 2015, **61**(4), 155–174.
- [18] Mascolo I., Pasquino M., Lateral-Torsional Buckling of Compressed and Highly Variable Cross Section Beams, *Curved and Layered Structures*, 2016, **3**(1), 146-153.
- [19] Kovac M., Elastic Critical Axial Force for The Torsional-Flexural Buckling of Thin Walled Metal Members: An Approximate Method, *Slovak Journal of Civil Engineering*, 2015, **23**(1), 23-32.
- [20] Aydın R., Dogan M., 2007, Elastic, Full Plastic and Lateral Torsional Buckling Analysis of Steel Single-Angle Section Beams Subjected to Biaxial Bending, *Journal of Constructional Steel Research*, 2007, **63**(1), 13-23.
- [21] Park J. S., Stallings J. M., Kang Y. J., Lateral-Torsional Buckling of Prismatic Beams With Continuous Top-Flange Bracing, *Journal of Constructional Steel Research*, 2004, **60**(2), 147-160.
- [22] Serna M. A., Aitziber L., Inigo P., Danny J. Y., Equivalent Uniform Moment Factors for Lateral-Torsional Buckling of Steel Members, *Journal of Constructional Steel Research*, 2006, **62**(6), 566-580.
- [23] Larue B., Khelil A., Gueury M., Elastic Flexural-Torsional Buckling of Steel Beams with Rigid and Continuous Lateral Restraints, *Journal of Constructional Steel Research*, 2007, **63**, 692-708.
- [24] Zhang L., Tong G. S., Lateral Buckling of Web-Tapered I-Beams: A new Theory, *Journal of Constructional Steel Research*, 2008, **64**(12), 1379-1393.
- [25] Taras A., Greiner R., Torsional and Flexural Torsional Buckling—A Study On Laterally Restrained I-Sections, *Journal of Constructional Steel Research*, 2008, **64**(7-8), 725-731.
- [26] Cheng S., Kim B., Li L., Lateral Torsional Buckling of Cold-Formed Channel Sections Subject to Combined Compression and Bending, *Journal of Constructional Steel Research*, 2013, **80**, 174-180.
- [27] Yuan W., Kim B., Chen C., Lateral-Torsional Buckling of Steel Web Tapered Tee-Section Cantilevers, *Journal of Constructional Steel Research*, 2013, **87**, 31-37.

- [28] Amit J., Durgesh C. R., Lateral-Torsional Buckling of Laterally Unsupported Single Angel Sections Loaded Along Geometric Axis, *Journal of Constructional Steel Research*, 2014, **102**, 178-189.
- [29] Kucukler M., Gardner L., Macorini L., Lateral Torsional Buckling Assessment of Steel Beams Through a Stiffness Reduction Method, *Journal of Constructional Steel Research*, 2015, **109**, 87-100.
- [30] Mohri F., Damil N., Potier-Ferry M., Buckling and Lateral Buckling Interaction In Thin Walled Beam-Column Elements with Mono-Symmetric Cross Sections, *Applied Mathematical Modelling*, 2013, **37**(5), 3526-3540.
- [31] Orloske K., Leamy M. J., Parker R. G., Flexural-Torsional Buckling of Misaligned Axially Moving Beams. I. Three-dimensional Modeling, Equilibra, and Bifurcations, *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(14-15), 4297-4322.
- [32] Khelil A., Larue B., Simple Solutions for The Flexural-Torsional Buckling Of Laterally Restrained I-Beams, *Engineering Structures*, 2008, **30**(10), 2923-2934.
- [33] Pi, Y. L., Bradford M. A., Thermoelastic Lateral-Torsional Buckling of Fixed Slender Beams Under Linear Temperature Gradient, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2008, **50**(7), 1183-1193.
- [34] Vo T. P., Lee J., Flexural-Torsional Coupled Vibration and Buckling of Thin-Walled Open Section Composite Beams Using Shear-Deformable Beam Theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2009, **51**(9-10), 631-641.
- [35] Erkmen, R. E., Attard M. M., Lateral-Torsional Buckling Analysis of Thin-Walled Beams Including Shear and Pre-Buckling Deformation Effects, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, **53**(10), 918-925.
- [36] Lei J.-S., Li L.-Y., Combined Web Distortional and Lateral-Torsional Buckling of Partially Restrained I-Section Beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, **131-132**, 107-112.
- [37] Stump D. M., Champneys A.R., van der Heijden G. H. M., The Torsional Buckling and Writhing of Simply Supported Rod Hanging Under Gravity, *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(5), 795-813.
- [38] Orloske K., Parker R. G., Flexural-Torsional Buckling of Misaligned Axially Moving Beams II. Vibration and Stability Analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(14-15), 4323-4341.
- [39] Garcia J. R., Sanyal A., Fatemifar F., Mottahedi M., Han H.-C., Twist Buckling of Veins Under Torsional Loading, *Journal of Biomechanics*, 2017, **58**, 123-130.

