KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ BULANIK METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

BAŞAK ALDEMİR

KOCAELİ 2021

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ BULANIK METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

BAŞAK ALDEMİR

Prof.Dr. Halis AYGÜN		
Danışman,	**Kocaeli Üniv.**	**...........................**
Doç.Dr. Banu PAZAR VAROL		
Jüri Üyesi,	**Kocaeli Üniv.**	**...........................**
Dr.Öğr. Üyesi İzzettin DEMİR		
Jüri Üyesi,	**Düzce Üniv.**	**...........................**

Tezin Savunulduğu Tarih: 21.06.2021

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında literatürde mevcut olan kısmi metrik uzay, bulanık metrik uzay ve kısmi metrik uzay ile bulanık metrik uzayın bir genelleştirilmesi olan kısmi bulanık metrik uzay yapılarını tanıtmak, kısmi bulanık metrik topolojiyi incelemek ve kısmi bulanık metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamak amaçlanmıştır.

Bu tezin konusunun belirlenmesi ve çalışmaların yürütülmesi süreçlerinde yoğun çalışmaları arasında ilgisini, desteğini ve yardımlarını her zaman hissettiğim danışmanım Sayın Prof. Dr. Halis AYGÜN' e teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin her aşamasında yanımda olan bilgi ve tecrübeleriyle beni daima yüreklendiren sevgili hocalarım Araş. Gör. Ebru AYDOĞDU, Araş. Gör. Elif GÜNER ve Doç. Dr. Sibel KOPARAL' a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca beni her anlamda destekleyen, güç veren, her zorlukta yanımda olan sevgili aileme yürekten teşekkür ederim.

Haziran-2021 Başak ALDEMİR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\overline{A}$	: A kümesinin kapanışı
d(A)	: A kümesinin türev kümesi
ω	: Ağırlık fonksiyonu
$\subseteq$	: Alt küme
$\cap$	: Arakesit
$\cup$	: Birleşim
$\emptyset$	: Boş küme
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\forall$	: Evrensel niceleyici, her
d	: Klasik metrik
p	: Kısmi metrik
d_p	: Kısmi metrikten elde edilen klasik metrik
p_d	: Klasik metrikten elde edilen kısmi metrik
q_p	: Kısmi metrikten elde edilen quasi metrik
τ	: Klasik topoloji
τ_p	: Kısmi metrik topoloji
$\leq_p$	: Kısmi metrik uzayda kısmi sıralama bağıntısı
$\mathbb{Q}^+$	: Negatif olmayan rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}^-$	: Pozitif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$*$	: t-norm
$:=$	: Tanım olarak eşittir
Q	: Quasi metrik
$\leq_q$	: Quasi metrik uzayda kısmi sıralama bağıntısı
τ_q	: Quasi metrik topoloji
Tx	: x elemanının T dönüşümü altındaki görüntüsü
P(X)	: X kümesinin kuvvet kümesi
$\exists$	: Varlıksal niceleyici, en az bir

KISMİ BULANIK METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ÖZET

Bu tezin amacı; kısmi metrik uzay, bulanık metrik uzay ve kısmi metrik uzay ile bulanık metrik uzayın bir genelleştirilmesi olan kısmi bulanık metrik uzay yapılarını tanıtmak, kısmi bulanık metrik uzaydan üretilen topolojik uzayların özelliklerini incelemek ve bu uzaydaki temel sabit nokta teoremlerini vermektir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, üçgensel normlar, quasi metrik uzaylar, ağırlıklı quasi metrik uzaylar ve ağırlıklı metrik uzaylar gibi temel kavramlar özellikleri ile birlikte verilmiştir.

İkinci bölümde, kısmi metrik uzay tanımı çeşitli örneklerle birlikte verilmiştir. Kısmi metrik uzaydan üretilen topolojik uzayların özellikleri incelenmiştir. Ayrıca kısmi metrik uzaylar ile metrik uzaylar ve quasi metrik uzaylar arasındaki ilişkilere yer verilmiştir. Daha sonra kısmi metrik uzaylar üzerinde bazı sabit nokta teoremleri ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, Kramosil-Michalek ve George-Veeramani anlamlarındaki bulanık metrik uzay yapılarının tanımı verilerek topolojik özellikleri incelenmiştir. Dahası, bu uzaylardaki çeşitli sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, kısmi metrik uzay ile bulanık metrik uzayın bir genelleştirilmesi olan Sedghi ve diğ. (2015) tarafından tanımlanan kısmi bulanık metrik uzay yapısı verilmiştir. Kısmi bulanık metrik uzaylar ile bulanık metrik uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca kısmi bulanık metrik uzaydan topolojik uzaylar üretilerek bu uzayların bazı özellikleri elde edilmiştir. Bunlara ilave olarak, kısmi bulanık metrik uzaylar üzerinde bazı temel sabit nokta teoremleri destekleyici örnekleri ile birlikte verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Metrik Uzay, Kısmi Bulanık Metrik Uzay, Kısmi Metrik Uzay, Sabit Nokta Teoremleri.

PARTIAL FUZZY METRIC SPACES AND FİXED POİNT THEOREMS

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to study the notions of partial metric spaces, fuzzy metric spaces and generalization of partial metric spaces and fuzzy metric spaces, named as partial fuzzy metric spaces, to construct topological spaces from given partial fuzzy metric spaces and to give some fundamental fixed point theorems in partial fuzzy metric spaces.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some fundamental notions such as triangular norms, quasi metric spaces, weighted quasi metric spaces and weighted metric spaces were recalled with their properties.

In the second chapter, the concept of partial metric spaces with various examples was given. The properties of topological spaces induced by the partial metric spaces were presented. Then the relationships of partial metric spaces with metric spaces and quasi metric spaces were recollected. Besides this, some fixed point theorems in partial metric spaces were investigated.

In the third chapter, by giving the definition of fuzzy metric spaces in the sense of Kramosil-Michalek and George-Veeramani, some topologocial properties of this space was investigated. Also, various fixed point theorems in this space were given.

In the fourth chapter, the definition of partial fuzzy metric which is a generalization of partial metric spaces and fuzzy metric spaces, was defined by Sedghi et al., was given. The relationships between partial fuzzy metric spaces and fuzzy metric spaces were studied. Also, by constructing topological spaces from given partial fuzzy metric spaces, some properties of these spaces were investigated. Furthermore, some fundamental fixed point theorems in partial fuzzy metric spaces were given by illustrative examples.

Keywords: Fuzzy Metric Spaces, Partial Fuzzy Metric Spaces, Partial Metric Spaces, Fixed Point Theorems.

GİRİŞ

Gerçek dünyada karşılaşılan problemler oldukça belirsiz ve karmaşık veriler içerdiğinden, bu problemlerin modellenmesinde klasik küme teorisi yetersiz kalmaktadır. Özellikle mühendislik, fizik, ekonomi, bilgisayar bilimleri, sosyal bilimler ve tıbbi bilimler gibi daha birçok alanda karşılaşılan problemlerin modellenmesinde klasik küme teorisindeki ait olma ve ait olmama göz önüne alınarak şüphe ve belirsizlikleri içeren verilerin işlenmesi mümkün olmamaktadır. Bu nedenle bu tür verileri içeren problemlerin modellenmesi için yeni yöntemlere ihtiyaç duyulmaktaydı. Bu yöndeki ilk çalışma, bir elemanın bir kümeye ait olmasının elemanları [0,1] aralığındaki bir sayıya karşılık getiren üyelik fonksiyonu yardımıyla belirlendiği bulanık küme teorisi 1965 yılında Zadeh tarafından ortaya konmuştur. Modern anlamda belirsizlik kavramının değerlendirilmesinde önemli bir çalışma olarak kabul edilen bu teori pek çok disiplinde çeşitli uygulama alanına sahip olmuştur. Daha sonra, sezgisel bulanık küme teorisi (Atanassov, 1986), belirsiz (vague) küme teorisi, aralık matematiği teorisi (Gorzalzany, 1987), yaklaşımlı (rough) küme teorisi (Pawlak, 1982), esnek küme teorisi (Molodtsov, 1999) gibi teoriler belirsizlik ve şüphe içeren problemlerin modellenmesi için literatüre kazandırılmıştır. Bahsedilen teorilerden en yaygın kullanılanları esnek küme teorisi ve bulanık küme teorisi olmuştur. Esnek kümelerin karar verme problemlerine uygulanması Maji ve diğ. (2003), cebirsel özellikleri ise Aktaş ve Çağman (2007) tarafından verilmiştir. Esnek kümelerin topolojisi ilk olarak Shabir ve Naz (2011) tarafından verilmiştir. Aygünoğlu ve Aygün (2012) ise esnek topolojik uzaylarda bazı temel kavramları tanımlamıştır. Bu çalışmaların devamı niteliğinde Zorlutuna ve diğ. (2012), Pazar Varol ve Aygün (2013), Maji ve diğ. (2001), Aygünoğlu ve diğ. (2014), Çetkin ve diğ. (2020) gibi birçok yazar tarafından esnek topolojik uzaylara dair çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Bulanık küme teorisinin metrik uzaylara uygulanması fikri ile ortaya çıkan bulanık metrik uzay kavramı ilk kez Kramosil ve Michalek (1975) ile Kaleva (1985) tarafından iki farklı şekilde tanımlanmıştır. Daha sonra George ve Veeramani (1994) tarafından Kramosil ve Michalek anlamındaki bulanık metrik tanımı, Hausdorf topoloji üretebilmek için yeniden verilmiştir. Bulanık metriğin ürettiği çeşitli topolojiler üzerine çalışmalar Aygünoğlu ve diğ. (2019, 2020) tarafından yapılmıştır.

Bulanık metrik uzaylar üzerinde Grabiec (1988), George ve Veeramani (1994), Gregori ve Sapena (2002), Mihet (2007), Wardowski (2013) gibi birçok yazar çeşitli daralma dönüşümleri tanımlamış ve sabit nokta teoremleri çalışmışlardır.

Metrik uzay kavramının bir genelleştirilmesi olan kısmi metrik uzay kavramı 1992'te Matthews tarafından verilmiştir. Kısmi metrik uzaylarda metrik uzaylardan farklı olarak bir noktanın kendine olan uzaklığı 0 olmak zorunda değildir. Bu genelleştirme sonsuz dizilerin bilgisayar bilimlerinde kullanılması gerekliliğinden ortaya çıkmıştır. Bu durum aşağıdaki şekilde açıklanmaktadır. S^{ω}, S kümesi üzerindeki $x=(x_0,x_1,\dots)$ sonsuz dizilerinin kümesi olsun. Her $x,y \in S^{\omega}$ için $d_s\colon S^{\omega} \times S^{\omega} \to \mathbb{R}^{+}$ dönüşümü $d_s(x,y) = 2^{(-k)}$ olarak tanımlansın. Buradaki k sayısı her $i < k$ için $x_i = y_i$ olacak şekildeki en büyük sayı olsun. Bu şekilde tanımlanan d_s, S^{ω} üzerinde bir metriktir. Fakat sonsuz bir dizinin bilgisayar ortamına aktarılabilmesi için dizinin terimlerinin sonlu diziler olarak ifade edilmesi gerekmektedir. Bu sebeple $x=(x_0,x_1,\dots)$ dizisi $x_0^* = (x_0)$, $x_1^* = (x_0, x_1)$, … şeklinde parçalanışlara ayrılsın ve bu elemanların kümesi S^* olsun. Bu durumda, $d_s\colon S^* \times S^* \to R^{+}$, $d_s(x,y) = 2^{(-k)}$ dönüşümü bir noktanın kendine olan uzaklığının sıfır olması haricindeki diğer metrik aksiyomlarını sağlar. Bu fikirden yola çıkarak ele alınan kısmi metrik uzay yapısı daha sonra bilgisayar bilimlerinden ziyade matematiğin çeşitli alanlarında kullanılan popüler bir konusu olmuştur. Metrik uzaylarda elde edilen birçok sonuç ve teorem kısmi metrik uzaylara genelleştirilmiştir. Kısmi metrik uzayların topolojik özellikleri ise Romaguera (2009), Han ve diğ. (2017), Hitzler ve Seda (2011) gibi yazarlar tarafından çalışılmıştır. Matthews (1994), Valero (2005), Ilic ve diğ. (2013), Haghi ve diğ. (2013) tarafından kısmi metrik uzaylar üzerinde çeşitli sabit nokta çalışmaları yapılmıştır.

Hem kısmi metriğin hem de bulanık metriğin bir genelleştirilmesi olan kısmi bulanık metrik uzay kavramı Yue ve Gu (2014), Sedghi ve diğ. (2015), Gregori ve diğ. (2019) tarafından farklı şekillerde tanımlanmıştır. Yue ve Gu (2014) sürekli minimum t-normunu kullanarak kısmi bulanık metrik uzay kavramını vermiştir. Sedghi ve diğ. (2015) kısmi bulanık metrik uzay kavramını güçlü bulanık metrik uzay kavramının bir genelleştirilmesi olarak tanıtıp bu uzayda bazı sabit nokta teoremleri elde etmişlerdir. Gregori ve diğ. (2019) sürekli t-norm ve residuum operatörlerini kullanarak kısmi bulanık metrik uzay kavramını tanımlamışlardır. Ayrıca açık yuvar tanımı vererek kısmi bulanık metrikten topoloji üretmişlerdir.

Bu çalışmada Sedghi ve diğ. (2015) anlamında kısmi bulanık metrik uzaylar üzerinde temel sabit nokta teoremlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, ilk olarak kısmi bulanık metrik uzayların hem kısmi metrik uzaylarla hem de bulanık metrik uzaylarla olan bazı ilişkileri elde edilerek kısmi bulanık metrikten üretilen topoloji ile özellikleri çalışılmıştır. Daha sonra, kısmi bulanık metrik uzaylarda Banach sabit nokta teoreminin bazı genelleştirilmeleri elde edilmiştir. Ayrıca, kısmi bulanık metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerinin bulanık metrik uzaylarda karşılık gelen sonuçlarından elde edilebileceği gösterilmiştir.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan üçgensel norm, quasi metrik, ağırlıklı quasi metrik ve ağırlıklı metrik kavramlarına yer verilmiştir.

1.1. Üçgensel Norm

Tanım 1.1.1: $*: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ bir ikili işlem olsun. Her $x, y \in [0,1]$ için

(T1) $x * y = y * x$,

(T2) $(x * y) * z = x * (y * z)$,

(T3) $x * 1 = x$,

(T4) $x \leq z$ ve $y \leq t$ iken $x * y \leq z * t$

sağlanıyorsa $*$ işlemine üçgensel norm (kısaca, t-norm) denir (Schweizer ve Sklar, 1960).

Örnek 1.1.2: Aşağıdaki şekilde tanımlanan $[0, 1]$ üzerindeki $*_M$, $*_P$, $*_L$, $*_D$ ikili işlemleri birer t-normdur.

$x *_M y = \min\{x, y\}$,

$x *_P y = x.y$,

$x *_L y = \max\{x + y - 1, 0\}$,

$x *_D y = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0, 1)^2 \\ \min\{x, y\}, & \text{diğer durum} \end{cases}$ (Klement ve diğ, 2000).

Uyarı 1.1.3: 1) Tanım 1.1.1'den açıkça görülmektedir ki, her $x \in [0, 1]$ için $0 * x = x * 0 = 0$ ve $1 * x = x$ eşitlikleri sağlanır.

2) Tanım 1.1.1'deki (T1) ve (T3) koşulları birlikte göz önüne alınırsa, her t-norm her iki bileşene göre de monotondur. Yani,

$x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2 \Longrightarrow x_1 * y_1 \leq x_2 * y_2$ dir (Klement ve diğ, 2000).

Tanım 1.1.4: Bir $*$ t-normu $[0,1]$ ve $[0,1] \times [0,1]$ üzerindeki standart topolojilere göre sürekli ise $*$ t-normuna süreklidir denir. Örneğin, $*_M$, $*_P$, $*_L$ ve $*_D$ t-normları birer sürekli t-normdur (Klement ve diğ, 2000).

Uyarı 1.1.5: 1) (T1) koşulundan $*$ t-normunun sürekliliği ilk bileşene göre sürekliliğe denktir.

2) Bir t-normun alttan (üstten) yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul ilk bileşene göre soldan (sağdan) sürekli olmasıdır (Klement ve diğ, 2000).

Örnek 1.1.6: 1) Aşağıdaki şekilde tanımlanan $*_N$ nilpotent t-norm alttan yarı süreklidir fakat üstten yarı sürekli değildir.

$$x *_N y = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1 \\ \min\{x, y\}, & x + y > 1 \end{cases}$$

2) Aşağıdaki şekilde tanımlanan $*_D$ drastic çarpım t-normu üstten yarı süreklidir fakat alttan yarı sürekli değildir.

$$x *_D y = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0, 1)^2 \\ \min\{x, y\}, & \text{diğer durum} \end{cases}$$ (Klement ve diğ, 2000).

1.2. (Quasi) Metrik Uzaylar

Tanım 1.2.1: X boştan farklı bir küme olsun. X üzerindeki $\leq$ bağıntısı her x, y, z $\in$ X için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa kısmi sıralama bağıntısı ve $(X, \leq)$ ikilisine kısmi sıralı küme denir.

1) $x \leq x$,

2) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$,

3) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Matthews, 1994).

Tanım 1.2.2: X boştan farklı bir küme ve $q: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir dönüşüm olsun. q dönüşümü her x, y, z $\in$ X için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa q' ya X üzerinde quasi metrik adı verilir.

1) $x = y \Leftrightarrow q(x, y) = q(y, x) = 0$,

2) $q(x, y) \leq q(x, z) + q(z, y)$.

(X, q) ikilisine quasi metrik uzay denir (Wilson, 1931).

Örnek 1.2.3: X boştan farklı bir küme ve $\emptyset \neq A \subset X$ olmak üzere $q_A(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ve } y \in X \setminus A \\ 0, & \text{diğer durum} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $q_A : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü X üzerinde bir quasi metriktir (Wilson, 1931).

Tanım 1.2.4: (X, q) bir quasi metrik uzay, $x \in X$ ve $r > 0$ olsun. Bu durumda

1) $B_q(x, r) = \{y \in X \mid q(x, y) < r\}$ şeklinde tanımlanan kümeye x merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir (Sion ve Zelmer, 1967).

2) $B_q[x, r] = \{y \in X \mid q(x, y) \leq r\}$ şeklinde tanımlanan kümeye x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar denir (Matthews, 1994).

Teorem 1.2.5: (X,q) bir quasi metrik uzay olsun. Bu uzaydaki açık yuvarların ailesi $\mathcal{B} = \{B_q(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$ X üzerinde bir topoloji için tabandır. Bu topolojiye quasi metrik topoloji adı verilir ve τ_q ile gösterilir (Matthews, 1994).

Önerme 1.2.6: (X,q) bir quasi metrik uzay olsun. X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan $\leq_q$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

$x \leq_q y \Leftrightarrow q(x, y) = 0$ (Matthews, 1994).

Tanım 1.2.7: (X,q) bir quasi metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$q(x, y) + \omega(x) = q(y, x) + \omega(y) \tag{1.1}$$

olacak şekilde bir $\omega: X \to \mathbb{R}^+$ ağırlık fonksiyonu mevcut ise q'ya X üzerinde ağırlıklı quasi metrik, (X,q,ω) üçlüsüne ise ağırlıklı quasi metrik uzay denir (Matthews, 1994).

Uyarı 1.2.8: 1) Her metrik uzay bir ağırlıklı quasi metrik uzaydır (Vitolo, 1999).

2) Her quasi metrik uzayın bir ağırlıklı quasi metrik uzay olması gerekmez. $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere,

$q(a, b) = 0,\ q(b, a) = 2, q(a, c) = 1, q(c, a) = 1, q(b, c) = 3,\ q(c, b) = 0,$
$q(a, a) = q(b, b) = q(c, c) = 0$
şeklinde tanımlanan q:$X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü X üzerinde bir quasi metriktir. Farz edelim ki $\omega: X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü q için bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$\omega(b) + q(b, c) = \big(\omega(b) + q(b, a)\big) + 1 = \omega(a)+q(a, b) + 1 = \omega(a)+q(a, c)$$
$$= \omega(c)+q(c, a) = \big(\omega(c)+q(c, b)\big) + 1 = \omega(b) + q(b, c) + 1$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Yani q dönüşümü X üzerinde ağırlıklı quasi metrik değildir (Matthews, 1994).

Önerme 1.2.9: (X, q) quasi metrik uzayının ağırlıklı olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $x, y, z \in X$ için

$$q(x, y) + q(y, z) + q(z, x) = q(x, z) + q(z, y) + q(y, x) \tag{1.2}$$

ve her $a \in X$ için $T_a = \{q(a - x) - q(x - a) \mid x \in X\}$ kümesinin alttan sınırlı olmasıdır (Vitolo, 1999).

Tanım 1.2.10: (X,d) bir metrik uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) \geq \omega(x) - \omega(y) \tag{1.3}$$

olacak şekilde bir $\omega: X \to \mathbb{R}^+$ ağırlık fonksiyonu mevcut ise d'ye X üzerinde ağırlıklı metrik, (X, d, ω) üçlüsüne ise ağırlıklı metrik uzay denir (Matthews, 1992).

Örnek 1.2.11: 1) $X = \mathbb{R}^+$ ve her $x \in \mathbb{R}^+$ için ağırlık fonksiyonu $\omega(x) = x$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 0, & y < x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir ağırlıklı metriktir (Künzi ve Vajner, 1994).

2) $X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ve her $(x, y) \in X$ için ağırlık fonksiyonu $\omega(x, y) = x$ olsun. Her $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in X$ için

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+x_2-x_1}{2}$$

şeklinde tanımlanan d metriği X üzerinde bir ağırlıklı metriktir (Künzi ve Vajner, 1994).

2. KISMİ METRİK UZAYLAR

Bu bölümde Matthews tarafından 1992 yılında tanımlanan kısmi metrik kavramı verilerek temel özellikleri ile birlikte incelenecektir. Ayrıca kısmi metrik topoloji tanıtılarak Han ve diğ. (2017) tarafından elde edilen sayılabilirlik ve ayırma aksiyomları gibi bazı özellikler incelenecektir. Daha sonra kısmi metrik uzaylar ile (ağırlıklı) metrik ve (ağırlıklı) quasi metrik uzaylar arasındaki ilişkiler verilecektir. Son olarak literatürde mevcut olan kısmi metrik uzaylar üzerinde bazı sabit nokta teoremlerine yer verilecektir.

2.1. Kısmi Metrik Uzay Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 2.1.1: X boştan farklı bir küme ve $p:X \times X \to \mathbb{R}^+$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun.

(PM1) Her $x, y \in X$ için $p(x, x) \leq p(x, y)$ dir.

(PM2) Her $x, y \in X$ için $x=y \Leftrightarrow p(x, x)=p(x, y)=p(y, y)$ dir.

(PM3) Her $x, y \in X$ için $p(x, y)=p(y, x)$ dir.

(PM4) Her $x, y, z \in X$ için $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$ dir.

Bu durumda p'ye X üzerinde bir kısmi metrik ve (X, p) ikilisine kısmi metrik uzay denir. Eğer $p(x, y) = 0$ ise (PM1) ve (PM2) özelliklerinden x=y olduğu görülmektedir. Fakat x=y ise $p(x, y)$ değeri her zaman sıfır olmayabilir (Matthews, 1994).

Tanımlardan kolayca görülmektedir ki her metrik bir kısmi metriktir. Yani kısmi metrik uzaylar metrik uzayların bir genelleştirilmesidir.

Örnek 2.1.2: 1) Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $p(x, y)=\max\{x, y\}$ şeklinde tanımlanan $p: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir kısmi metriktir (Matthews, 1994). Gerçekten $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, (PM1) $x \leq \max\{x, y\}$ olduğundan $p(x, x) = x \leq \max\{x, y\} = p(x,y)$ sağlanır.

(PM2) $p(x, x) = p(x, y) = p(y,y)$ olsun. Burada,

$\max\{x,x\} = \max\{x,y\} = \max\{y,y\}$ olur. Böylece $x = y$ olur. $x = y$ ise $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ olduğu açıktır.

(PM3) $p(x,y) = p(y,x)$ olduğu p'nin tanımından açıktır.

(PM4) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$ olduğunu göstermek için $x \leq y \leq z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$p(x,y) = \max\{x,y\} \leq \max\{x,z\} + \max\{z,y\} - \max\{z,z\}$$
$$= p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$$

olmaktadır. Diğer durumlarda da sağlandığı benzer şekilde gösterilir.

2) Her $x,y \in \mathbb{R}^-$ için $p(x,y) = -\min\{x,y\}$ şeklinde tanımlanan $p: \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü $\mathbb{R}^-$ üzerinde bir kısmi metriktir (Matthews, 1994). Gerçekten $x,y,z \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere

(PM1) $\min\{x,y\} \leq x$ olduğundan $-x \leq -\min\{x,y\}$'dir. Bu durumda,

$p(x,x) = -x \leq -\min\{x,y\} = p(x,y)$ sağlanır.

(PM2) $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ olsun. Burada $-x = -y$ olduğundan $x = y$ elde edilir. $x = y$ ise $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ olduğu açıktır.

(PM3) $p(x,y) = p(y,x)$ olduğu p'nin tanımından açıktır.

(PM4) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$ olduğunu göstermek için $x \leq y \leq z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$p(x,y) = -\min\{x,y\} \leq -\min\{x, z\} - \min\{z,y\} + \min\{z,z\}$$
$$= p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$$

olmaktadır. Diğer durumlarda da sağlandığı benzer şekilde gösterilir.

3) $I = \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ olmak üzere,

$p([a,b],[c,d]) = \max\{b,d\} - \min\{a,c\}$

şeklinde tanımlanan $p: I \times I \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü I üzerinde bir kısmi metriktir (Matthews, 1994).

Tanım 2.1.3:(X, p) bir kısmi metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = p(x,x)$ oluyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir. Bu durum $x_n \overset{p}{\to} x$ ile gösterilir. Yani,

$x_n \overset{p}{\to} x \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall\, n \geq n_0$ için $p(x_n,x) - p(x,x) < \varepsilon$

dir (Matthews, 1994).

Tanım 2.1.4: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ limiti mevcut ise (x_n) dizisine Cauchy dizisi adı verilir (Matthews, 1994).

Tanım 2.1.5: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Eğer X'deki her (x_n) Cauchy dizisi bu uzaydaki bir x noktasına yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) = p(x,x)$ koşulunu sağlıyorsa (X, p) kısmi metrik uzayına bir tam kısmi metrik uzay denir (Matthews, 1994).

Uyarı 2.1.6: Kısmi metrik uzaylarda, metrik uzaylardan farklı olarak, yakınsak her dizinin bir Cauchy dizisi olması gerekmez (Matthews, 1994).

Örnek 2.1.7: $\mathbb{R}^-$ üzerinde tanımlanan $p(x,y) = -\min\{x,y\}$ kısmi metriğini göz önüne alalım. Bu uzaydaki $(x_n) = (0,-1,0,-1,\dots)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} p(x_n,-1) = \lim_{n\to\infty}\left(-\min\{x_n,-1\}\right) = \lim_{n\to\infty}(1) = 1 = p(-1,-1)$ olduğundan bu dizi $-1 \in \mathbb{R}^-$ noktasına yakınsaktır. Fakat $x_n = 0$ veya $x_n = -1$ olduğundan $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ mevcut değildir. Böylece $(x_n) = (0,-1,0,-1,\dots)$ yakınsak bir dizi iken Cauchy dizisi olmadığı görülür (Matthews, 1994).

Tanım 2.1.8: (X, p) bir kısmi metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n) = p(x,x)$ oluyorsa (x_n) dizisine x noktasına p-yakınsaktır denir (Matthews, 1994).

Lemma 2.1.9: Kısmi metrik uzaylarda p-yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir (Matthews, 1994).

Tanım 2.1.10: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) = 0$ oluyorsa (x_n) dizisine 0-Cauchy dizisi denir (Romaguera, 2009).

Tanım 2.1.11: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Eğer her 0-Cauchy dizisi bu uzayda $p(x,x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise (X, p) kısmi metrik uzayına bir 0-tam kısmi metrik uzay denir (Romaguera, 2009).

Lemma 2.1.12: Her tam kısmi metrik uzay bir 0-tam kısmi metrik uzaydır. Fakat bu ifadenin tersinin doğru olması gerekmez (Romaguera, 2009).

Örnek 2.1.13: $X = \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ ve $p(x,y) = \max\{x,y\}$ kısmi metrik olmak üzere (X, p) kısmi metrik uzayı 0-tam olup tam metrik uzay değildir (Romaguera, 2009).

Tanım 2.1.14: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $x,y \in X$ için $p(x,y) < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı mevcut ise (X, p) kısmi metrik uzayına sınırlı kısmi metrik uzay denir (Han ve diğ., 2017).

Tanım 2.1.15: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $x \in X$ olsun. (x_n) ve (y_n), X'de iki dizi olmak üzere,

1) $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = p(x,x)$ iken her $y \in X$ için $\lim_{n\to\infty} p(x_n,y)=p(x,y)$

oluyorsa (X, p) kısmi metrik uzayına dizisel yakınsak denir.

2) $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = p(x,x)$ ve $\lim_{n\to\infty} (p(x_n,y_n)-p(y_n,y_n)) = 0$ iken $\lim_{n\to\infty} p(y_n,x)=p(x,x)$ oluyorsa (X, p) kısmi metrik uzayına p-dizisel yakınsak denir.

3) $\lim_{n\to\infty} (p(x_n,x) - p(x_n,x_n)) = 0$ iken $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = p(x,x)$ oluyorsa (X, p) kısmi metrik uzayına dizisel simetrik denir.

4) $\alpha \coloneqq \sup\{p(x,x) \mid x \in X\}$ olarak tanımlansın. Her $x \neq y \in X$ için $p(x,y) \geq \alpha$ ise (X, p) kısmi metrik uzayına öz sınırlı denir (Han ve diğ., 2017).

2.2. Kısmi Metrik Topoloji ve Özellikleri

Tanım 2.2.1: (X, p) bir kısmi metrik uzay, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

1) $B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid p(x,y) < \varepsilon\}$

şeklinde tanımlanan kümeye x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar denir.

2) $B_p[x,\varepsilon] = \{y \in X \mid p(x,y) \leq \varepsilon\}$

şeklinde tanımlanan kümeye x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir (Matthews, 1992).

Örnek 2.2.2: 1) Örnek 2.1.2. 1)'de verilen $\mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlanan $p(x,y) = \max\{x,y\}$ kısmi metriğini ele alalım. $(\mathbb{R}^+, p)$ kısmi metrik uzayında x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar,

$$B_p(x,\varepsilon) = \begin{cases} (0,\varepsilon), & x < \varepsilon \\ \emptyset, & x \geq \varepsilon \end{cases}$$

şeklindedir (Matthews, 1994).

2) Örnek 2.1.2. 2)'de verilen $\mathbb{R}^-$ üzerinde tanımlanan $p(x,y) = -\min\{x,y\}$ kısmi metriğini ele alalım. $(\mathbb{R}^-, p)$ kısmi metrik uzayında x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar,

$$B_p(x,\varepsilon) = \begin{cases} (-\varepsilon,0), & x \leq \varepsilon \\ \emptyset, & x > \varepsilon \end{cases}$$

şeklindedir (Matthews, 1994).

Uyarı 2.2.3: Yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi kısmi metrik uzaylarda x merkezli ε yarıçaplı $B_p(x,\varepsilon)$ açık yuvarı her zaman boştan farklı bir küme olmayabilir. Bu nedenle x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar tanımı aşağıdaki şekilde yeniden verilmiştir (Matthews, 1992).

Tanım 2.2.4: (X, p) bir kısmi metrik uzay, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

1) $B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}$

şeklinde tanımlanan kümeye x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar denir.

2) $B_p[x,\varepsilon] = \{y \in X \mid p(x,y) \leq p(x,x) + \varepsilon\}$

şeklinde tanımlanan kümeye x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir (Matthews, 1992).

Bu kısımdan itibaren Tanım 2.2.4 anlamındaki açık (kapalı) yuvarlar göz önüne alınacaktır.

Teorem 2.2.5: (X, p) bir kısmi metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki açık yuvarların ailesi olan $\mathcal{B} = \{B_p(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ kümesi X üzerinde bir topoloji için tabandır. Bu şekilde üretilen topolojiye kısmi metrik topoloji adı verilir ve τ_p ile gösterilir. Ayrıca (X, τ_p) kısmi metrik topolojik uzayı T_0-uzayıdır (Matthews, 1994).

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için $x \in B_p(x,\varepsilon)$ olduğundan $X = \bigcup\{B_p(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ olduğu açıktır. Şimdi $x,y \in X$ ve $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere $B_p(x,\varepsilon)$ ve $B_p(y,\delta)$ açık yuvarlarını alalım. $z \in B_p(x,\varepsilon) \cap B_p(y,\delta)$ olsun. O halde $p(x,z) < p(x,x) + \varepsilon$ ve $p(y,z) < p(y,y) + \delta$ sağlanır. $\eta > 0$ olmak üzere $\omega \in B_p(z,\eta)$ alalım. $\eta \coloneqq \min\{p(x,x) + \varepsilon - p(x,z),\ p(y,y) - \delta + p(y,z)\}$ seçelim.

$p(x,\omega) \leq p(x,z) + p(z,\omega) - p(z,z) \leq p(x,z) + p(z,z) + \eta - p(z,z) \leq p(x,x) + \varepsilon$ eşitsizliğinden $\omega \in B_p(x,\varepsilon)$ olduğu görülür. Benzer şekilde $\omega \in B_p(y,\delta)$ olduğu elde edilir. Yani $\omega \in B_p(x,\varepsilon) \cap B_p(y,\delta)$ dir. Böylece $B_p(z,\eta) \subseteq B_p(x,\varepsilon) \cap B_p(y,\delta)$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{B} = \{B_p(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ kümesi X üzerinde bir topoloji için tabandır.
Şimdi de (X, τ_p)'nin T_0-uzayı olduğunu gösterelim. $x,y \in X$ $(x \neq y)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $x \in B_p(x,\varepsilon)$ dir. $\varepsilon = p(x,y) - p(x,x) > 0$ seçilirse $y \notin B_p(x,\varepsilon)$ olduğu görülür. Böylece (X, τ_p) kısmi metrik topolojik uzayı T_0-uzayıdır.

Teorem 2.2.6: Kısmi metrik uzaydaki yakınsaklık ile kısmi metriğin ürettiği topolojik uzaydaki yakınsaklık denktir. Yani $x_n \xrightarrow{p} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_p} x$ (Matthews, 1994).

Teorem 2.2.7: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) (X, τ_p) bir $T_{\frac{1}{2}}$-uzayıdır, yani her $A \subset X$ için A'nın türev kümesi $d(A)$, (X,τ_p)'de kapalıdır.

ii) (X, τ_p)'nin bir T_1-uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $x,y \in X$ $(x \neq y)$ için $p(x,x) < p(x,y)$ sağlanmasıdır.

iii) $\beta_{x,y} = \inf_{z \in X}\big(p(x,z) + p(y,z) - p(x,x) - p(y,y)\big)$ olarak tanımlansın. Her $x,y \in X$ $(x \neq y)$ için $\beta_{x,y} > 0$ ise (X,τ_p) T_2-uzayıdır.

iv) (x_n), X'de bir dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = p(x,x) = p(y,y) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,y)$$

iken $x = y$ ise (X,τ_p) bir T_2-uzayıdır (Han ve diğ., 2017).

Lemma 2.2.8: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon, \delta > 0$ için $y \in B_p(x, \varepsilon)$ ise $B_p(y, \delta) \subseteq B_p(x, \varepsilon + \delta)$ dir (Han ve diğ., 2017).

Teorem 2.2.9: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun.

i) (X, p) dizisel yakınsak ise (X,τ_p) bir T_2-uzayıdır.

ii) (X, p) p-dizisel yakınsak ise (X,τ_p)'nin bir T_2-uzayı olması için gerek ve yeter koşul (X,τ_p)'nin bir T_3-uzayı olmasıdır.

iii) (X, p) dizisel yakınsak ve p-dizisel yakınsak ise (X, τ_p) bir T_3-uzayıdır.

iv) (X, p) bir dizisel yakınsak kısmi metrik uzay olsun. Eğer (X, τ_p) kompakt ise (X,τ_p) bir T_4-uzayıdır.

v) (X, p) p-dizisel yakınsak, (X, τ_p) dizisel kompakt ve T_2-uzayı ise (X, τ_p) bir T_4-uzayıdır (Han ve diğ., 2017).

Lemma 2.2.10: (X, p) bir öz sınırlı kısmi metrik uzay ve $\alpha = \sup\{p(x,x) \mid x \in X\}$ olmak üzere,

i) $Y = \{x \in X \mid p(x,x) < \alpha\}$ şeklinde tanımlanan $Y \subseteq X$ alt kümesi açık bir kümedir ve $(\tau_p)_Y = \mathcal{P}(Y)$'dir.

ii) $Z = \{x \in X \mid p(x,x) = \alpha\}$ şeklinde tanımlanan $Z \subseteq X$ alt kümesi kapalı bir kümedir ve $(\tau_p)_Z$ alt uzay topolojisi metriklenebilirdir (Han ve diğ., 2017).

Kısmi metrik topolojik uzaylarda ikinci sayılabilir her uzay ayrılabilirdir fakat tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnekte ayrılabilir olup ikinci sayılabilir olmayan bir topoloji örneği verilmiştir.