- [40] Chroscielowski J., Lubowiecka I., Szymczak C., Witkowski W., On Some Aspects of Torsional Buckling of Thin-Walled I-beam Columns, *Computers and Structures*, 2006, **84**(29-30), 1946-1957.
- [41] Lee J., Kim S.-E., Flexural-Torsional Buckling of Thin-Walled I-Section Composites, *Computers and Structures*, 2001, **79**(10), 987-995.
- [42] Andrade A., Camotim D., Dinis P. B., Lateral-Torsional Buckling of Singly Symmetric Web-Tapered Thin-Walled I-Beams: 1D Model vs. Shell FEA, *Computers and Structures*, 2007, **85**(17-18), 1343-1359.
- [43] Andrade A., Providencia P., Camotim D., Elastic Lateral-Torsional Buckling of Restrained Web-Tapered I-Beams, *Computers and Structures*, 2010, **88**(21-22), 1179-1196.
- [44] Papangelis J. P., Trahair N. S., Hancock G. J., Elastic Flexural-Torsional Buckling of Structures by Computer, *Computers and Structures*, 1998, **68**(1-3), 125-137.
- [45] Gu J.-X., Chan S.-L., A Refined Finite Element Formulation for Flexural and Torsional Buckling of Beam-Columns with Finite Rotations, *Engineering Structures*, 2005, **27**(5), 749-759.
- [46] Benyamina A. B., Meftah S. A., Mohri F., Daya E. M., Analytical Solutions Attempt for Lateral Torsional Buckling of Doubly Symmetric Web-Tapered I-Beams, *Engineering Structures*, 2013, **56**, 1207-1219.
- [47] Gunalan S., Heva Y. B., Mahendran M., Flexural-Torsional Buckling Behaviour and Design of Cold-Formed Steel Compression Members at Elevated Temperatures, *Engineering Structures*, 2014, **79**, 149-168.
- [48] Kucukler M., Gardner L., Macorini L., Flexural-Torsional Buckling Assessment of Steel Beam-Columns Through a Stiffness Reduction Method, *Engineering Structures*, 2015, **101**, 662-676.
- [49] Plaut R. H., Eatherton M. R., Lateral-Torsional Buckling of Butterfly-Shaped Beams with Rectangular Cross Section, *Engineering Structures*, 2017, **136**, 210-218.
- [50] Xiao Q., Doudak G., Mohareb M., Numerical and Experimental Investigation of Lateral Torsional Buckling of Wood Beams, *Engineering Structures*, 2017, **151**, 85-92.
- [51] Rasheed H A., Ahmadi H., Abouelleil A., Lateral-Torsional Buckling of Simply Supported Anisotropic Steel-FRP Rectangular Beams Under Pure Bending Condition, *Engineering Structures*, 2017, **146**, 127-139.
- [52] Kang K., Bert C. W., Flexural-Torsional Buckling Analysis of Arches with Warping Using DQM, *Engineering Structures*, 1997, **19**(3), 247-254.