Örnek 2.2.11: X sayılamaz bir küme ve $a \in X$ olmak üzere $\tau = \{A \subset X \mid a \in A\} \cup \{\emptyset\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. Burada $\{a\}$, X'in yoğun bir alt kümesidir. Bu durumda, (X, τ) topolojik uzayı ayrılabilirdir. Ancak (X,τ) topolojik uzayı ikinci sayılabilir değildir. Her $x, y \in X$ için

$$p(x,y) = \begin{cases} p(a,a) = 0, \\ p(x,x) = p(a,x) = 1, x \neq a \\ p(x,y) = 2, x \neq y, x,y \in X\backslash\{a\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi metriktir. Ayrıca $\tau = \tau_p$ dir (Han ve diğ., 2017).

Teorem 2.2.12: (X, p) bir öz sınırlı kısmi metrik uzay ve $\lambda = \inf\{\lim_{n\to\infty} \sup p(x_n,x_n) \mid (x_n) \subseteq X\}$ olarak tanımlansın. $\alpha = \sup\{p(x,x) \mid x \in X\}$ olmak üzere $\alpha = \lambda$ olması durumda (X,τ_p) kısmi metrik topolojik uzayının ikinci sayılabilir olması için gerek ve yeter koşul (X, τ_p)'nin ayrılabilir olmasıdır (Han ve diğ., 2017).

Kısmi metrik topolojik uzaylarda ikinci sayılabilir her uzay Lindelöf uzayıdır fakat tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnekte Lindelöf uzayı olup ikinci sayılabilir olmayan bir topoloji örneği verilmiştir.

Örnek 2.2.13: X sayılamaz bir küme ve $a \in X$ olmak üzere $\tau = \{A \subset X \mid a \notin A\} \cup \{X\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojik uzay Lindelöf uzayıdır fakat ikinci sayılabilir uzay değildir. Her $x,y \in X$ için

$$p(x,y) = \begin{cases} p(a,a) = 1, & \\ p(x,x) = 0, & x \neq a \\ p(x,y) = 1, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi metriktir. Ayrıca $\tau = \tau_p$ dir (Han ve diğ., 2017).

Teorem 2.2.14: (X, p) bir dizisel simetrik kısmi metrik uzay olsun. Bu durumda (X, τ_p) kısmi metrik topolojik uzayının ikinci sayılabilir olması için gerek ve yeter koşul Lindelöf uzayı olmasıdır (Han ve diğ., 2017).

Sonuç 2.2.15: (X, p) bir dizisel simetrik ve öz sınırlı kısmi metrik uzay, $\alpha = \sup\{p(x,x) | x \in X\}$ ve $\lambda = \inf\{\lim_{n\to\infty} \sup p(x_n,x_n) | (x_n) \subseteq X\}$ olmak üzere $\alpha = \lambda$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1) (X, τ_p) ikinci sayılabilir topolojik uzaydır.

2) (X, τ_p) ayrılabilir topolojik uzaydır.

3) (X, τ_p) Lindelöf uzayıdır (Han ve diğ., 2017).

Sonuç 2.2.16: Lemma 2.2.10'daki koşullar altında eğer $Y \subseteq X$ sayılabilir bir alt küme ve $\left(Y, (\tau_p)_Y\right)$ alt uzay topolojisi ayrılabilir ise (X, τ_p) kısmi metrik uzayı da ayrılabilir topolojik uzaydır (Han ve diğ., 2017).

Tanım 2.2.17: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X üzerinde $\tau_p = \tau$ olacak şekilde bir p kısmi metriği varsa (X, τ) toplojik uzayına kısmi metriklenebilir topolojik uzay denir. Her metriklenebilir topolojik uzay kısmi metriklenebilirdir fakat tersi genelde doğru değildir (Han ve diğ., 2017).

Örnek 2.2.18: 1) $X = \{a,b\}$ ve $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ olsun. Bu durumda (X, τ) kısmi metriklenebilir topolojik uzaydır fakat tek noktalı kümeler kapalı olmadığından metriklenebilir değildir. Eğer $p(a,a) = 0$ ve $p(b,b) = p(a,b) = 1$ alınırsa p, X üzerinde bir kısmi metriktir ve $\tau = \tau_p$ dir (Han ve diğ., 2017).

2) $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir sonsuz bir küme ve $E_n = \{x_i \mid 0 \le i \le n\}$ olsun. $\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kümesi X üzerinde bir topolojidir. Ayrıca,

$$p(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y = x_0 \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}, & (x,y) \in \{(x_n,x_m): 0 \le m \le n \text{ ve } n \ge 1\} \end{cases} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan $p: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi metriktir ve $\tau = \tau_p$ dir. Fakat (X, τ) topolojik uzayı metriklenebilir değildir (Han ve diğ., 2017).

Lemma 2.2.19: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $x,y \in X$ için $p(x,x) = p(y,y)$ ve her $x \neq y \in X$ için $p(x,x) < p(x,y)$ koşulları sağlanıyorsa (X, τ_p) metriklenebilir bir topolojik uzayıdır (Han ve diğ., 2017).

Tanım 2.2.20: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ ve X'deki her (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = p(x,x)$ iken $\lim_{n\to\infty} (p(x_n,x) - p(x_n,x_n)) = 0$ oluyorsa (X, p) kısmi metrik uzayına bir metrik-benzeri denir (Han ve diğ., 2017).

Teorem 2.2.21: (X, p) kısmi metrik uzayı metrik-benzeri ise (X, τ_p) kısmi metrik topolojik uzayı metriklenebilirdir (Han ve diğ., 2017).

Tanım 2.2.22: (X, p_1) ve (X, p_2) iki kısmi metrik uzay olsun. Eğer $\tau_{p_1} = \tau_{p_2}$ ise p_1 ve p_2 kısmi metriklerine X üzerinde denktir denir (Han ve diğ., 2017).

Lemma 2.2.23: X üzerinde her kısmi metrik X üzerinde sınırlı bir kısmi metriğe denktir (Han ve diğ., 2017).

2.3. Kısmi Metrik Uzaylar ile Metrik Uzaylar ve Quasi Metrik Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Teorem 2.3.1: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $x,y \in X$ için

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan $d_p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü X üzerinde bir metriktir. Hatta $x \in X$ için $\omega(x) = p(x,x)$ alınırsa d_p, X üzerinde ağırlıklı metriktir. Ayrıca p'nin ürettiği topoloji ile d_p'nin ürettiği topoloji çakışıktır. Yani $\tau_p = \tau_{d_p}$ dir (Matthews, 1994).

Lemma 2.3.2: X'deki (x_n) dizisinin (X, p) kısmi metrik uzayında Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul (x_n) dizisinin (X, d_p) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olmasıdır (Matthews, 1994).

Önerme 2.3.3: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d_p^0(x,y) = \begin{cases} 0\,, & x = y \\ p(x,y), & x \neq y \end{cases} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan $d_p^0 : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü X üzerinde bir metriktir. Ayrıca $\tau_{d_p} \subseteq \tau_{d_p^0}$ dir (Hitzler ve Seda, 2011).

Lemma 2.3.4: (X, d_p^0) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul (X, p) kısmi metrik uzayının 0-tam olmasıdır (Hitzler ve Seda, 2011).

Aşağıdaki teoremde ağırlıklı metrikten bir kısmi metrik üretilmiştir.

Teorem 2.3.5: (X, d, ω) bir ağırlıklı metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $\omega(x) = p(x,x)$ olmak üzere,

$$p_d(x,y) = \frac{d(x,y)+\omega(x)+\omega(y)}{2} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanan $p_d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi metriktir (Matthews, 1994).

Tanım 2.3.6: (X_1, d_1) ve (X_2, d_2) iki metrik uzay olsun. Eğer $f:(X_1, \tau_{d1}) \to (X_2, \tau_{d2})$ ve $f:(X_1, \tau_{p_{d1}}) \to (X_2, \tau_{p_{d2}})$ fonksiyonları sürekli ise $f:(X_1, p_{d1}) \to (X_2, p_{d2})$ fonksiyonu da süreklidir denir (Matthews, 1994).

Lemma 2.3.7: (X, p) kısmi metrik uzay, (X, d_p), p kısmi metriğinden üretilen metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun.

i) (x_n) dizisinin (X, d_p)'de yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (X, p)'de p-yakınsaklık olmasıdır.

ii) (x_n) dizisinin (X, d_p)'de Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul (x_n)'nin (X, p)'de Cauchy dizisi olmasıdır.

iii) (X, d_p) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul (X, p) kısmi metrik uzayının tam olmasıdır (Matthews, 1994).

Lemma 2.3.8: (X, p) bir metrik-benzeri kısmi metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n), X'de bir dizi olmak üzere $x_n \xrightarrow{\tau_p} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_{d_p}} x$ dir (Han ve diğ., 2017).

Aşağıdaki teoremde kısmi metrikten quasi metrik ve ağırlıklı quasi metrik üretilmiştir.

Teorem 2.3.9: (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $x,y \in X$ için

$$q_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x) \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanan $q_p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü X üzerinde bir quasi metriktir. Hatta $x \in X$ için $\omega(x) = p(x, x)$ alınırsa q_p, X üzerinde ağırlıklı quasi metriktir. Ayrıca p'nin ürettiği topoloji ile q_p'nin ürettiği topoloji çakışıktır. Yani $\tau_p = \tau_{q_p}$ dir (Matthews, 1994).

Aşağıdaki teoremde ağırlıklı quasi metrikten kısmi metrik üretilmiştir.

Teorem 2.3.10: (X, q, ω) bir ağırlıklı quasi metrik uzay olsun. Her $x,y \in X$ için $\omega(x) = p(x,x)$ olmak üzere,

$$p_q(x,y) = q(x,y) + \omega(x) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanan $p_q: X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi metriktir (Matthews, 1994).

2.4. Kısmi Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 2.4.1: (X,p) bir kısmi metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için

$$p(Tx,Ty)\leq \alpha p(x,y) \tag{2.7}$$

olacak şekilde bir $\alpha\in[0,1)$ sabiti mevcut ise T dönüşümüne kısmi daralma dönüşümü denir (Matthews, 1994).

Teorem 2.4.2: (X,p) bir tam kısmi metrik uzay ve $T:X\to X$ bir kısmi daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $x\in X$ için $p(x,x)=0$ olacak şekilde bir tek sabit noktası vardır (Matthews, 1994).

İspat: $x_0\in X$ ve $n\in\mathbb{N}$ olsun. x_0'ın T dönüşümü altında n. iterasyonu ile oluşturulan $x_n=T^n x_0$ dizisini ele alalım.

$$p(x_{n+1},x_n)=p\left(T^{n+1}x_0,T^n x_0\right)\leq \alpha p\left(T^n x_0,T^{n-1}x_0\right)\leq\cdots\leq \alpha^n p(Tx_0,x_0)$$

$n\to\infty$ iken limit alınırsa $\lim_{n\to\infty}p(x_{n+1},x_n)=0$ elde edilir. Her $n,m\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
p(x_n,x_m)&=p(T^n x_0,T^m x_0)\\
&\leq p\left(T^n x_0,T^{n+1}x_0\right)+p\left(T^{n+1}x_0,T^m x_0\right)-p\left(T^{n+1}x_0,T^{n+1}x_0\right)\\
&\leq p\left(T^n x_0,T^{n+1}x_0\right)+p\left(T^{n+1}x_0,T^m x_0\right)\\
&\leq p\left(T^n x_0,T^{n+1}x_0\right)+p\left(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0\right)+\ldots+p\left(T^{m-1}x_0,T^m x_0\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n,m\to\infty$ iken limit alınırsa $\lim_{n,m\to\infty}p(x_n,x_m)=0$ elde edilir. Bu ise (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. (X,p) tam kısmi metrik uzay olduğundan (x_n) dizisi yakınsaktır. Yani $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ olacak şekilde $x\in X$ vardır. Ayrıca $\lim_{n\to\infty}p(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}p(x_n,x_m)=p(x,x)=0$ eşitlikleri sağlanır. Buradan,

$$p(Tx,x)\leq p(Tx,x_n)+p(x_n,x)-p(x_n,x_n)\leq p\left(Tx,Tx_{n-1}\right)+p(x_n,x)$$

dir. $n \to \infty$ iken limit alınırsa $p(Tx,x) = 0$ elde edilir. $p(Tx,Tx) \leq \alpha p(x,x)$ olduğundan $p(Tx,Tx) = 0$ bulunur. $p(Tx,Tx) = p(Tx,x) = p(x,x)$ eşitliklerinden $Tx = x$ olduğu görülür. Yani $x \in X$ noktası sabit noktadır.

Sabit noktanın tekliğini göstermek için x ve y'nin T dönüşümünün birbirinden farklı sabit noktası olduğunu kabul edelim. Burada $p(Tx,Ty) \leq \alpha p(x,y) = \alpha p(Tx,Ty)$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $x = y$ bulunur. Dolayısıyla T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.4.3: (X, p) bir tam kısmi metrik uzay ve $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ azalmayan, her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \phi^n(t) = 0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer $T:X\to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$p(Tx,Ty) \leq \phi\big(p(x,y)\big) \tag{2.8}$$

koşulunu sağlıyorsa bu durumda $x \in X$ için $p(x,x) = 0$ olacak şekilde bir tek sabit noktası vardır (Valero, 2005).

Uyarı 2.4.4: Teorem 2.4.3 de her $t > 0$ ve $\alpha \in [0,1)$ için $\phi(t) = \alpha t$ alınırsa bu teorem ile Teorem 2.4.2 çakışır.

Notasyon: (X, p) bir kısmi metrik uzay, (X, d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ için

$$M_d(x,y) = \max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\tfrac{1}{2}[d(x,Ty)+d(y,Tx)]\},$$

$$M_p(x,y) = \max\{p(x,y),p(x,Tx),p(y,Ty),\frac{1}{2}[p(x,Ty)+p(y,Tx)]\}$$

olsun (Haghi ve diğ., 2013).

Lemma 2.4.5: Her $x, y \in X$ $(x \neq y)$ için $M_{d_p^0}(x,y)=M_p(x,y)$'dir (Haghi ve diğ., 2013).

Teorem 2.4.6: (X, p) bir kısmi metrik uzay, $\phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli, azalmayan ve her $t > 0$ için $\phi(t) < t$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer $T:X\to X$ dönüşümü her $x,y \in X$ için

$$p(Tx,Ty) \leq \phi\left(M_p(x,y)\right) \tag{2.9}$$

koşulunu sağlıyorsa T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Haghi ve diğ., 2013).

Notasyon: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $T:X\rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ için

$$m_p(x,y) = \max\{p(x,y),p(x,Tx),p(y,Ty),p(x,Ty),p(y,Tx)\}$$

olsun (Ilic ve diğ., 2013).

Tanım 2.4.7: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $T:X\rightarrow X$ bir dönüşüm olsun.

1) Her $x,y \in X$ için $p(Tx,Ty) \leq \max\{\alpha m_p(x,y), p(x,x),p(y,y)\}$ (2.10)

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ sabiti varsa T dönüşümüne bir p_1-quasi daralma dönüşümü denir.

2) Her $x,y \in X$ için $p(Tx,Ty) \leq \max\left\{\alpha m_p(x,y), \frac{p(x,x)+p(y,y)}{2}\right\}$ (2.11)

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ sabiti varsa T dönüşümüne bir p_2-quasi daralma dönüşümü denir (Ilic ve diğ., 2013).

Lemma 2.4.8: (X, p) bir kısmi metrik uzay, $T:X\rightarrow X$ bir p_1-quasi daralma dönüşümü ve n, m, k tamsayıları $m \geq n \geq k \geq 1$ şeklinde olsun. Eğer $i \in \{n-k, \ldots, n-1\} \cup \{m-k, \ldots, m-1\}$ için $p\left(T^i x, T^i x\right) < p(T^n x, T^m x)$ ise $i_0, j_0 \in \{n-k, \ldots, m\}$ için $p(T^n x, T^m x) \leq \alpha^k p\left(T^{i_0} x, T^{j_0} x\right)$ dır (Ilic ve diğ., 2013).

Lemma 2.4.9: (X, p) bir kısmi metrik uzay, $T:X\rightarrow X$ bir p_1-quasi daralma dönüşümü ve $x,y \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) Her $i, j \geq 0$ için $p\left(T^i x,T^j x\right) \leq \frac{1}{1-\alpha} p(x,Tx) + p(x,x)$ dir.

ii) $p\left(T^i x,T^i x\right) = \sup_{i\geq 0} p\left(T^i x,T^i x\right)$ olacak şekilde bazı $i \geq 0$ vardır.

iii) $\lim_{n,m\to\infty} p(T^n x, t^m x) = \limsup_i p\left(T^i x, T^i x\right)$ dir.

iv) $\lim_{n,m\to\infty} p(T^n x, t^m x) = \lim_{n\to\infty} p(T^n x, y) = p(y,y)$ ise $p(y,y) = p(y,Ty)$ dir (Ilic ve diğ., 2013).

Teorem 2.4.10: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $T{:}X\to X$ bir p_1-quasi daralma dönüşümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) Her $x \in X$ için $(T^n x)$ dizisi $p(x_0,x_0) = p(x_0,Tx_0)$ olacak şekildeki $x_0 \in X$ noktasına p-yakınsaktır.

ii) $Tx = x$ olacak şekilde $x \in X$ noktaları vardır ve $p(x,x) = \inf_{x_0\in X} p(x_0,x_0)$ dır (Ilic ve diğ., 2013).

Teorem 2.4.11: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $T{:}X\to X$ bir p_2-quasi daralma dönüşümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) Her $x \in X$ için $(T^n x)$ dizisi $p(x_0,x_0) = p(x_0,Tx_0)$ olacak şekildeki $x_0 \in X$ noktasına p-yakınsaktır.

ii) $Tx = x$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ noktası vardır ve $p(x,x) = \inf_{x_0\in X} p(x_0,x_0)$ dır (Ilic ve diğ., 2013).

3. BULANIK METRİK UZAYLAR

Bu bölümde, Kramosil ve Michalek (1975) ile George ve Veeramani (1994) tarafından verilen bulanık metrik uzay kavramı temel özellikleri ile birlikte incelenecektir. Daha sonra, bulanık metrik uzaylar üzerinde literatürde mevcut olan bazı sabit nokta teoremleri verilecektir.

3.1. Bulanık Metrik Uzay Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 3.1.1: X boştan farklı bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $M:X\times X\times[0,\infty) \to [0,1]$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun.

(KM1) Her $x,y \in X$ için $M(x,y,0) = 0$ dır.

(KM2) Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için $M(x,y,t) = 1 \Leftrightarrow x = y$ dir.

(KM3) Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için $M(x,y,t) = M(y,x,t)$ dir.

(KM4) Her $x,y,z \in X$ ve $t,s > 0$ için $M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$ dir.

(KM5) Her $x,y \in X$ için $M(x,y,\cdot) : [0,\infty) \to [0,1]$ sol süreklidir.

Bu durumda $(M,*)$ ikilisine X üzerinde KM-bulanık metrik ve $(X,M,*)$ üçlüsüne KM-bulanık metrik uzay denir (Kramosil ve Michalek, 1975).

1994'de George ve Veeramani yukarıdaki tanımla bulanık metrik uzayın genel olarak Hausdorff uzay olmadığını göstermiş ve bu özelliği elde etmek için tanımı aşağıdaki gibi düzenlemiştir.

Tanım 3.1.2: X boştan farklı bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $M:X\times X\times(0,\infty) \to [0,1]$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun.

(GV1) Her $x,y \in X$ ve her $t > 0$ için $M(x,y,t) > 0$, (GV2) Her $x,y \in X$ ve $\forall t > 0$ için $M(x,y,t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,

(GV3) Her $x,y \in X$ ve her $t > 0$ için $M(x,y,t) = M(y,x,t)$,

(GV4) Her $x,y,z \in X$ ve her $t, s > 0$ için $M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$,

(GV5) Her $x,y \in X$ için $M(x,y,\cdot): (0,\infty) \rightarrow [0,1]$ süreklidir.

Bu durumda $(M,*)$ ikilisine X üzerinde bir GV-bulanık metrik ve $(X,M,*)$ üçlüsüne GV-bulanık metrik uzay denir (George ve Veeramani, 1994).

$M(x,y,t)$ değeri x ile y'nin t parametresine göre birbirine yakın olma derecesidir. Buna göre, yakınlık derecesinin sıfır olması noktaların birbirine çok uzak olması anlamına gelir.

Tanım 3.1.3: $(X, M, *)$ KM-bulanık metrik uzayı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu bulanık metrik uzaya güçlü KM-bulanık metrik uzay denir.
Her $x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ için

$M(x,y,t) * M(y,z,t) \leq M(x,z,t)$

veya denk olarak

$M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,\max\{t,s\})$ dir (Gregori ve diğ., 2010).

Aksi belirtilmedikçe verilen özellikler hem KM-bulanık metrik uzaylar hem de GV-bulanık metrik uzaylar için geçerlidir.

Lemma 3.1.4: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay olmak üzere her $x,y \in X$ için $M(x, y, \cdot): (0,\infty) \rightarrow [0,1]$ azalmayandır (Grabiec, 1998).

İspat: $0 < t < s$ için $M(x,y,t) > M(x,y,s)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$M(x,y,t) * M(y,y,s\text{-}t) \leq M(x,y,s) < M(x,y,t)$ olur.

$M(y,y,s\text{-}t) = 1$ olduğundan $M(x,y,t) < M(x,y,t)$ elde edilir. Bu ise çelişkidir.

Örnek 3.1.5: $X = \mathbb{R}$ ve $*$ t-norm her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olsun. $M: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,\infty) \rightarrow (0,1]$ dönüşümü her $x,y \in X$ ve $t \in (0,\infty)$ için

$$M(x,y,t) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{R},M,*)$ bir GV-bulanık metrik uzaydır.

Bu örnekte $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir X kümesi, $|x-y|$ yerine de X üzerinde tanımlı herhangi bir d metriği alındığında $(X,M,*)$ yine GV-bulanık metrik uzay olmaktadır. Ayrıca, $a *_{min} b = \min\{a,b\}$ t-normu aldığında $(\mathbb{R},M,*_{min})$ GV-bulanık metrik uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Örnek 3.1.6: (X, d) bir metrik uzay ve $*$ t-normu her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ (ya da $a * b = \min\{a,b\}$) olsun. $M_d{:}X\times X\times\mathbb{R}^+ \to [0,1]$ dönüşümü her k, m, n $\in \mathbb{R}^+$ ve $x,y \in X$ için

$$M_d(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n+md(x, y)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X,M_d,*)$ bir bulanık metrik uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Uyarı 3.1.7: Yukarıdaki örnekte her metrik uzaydan bir bulanık metrik uzay elde edilebileceği gösterilmektedir. Özel olarak $k = m = n = 1$ alınırsa,

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x, y)} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan M_d bulanık metriğine d metriği tarafından üretilen standart bulanık metrik denir (George ve Veeramani, 1994).

Uyarı 3.1.8: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay olmak üzere her zaman $M(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ olacak şekilde X üzerinde bir d metriği olması gerekmez (George ve Veeramani, 1994).

Örnek 3.1.9: $X = \mathbb{N}$ ve $*$ t-normu her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olsun. $M: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+ \to (0,1]$ dönüşümü her $x,y \in \mathbb{N}$ için

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x \le y \\ \frac{y}{x}, & y \le x \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{N},M,*)$ bir GV-bulanık metrik uzaydır. Fakat $M(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı hiçbir d metriği yoktur (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.1.10: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$ oluyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir. Bu durum $x_n \to x$ ile gösterilir. Yani,

$$x_n \to x \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall\, n \ge n_0 \text{ için } M(x_n,x_0,t) > 1-\varepsilon$$

dir (Grabiec, 1988).

Tanım 3.1.11: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$, $p > 0$ ve $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ ise (x_n) dizisine bir G-Cauchy dizisi denir (Grabiec, 1988).

Tanım 3.1.12: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer X'deki her G-Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ise bu uzaya G-tam bulanık metrik uzay denir (Grabiec, 1988).

Uyarı 3.1.13: $(\mathbb{R}, M_d,*)$ standart bulanık metrik uzayı G-tam değildir (George ve Veeramani, 1994).

Örnek 3.1.14: $\mathbb{R}$ üzerindeki d metriği $d(x,y) = |x-y|$ ve $*$ sürekli t-normu her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olmak üzere $(\mathbb{R}, M_d,*)$ standart bulanık metrik uzay olsun. $\mathbb{R}$'de, $S_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ şeklinde bir (S_n) dizisini ele alalım. Her $p > 0$ için

$$M_d(S_{n+p},S_n,t) = \frac{t}{t+|S_{n+p}-S_n|} = \frac{t}{t+\left(\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p}\right)}$$

dir. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} M_d(S_{n+p},S_n,t) = 1$ olur. Bu durumda (S_n) dizisi $(\mathbb{R}, M_d,*)$ bulanık metrik uzayında bir G-Cauchy dizisidir.

Şimdi de ℝ'nin bulanık metrik uzaylarda tam olduğunu varsayalım. Bu durumda (S_n) G-Cauchy dizisi en az bir $x \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsaktır yani $\lim_{n\to\infty} M_d(S_n,x,t) = 1$ dir. Buradan $\lim_{n\to\infty} \frac{t}{t+|S_n-x|} = 1$ dolayısıyla

$\lim_{n\to\infty}|S_n - x| = 0$ elde edilir. Böylece $(\mathbb{R},d)$ metrik uzayında (S_n) dizisi x'e yakınsak olmalıdır. Ancak $\mathbb{R}'$de (S_n) dizisi yakınsak bir dizi değildir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak ℝ bulanık metrik uzaylarda G-tam değildir (George ve Veeramani, 1994).

ℝ'nin tam bulanık metrik uzay olması için George ve Veeramani, Cauchy dizisi tanımını aşağıdaki gibi vermişlerdir.

Tanım 3.1.15: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Her $n,m \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $\lim_{n,m\to\infty} M(x_n, x_m, t) = 1$ ise (x_n) dizisine bir M-Cauchy dizisi denir (George ve Veeramani,1994).

Tanım 3.1.16: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer X'deki her M-Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ise bu uzaya M-tam bulanık metrik uzay denir (Gregori ve Sapena, 2002).

Önerme 3.1.17: (X, d) bir metrik uzay ve $(X,M_d,*)$ bir standart bulanık metrik uzay olsun. $(X,M_d,*)$ bulanık metrik uzayının M-tam olabilmesi için gerek ve yeter koşul (X, d) metrik uzayının tam olmasıdır (George ve Veeramani, 1994).

Sonuç 3.1.18: Tanım 3.1.21'ye göre ℝ, M-tam bulanık metrik uzay olur (George ve Veeramani, 1994).

İspat: $(\mathbb{R},M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n), ℝ'de bir M-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$, $t > 0$ için $n,m \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buna göre her $n \geq n_0$ için $M(x_n,x_{n_0},t) > 1 - \varepsilon$ olur. Yani $x_n \in B(x_{n_0},\varepsilon,t)$ dir. $A = \{x_{n_0},x_{n_0+1},x_{n_0+2}, ...\}$ olarak alınırsa $A \subset B(x_{n_0},\varepsilon,t)$ olur. Yani A sınırlıdır. $B = \{x_1,x_2,\ldots,x_{n_0-1}\}$ olsun. B sonlu olduğundan sınırlıdır. $(x_n) = A \cup B$

olduğundan (x_n) sınırlıdır. Bolzano-Weierstrass Teoremine göre $\mathbb{R}$ nin sonsuz elemanlı sınırlı her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır. Kabul edelim ki x, (x_n) dizisinin bir yığılma noktası olsun. Bu durumda $x_{n_k} \to x$ olacak şekilde $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ alt dizisi vardır. $x_{n_k} \to x$ olduğundan her $0 < r < 1$ için $n_k \geq n_1$ iken $x_{n_k} \in B(x,r,t)$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $0 < r < 1$ için $n_k \geq n_1$ iken $M(x_{n_k},x,t) > 1 - r$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ bulunur. $n_2 = \text{maks}\,\{n_0, n_1\}$ olsun. Her $n \geq n_2$ için

$$M(x_n,x,2t) \geq M(x_n,x_{n_k},t) * M(x_{n_k},x,t) > (1 - \varepsilon) * (1 - r)$$

dir. Ayrıca $\varepsilon > 0$ ve $r \in (0,1)$ için $(1 - \varepsilon) * (1 - r) < 1 - s$ olacak biçimde $s \in (0,1)$ vardır. Ayrıca $2t = t'$ denirse $M(x_n,x,t') > 1 - s$ yani $x_n \in B(x,s,t')$ olur. Buna göre $x_n \to x$ bulunur. Böylece $\mathbb{R}$, M-tam bulanık metrik uzaydır.

Tanım 3.1.19: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayında her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise bu uzaya kompakt bulanık uzay denir (Grabiec, 1988).

3.2. Bulanık Metrik Topoloji ve Özellikleri

Tanım 3.2.1: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, $x \in X$, $r \in [0,1]$ ve $t > 0$ olsun.

$$B(x, r, t) = \{\, y \in X \mid M(x,y,t) > 1 - r \}$$

şeklinde tanımlanan kümeye x merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 3.2.2: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $a \in A$ için $B(a, r, t) \subseteq A$ olacak şekilde $r \in [0,1]$ varsa A kümesine açık küme denir (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 3.2.3: $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayında her açık yuvar bir açık kümedir (George ve Veeramani, 1994).

İspat: $x \in X$, $r \in (0,1)$, $t > 0$ ve $y \in B(x, r, t)$ olsun. $B(x, r, t)$'nin tanımından $y \in B(x, r, t)$ ise $M(x,y,t) > 1 - r$ dir. $M(x,y,t) > 1 - r$ olduğundan $M(x,y,t_0) > 1 - r$ olacak biçimde $t_0 \in (0,t)$ vardır. $r_0 = M(x,y,t_0)$ olsun.

$r_0 = M(x,y,t_0) > 1 - r$ olduğundan $r_0 > 1 - s > 1 - r$ olacak biçimde $s \in (0,1)$ vardır. Ayrıca $r_0 > 1 - s$ olduğundan $r_0 * r_1 \geq 1 - s$ olacak şekilde $r_1 \in (0,1)$ vardır. Şimdi $B(y, 1 - r_1, t - t_0)$ açık yuvarını göz önüne alalım. $B(y, 1 - r_1, t - t_0) \subset B(x, r, t)$'dir. Gerçekten, $z \in B(y, 1 - r_1, t - t_0)$ ise $M(y,z,t\text{-}t_0) > 1 - (1 - r_1) = r_1$ dir.

$$M(x,z,t) \geq M(x,y,t_0) * M(y,z,t\text{-}t_0) > r_0 * r_1 \geq 1 - s > 1 - r$$

olduğundan $z \in B(x, r, t)$ elde edilir. Böylece $B(y, 1 - r_1, t - t_0) \subset B(x, r, t)$ dir. Bu durumda $B(x, r, t)$ açık kümedir.

Teorem 3.2.4: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun.

$$\tau = \{A \subseteq X \mid \text{her } x \in A \text{ için } B(x, r, t) \subseteq A \text{ ol. şek } t > 0 \text{ ve } r \in (0,1) \text{ vardır}\}$$

şeklinde tanımlanan τ ailesi X üzerinde bir topolojidir. (George ve Veeramani, 1994).

İspat: $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$ olduğu açıktır. $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in \tau$ olsun. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ dur. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$ ve $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ olsun. Bu durumda her $i = 1,2, \ldots, n$ için $x \in A_i$ ve $A_i \in \tau$ olduğundan her $i = 1,2, \ldots, n$ için $B(x, r, t) \subset B(x, r_i, t) \subset A_i$ olacak biçimde $r_i \in (0,1)$ ve $t > 0$ vardır. O halde, $B(x, r, t) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ elde edilir. Yani $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ dir.

$\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ iken $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ olduğunu görelim. $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ olduğu açıktır. $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ olsun. Bu durumda $x \in A_{i_0}$ olacak şekilde en az bir $i_0 \in I$ vardır. $A_{i_0} \in \tau$ olduğundan $B(x, r, t) \subset A_{i_0}$ olacak biçimde $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ vardır. $A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ olduğundan $B(x, r, t) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ olur. O halde $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dir. Böylece τ, X üzerinde bir topolojidir.

Teorem 3.2.5: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, $x \in X$ ve τ, M bulanık metriği tarafından üretilen bir topoloji olsun. Bu durumda,

$$E(x) = \left\{B\left(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \mid n = 1, 2, \ldots\right\}$$

ailesi x noktasının komşuluk tabanıdır (George ve Veeramani, 1994).

İspat: N, x'in bir komşuluğu olsun. Komşuluk tanımından $x \in U \subset N$ olacak şekilde en az bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. $U \subset X$ açık olduğundan $B(x, r, t) \subset U$ olacak şekilde $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ vardır. $\frac{1}{n} < r$ ve $\frac{1}{n} < t$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda $B\left(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset B(x, r, t)$ elde edilir. Gerçekten $z \in B\left(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ iken $M\left(x,z,\frac{1}{n}\right) > 1 - \frac{1}{n} > 1 - r$ olur. $M\left(x,z,\frac{1}{n}\right) * M\left(z,z,t\text{-}\frac{1}{n}\right) \leq M(x,z,t)$ ve $M\left(z,z,t\text{-}\frac{1}{n}\right) = 1$ olduğundan $M\left(x,z,\frac{1}{n}\right) \leq M(x,z,t)$ bulunur. Ayrıca $M\left(x,z,\frac{1}{n}\right) > 1 - r$ eşitsizliğinden $M(x,z,t) > 1 - r$ dir. Dolayısıyla $z \in B(x, r, t)$ dir. Böylece $B\left(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset B(x, r, t) \subset U \subset N$ olur. Sonuç olarak $E(x)$ kümesi x noktası için bir komşuluk tabanıdır.

Sonuç 3.2.6: Teorem 3.2.5'e göre (X, τ) topolojik uzayı birinci sayılabilir uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 3.2.7: Her GV-bulanık metrik uzayı bir Hausdorff uzayıdır (George ve Veeramani, 1994).

İspat: $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $x,y \in X$ $(x \neq y)$ olsun. $x \neq y$ olduğundan $0 < M(x,y,t) < 1$ dir. $r = M(x,y,t)$ olarak alınırsa her $r_0 \in (r, 1)$ için $r_1 * r_1 \geq r_0$ eşitsizliğini sağlayan bir $r_1 \in (0,1)$ bulunur. $B\left(x,1\text{-}r_1,\frac{1}{2}t\right)$ ve $B\left(y,1\text{-}r_1,\frac{1}{2}t\right)$ açık yuvarlarını ele alalım. $B\left(x,1\text{-}r_1,\frac{1}{2}t\right) \cap B\left(y,1\text{-}r_1,\frac{1}{2}t\right) = \emptyset$ dir. Aksi takdirde $z \in B\left(x,1\text{-}r_1,\frac{1}{2}t\right) \cap B\left(y,1\text{-}r_1,\frac{1}{2}t\right)$ ise

$$r = M(x,y,t) \geq M\left(x,z,\frac{1}{2}t\right) * M\left(x,z,\frac{1}{2}t\right) \geq r_1 * r_1 \geq r_0 > r$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $x,y \in X$ $(x \neq y)$ için $B\left(x,1\text{-}r_1,\frac{1}{2}t\right) \cap B\left(y,1\text{-}r_1,\frac{1}{2}t\right) = \emptyset$ dir. Yani $(X, M, *)$ bulanık metrik uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

Teorem 3.2.8: (X, d) bir metrik uzay, $M_d(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ ve M_d, X üzerinde bir standart bulanık metrik olsun. d metriği tarafından üretilen topoloji τ_d ile M_d standart bulanık metriği tarafından üretilen topoloji τ_{M_d} çakışıktır. Yani $\tau_d = \tau_{M_d}$ dir (George ve Veeramani, 1994).

İspat: $\tau_d \subset \tau_{M_d}$ olduğunu göstermek için her $x \in X$ ve her $r > 0$ için $B_{M_d}(x,r',t) \subset B_d(x,r)$ olacak şekilde bir $r' \in (0,1)$ ve $t > 0$ olduğunu gösterelim. $r' = \frac{r}{t+r}$ ve $y \in B_{M_d}(x,r',t)$ olsun. Bu durumda $M_d(x,y,t) > 1 - r'$ elde edilir. Dolayısıyla $M_d(x,y,t) > \frac{t}{t+r}$ olup $\frac{t}{t+d(x,y)} > \frac{t}{t+r}$ elde edilir. Buradan $d(x,y) < r$ dir. Sonuç olarak $y \in B_d(x,r)$ elde edilir. Yani $B_{M_d}(x,r',t) \subset B_d(x,r)$ dir. $T_{M_d} \subset T_d$ olduğunu göstermek için her $x \in X$, her $t > 0$ ve her $r' \in (0,1)$ için $B_d(x,r) \subset B_{M_d}(x,r',t)$ olacak şekilde bir $r > 0$ olduğunu gösterelim. $r = \frac{t.r'}{1-r'}$ olsun. $y \in B_d(x,r)$ için $d(x,y) < \frac{t.r'}{1-r'}$ dir. Buradan $\frac{t}{t+d(x,y)} > 1 - r'$ elde edilir. Yani $M_d(x,y,t) > 1 - r'$ dir. Dolayısıyla $y \in B_{M_d}(x,r',t)$ dir ve buradan da $B_d(x,r) \subset B_{M_d}(x,r',t)$ olduğu sonucuna varılır.

3.3. Bulanık Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 3.3.1: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve $T{:}X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(Tx,Ty,kt) \geq M(x,y,t) \tag{3.2}$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ mevcut ise T dönüşümüne bulanık daralma dönüşümü denir (Grabiec, 1988), (Sehgal ve Bharucha-Reid, 1972).