- [53] Zhang L., Tong G. S., Elastic Flexural-Torsional Buckling of Thin-Walled Cantilevers, *Thin-Walled Structures*, 2008, **46**(1), 27-37.
- [54] Ruta G. C., Varano V., Pignataro M., Rizzi N. L., A Beam Model for The Flexural-Torsional Buckling of Thin-Walled Members with Some Applications, *Thin-Walled Structures*, 2008, **46**(7-9), 816-822.
- [55] Challamel N., Wang C. M., Exact Lateral- Torsional Buckling Solutions for Cantilevered Beams Subjected to Intermediate and End Transverse Point Loads, *Thin-Walled Structures*, 2010, **48**(1), 71-76.
- [56] Wu L., Mohareb M., Buckling of Shear Deformable Thin-Walled Members—I. Variational Principle and Analytical Solutions, *Thin-Walled Structures*, 2011, **49**(1), 197-207.
- [57] Wu L., Mohareb M., Buckling Formulation for Shear Deformable Thin-Walled Members—II. Finite Element Formulation, *Thin-Walled Structures*, 2011, **49**(1), 208-222.
- [58] Sapkas A., Kollar L. P., Lateral Torsional Buckling of Composite Beams, *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(11), 2939-2963.
- [59] Ferretti M., D'Annibale F., Luongo A., Flexural-Torsional Flutter and Buckling of Braced Foil Beams under a Follower Force, *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, **2017**, 1-10.
- [60] Nguyen N. D., Nguyen-Van H., Han S.-Y., Choi J.-H., Kang Y.-J., Elastic Lateral-Torsional Buckling of Tapered I-Girder with Corrugated Webs, *International Journal of Steel Structures*, 2013, **13**(1), 71-79.
- [61] Kandasamy R., Thenmozhi R., Jayagopal L. S., Flexural-Torsional Buckling Tests of Cold-Formed Lipped Channel Beams under Restrained Boundary Conditions, *KSCE Journal of Civil Engineering*, 2015, **19**(7), 2134-2143.
- [62] Gelera K. M., Park J. S., Elastic Lateral Torsional Buckling Strength of Monosymmetric Stepped I-Beams, *KSCE Journal of Civil Engineering*, 2012, **16**(5), 785-793.
- [63] Guo X., Xiong Z., Shen Z., Flexural-Torsional Buckling Behavior of Aluminum Alloy Beams, *Front. Struct. Civ. Eng.*, 2015, **9**(2), 163-175.
- [64] Asgarian B., Soltani M., Mohri F., Lateral-Torsional Buckling of Tapered Thin-Walled Beams with Arbitrary Cross-Sections, *Thin-Walled Structures*, 2013, **62**, 96-108.
- [65] Schillo N., Feldmann M., Interaction of Local Buckling and Lateral Torsional Buckling of T-Shaped Cantilevering Beams, *Thin-Walled Structures*, 2014, **81**, 236-241.

- [66] Ozbasaran H., Aydin R., Dogan M., An Alternative Design Procedure for Lateral-Torsional Buckling of Cantilever I-Beams, *Thin-Walled Structures*, 2015, **90**, 235-242.
- [67] Sahraei A., Mohareb M., Upper and Lower Bound Solutions for Lateral-Torsional Buckling of Doubly Symmetric Members, *Thin-Walled Structures*, 2016, **102**, 180-196.
- [68] Yang B., Kang S.-B., Xiong G., Nie S., Hu Y., Wang S., Bai J., Dai G., Experimental and Numerical on Lateral-Torsional Buckling of Singly Symmetric Q460GJ Steel I-Shaped Beams, *Thin-Walled Structures*, 2017, **113**, 205-216.
- [69] Chellapilla K. R., Lokavarapu B. R., Torsional Post-Buckling of Thin-Walled Open Section Clamped Beam Supported on Winkler-Pasternak Foundation, *Thin-Walled Structures*, 2017, **116**, 320-325.
- [70] Liu A., Lu H., Fu J., Pi Y.-L., Lateral Torsional Buckling of Fixed Circular Arches Having a Thin-Walled Section under a Central Concentrated Load, *Thin-Walled Structures*, 2017, **118**, 46-55.
- [71] Jiao P., Borchani W., Soleimani S., McGraw B., Lateral-Torsional Buckling Analysis of Wood Composite I-Beams with Sinusoidal Corrugated Web, *Thin-Walled Structures*, 2017, **119**, 72-82.
- [72] Glauz R.S., Elastic Lateral-Torsional Buckling of General Cold-Formed Steel Beams under Uniform Moment, *Thin-Walled Structures*, 2017, **119**, 586-592.
- [73] Glauz R.S., Flexural-Torsional Buckling of General Cold-Formed Steel Columns with Unequal Unbraced Lengths, *Thin-Walled Structures*, 2017, **119**, 946-955.
- [74] Shakouri M., Sharghi H., Kouchakzadeh M. A., Torsional Buckling of Generally Laminated Conical Shell, *Meccanica*, 2017, **52**(4-5), 1051-1061.
- [75] Zhang W.-F., Liu Y.-C., Hou G.-L., Chen K.-S., Ji J., Deng Y., Deng S.-L., Lateral-Torsional Buckling Analysis of Cantilever Beam with Tip Lateral Elastic Brace under Uniform and Concentrated Load, *International Journal of Steel Structures*, 2016, **16**(4) 1161-1173.
- [76] Luible A., Scharer D., Lateral Torsional Buckling of Glass Beams with Continuous Lateral Support, *Glass Struct. Eng.*, 2016, **1**, 153-171.
- [77] Wang Y. C., El-Khenfas M. A., Nethercot D. A., Lateral-Torsional Buckling of End-Restrained Beams, *Journal of Constructional Steel Research*, 1987, **7**(5), 335-362.
- [78] Seah L. K., Khong P. W., Lateral-Torsional Buckling of Channel Beams, *Journal of Constructional Steel Research*, 1990, **17**(4), 265-282.

- [79] Bailey C. G., Burgess I. W., Plank R. J., The Lateral-Torsional Buckling of Unrestrained Steel Beams in Fire, *Journal of Constructional Steel Research*, 1996, **36**(2), 101-119.
- [80] Atanackovic T. M., Optimal Shape of an Elastic Rod in Flexural-Torsional Buckling, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **87**(6), 399-405.
- [81] Trahair N. S., Bending and Buckling of Tapered Steel Beam Structures, *Engineering Structures*, 2014, **59**(939), 229-237.
- [82] Panedpojaman P., Sae-Long W. Chub-Uppakarn T., Cellular Beam Design for Resistance to Inelastic Lateral-Torsional Buckling, *Thin-Walled Structures*, 2016, **99**, 182-194.
- [83] Torkamani M. A. M., Roberts E. R., Energy Equations for Elastic Flexural-Torsional Buckling Analysis of Plane, *Thin-Walled Structures*, 2009, **47**(4), 463-473.
- [84] Horacek M., Melcher J., Pesek O., Brodniansky J., Focusing on Problem of Lateral Torsional Buckling of Beams with Web Holes, *Procedia Engineering*, 2016, **161**, 549-555.
- [85] Dahmani L., Drizi S., Lateral Torsional Buckling of an Eccentrically Loaded Channel Section Beam, *Strength of Materials*, 2015, **47**(6), 912-916.
- [86] Dahmani L., Boudjemia A., Lateral Torsional Buckling Response of Steel Beam with Different Boundary Conditions and Loading, *Strength of Materials*, 2014, **46**(3), 429-432.
- [87] Asgarian B., Soltani M., Lateral-Torsional Buckling of Non-Prismatic Thin-Walled Beams with Non-Symmetric Cross Section, *Procedia Engineering*, 2011, **14**, 1653-1664.
- [88] Holubowski R., Jarczewska K., Lateral-Torsional Buckling of Nonuniformly Loaded Beam Using Differential Transformation Method, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2016, **16**(7), 1550034(1-12).
- [89] Ioannidis G. I., Avraam T. P., Lateral-Torsional Buckling of Simply Supported Beams under Uniform Bending and Axial Tensile Force, *Archive of Applied Mechanics*, 2012, **82**, 1393-1402.
- [90] Coskun S. B., Determination of Critical Buckling Loads for Euler Columns of Variable Flexural Stiffness with a Continuous Elastic Restraint Using Homotopy Perturbation Method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2009, **10**(2), 191-197.
- [91] Okay F., Atay M. T., Coskun S. B., Determination of Buckling Loads and Mode Shapes of a Heavy Vertical Column under its Own Weight Using the Variational Iteration Method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2010, **11**(10), 851-858.