Teorem 3.3.2: (KM-Bulanık metrik uzaylarda Banach daralma teoremi) $(X,M,*)$ bir G-tam KM-bulanık metrik uzay olmak üzere her $x,y \in X$ için $\lim_{t\to\infty} M(x,y,t) = 1$ olsun. $T{:}X \to X$ bulanık daralma dönüşümü ise bir tek sabit noktası vardır (Grabiec, 1988).

İspat: $x \in X$ ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = T^n x$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $M(x_n,x_{n+1},kt) \geq M(x,x_1,\frac{t}{k^{n-1}})$ olduğu tümevarım yöntemi ile kolaylıkla gösterilir. Ayrıca $p \in \mathbb{Z}^+$ için

$$M(x_n,x_{n+p},t) \geq M\left(x_n,x_{n+1},\frac{t}{p}\right) * \ldots * M\left(x_{n+p-1},x_{n+p},\frac{t}{p}\right)$$

$$\geq M\left(x,x_1,\frac{t}{pk^n}\right) * \ldots * M(x,x_1,\frac{t}{pk^n})$$

elde edilir. Hipotezden $\lim_{n\to\infty} M\left(x,x_1,\frac{t}{pk^n}\right) = 1$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} M(x_n,x_{n+p},t) = 1$ bulunur. O halde, (x_n) bir Cauchy dizisidir. $(X,M,*)$ G-tam bulanık metrik uzay olduğundan (x_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. Bu durumda,

$$M(Ty,y,t) \geq M\left(Ty,x_{n+1},\frac{t}{2}\right) * M\left(x_{n+1},y,\frac{t}{2}\right) \geq M\left(Ty,Tx_n,\frac{t}{2}\right) * M\left(x_{n+1},y,\frac{t}{2}\right)$$

$$\geq M\left(y,x_n,\frac{t}{2k}\right) * M\left(x_{n+1},y,\frac{t}{2}\right) \geq 1 * 1 = 1$$

elde edilir. Buradan $M(Ty,y,t) = 1$ bulunur. Sonuç olarak $y \in X$, T'nin sabit noktasıdır. Şimdi ise sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Bunun için y ve z'nin T'nin birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$1 \geq M(z,y,t) = M(Tz,Ty,t) \geq M\left(z,y,\frac{t}{k}\right) = M\left(Tz,Ty,\frac{t}{k}\right) \geq M\left(z,y,\frac{t}{k^2}\right)$$

$$\geq \cdots \geq M\left(z,y,\frac{t}{k^n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

olur. Böylece $z = y$ olduğu elde edilir. Yani T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 3.3.3: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve $T{:}X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ $(x\neq y)$ ve $t > 0$ için

$$M(Tx,Ty,t) > M(x,y,t) \tag{3.3}$$

ise T dönüşümüne Edelstein bulanık daralma dönüşümü denir (Grabiec, 1988).

Uyarı 3.3.4: Her bulanık daralma dönüşümü aynı zamanda Edelstein bulanık daralma dönüşümüdür (George ve Veeramani, 1994).

Teorem 3.3.5: (KM-Bulanık metrik uzayda Edelstein bulanık daralma teoremi) $(X,M,*)$ bir kompakt KM-bulanık metrik uzay ve her $x,y \in X$ için

$M(x,y,\cdot):[0,\infty)\rightarrow[0,1]$ sürekli olsun. $T:X\rightarrow X$ dönüşümü Edelstein bulanık daralma dönüşümü ise bir tek sabit noktası vardır (Grabiec, 1988).

İspat: $x\in X$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n\neq x_{n+1}$ olacak şekilde $x_n=T^n x$ iterasyon dizisi olsun. $(X,M,*)$ kompakt uzay olduğundan (x_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. (x_{n_i}) alt dizisi ve $y\in X$ bu alt dizinin limiti olsun. $y,Ty\notin\{x_{n_i}:n_i\in\mathbb{N}\}$ olduğunu varsayalım. T Edelstein bulanık daralma dönüşümü olduğundan $M(Tx_{n_i},Ty,t)>M(x_{n_i},y,t)$ dir. $M(x,y,\cdot)$ sürekli olduğu için $\lim_{n_i\to\infty}M(Tx_{n_i},Ty,t)\geq\lim_{n_i\to\infty}M(x_{n_i},y,t)=1$ olur. Böylece $\lim_{n_i\to\infty}Tx_{n_i}=Ty$ dir. Benzer şekilde $\lim_{n_i\to\infty}T^2x_{n_i}=T^2y$ elde edilir. Her $t>0$ için
$M(x_{n_1},Tx_{n_1},t)<M(Tx_{n_1},T^2x_{n_1},t)<\cdots<M(Tx_{n_i},T^2x_{n_i},t)<\cdots<1.$
Buradan $\{M(x_{n_i},Tx_{n_i},t)\}$ ve $\{M(Tx_{n_i},T^2x_{n_i},t)\}$ dizilerinin aynı noktaya yakınsadığı görülür ve her $t>0$ için
$M(y,Ty,t)=M(\lim x_{n_i},T(\lim x_{n_i}),t)=\lim M(x_{n_i},Tx_{n_i},t)$
$=\lim M(Tx_{n_i},T^2x_{n_i},t)=M(\lim Tx_{n_i},\lim T^2x_{n_i},t)=M(Ty,T^2y,t)$
elde edilir. $Ty\neq y$ olduğunu varsayarsak $M(y,Ty,t)<M(Ty,T^2y,t)$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $y\in X$, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliği Teorem 3.3.2'nin ispatına benzer şekilde gösterilir.

Tanım 3.3.6: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve $T:X\rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ ve $t>0$ için

$$\frac{1}{M(Tx,Ty,t)}-1\leq k\left(\frac{1}{M(x,y,t)}-1\right) \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $k\in(0,1)$ mevcut ise T dönüşümüne GS-bulanık daralma dönüşümü denir (Gregori ve Sapena, 2002).

Tanım 3.3.7: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ ve $t>0$ için

$$\frac{1}{M(x_{n+1},x_{n+2},t)}-1\leq k\left(\frac{1}{M(x_n,x_{n+1},t)}-1\right) \tag{3.5}$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ mevcut ise (x_n) dizisine GS-bulanık daralan dizi denir (Gregori ve Sapena, 2002).

Uyarı 3.3.8: Her $t > 0$ için $M(x,y,t) > 0$ şartını sağlayan KM-bulanık metrik uzayında her GS-bulanık daralma dönüşümü aynı zamanda Edelstein bulanık daralma dönüşümüdür (Gregori ve Sapena, 2002).

Fakat bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnekte Edelstein bulanık daralma dönüşümü olup GS-bulanık daralma dönüşümü olmayan bir dönüşüm örneği verilmiştir.

Örnek 3.3.9: $M: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times (0,\infty) \to [0,1]$ dönüşümü her $x,y \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & y \leq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{N},M,\cdot)$ bir KM-bulanık metrik uzaydır. $Tx = x + 1$ dönüşümü Edelstein bulanık daralma dönüşümüdür fakat GS-bulanık daralma dönüşümü değildir (Mihet, 2007).

Önerme 3.3.10: $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümünün bir k sabiti ile d metriği tarafından üretilen $(X,M_d,*)$ bulanık metrik uzay üzerinde GS-bulanık daralma dönüşümü olabilmesi için gerek ve yeter koşul T dönüşümünün yine aynı k daralma sabiti ile (X, d) metrik uzayında bir daralma dönüşümü olmasıdır (Gregori ve Sapena, 2002).

Önerme 3.3.11: (X, d) bir metrik uzay, $(X,M_d,*)$ standart bulanık metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. (x_n) dizisinin (X, d) metrik uzayında daralan dizi olması için gerek ve yeter koşul (x_n) dizisinin $(X,M_d,*)$ standart bulanık metrik uzayında GS-bulanık daralan dizisi olmasıdır (Gregori ve Sapena, 2002).

Teorem 3.3.12: (GV-Bulanık metrik uzayda GS-bulanık daralma teoremi) $(X, M, *)$ GS-bulanık daralan dizilerin M-Cauchy dizisi olduğu bir GV-bulanık M-tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir GS-bulanık daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Gregori ve Sapena, 2002).

İspat: $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x$ iterasyon dizisi olsun. T, GS-bulanık daralma dönüşümü olduğundan

$$\frac{1}{M(x_n,x_{n+1},t)} - 1 = \frac{1}{M\left(Tx_n,Tx_{n-1},t\right)} - 1 \le k\left(\frac{1}{M\left(x_n,x_{n-1},t\right)} - 1\right)$$

dir. Buradan (x_n) dizisinin bulanık daralan dizi olduğu görülür. Hipotezden (x_n) dizisi bir M-Cauchy dizisidir. $(X,M,*)$ M-tam bulanık metrik uzay olduğundan (x_n) yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} M(x_n,y,t) = 1$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. Şimdi y noktasının T dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterelim. T dönüşümü GS-bulanık daralma dönüşümü olduğundan

$$\frac{1}{M(Tx_n,Ty,t)} - 1 \le k\left(\frac{1}{M(x_n,y,t)} - 1\right)$$

eşitsizliğini sağlar. $n \to \infty$ iken limit alınırsa $\frac{1}{M(x_n,y,t)} - 1 \to 0$ olur. Buradan $M(x_n,y,t) \to 1$ elde edilir. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = Ty$ olduğu görülür. Böylece $Ty = y$ elde edilir. Sabit noktanın tekliğini göstermek için y ve z'nin T'nin birbirinden farklı iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\frac{1}{M(y,z,t)} - 1 = \frac{1}{M(Ty,Tz,t)} - 1 \le k\left(\frac{1}{M(y,z,t)} - 1\right) = k\left(\frac{1}{M(Ty,Tz,t)}\right)$$

$$\le k^2\left(\frac{1}{M(y,z,t)} - 1\right) \le \cdots \le k^n\left(\frac{1}{M(y,z,t)} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

elde edilir. Böylece $M(y,z,t) = 1$ olup $y = z$ olduğu görülür.

Sonuç 3.3.13: $(X,M_d,*)$ bir tam standart GV-bulanık metrik uzay ve $T:X\to X$ bir GS-bulanık daralma dönüşümü olsun. Bu durumda, T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Gregori ve Sapena, 2002).

Teorem 3.3.2'deki daralma koşulu ile verilen Banach daralma teoremi GV-bulanık metrik uzaylarda da verilebilir fakat G-Cauchy tanımı M-cauchy tanımından daha zayıf olduğu için Teorem 3.3.2'deki koşullar GV-bulanık metrik uzaylarda Cauchy dizisi inşa etmek için yeterli değildir. Bu daralma koşulu ile GV-bulanık metrik uzaylarda Banach daralma teoremini ifade edebilmek için bazı ek kavramlar gereklidir.

Notasyon: $(X,M,*)$ GV-bulanık metrik uzayında her $x,y \in X$ ve her $t_i > 0$ $(i = 1,2, \ldots)$ için $M(x,y,t_1) * M(x,y,t_2) * \ldots * M(x,y,t_n) * \ldots$ sonsuz çarpımı $\prod_{i=1}^{\infty} M(x,y,t_i)$ ile gösterilsin.

Tanım 3.3.14: $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif reel sayılar dizisi olsun. Her $m \geq m_0$ için $t_m + 1 \leq t_{m+1}$ olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ mevcut ise bu diziye s-artan dizi denir (Gregori ve Sapena, 2002).

Teorem 3.3.15: (GV-Bulanık metrik uzayda Banach daralma teoremi) $(X,M,*)$ bir tam GV-bulanık metrik uzay, (t_n), X'de s-artan bir dizi olsun ve aşağıdaki iki koşuldan biri sağlansın.

i) Her $\varepsilon > 0$ için $\prod_{n\geq n_0} M(x,y,t_n) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

ii) $*$ t-norm her $a,b \in (0,1]$ için $a * b = ab$ iken $\prod_{n\geq n_0} M(x,y,t_n)$ yakınsaktır.

Eğer T:X→X dönüşümü bulanık daralma dönüşümü ise T'nin bir tek sabit noktası vardır (Gregori ve Sapena, 2002).

Teorem 3.3.16: (KM-Bulanık metrik uzayda GS-bulanık daralma teoremi) $(X,M,*)$ bir G-tam KM-bulanık metrik uzay ve T:X→X dönüşümü GS-bulanık daralma dönüşümü olsun. Bu durumda, T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Gregori ve Sapena, 2002).

Tanım 3.3.17: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. $\lim_{n\to\infty} M(x,x_n,t) = 1$ olacak şekilde bir $t > 0$ mevcut ise (x_n) dizisi x'e nokta yakınsaktır (p-yakınsak) denir ve $x_n \xrightarrow{p} x$ olarak ifade edilir (Mihet, 2007).

Uyarı 3.3.18: Her yakınsak dizi p-yakınsaktır fakat tersi her zaman doğru değildir.

Aşağıdaki örnekte p-yakınsak olup yakınsak olmayan bir dizi verilmiştir.

Örnek 3.3.19: $X = \{(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(0,\infty)$'de bir dizi ve $(x_n) \nearrow 1$ olsun. Her n,m $\in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için

$M(x_n,x_n,t) = 1$; $\quad M(1,1,t) = 1$; $\quad M(x_n,x_m,t) = \min\{x_n,x_m\}$ ve

$$M(x_n,1,t) = \begin{cases} \min\{x_n,t\}, & 0 < t < 1 \\ x_n, & t > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $*$ t-normu $a * b = \min\{a,b\}$ iken $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzaydır. $\lim_{n\to\infty} M\left(x_n,1,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ olduğundan (x_n) dizisi yakınsak değildir. Fakat $\lim_{n\to\infty} M(x_n,1,2) = 1$ olduğu için (x_n) 1'e p-yakınsaktır (Mihet, 2007).

Teorem 3.3.20: $(X,M,*)$ bir GV-bulanık metrik uzay ve $T{:}X\to X$ dönüşümü GS-bulanık daralma dönüşümü olsun. $x \in X$ için $x_n = T^n x$ iterasyon dizisinin x noktasına p-yakınsak olan bir alt dizisi mevcut ise T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Mihet, 2007).

Aşağıdaki örnekte Teorem 3.3.20'nin KM-bulanık metrik uzaylar için geçerli olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 3.3.21: $X = \mathbb{N}$ ve $*$ t-normu her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = \min\{a,b\}$ olsun. $M{:}\, X \times X \times [0,\infty) \to [0,1]$ dönüşümü her $x,y \in X$ $(x\neq y)$ ve $t > 0$ için

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1 - 2^{-\min\{x,y\}}, & 0 < t \le 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X,M,*)$ bir KM-bulanık metrik uzaydır. $Tx = x + 1$ şeklinde tanımlanan T dönüşümü GS-bulanık daralma dönüşümüdür ve her $x \in X$ ve $t > 1$ için $\lim_{n\to\infty} M(T^n x,1,t) = 1$ olduğundan $x_n = T^n x$ iterasyon dizisi 1'e p-yakınsar. Fakat 1, T'nin sabit noktası değildir (Mihet, 2007).

Tanım 3.3.22: $\psi{:}\,[0,1] \to [0,1]$ sürekli, azalmayan ve her $s \in (0,1)$ için $\psi(s) > s$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon, Ψ de bu şartları sağlayan tüm ψ fonksiyonlarının sınıfı olsun. $(X,M,*)$ bir KM-bulanık metrik uzay ve $\psi \in \Psi$ olmak üzere $T{:}X\to X$ dönüşümü her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için

$M(x,y,t) > 0$ iken $M(Tx,Ty,t) \geq \psi(M(x,y,t))$ (3.6)

koşulunu sağlıyor ise T dönüşümüne bulanık ψ-daralma dönüşümü denir (Mihet, 2008).

Tanım 3.3.23: $(X,M,*)$ bir KM-bulanık metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $M(x_{n+1},x_{n+2},t) \geq \psi(M(x_n,x_{n+1},t))$ koşulu sağlanıyorsa (x_n) dizisine bulanık ψ-daralan dizi denir (Mihet, 2008).

Uyarı 3.3.24: Her $k \in (0,1)$ için $\psi_k: [0,1] \to [0,1]$ dönüşümü, $\psi_k = \frac{t}{t+k(1-t)}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $\psi_k \in \Psi$'dir ve her bulanık ψ_k-daralma dönüşümü bir GS-bulanık daralma dönüşümüdür (Mihet, 2008).

Teorem 3.3.25: $(X,M,*)$ bir M-tam güçlü KM-bulanık metrik uzay ve $T:X\to X$ bir bulanık ψ-daralma dönüşümü olsun. Her $t > 0$ için $M(x,Tx,t) > 0$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $x \in X$ mevcut ise T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Mihet, 2008).

Uyarı 3.3.26: Teorem 3.3.25'in ispatıyla $(X,M,*)$ güçlü KM-bulanık metrik uzayında her $t > 0$ için $M(x_0,x_1,t) > 0$ koşulunu sağlayan her (x_n) bulanık ψ-daralan dizinin M-Cauchy dizisi olduğu sonucuna varılır.

Teorem 3.3.27: $(X,M,*)$ KM-bulanık metrik uzayı her $t > 0$ için $M(x,y,t) > 0$ koşulunu sağlasın. $T:X\to X$ dönüşümü bir bulanık ψ-daralma dönüşümü ise T'nin en fazla bir tane sabit noktası vardır (Mihet, 2008).

Teorem 3.3.28: $(X,M,*)$ M-tam güçlü KM-bulanık metrik uzayı her $t > 0$ için $M(x,y,t) > 0$ koşulunu sağlasın. $T:X\to X$ dönüşümü bir bulanık ψ-daralma dönüşümü ise T'nin bir tek sabit noktası vardır (Mihet, 2008).

KM-bulanık metrik uzaylarda her GS-daralma dönüşümünün sabit noktası yoktur. Bunun için GS-daralma koşulundan daha güçlü bir koşula ihtiyaç olduğunu Mihet (2004) göstermiştir.

Tanım 3.3.29: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(Tx,Ty,t) \geq \frac{M(x,y,t)}{M(x,y,t)+k(1-M(x,y,t))} \tag{3.7}$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ mevcut ise T dönüşümüne kesin B-daralma dönüşümü denir (Radu, 2002).

Teorem 3.3.30: $(X,M,*)$ M-tam KM-bulanık metrik uzay ve buradaki $*$ t-normu $T_L(a,b) = \max\{a + b - 1,0\}$ (Lukasiewicz t-norm) olmak üzere $* \geq T_L$ eşitsizliğini sağlasın. $(X,M,*)$ bulanık metrik uzayında her kesin B-daralma dönüşümünün sabit noktaya sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ ve $t > 0$ için $M(x,Tx, t) > 0$ olmasıdır (Radu, 2002).

Uyarı 3.3.31: Yukarıdaki teoremde $* \geq T_L$ eşitsizliği yerine sürekli bir $*$ t-normu alınırsa GV-bulanık metrik uzayda kesin B-daralma dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğu sonucu elde edilir (Mihet, 2004).

Tanım 3.3.32: Aşağıdaki koşulları sağlayan $\varphi: (0,1) \to (0,1)$ fonksiyonuna karşılaştırma fonksiyonu denir.

i) φ birebir ve artan bir dönüşümdür,

ii) Her $\lambda \in (0,1)$ için $\varphi(\lambda) < \lambda$ dir.

Kesin B-daralma dönüşümünden daha genel bir daralma koşulu aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 3.3.33: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay, φ karşılaştırma fonksiyonu ve $k \in (0,1)$ olsun. $T:X \to X$ dönüşümü her $x,y \in X$, $t > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$M(x,y,t) > 1 - \lambda \text{ iken } M(Tx,Ty,kt) > 1 - \varphi(\lambda)$$

koşulunu sağlıyorsa T dönüşümüne (φ_k)-B daralma dönüşümü denir (Mihet, 2001).

Örnek 3.3.34: (X, d) metrik uzay olsun.

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 0, & t \leq d(x,y) \\ 1, & t > d(x,y) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bulanık metrik ile $(X,M,*)$ KM-bulanık metrik uzaydır. $T:X\to X$ dönüşümü (X,d) metrik uzayında Banach daralma dönüşümü olmak üzere her $t>0$ ve $\lambda\in(0,1)$ için

$$M(x,y,t)>1-\lambda\Rightarrow M(x,y,t)=1\Rightarrow d(x,y)<t\Rightarrow$$
$$d(Tx,Ty)<kt\Rightarrow M(Tx,Ty,kt)=1\Rightarrow M(Tx,Ty,kt)>1-\varphi(\lambda).$$

Böylece (X,d) metrik uzayında Banach daralma koşulunu sağlayan her dönüşüm $(X,M,*)$ KM-bulanık metrik uzayında (φ_k)-B daralma dönüşümüdür (Mihet, 2004).

Örnek 3.3.35: $\varphi(\lambda)=\frac{k\lambda}{1-\lambda+k\lambda}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon da bir karşılaştırma fonksiyonudur. φ artan ve $\varphi(\lambda)<\lambda$ olduğundan $(1-\lambda)(1-k)>0$ dır. Ayrıca her $\lambda\in(0,1)$ için $\varphi(t)=\lambda$ denkleminin tek çözümü $t=\frac{\lambda}{k+\lambda-k\lambda}$ dir. O halde

$$M(x,y,t)>1-a\Leftrightarrow\frac{M(x,y,t)}{M(x,y,t)+k(1-M(x,y,t))}>1-\varphi(a)$$

dir. $T:X\to X$ dönüşümü kesin B-daralma dönüşümü ise $M(Tx,Ty,kt)>1-\varphi(a)$ elde edilir. Yani her kesin B-daralma dönüşümü (φ_k)-B daralma dönüşümüdür (Mihet, 2004).

Önerme 3.3.36: $(X,M,*)$ M-tam GV-bulanık metrik uzayında her kesin B-daralma dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Mihet, 2004).

Tanım 3.3.37: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay, $\psi:(0,1]\to(0,1]$ artan bir dönüşüm ve her $\lambda\in(0,1]$ için $\lim_{n\to\infty}\psi^n(\lambda)=1$ olsun. Her $x,y\in X$ ve $t>0$ için

$$M(x,y,t)>0 \text{ iken } M(Tx,Ty,t)\geq\psi(M(x,y,t))$$

sağlanıyorsa $T:X\to X$ dönüşümüne zayıf B-daralma dönüşümü denir (Mihet, 2004).

Uyarı 3.3.38: Her GS-bulanık daralma dönüşümü bir zayıf B-daralma dönüşümüdür (Mihet, 2004).

Teorem 3.3.39: $(X,M,*)$ bir G-tam KM-bulanık metrik uzay ve $x\in X$ olsun. Her $t>0$ için T dönüşümü bir zayıf B-daralma dönüşümü ise sabit noktası vardır (Mihet, 2004).

Teorem 3.3.10'da $(X,M,*)$ GS-bulanık daralan dizilerin M-Cauchy dizisi olduğu M-tam GV-bulanık metrik uzaylarda $T:X\to X$ dönüşümü bir GS-bulanık daralma dönüşümü ise T'nin bir tek sabit noktaya sahip olduğu ifade edilmişti. Fakat her GS-bulanık daralan dizi M-Cauchy olmadığından $\eta=(0,1]\to[0,\infty)$ örten ve kesin azalan fonksiyonlarının ailesi $\mathcal{H}$ ile daralma koşulu tanımlanmış ve bu teoremdeki koşullar güçlendirmiştir (Wardowski, 2013).

Önerme 3.3.40: $(X,M,*)$ bulanık metrik uzay, $\eta\in\mathcal{H}$ ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Her $t>0$ için $\lim_{n\to\infty}\eta\big(M(x_n,x,t)\big)=0$ oluyorsa (x_n) dizisi $x\in X$ noktasına yakınsaktır (Wardowski, 2013).

Önerme 3.3.41: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay, $\eta\in\mathcal{H}$ ve (x_n), X'de bir dizi olsun. $\varepsilon>0$ ve $t>0$ olmak üzere her $n,m>n_0\in\mathbb{N}$ için $\eta\Big(M\big(x_m,x_n,t\big)\Big)<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0\in\mathbb{N}$ mevcut ise (x_n) dizisi M-Cauchy dizisidir (Wardowski, 2013).

Tanım 3.3.42: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay, $\eta\in\mathcal{H}$ ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ ve $t>0$ için

$$\eta\big(M(Tx,Ty,t)\big)\leq k\eta(M(x,y,t)) \tag{3.8}$$

olacak şekilde bir $k\in(0,1)$ mevcut ise T dönüşümüne bulanık $\mathcal{H}$-daralma dönüşümü denir (Wardowski, 2013).

Tanım 3.3.43: $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay, $\eta\in\mathcal{H}$ ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ ve $t>0$ için

$$\eta\big(M(x_{n+1},x_{n+2},t)\big)\leq k\eta\big(M(x_n,x_{n+1},t)\big) \tag{3.9}$$

olacak şekilde bir $k\in(0,1)$ mevcut ise (x_n) dizisine bulanık $\mathcal{H}$-daralan dizi denir (Wardowski, 2013).

Uyarı 3.3.44: Her bulanık $\mathcal{H}$-daralma dönüşümü bir bulanık Edelstein daralma dönüşümüdür (Wardowski, 2013).

Örnek 3.3.45: $s \in (0,1]$ için $\eta(s) = \frac{1}{s} - 1$ alınırsa T:X→X bulanık $\mathcal{H}$-daralma dönüşümü her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için bir GS-bulanık daralma dönüşümü olur (Wardowski, 2013).

Teorem 3.2.46: $(X,M,*)$ M-tam bulanık metrik uzay, $\eta \in \mathcal{H}$ ve T:X→X bulanık $\mathcal{H}$-daralma dönüşümü olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir (Wardowski, 2013).

(i) Her $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$ ve $t_i \searrow 0$ olmak üzere her (t_i) dizisi için $\prod_{i=1}^{k} M(x,Tx,t_i) \neq 0$;

(ii) Her $r,s \in \{M(x,Tx,t) \mid x \in X, t > 0\}$ için $r * s > 0$ ise $\eta(r * s) \leq \eta(r) + \eta(s)$;

(iii) Her $x \in X$ ve $t_i \searrow 0$ olmak üzere her (t_i) dizisi için $\{M(x,Tx,t_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ kümesi sınırlıdır.

4. KISMİ BULANIK METRİK UZAYLAR

Bu bölümde Sedghi ve diğ. tarafından 2015 yılında tanımlanan kısmi bulanık metrik uzay yapısı tanıtılacaktır. Daha sonra kısmi bulanık metrik uzaydan topolojik uzay üretilerek sayılabilirlik ve ayırma aksiyomları gibi bazı özellikleri incelenecektir. Son olarak kısmi bulanık metrik uzaylar üzerinde elde ettiğimiz bazı sabit nokta teoremlerine yer verilecektir.

4.1. Kısmi Bulanık Metrik Uzay Tanımı ve Temel Özellikleri

Tanım 4.1.1: X boştan farklı bir küme, $*$ sürekli bir t-norm ve $F:X\times X\times(0,\infty) \to [0,1]$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun.

(PFM1) Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için $x = y \Leftrightarrow F(x,x,t) = F(x,y,t) = F(y,y,t)$ dir.

(PFM2) Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için $F(x,x,t) \geq F(x,y,t) > 0$ dir.

(PFM3) Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için $F(x,y,t) = F(y,x,t)$ dir.

(PFM4) Her $x,y,z \in X$ ve $t,s > 0$ için

$F(x,y,\max\{t,s\}) * F(z,z,\max\{t,s\}) \geq F(x,y,t) * F(y,z,s)$ dir.

(PFM5) Her $x,y \in X$ için $F(x,y,\cdot):(0,\infty) \to [0,1]$ süreklidir.

Bu durumda $(F,*)$ ikilisine X üzerinde kısmi bulanık metrik ve $(X,F,*)$ üçlüsüne kısmi bulanık metrik uzay denir (Sedghi ve diğ., 2015).

Eğer $F(x,y,t) = 1$ ise (PFM1) ve (PFM2) koşullarından $x = y$ elde edilir. Fakat $x = y$ ise $F(x,y,t)$ değeri 1 olmayabilir. Ayrıca (PFM4) koşulunda $s = t$ alınırsa,

$F(x,y,t) * F(z,z,t) \geq F(x,y,t) * F(y,z,t)$
elde edilir.

Örnek 4.1.2: $X = \mathbb{R}$ ve her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = \min\{a,b\}$ olmak üzere $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(0,\infty) \to [0,1]$ dönüşümü her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için

$$F(x,y,t) = \begin{cases} e^{-t}, & x = y \\ 1/3e^{-t}, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. (PFM1)-(PFM3) koşullarının sağlandığı açıktır. (PFM4) koşulunun sağlandığını gösterelim. $s < t$ olmak üzere $x,y,z \in \mathbb{R}$ ve $x \neq z$ olsun.

$x \neq y$ ve $y \neq z$ ise

$F(x,z,t) * F(y,z,s) = \min\left\{\frac{1}{3}e^{-t}, \frac{1}{3}e^{-s}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t} = \min\left\{\frac{1}{3}e^{-t}, e^{-t}\right\}$

$= F(x,y,\max\{t,s\}) * F(z,z,\max\{t,s\})$ dir.

$x = y$ ve $y \neq z$ ise

$F(x,z,t) * F(y,z,s) = \min\left\{\frac{1}{3}e^{-t}, \frac{1}{3}e^{-s}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t} \leq \min\{e^{-t}, e^{-t}\}$

$= F(x,y,\max\{t,s\}) * F(z,z,\max\{t,s\})$ dir.

$x \neq y$ ve $y = z$ ise

$F(x,z,t) * F(y,z,s) = \min\left\{\frac{1}{3}e^{-t}, e^{-s}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t} \leq \min\left\{\frac{1}{3}e^{-t}, e^{-t}\right\}$

$= F(x,y,\max\{t,s\}) * F(z,z,\max\{t,s\})$ dir. Böylece (PFM4) elde edilir. F'nin tanımından $F(x,y,\cdot)$, $(0,\infty)$ üzerinde sürekli bir dönüşümdür. Yani $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzaydır.

Uyarı 4.1.3: Her güçlü bulanık metrik uzay bir kısmi bulanık metrik uzaydır, fakat tersinin her zaman doğru olması gerekmez.

Örnek 4.1.4: 1) (X, p) bir kısmi metrik uzay ve her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olmak üzere her $x,y \in X$ için

$$F_p(x,y,t) = \frac{t}{t+p(x,y)} \tag{4.1}$$

şekilde tanımlanan F_p:$X\times X\times(0,\infty) \to [0,1]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi bulanık metriktir ve standart kısmi bulanık metrik olarak isimlendirilir. (Sedghi ve diğ., 2015).

2) (X, p) bir kısmi metrik uzay ve her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olmak üzere her $x,y \in X$ için

$$F_{p_e}(x,y,t) = e^{-\frac{p(x,y)}{t}} \tag{4.2}$$

şekilde tanımlanan F_{p_e}:$X×X×(0,\infty) \rightarrow [0,1]$ dönüşümü X üzerinde bir kısmi bulanık metriktir (Sedghi ve diğ., 2015).

Burada $p(x,y) = \max\{x,y\}$ alınırsa $(F_p,*)$ ve $(F_{p_e},*)$, X üzerinde birer kısmi bulanık metrik iken bulanık metrik değildir (Sedghi ve diğ., 2015).

3) $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay olsun. Bu durumda her $x,y \in X$ için

$$F_M(x,y,t) = M(x,y,t) * F(x,y,t) \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanan F_M:$X×X×(0,\infty) \rightarrow [0,1]$ dönüşümü de bir kısmi bulanık metriktir.

4) $(X,M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve $a \in (0,1)$ olsun. Bu durumda her $x,y \in X$ için

$$F_M(x,y,t) = M(x,y,t) * a \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanan kısmi bulanık metriğe bulanık metrikten üretilen kısmi bulanık metrik denir (Sedghi ve diğ., 2015).

Aşağıdaki lemmada kısmi bulanık metrikten kısmi metrik üretilmiştir.

Önerme 4.1.5: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olsun. p:$X×X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü her $x,y \in X$ ve $k \in (0,1)$ için

$$p(x,y) = \sup_{m\in(0,1)} \int_m^1 \log_k(F(x,y,t))\, dt \tag{4.5}$$

olsun. Bu durumda p, X üzerinde bir kısmi metriktir (Sedghi ve diğ., 2015).

Teorem 4.1.6: $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzay olsun. $*$ sürekli t-normu her $a,b,c \in [0,1]$ için $a * b \leq a * c$ iken $b \leq c$ koşulunu sağlıyorsa her $x,y \in X$ için $F(x,y,\cdot) : (0,\infty) \rightarrow [0,1]$ azalmayan bir dönüşümdür (Sedghi ve diğ., 2015).

İspat: Her $x,y,z \in X$ ve $t,s > 0$ için (PFM5) koşulundan

$$F(x,y,s) * F(y,z,t) \leq F(x,y,\max\{t,s\}) * F(z,z,\max\{t,s\})$$

elde edilir. $t > s$ ve $z = y$ olsun. O halde,

$$F(x,y,s) * F(y,y,t) \leq F(x,y,t) * F(y,y,t)$$

olur. Böylece $F(x,y,s) \leq F(x,y,t)$ elde edilir. Bu ise $F(x,y,\cdot) : (0,\infty) \to [0,1]$ dönüşümünün azalmayan olduğunu gösterir.

Kısmi bulanık metrik uzaylarda, bulanık metrik uzaylardan farklı olarak her $x,y \in X$ için $F(x,y,\cdot) : (0,\infty) \to [0,1]$ dönüşümü her zaman azalmayan bir dönüşüm değildir. Örnek 4.1.5'te verilen kısmi bulanık metrik azalan bir dönüşümdür.

Tanım 4.1.7: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) = F(x,x,t)$ oluyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{F} x$ şeklinde gösterilir (Sedghi ve diğ., 2015).

Tanım 4.1.8: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n,m\to\infty} F(x_n,x_m,t)$ mevcut ise (x_n) dizisine Cauchy dizisi adı verilir. Her $t > 0$ için $\lim_{n,m\to\infty} F(x_n,x_m,t) = 1$ oluyorsa (x_n) dizisine 1-Cauchy dizisi denir (Sedghi ve diğ., 2015).

Tanım 4.1.9: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay olsun. Eğer X'deki her Cauchy (1-Cauchy) dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ise $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayına bir tam (1-tam) kısmi bulanık metrik uzay denir (Sedghi ve diğ., 2015).

Bu tanımlardan açıkça görülüyor ki her 1-Cauchy dizisi aynı zamanda Cauchy dizidir ve her tam kısmi bulanık metrik uzayı 1-tam kısmi bulanık metrik uzaydır.

Uyarı 4.1.10: Kısmi bulanık metrik uzaylarda bulanık metrik uzaylardan farklı olarak, yakınsak her dizinin bir Cauchy dizisi olması ve bir tek limit noktası olması gerekmez (Sedghi ve diğ., 2015).

Örnek 4.1.11: $X = \mathbb{R}^+$ ve her $a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olmak üzere $F_p{:}X\times X\times(0,\infty) \to [0,1]$ dönüşümü her $t > 0$ ve $x,y \in X$ için

$$F_p(x,y,t) = \frac{t}{t+\max\{x,y\}}$$

olsun. F_p, $\mathbb{R}^+$ üzerinde kısmi bulanık metriktir. $(\mathbb{R}^+, F_p, *)$ kısmi bulanık metrik uzayında $(x_n) = (1,2,1,2 \dots)$ dizisi, her $x \geq 2$ için $\lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) = F(x,x,t)$ olduğundan yakınsaktır. Bu dizinin yakınsadığı noktaların kümesini $L(x_n)$ ile gösterilirse $L(x_n) = \{x \in X| \, x_n \to x\} = [2, \infty)$ dir. Buradan (x_n) dizisinin limitinin tek olmadığı görülür. Ayrıca $\lim_{n,m\to\infty} F(x_n,x_m,t)$ mevcut olmadığından (x_n) bir Cauchy dizisi değildir (Sedghi ve diğ., 2015).

Lemma 4.1.12: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve $x,y \in X$ olmak üzere (x_n), X'de x ve y noktalarına yakınsak bir dizi olsun. Her $a,b,c \in [0,1]$ için $a * b \leq a * c$ iken $b \leq c$ ve $\lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) = F(x,x,t) = F(y,y,t)$ ise $x = y$ dir (Sedghi ve diğ., 2015).

İspat: $F(x,y,t) * F(x_n,x_n,t) \geq F(x,x_n,t) * F(y,x_n,t)$ eşitsizliğinde $n \to \infty$ limit alınırsa $F(x,y,t) * F(x,x,t) \geq F(x,x,t) * F(y,y,t)$ elde edilir. Buradan $F(x,y,t) \geq F(y,y,t)$ ve (PFM3) koşulundan $F(y,y,t) \geq F(x,y,t)$ dir. Böylece $F(y,y,t) = F(x,y,t)$ olur. Benzer şekilde $F(x,x,t) = F(x,y,t)$ olduğu elde edilir. Bu durumda (PFM2) den $x = y$ dir.

Tanım 4.1.13: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n), X'de x noktasına yakınsak bir dizi olsun. Eğer her $y \in X$ için $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) \leq F(x,y,t)$ ise F'ye X üzerinde üstten yarı sürekli denir (Sedghi ve diğ., 2015).

Önerme 4.1.14: (X, p) bir kısmi metrik uzay ve $(X, F_p, *)$ bir standart kısmi bulanık metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) (x_n) dizisinin $(X, F_p, *)$ kısmi bulanık metrik uzayında yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (x_n) dizisinin (X, p) kısmi metrik uzayında yakınsak olmasıdır.

ii) (x_n) dizisinin $(X, F_p, *)$ kısmi bulanık metrik uzayında Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul (x_n) dizisinin (X, p) kısmi metrik uzayında Cauchy dizisi olmasıdır.

iii) $(X, F_p, *)$ kısmi bulanık metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul (X, p) kısmi metrik uzayının tam olmasıdır. Ayrıca,

$\lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) = p(x,x) \Leftrightarrow$

$\lim_{n\to\infty} F_p(x_n,x,t) = \lim_{n,m\to\infty} F_p(x_n,x_m,t) = F_p(x,x,t)$ dir.