- [92] Coskun S. B., Analysis of Tilt-Buckling of Euler Columns with Varying Flexural Stiffness Using Homotopy Perturbation Method, *Mathematical Modelling and Analysis*, 2010, **15**(3), 275-286.
- [93] Coskun S. B., Atay M. T., Determination of Critical Buckling load for Elastic Columns of Constant and Variable Cross-Sections Using Variational Iteration Method, *Computers & Mathematics with Applications*, 2009, **58**(11-12), 2260-2266.
- [94] Atay M. T., Coskun S. B., Elastic Stability of Euler Columns with a Continuous Elastic Restraint Using Variational Iteration Method, *Computers & Mathematics with Applications*, 2009, **58**(11-12), 2528-2534.
- [95] Chajes A., Approximate Methods of Analysis, Torsional Buckling, Chajes A., *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 75-144, 195-237, 1974.
- [96] Bleich F., *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1952.
- [97] AISI, Supplementary Information on the 1968 Edition of the Specifications for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members, *American Iron and Steel Institute*, New York, 1971.
- [98] Yoo C. H., Lee S. C., Torsional and Torsional-Flexural Buckling, Lateral-Torsional Buckling, Yoo C. H., Lee S. C., *Stability of Structures*, Butterworth-Heinemann, ABD, 303-326, 327-371, 2011.
- [99] Agrwal V. P., Denman H. H., Weighted Linearization Technique for Period Approximation in Large Amplitude Non-Linear Oscillations, *Journal of Sound and Vibration*, 1985, **99**(4), 463-473.
- [100] Aziz A., Lunardini V., Perturbation Techniques in Phase Change Heat Transfer, *Applied Mechanics Reviews*, 1993, **46**(2), 29-68.
- [101] Bender C., Milton K. A., Pinsky S. S., Simmons J. L., A New Perturbative Approach to Nonlinear Problems, *Journal of Mathematical Physics*, 1989, **30**(7), 1447-1455.
- [102] Cai X. C., Wu W. Y., Li M. S., Approximate Period Solution for a Kind of Nonlinear Oscillator by He's Perturbation Method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2006, **7**(1), 109-112.
- [103] Chan H., Chung K., Xu Z., A Perturbation-Incremental Method for Strongly Non-Linear Oscillators, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1996, **31**(1), 59-72.
- [104] He J. H., New Perturbation Technique Which is also Valid for Large Parameters, *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **229**(5), 1257-1263.

- [105] Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Manevich L. I., *Asymptotical Mechanics of Thin-Walled Structures*, Springer Verlag, 2004.
- [106] Dautray R., Lions J. L., Artola M., Cessenat M., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology Volume 3-Spectral Theory and Applications*, Springer Verlag, 2000.
- [107] Francis S.T., Morse I.E., Hinkle R.T., *Concrete Damage Evolution Analysis by Backscattered Ultrasonic Waves*, Prentice-Hall of Japan, 1963.
- [108] Ginsberg J. H., *Mechanical And Structural Vibrations: Theory and Applications*, John Wiley&Sons, 2001.
- [109] Holmes M. H., *Introduction to Perturbation Methods*. Springer, 1995.
- [110] Korenev B. G., Reznikov L.M., *Dynamic Vibration Absorbers: Theory and Technical Application*, Wiley, Chichester, İngiltere, 1993.
- [111] Lin Y.K, Cai G.Q, *Probabilistic Structural Dynamics:Advanced Theory and Applications*, Mc Graw-Hill Professional, 2004.
- [112] Lyon R.H., *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Application*, MIT Press, 1975.
- [113] Nayfeh A.H., *Perturbation Methods Volume 6*, Wiley Online Library, 1973.
- [114] O'Malley Jr. R. E., *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press (Applied Mathematics and Mechanics 14), 1974.
- [115] Rao S. S., *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley Longman, 1986.
- [116] Thomson W. T., *Theory of Vibration with Applications*, 2nd ed., George Allen and Unwin, Londra, 1983.
- [117] Thomson W. T., *Vibration Theory and Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [118] Bayat M., Abdollahzade G., Analysis of the Steel Braced Frames Equipped with Adas Devices under the far Field Record, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2011, **8**(4), 163-181.
- [119] Bayat M., Abdollahzadeh G., On the Effect of the near Field Records on the Steel Braced Frames Equipped with Energy Dissipating Devices, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2011, **8**(4), 429-443.
- [120] Belendez A., Belendez T., Neipp C., Hernandez A., Alvarez M. L., Approximate Solutions of a Nonlinear Oscillator Typified as a Mass Attached to a Stretched Elastic Wire by the Homotopy Perturbation Method, *Chaos Solitons &Fractals*, 2009, **39**(2), 746-764.