İspat: i) $x \in X$ olsun.

$(x_n) \xrightarrow{F_p} x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_p(x_n,x,t) = F_p(x,x,t) \Leftrightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \frac{t}{t+p(x_n,x)} = \frac{t}{t+p(x,x)} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p(x_n,x) = p(x,x) \Leftrightarrow (x_n) \xrightarrow{p} x$ dir.

ii) (x_n) dizisi $(X,F_p,*)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\lim_{n,m\to\infty} F_p(x_n,x_m,t)$ mevcuttur. Buradan,

$$\lim_{n,m\to\infty} F_p(x_n,x_m,t) = \lim_{n,m\to\infty} \frac{t}{t + p(x_n,x_m)} = \frac{t}{t + \lim\limits_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)}$$

Bu ise $\lim\limits_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ değerinin mevcut olduğunu ifade eder. Böylece (x_n) dizisi (X, p) uzayında bir Cauchy dizisidir. Tersi de benzer şekilde elde edilir.

iii) $(X, F_p, *)$ tam kısmi bulanık metrik uzay ve (x_n) dizisi (X, p) kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde (x_n) dizisi $(X,F_p, *)$ kısmi bulanık metrik uzayında da Cauchy dizisidir. $(X, F_p, *)$ tam olduğundan (x_n) dizisi $(X, F_p, *)$ de yakınsaktır. i)'den (x_n) dizisi (X, p) kısmi metrik uzayında da yakınsak olur. Bu sebeple (X, p) kısmi metrik uzayı tamdır. Tersi de benzer şekilde elde edilir. Limitlerin denkliği ise F_p nin tanımından kolaylıkla elde edilir.

Lemma 4.1.15: $(X, F, *)$ bir kısmi bulanık metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n), X'de $\lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) = \lim_{n\to\infty} F(x_n,x_n,t) = F(x,x,t)$ olacak şekilde bir dizi olsun. Her $a,b,c \in [0,1]$ için $a * b \leq a * c$ iken $b \leq c$ ise her $y \in X$ için $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) = F(x,y,t)$ dir (Sedghi ve diğ., 2015).

Teorem 4.1.16: $(X, F, *)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve her $x,y,z \in X$ için $F(x,y,\cdot): (0,\infty) \to [0,1]$ azalmayan bir dönüşüm olsun.

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ F(x,y,t), & x \neq y \end{cases} \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanan $M:X\times X\times(0,\infty)\to[0,1]$ dönüşümü X üzerinde bir bulanık metriktir. Ayrıca $(X,F,*)$ bulanık metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayının 1-tam olmasıdır.

İspat: (GV1),(GV2),(GV3),(GV5) koşullarının sağlandığı kolaylıkla elde edilir. Burada sadece (GV4) koşulunun sağlandığını göstereceğiz.

$x,y,z\in X$ olsun. Eğer $x=y=z$ ise (GV4) elde edilir.

Eğer $x\neq y\neq z$ ise,
$M(x,y,t)*M(y,z,s)=F(x,y,t)*F(y,z,s)\leq F(x,z,\max\{t,s\})*F(y,y,\max\{t,s\})$
$\leq F(x,z,\max\{t,s\})\leq F(x,z,t+s)=M(x,z,t+s).$

Eğer $x\neq y$ ve $x=z$ ise,
$M(x,y,t)*M(y,z,s)=F(x,y,t)*F(y,z,s)\leq F(x,z,\max\{t,s\})*F(y,y,\max\{t,s\})$
$\leq F(x,x,\max\{t,s\})*F(y,y,\max\{t,s\})\leq 1=M(x,z,t+s).$

Eğer $x\neq y$ ve $y=z$ ise,
$M(x,y,t)*M(y,z,s)=F(x,y,t)*1=F(x,y,t)$
$\leq F(x,z,t+s)=M(x,z,t+s)$
elde edilir. Böylece $(X,F,*)$ bir bulanık metrik uzaydır.

$(X,M,*)$ tam bulanık metrik uzay ve (x_n) dizisi $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayında 1-Cauchy dizisi olsun. O halde $\lim_{n,m\to\infty}F(x_n,x_m,t)=1$ dir. Her $n\neq m$ için $x_n\neq x_m$ olduğunu kabul edersek $\lim_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m,t)=1$ olur. Böylece (x_n) dizisi $(X,M,*)$ bulanık metrik uzayında Cauchy dizisidir. $(X,M,*)$ tam olduğundan (x_n) dizisi $(X,M,*)$ da yakınsaktır. Yani $\lim_{n\to\infty}M(x,x_n,t)=1$ olacak şekilde $x\in X$ mevcuttur. $M(x,x,t)=1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}F(x,x_n,t)=1=F(x,x,t)$ eşitliği elde edilir. Böylece $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayı 1-tamdır.

Şimdi $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayının 1-tam olduğunu kabul edelim. (x_n) dizisi $(X,M,*)$ bulanık metrik uzayında Cauchy dizisi olsun. O halde $\lim_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m,t)=1$ dir. Burada $\lim_{n,m\to\infty}F(x_n,x_m,t)=1$ olur ki bu da (x_n) dizisinin $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayında 1-Cauchy olduğu anlamına gelir.

$(X,F,*)$ 1-tam olduğundan (x_n) dizisi $(X,F,*)$ da yakınsaktır. Yani $\lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) = 1 = F(x,x,t)$ olacak şekilde $x \in X$ mevcuttur. Buradan $\lim_{n\to\infty} M(x,x_n,t) = 1$ elde edilir. Böylece (x_n) dizisi $(X,M,*)$ da yakınsaktır. Sonuç olarak $(X,M,*)$ bulanık metrik uzayının tam olduğu görülür.

Tanım 4.1.17: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay olsun.

1) Her $x \in X$ ve X'de bir (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) = F(x,x,t)$ iken her $y \in X$ için $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) = F(x,y,t)$ oluyorsa $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayına dizisel yakınsak denir.

2) Her $x \in X$ ve X'de (x_n) ve (y_n) dizileri için $\lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) = F(x,x,t)$ ve $\lim_{n\to\infty} \left(F(y_n,x_n,t) - F(y_n,y_n,t)\right) = 0$ iken $\lim_{n\to\infty} F(x,y_n,t) = F(x,x,t)$ oluyorsa $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayına p-dizisel yakınsak denir.

3) Her $x \in X$ ve X'de bir (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty}\left(F(x,x_n,t) - F(x_n,x_n,t)\right) = 0$ iken $\lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) = F(x,x,t)$ oluyorsa $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayına dizisel simetrik denir.

4) $\alpha = \inf\{F(x,x,t) | x \in X\}$ olsun. Her $x,y \in X$ $(x \neq y)$ için $F(x,y,t) \leq \alpha$ sağlanıyorsa $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayına öz-sınırlı denir.

Tanım 4.1.18: Her $x \in X$ ve X'de bir (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) = F(x,x,t)$ iken $\lim_{n\to\infty}\left(F(x,x_n,t) - F(x_n,x_n,t)\right) = 0$ veya buna denk olarak $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x_n,t) = F(x,x,t)$ oluyorsa $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayına metrik-benzeri denir.

4.2. Kısmi Bulanık Metrik Topoloji ve Özellikleri

Tanım 4.2.1: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay, $x \in X$, $t > 0$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ olmak üzere

$$B_F(x,\varepsilon,t) = \{y \in X \mid F(x,y,t) > F(x,x,t) - \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar denir.

Dikkat edilirse, her $t > 0$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ için $x \in B_F(x,\varepsilon,t)$ dir.

Teorem 4.2.2: $(X, F, *_M)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve $*_M$ t-normu her $a,b \in [0,1]$ için $a *_M b = \min\{a,b\}$ olsun. $\mathcal{B} = \{B_F(x,\varepsilon,t) | x \in X,\ \varepsilon \in (0,1),\ t > 0\}$ kümesi X üzerinde bir topoloji için tabandır. Bu şekilde üretilen topolojiye kısmi bulanık metrik topoloji denir ve τ_F ile gösterilir. Ayrıca (X,τ_F) bir T_1-uzayıdır.

İspat: Her $\varepsilon \in (0,1)$ için $x \in B_F(x,\varepsilon,t)$ olduğundan $X = \bigcup_{x\in X} B_F(x,\varepsilon,t)$ dir. Şimdi $\varepsilon, \delta \in (0,1]$ ve $t > 0$ için $B_F(x,\varepsilon,t)$ ve $B_F(y,\delta,t)$ keyfi açık yuvarlar ve $z \in B_F(x,\varepsilon,t) \cap B_F(y,\delta,t)$ olsun. $B_F(z,\eta,t) \subset B_F(x,\varepsilon,t) \cap B_F(y,\delta,t)$ olacak şekilde en az bir $\eta \in (0,1]$ olduğunu gösterelim. $z \in B_F(x,\varepsilon,t) \cap B_F(y,\delta,t)$ olduğundan

$F(x,z,t) > F(x,x,t) - \varepsilon$ ve $F(y,z,t) > F(y,y,t) - \delta$
dır.
$\eta = \min\{F(z,z,t) - F(x,x,t) + \varepsilon, F(z,z,t) - F(y,y,t) + \delta\}$ ve $\omega \in B_F(z,\eta,t)$ olsun.
Bu durumda,
$$F(x,\omega,t) \geq F(x,\omega,t) *_M F(z,z,t) \geq F(x,z,t) *_M F(\omega,z,t)$$
$$\geq (F(x,x,t) - \varepsilon) *_M (F(z,z,t) - \eta)$$

dır. Eğer $F(z,z,t) - F(x,x,t) + \varepsilon < F(z,z,t) - F(y,y,t) + \delta$ ise

$$F(x,\omega,t) \geq (F(x,x,t) - \varepsilon) *_M F(z,z,t) - (F(z,z,t) - F(x,x,t) + \varepsilon)$$
$$\geq (F(x,x,t) - \varepsilon) *_M (F(x,x,t) - \varepsilon) = F(x,x,t) - \varepsilon$$

olur. Eğer $F(z,z,t) - F(y,y,t) + \delta < F(z,z,t) - F(x,x,t) + \varepsilon$ ise

$$F(x,\omega,t) \geq (F(x,x,t) - \varepsilon) *_M F(z,z,t) - (F(z,z,t) - F(y,y,t) + \delta)$$
$$\geq (F(x,x,t) - \varepsilon) *_M (F(y,y,t) - \delta)$$
$$\geq (F(x,x,t) - \varepsilon) *_M (F(x,x,t) - \varepsilon) = F(x,x,t) - \varepsilon$$

olur. Buradan $\omega \in B_F(x,\varepsilon,t)$ elde edilir. Benzer şekilde $\omega \in B_F(y,\delta,t)$ olduğu kolaylıkla elde edilir. Böylece $\omega \in B_F(x,\varepsilon,t_1) \cap B_F(y,\delta,t_2)$ dir. Yani $B_F(z,\eta,t) \subset B_F(x,\varepsilon,t_1) \cap B_F(y,\delta,t_2)$ dir. Bu durumda açık yuvarların kümesi, τ_F topolojisi için bir tabandır.
Şimdi (X,τ_F)'nin T_1-uzayı olduğunu göstermek için $x \neq y$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $F(x,x,t) > F(x,y,t)$ dir. Her $\varepsilon \in (0,1)$ için $x \in B_F(x,\varepsilon,t)$ dir.

Eğer $\varepsilon = F(x,x,t) - F(x,y,t)$ seçilirse $y \notin B_F(x,\varepsilon,t)$ olur. Benzer şekilde her $\delta \in (0,1)$ için $y \in B_F(y,\delta,t)$ dir ve $\delta = F(y,y,t) - F(x,y,t)$ seçilirse $x \notin B_F(y,\delta,t)$ dir. Bu ise (X,τ_F)'nin bir T_1-uzayı olduğunu gösterir.

Lemma 4.2.3: $(X,F,*_M)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve her $x,y \in X$ için $F(x,x,t) = F(y,y,t)$ olsun. Her $\varepsilon, \delta \in (0,1)$ ve $t > 0$ için $y \in B_F(x,\varepsilon,t)$ ise $B_F(y,\delta,t) \subseteq B_F(x,\varepsilon+\delta,t)$ dir.

İspat: $z \in B_F(y,\delta,t)$ olsun. Bu durumda $F(z,y,t) > F(y,y,t) - \delta$ dır. $F(y,y,t) \geq F(x,y,t)$ olduğundan $F(z,y,t) > F(x,y,t) - \delta > F(x,x,t) - \varepsilon - \delta$ dır.

$$F(x,z,t) \geq F(x,z,t) *_M F(y,y,t) \geq F(x,y,t) *_M F(z,y,t)$$
$$\geq (F(x,x,t) - \varepsilon) *_M F(z,y,t) > (F(x,x,t) - \varepsilon - \delta) *_M (F(x,x,t) - \varepsilon - \delta)$$
$$= F(x,x,t) - \varepsilon - \delta$$

olur. Buradan $z \in B_F(x,\varepsilon+\delta,t)$ dir. Yani $B_F(y,\delta,t) \subseteq B_F(x,\varepsilon+\delta,t)$ dir.

Teorem 4.2.4: $(X, F, *_M)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve (X,τ_F) bu kısmi bulanık metriğin ürettiği topolojik uzay olsun.

i) (X, τ_F) topolojik uzayı bir $T_{\frac{1}{2}}$-uzayıdır, yani her $A \subset X$ için A'nın türev kümesi $d(A)$, (X, τ_F)'de kapalıdır.

ii) (X, τ_F) topolojik uzayının T_2-uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $x,y,z \in X$ için $\inf_{z\in X}\{F(x,x,t) - F(x,z,t) + F(y,y,t) - F(y,z,t)\} > 0$ olmasıdır.

İspat: i) $A \subset X$ olmak üzere $d(A)$'nın kapalı olduğunu ispatlamak için $x \in X$ olmak üzere $d(\{x\})$'in kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. $x \in X$ keyfi olsun. Eğer $y \notin d(\{x\})$ ve $x \neq y$ ise en az bir $\varepsilon \in (0,1)$ ve $t > 0$ için $B_F(y,\varepsilon,t) \cap \{x\} = \emptyset$ dir. Her $z \in B_F(y,\varepsilon,t)$ için $B_F(y,\varepsilon,t)$, z'nin bir açık yuvarıdır ve $B_F(y,\varepsilon,t) \cap \{x\} = \emptyset$ olduğundan $z \notin d(\{x\})$ dir. Buradan $d(\{x\})$'in tümleyeni açıktır. Yani $d(\{x\})$ kapalıdır. Dolayısıyla $d(A)$ kapalıdır. Böylece (X, τ_F) bir $T_{\frac{1}{2}}$-uzayıdır.

ii) (X,τ_F) T_2-uzayı olsun. Bu durumda her $x,y \in X$ $(x \neq y)$ ve $t > 0$ için $B_F(x,\varepsilon,t) \cap B_F(y,\varepsilon,t) = \emptyset$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon \in (0,1)$ vardır. Yani $F(x,z,t) > F(x,x,t) - \varepsilon$ ve $F(y,z,t) > F(y,y,t) - \varepsilon$ eşitsizliklerini aynı anda sağlayacak bir $z \in X$ yoktur. Buradan $F(x,x,t) - F(x,z,t) + F(y,y,t) - F(y,z,t) \geq \varepsilon$ dir. Yani $\inf_{z\in X}\{F(x,x,t) - F(x,z,t) + F(y,y,t) - F(y,z,t)\} > 0$ olur.

Şimdi (X,τ_F) T_2-uzayı olmadığını kabul edelim. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için $B_F(x,\varepsilon,t) \cap B_F(y,\varepsilon,t) \neq \emptyset$ olacak şekilde $x,y \in X$ $(x \neq y)$ elemanlar vardır. $z \in B_F(x,\varepsilon,t) \cap B_F(y,\varepsilon,t)$ olsun. $\varepsilon_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere z'ye yakınsayan bir $z_n \in B_F(x,\varepsilon,t) \cap B_F(y,\varepsilon,t)$ dizisi vardır. Buradan

$\inf_{z\in X}\{F(x,x,t) - F(x,z,t) + F(y,y,t) - F(y,z,t)\} < \frac{2}{n}$ olur. Böylece infimum değerinin sıfıra eşit olduğu görülür. Bu ise bir çelişkidir.

Teorem 4.2.5: $(X, F, *_M)$ bir kısmi bulanık metrik uzay, (X, τ_F) bu kısmi bulanık metriğin ürettiği topolojik uzay, $x,y \in X$ ve (x_n), X'de bir dizi olsun.

i) (X,τ_F) topolojik uzayının T_2-uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) = F(x,x,t)$ ve $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) = F(y,y,t)$ iken $x = y$ olmasıdır.

ii) $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x,t) = F(x,x,t)$ iken her $y \in X$ için $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) = F(x,y,t)$ oluyorsa (X,τ_F) topolojik uzayı T_2-uzayıdır.

İspat: i) (X,τ_F) topolojik uzayı T_2-uzayı ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x,t) = F(x,x,t)$ ise her $n > n_0$ ve $t > 0$ için $x_n \in B_F(x,\varepsilon,t)$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Benzer şekilde $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) = F(y,y,t)$ ise her $n > n_1$ ve $t > 0$ için $x_n \in B_F(y,\varepsilon,t)$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Yani $n = \max\{n_0, n_1\}$ için $B_F(x,\varepsilon,t) \cap B_F(y,\varepsilon,t) \neq \emptyset$ dir. (X,τ_F) T_2-uzayı olduğundan $x = y$ dir.

(X, τ_F)'nin T_2-uzayı olmadığını varsayalım. Bu durumda her $\varepsilon \in (0,1)$ ve $t > 0$ için $B_F(x,\varepsilon,t) \cap B_F(y,\varepsilon,t) \neq \emptyset$ olacak şekilde $x,y \in X$ $(x \neq y)$ vardır. $B_F(x,\varepsilon,t) \cap B_F(y,\varepsilon,t) \neq \emptyset$ olduğundan $x_n \in B_F(x,\varepsilon,t) \cap B_F(y,\varepsilon,t)$ olacak şekilde bir dizi vardır. $x_n \in B_F(x,\varepsilon,t)$ olduğu için $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x,t) = F(x,x,t)$ dir. $x_n \in B_F(y,\varepsilon,t)$ olduğu için $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) = F(y,y,t)$ dir. Hipotezden $x = y$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

ii) x ve y, (x_n) dizisinin limitleri olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x,t) = F(x,x,t)$ ve $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) = F(y,y,t)$ dir. Hipotezden $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x,t) = F(x,x,t)$ iken $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) = F(x,y,t)$ ve $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) = F(y,y,t)$ iken $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x,t) = F(y,x,t)$ dir. Böylece $F(x,x,t) = F(x,y,t) = F(y,y,t)$ olur. (PFM2)'den $x = y$ elde edilir. 1)'den (X,τ_F)'nin T_2-uzayı olduğu görülür.