- [121] Belendez A., Pascual C., Belendez T., Hernandez A., Solution for an Anti-Symmetric Quadratic Nonlinear Oscillator by a Modified He's Homotopy Perturbation Method, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, **10**(1), 416-427.
- [122] Cai X.-C., Liu J.-F., Application of the Modified Frequency Formulation to a Nonlinear Oscillator, *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, **61**(8), 2237-2240.
- [123] Chen Y. M., Liu J. K., Homotopy Analysis Method for Limit Cycle Flutter of Airfoils, *Applied Mathematics and Computation*, 2008, **203**(2), 854-863.
- [124] Das S., Gupta P. K., Application of Homotopy Perturbation Method and Homotopy Analysis Method to Fractional Vibration Equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 2011, **88**(2), 430-441.
- [125] Fu Y., Zhang J., Wan L., Application of the Energy Balance Method to a Nonlinear Oscillator Arising in the Microelectromechanical System (MEMS), *Current Applied Physics*, 2011, **11**(3), 482-485.
- [126] Ganji S. S., Ganji D. D., Karimpour S, Determination of the Frequency-Amplitude Relation for Nonlinear Oscillators with Fractional Potential using He's Energy Balance Method, *Progress in Electromagnetics Research*, 2008, **5**, 21-33.
- [127] Ghasemi E., Bayat M., Bayat M., Visco-Elastic MHD Flow of Walters Liquid B Fluid and Heat Transfer over a Non-Isothermal Stretching Sheet, *International Journal of Physical Science*, 2011, **6**(21), 5022-5039.
- [128] Ghorbani A., Saberi-Nadjafi J., An Effective Modification of He's Variational Iteration Method, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, **10**(5), 2828-2833.
- [129] He J.-H., A Review on Some New Recently Developed Nonlinear Analytical Techniques, *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2000, **1**(1), 51-70.
- [130] He J.-H., Modified Lindsted-Poincare Methods for Some Strongly Nonlinear Oscillations: Part III: Double Series Expansion, *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2001, **2**(4), 317-320.
- [131] He J.-H., Modified Lindstedt-Poincare Methods for Some Strongly Non-linear Oscillations: Part I: Expansion of a Constant, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, **37**(2), 309-314.
- [132] He J.-H., Comparison of Homotopy Perturbation Method and Homotopy Analysis Method, *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **156**(2), 527-539.

- [133] Momeni M., Jamshidi N., Barari A., Ganji D. D., Applications of He's Energy Balance Method to Duffing-Harmonic Oscillators, *International Journal of Computer Mathematics*, 2011, **88**(1), 135-144.
- [134] Sadighi A., Ganji D. D., Solution of the Generalized Nonlinear Boussinesq Equation Using Homotopy Perturbation and Variational Iteration Methods, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2008, **8**(3), 2158-2162.
- [135] Shakeri F., Dehghan M., Numerical Solution of a Biological Population Model Using H's Variational Iteration Method, *Computers & Mathematics with Applications*, 2007, **54**(7-8), 1197-1209.
- [136] Shou D. H., Variational Approach to the Nonlinear Oscillator of a Mass Attached to a Stretched Wire, 2008, *Physica Scripta*, **77**(4), 045006.
- [137] Soleimani S., Ebrahimnejad A., Esmailpour M., Ganji D. D., Azizkhani A. M., Energy Balance Method to Subharmonic Resonances of Nonlinear Oscillations with Parametric Excitation, *Far East Journal of Applied Mathematics*, 2009, **36**(2), 203-212.
- [138] Wazwaz A.-M., The Variational Iteration Method: a Reliable Analytic Tool For Solving Linear and Nonlinear Wave Equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 2007, **54**(7-8), 926-932.
- [139] Wen J., Cao Z., Nonlinear Oscillations with Parametric Excitation Solved by Homotopy Analysis Method, *Acta Mechanica Sinica*, 2008, **24**(3), 325-329. 2008.
- [140] Zhang H.-L., Qin L.-J., An Ancient Chinese Mathematical Algorithm and Its Application to Nonlinear Oscillators, *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, **61**(8), 2071-2075.
- [141] Zhou L.-H., He J.-H., The Variational Approach Coupled with an Ancient Chinese Mathematical Method to the Relativistic Oscillator, *Mathematical and Computational Applications*, 2010, **15**(5), 930-935.
- [142] He J., Some New Approaches to Duffing Equation with Strongly and High Order Nonlinearity (II) Parametrized Perturbation Technique, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 1999, **4**(1), 81-83.
- [143] He J.-H., Variational Iteration Method - a Kind of Non-Linear Analytical Technique: Some Examples, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1999, **34**(4), 699-708.
- [144] He J.-H., Homotopy Perturbation Technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1999, **178**(3-4), 257-262.
- [145] He J.-H., Iteration Perturbation Method for Strongly Nonlinear Oscillations, *Journal of Vibration and Control*, 2001, **7**(5), 631-642.

- [146] He J.-H., Preliminary Report on the Energy Balance for Nonlinear Oscillations, *Mechanics Research Communications*, 2002, **29**(2-3), 107-111.
- [147] He J.-H., An Elementary Introduction to Recently Developed Asymptotic Methods and Nanomechanics in Textile Engineering, *International Journal of Modern Physics B-IJMPB*, 2008, **22**(21), 3487-3578.
- [148] He J.-H., Variational Approach for Nonlinear Oscillators, *Chaos, Solitons Fractals*, 2008, **34**(5), 1430-1439.
- [149] Liao S., Homotopy Analysis Method: A New Analytical Technique for Nonlinear Problems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 1997, **2**(2), 95-100.
- [150] Adomian G., *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.
- [151] Pukhov G. E., Computational Structure for Solving Differential Equations by Taylor Transformations, *Cybernetics and Systems Analysis*, 1978, **14**(3), 383-390.
- [152] Pukhov G. E., Expansion Formulas for Differential Transforms, *Cybernetics and Systems Analysis*, 1981, **17**(4), 460-464.
- [153] Pukhov G. E., Differential Transforms and Circuit Theory, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 1982, **10**(3), 265-276.
- [154] Zhou J. K., *Differential Transforms and its Applications for Electrical Circuits*, Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986.
- [155] Berviller C., Status of the Differential Transformation Method, *Applied Mathematics and Computation*, 2011, **218**(20), 10158-10170.
- [156] Wang C. M., Wang C. Y., Reddy J. N., *Exact Solutions of Buckling of Structural Members*, CRC Press, U.S., 2005.
- [157] Den Hartog J. P., *Advanced Strength of Materials*, Dover Publications Inc., New York, 286-290, 1952.
- [158] Ruta P., Szybinski J., Lateral Stability of Non-Prismatic Thin-Walled Beams Using Orthogonal Series, *Procedia Engineering*, 2015, **111**, 694-701.
- [159] Özbaşaran H., Çelik I Kesitli Konsol Kirişlerin Yanal Burulmalı Burkulmasının Deneysel ve Analitik Olarak İncelenmesi, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2013, 334775.

KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER

- [1] **Yucesoy A.**, Coskun S. B., Lateral-Torsional Stability of Rectangular Prismatic Beams Using Some Analytical Approximation Techniques, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2020, **20**(2), 2050027-1-11.
- [2] **Yucesoy A.**, Coskun S. B., Atay M. T., Twist-Bend Instability of a Cantilever Beam Subjected to an End Load via Homotopy Perturbation Method, *International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM)*, Selanik, Yunanistan, 25-30 Eylül 2018.
- [3] **Yucesoy A.**, Coskun S. B., Mert Kutsal S., Analysis of Twist-Bend Buckling of a Cantilever Beam Subjected to an End Load via ADM and VIM, *3rd Conference on Advances in Mechanical Engineering (ICAME)*, İstanbul, Türkiye, 19-21 Aralık 2017.

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini Mardin'e bağlı Nusaybin ilçesinde tamamladı. Lisans öğrenimini İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümünde 1987 yılında; yüksek lisans öğrenimini, yine aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yapı Programında 1990 yılında bitirdi. Yüksek lisansta tez çalışmasını "Türkiye Depremlerinin Yapılarda Sebep Olduğu Hasarların Nedenleri ve Depreme Dayanıklı Taş Yığma Yapı İnşası" başlığı altında yaptı. 1988-2004 yılları arasında DSİ İstanbul ve Adana teşkilatlarında mühendis, kontrol mühendisi ve Melen Sistemi Başmühendisliği görevlerinde bulundu. 2004-2012 yılları arasında İSU Genel Müdürlüğünde Projeler Dairesi Başkanlığı görevinin ardından; 2012-2016 yılları arasında sırasıyla Azerbaycan Texno-Atinak MMC firmasında Genel Müdür yardımcılığı, Kent Konut Genel Müdürlüğünde Genel Müdür Yardımcılığı ve son olarak İSU Genel Müdürlüğünde danışmanlık görevlerini yürüttükten sonra emekli oldu. Halen EMAY Uluslararası Mühendislik ve Müşavirlik A.Ş. üstyapı biriminde hakediş grubu sorumlusu ve proje müdürü olarak görev yapmaktadır.