Sonuç 4.2.6: $(X,F,*_M)$ bir kısmi bulanık metrik uzay olsun. $F(x,y,\cdot): (0,\infty) \to [0,1]$ azalmayan bir dönüşüm ise bu kısmi bulanık metrikten üretilen (X,τ_F) topolojik uzayı T_2-uzayıdır.

Lemma 4.2.7: $(X,F,*_M)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve (X,τ_F) bu kısmi bulanık metriğin ürettiği topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) (X,τ_F) topolojik uzayı birinci sayılabilir uzaydır.

ii) $A \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. Her $t > 0$ için $F(x_0, A,t) = \sup\{F(x_0,x,t) \mid x \in A\}$ kümesi tanımlansın. Bu durumda $a \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter koşul $F(a,A,t) = F(a,a,t)$ olmasıdır.

İspat: i) Her $x \in X$ için $\left\{B\left(x,\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}^+\right\}$ kümesi sayılabilir komşuluk tabanı olduğu için (X,τ_F) birinci sayılabilir uzaydır.

ii) $a \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon \in (0,1)$ için $B_F(a,\varepsilon,t) \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır. O halde $F(a,x,t) > F(a,a,t) - \varepsilon$ olacak şekilde $x \in A$ vardır. $\varepsilon > F(a,a,t) - F(a,x,t)$ de buradan $\sup\{F(a,a,t) - F(a,x,t) \mid x \in A\} = 0$, $F(a,a,t) - \sup\{F(a,x,t) \mid x \in A\} = 0$ elde edilir. Yani $\sup\{F(a,x,t) \mid x \in A\} = F(a,a,t)$ olur. Böylece $F(a,A,t) = F(a,a,t)$ olduğu görülür.

Teorem 4.2.8: $(X,F,*_M)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve (X,τ_F) bu kısmi bulanık metriğin ürettiği topolojik uzay olsun. Eğer her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için $F(x,x,t) = F(y,y,t)$ ise (X,τ_F) topolojik uzayının ikinci sayılabilir olması için gerek ve yeter koşul (X,τ_F)'nin ayrılabilir olmasıdır.

İspat: İkinci sayılabilir her uzay ayrılabilir olduğu için (X,τ_F) ayrılabilir iken ikinci sayılabilir olduğunu göstermek yeterlidir. A, X'in sayılabilir yoğun bir alt kümesi,

$x \in X$ ve $\mathfrak{B} = \{B_F(a,\varepsilon,t) \mid a \in A, \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,1), t \in \mathbb{Q}^+\}$ olsun. $\mathfrak{B}$'nin (X,τ_F) için taban olduğunu gösterelim. $y \in B_F(x,\varepsilon,t)$ olsun. Bu durumda $F(x,y,t) > F(x,x,t) - \varepsilon$ dur. $\delta < \varepsilon + F(x,y,t) - F(x,x,t)$ olacak şekilde $\delta \in \mathbb{Q}^+$ olsun. Eğer $y \in A$ ise $B_F(y,\delta,t) \subset B_F(x,\varepsilon,t)$ dir. $y \notin A$ olsun. A yoğun olduğundan her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) = F(y,y,t)$ olacak şekilde bir $(x_n) \subset A$ mevcuttur. Buradan her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} F(x_n,y,t) = \lim_{n\to\infty} F(x_n,x_n,t) = F(y,y,t)$ dir. $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $n > n_0$ için $F(x_n,y,t) > F(x_n,x_n,t) - \frac{\delta}{2}$ dir. Böylece her $m \geq n_0$ için $y \in B_F\left(x_m,\frac{\delta}{2},t\right)$ dir.

$$F(x_m,x,t) \geq F(x_m,x,t) *_M F(y,y,t) *_M F(x_m,y,t) *_M F(x,y,t)$$

$> \left(F(x_m,x_m,t) - \frac{\delta}{2}\right) *_M (F(x,x,t) - \varepsilon) \geq (F(x,x,t) - \varepsilon) *_M (F(x,x,t) - \varepsilon)$ olduğundan $x_m \in B_F(x,\varepsilon,t)$ dir. Böylece $B_F\left(x_m,\frac{\delta}{2},t\right) \subset B_F(x,\varepsilon,t)$ dir. Sonuç olarak $\mathfrak{B}$'nin (X,τ_F) için bir taban olduğu görülür.

4.3. Kısmi Bulanık Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda kısmi bulanık metrik uzayda Sedghi ve diğ. tarafından elde edilen sabit nokta teoremleri verilecek ve ardından Banach, Edelstein, GS-daralma ve ψ-daralma dönüşümleri ile sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

Notasyon: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve $\emptyset \neq S \subseteq X$ olsun. $\delta_F(S,t) = \inf\{F(x,y,t) \mid x \in X\}$ olarak tanımlansın. $(X,F,*)$ kısmi bulanık metrik uzayda $A_n = \{x_n,x_{n+1},\dots\}$ için $r_n(t) = \delta_F(A_n,t)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $r_n(t)$ sonludur, $\left(r_n(t)\right)$ dizisi azalmayandır ve $r_n(t) \to r$ olacak şekilde $r \in [0,1]$ vardır. Ayrıca her $k,l \geq n$ için $r_n(t) \leq F(x_k,x_l,t)$'dir. $\gamma: [0,1] \to [0,1]$ azalmayan, sürekli bir dönüşüm olmak üzere her $s \in [0,1)$ için $\gamma(s) > s$ koşulunu sağlasın. $\phi: [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \to [-1,1]$, azalmayan ve $F\left((u,u,u),v\right) \leq 0$ iken $v > \gamma(u)$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu şartları sağlayan ϕ fonksiyonlarının kümesi Φ ile gösterilecektir.

Teorem 4.3.1: $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzay, $\phi \in \Phi$ ve F, X üzerinde üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $T:X \rightarrow X$ dönüşümü her $x,y \in X$ için

$$\phi\big(F(x,y,t),F(Tx,x,t),F(Tx,y,t),F(Tx,Ty,t)\big) \leq 0 \tag{4.7}$$

sağlıyorsa T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve T bu noktada süreklidir (Sedghi ve diğ., 2015).

Sonuç 4.3.2: $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzay, $m \in \mathbb{N}$ ve $\phi \in \Phi$ olsun. $T:X \rightarrow X$ dönüşümü her $x,y \in X$ için

$$\phi\big(F(x,y,t),F(T^m x,x,t),F(T^m x,y,t),F(T^m x,T^m y,t)\big) \leq 0 \tag{4.8}$$

sağlıyorsa T^m dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve T^m, bu noktada süreklidir (Sedghi ve diğ., 2015).

Sonuç 4.3.3: $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzay olsun. $T:X \rightarrow X$ dönüşümü her $x,y \in X$ için

$$F(Tx,Ty,t) \geq \gamma(\min\{F(x,y,t),F(Tx,x,t),F(Tx,y,t)\}) \tag{4.9}$$

sağlıyorsa T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve T bu noktada süreklidir (Sedghi ve diğ., 2015).

Aşağıdaki örnek Sonuç 4.3.3'ü gerçeklemek üzere verilmiştir.

Örnek 4.3.4: $X = \mathbb{R}^+$ ve $*$ t-normu $a * b = ab$ olsun. $F:X \times X \times (0,\infty) \rightarrow [0,1]$ dönüşümü her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için

$$F(x,y,t) = e^{-\frac{\max\{x,y\}}{t}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzaydır. Her $x \in X$ için $T:X \rightarrow X$ dönüşümü $T(x) = \frac{x}{2}$ ve $\gamma:[0,1] \rightarrow [0,1]$ dönüşümü de $\gamma(s) = s^{\frac{1}{2}}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Sedghi ve diğ., 2015).

Sonuç 4.3.5: $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzay ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. $T:X \to X$ dönüşümü her $x,y \in X$ için

$$F(T^m x,T^m y,t) \geq \gamma(\min\{F(x,y,t),F(T^m x,x,t),F(T^m x,y,t)\}) \tag{4.10}$$

ise T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve T^m bu noktada süreklidir (Sedghi ve diğ., 2015).

Sonuç 4.3.6: $(X, F, *)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzay ve $T:X \to X$ bir dönüşüm olsun. $k,m,n \in \mathbb{R}^+$ ve $k + m + n = 1$ olmak üzere,

$$F(Tx,Ty,t) \geq \sqrt{kF(x,y,t)+mF(Tx,x,t)+nF(Tx,y,t)} \tag{4.11}$$

Sağlanıyorsa T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve T bu noktada süreklidir (Sedghi ve diğ., 2015).

Tanım 4.3.7: $(X, F, *)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve $T:X \to X$ bir dönüşüm olsun.
1) Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için

$$F(Tx,Ty,kt) \geq F(x,y,t) \tag{4.12}$$

olacak şekilde en az bir $k \in (0,1)$ mevcut ise T dönüşümüne kısmi bulanık daralma dönüşümü denir.

2) Her $x,y \in X$ $(x \neq y)$ ve $t > 0$ için

$$F(Tx,Ty,t) > F(x,y,t) \tag{4.13}$$

sağlanıyorsa T dönüşümüne kısmi bulanık Edelstein daralma dönüşümü denir.

3) Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\frac{1}{F(Tx,Ty,t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{F(x,y,t)} - 1\right) \tag{4.14}$$

olacak şekilde en az bir $k \in (0,1)$ mevcut ise T dönüşümüne kısmi bulanık GS-daralma dönüşümü denir.

Tanım 4.3.8: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için

$$\frac{1}{F(x_{n+1},x_{n+2},t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{F(x_n,x_{n+1},t)} - 1\right) \tag{4.15}$$

olacak şekilde en az bir $k \in (0,1)$ varsa (x_n) dizisine kısmi bulanık GS-daralan dizi denir.

Aşağıdaki önermede daralma dönüşümleri arasındaki ilişki verilmiştir.

Önerme 4.3.9: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay olsun.

1) Her kısmi bulanık GS-daralma dönüşümü bir kısmi bulanık Edelstein daralma dönüşümüdür.

2) Her $x,y \in X$ için $F(x,y,\cdot): (0,\infty) \to [0,1]$ azalmayan bir fonksiyon ise her kısmi bulanık daralma dönüşümü bir kısmi bulanık Edelstein daralma dönüşümüdür.

İspat: 1) $T:X \to X$ dönüşümü kısmi bulanık GS-daralma dönüşümü olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{F(Tx,Ty,t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{F(x,y,t)} - 1\right) < \frac{1}{F(x,y,t)} - 1$$

dir. Buradan $F(Tx,Ty,t) > F(x,y,t)$ elde edilir. Böylece T kısmi bulanık Edelstein daralma dönüşümüdür.

2) $F(x,y,\cdot): (0,\infty) \to [0,1]$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ F(x,y,t), & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $M: X \times X \times (0,\infty) \to [0,1]$ dönüşümü X üzerinde bir bulanık metriktir. $T:X \to X$ dönüşümü kısmi bulanık daralma dönüşümü ise $k \in (0,1)$ için $F(Tx,Ty,kt) \geq F(x,y,t)$ dir. Buradan $x,y \in X$ $(x \neq y)$ için $M(Tx,Ty,kt) \geq M(x,y,t)$ ve $x = y$ için $M(Tx,Ty,kt) = M(x,y,t) = 1$ olduğu görülür. Bu ise T'nin bir bulanık daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Her bulanık daralma dönüşümü Edelstein bulanık daralma dönüşümü olduğu için T bir Edelstein bulanık daralma dönüşümüdür. Yani her $x \neq y$ için $M(Tx,Ty,t) > M(x,y,t)$ dir. Buradan $F(Tx,Ty,t) > F(x,y,t)$ dir. Böylece T kısmi bulanık Edelstein daralma dönüşümüdür.

Aşağıdaki örnek Önerme 4.3.9 2)'yi gerçeklemek üzere verilmiştir.

Örnek 4.3.10: X boştan farklı bir küme, her $a,b \in [0,1]$ için $*$ t-normu $a * b = ab$ ve $F{:}X \times X \times (0,1) \to [0,1]$ dönüşümü her $x,y \in X$ için

$$F(x,y,t) = \frac{t}{t + \max\{x,y\}}$$

olmak üzere $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzaydır. $T(x) = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir kısmi bulanık daralma dönüşümüdür. $F(x,y,\cdot)$, t'ye göre azalmayandır olduğundan T dönüşümü aynı zamanda bir kısmi bulanık Edelstein daralma dönüşümüdür.

Önerme 4.3.11: (X, p) bir tam kısmi metrik uzay, $(X,F_p,*)$ bir tam standart kısmi bulanık metrik uzay olsun. $T{:}X \to X$ dönüşümünün kısmi bulanık GS-daralma dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul T'nin kısmi daralma dönüşümü olmasıdır.

İspat: T kısmi daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $k \in (0,1)$ ve her $x,y \in X$ için $p(Tx,Ty) \leq kp(x,y)$ dir. Buradan,

$$k\left(\frac{1}{F_p(x,y,t)} - 1\right) = k\left(\frac{t+p(x,y)}{t} - 1\right) = \frac{kp(x,y)}{t} \geq \frac{p(Tx,Ty)}{t} = \frac{1}{F(Tx,Ty,t)} - 1$$

bulunur. Böylece T bir kısmi bulanık GS-daralma dönüşümüdür. T bir kısmi bulanık GS-daralma dönüşümü iken bir kısmi daralma dönüşümü olduğu benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.3.12: $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzay ve her $x,y \in X$ için $\lim_{t\to\infty} F(x,y,t) = 1$ olsun. $T{:}X \to X$ bir kısmi bulanık daralma dönüşümü ise T'nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x_0 \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ olacak şekilde (x_n) iterasyon dizisi olsun. Her $x,y \in X$ için $\lim_{t\to\infty} F(x,y,t) = 1$ olduğu için $F(x_n,x_{n+1},t) = F(Tx_n,Tx_{n-1},t) \geq F\left(x_n,x_{n-1},\frac{t}{k}\right) = F\left(Tx_{n-1},Tx_{n-2},\frac{t}{k}\right)$
$\geq F\left(x_{n-1},x_{n-2},\frac{t}{k^2}\right) \geq \cdots \geq F(x_1,x_0,\frac{t}{k^n})$

dir. $n\to\infty$ iken limit alınırsa her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x_{n+1},t) = 1$ elde edilir. $m,n \in \mathbb{N}$ $(n < m)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
F(x_n,x_m,t) &\geq F(x_n,x_m,t) * F(x_{n+1},x_{n+1},t) \geq F(x_n,x_{n+1},t) * F(x_{n+1},x_m,t) \\
&\geq F(x_n,x_{n+1},t) * F(x_{n+1},x_m,t) * F(x_{n+2},x_{n+2},t) \\
&\geq F(x_n,x_{n+1},t) * F(x_{n+1},x_{n+2},t) * F(x_{n+2},x_m,t) \\
&\dots \\
&\geq F(x_n,x_{n+1},t) * F(x_{n+1},x_{n+2},t) * \ldots * F(x_{m-1},x_m,t)
\end{aligned}
$$

dir. Buradan her $t > 0$ için $\lim_{n,m\to\infty} F(x_n,x_m,t) = 1$ elde edilir. Yani (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. $(X,F,*)$ tam kısmi bulanık metrik uzay olduğundan (x_n) dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsar. Hatta her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x,t) = \lim_{n,m\to\infty} F(x_n,x_m,t) = F(x,x,t) = 1$ dir.
$F(Tx,x,t) \geq F(Tx,x,t) * F(x_n,x_n,t) \geq F(Tx,x_n,t) * F(x_n,x,t)$
$\geq F(Tx,Tx_{n-1},t) * F(x,x,t) \geq F(x,x_{n-1},t) * F(x,x,t)$

dir. Buradan $F(Tx,x,t) = 1$ dir. Bu ise $Tx = x$ demektir. Böylece x, T'nin sabit noktasıdır.

Şimdi ise x noktasının T dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğunu gösterelim. Bunun için x ve y noktalarının T dönüşümünün iki farklı sabit noktası olduğunu kabul edelim. Buradan

$F(x,y,t) < F(Tx,Ty,t) = F(x,y,t)$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $x = y$ olup T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Aşağıdaki örnek Teorem 4.3.12'yi gerçeklemek üzere verilmiştir.

Örnek 4.3.13: $X = [0,1)$, her $a,b \in [0,1]$ için $*$ t-normu $a * b = ab$ ve $F{:}X\times X\times(0,1) \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü her $x,y \in X$ için

$$F(x,y,t) = \frac{t}{t+\max\{x,y\}}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzaydır ve $\lim_{t\to\infty} F(x,y,t) = 1$ dir. $T{:}X\to X$ dönüşümü $Tx = x^2$ olsun. $x,y \in [0,1)$ için $x > y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$F(Tx,Ty,kt) = \frac{kt}{kt+x^2} \geq \frac{t}{t+x} = F(x,y,t)$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ mevcut olduğundan T dönüşümü bir kısmi bulanık daralma dönüşümüdür ve gerçekten de $x = 0$ noktası T dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

Aşağıdaki örnekte Teorem 4.3.12'nin "$\lim_{t\to\infty} F(x,y,t) = 1$" koşulunun gereksiz olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 4.3.14: X boştan farklı bir küme, her $a,b \in [0,1]$ için $*$ t-normu $a * b = \min\{a,b\}$ ve her $x,y \in X$ için $F{:}X\times X\times(0,1) \to [0,1]$ dönüşümü $F(x,y,t) = e^{-t}$ olsun. $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzaydır. $T{:}X\to X$ dönüşümü $Tx = x$ şeklinde tanımlansın. T kısmi bulanık daralma dönüşümüdür fakat $\lim_{t\to\infty} F(x,y,t) \neq 1$ dir. Gerçekten T dönüşümünün her noktası sabit noktadır.

Sonuç 4.3.15: (X, p) bir tam kısmi metrik uzay, $(X,F_p,*)$ bir standart kısmi bulanık metrik uzay ve $T{:}X\to X$ bir kısmi bulanık daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

İspat: (X, p) tam kısmi metrik uzay olduğu için her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için

$$F_p(x,y,t) = \frac{t}{t+p(x,y)}$$

şeklinde tanımlanan kısmi bulanık metrik ile $(X,F_p,*)$ standart kısmi bulanık metrik uzay tamdır ve $\lim_{t\to\infty} F(x,y,t) = 1$ dir. T kısmi bulanık daralma dönüşümü olduğundan Teorem 4.3.12'ye göre bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 4.3.16: $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzay ve $T:X\to X$ bir kısmi bulanık GS-daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x_0 \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ olacak şekilde (x_n) iterasyon dizisini alalım. Her $t > 0$ için

$$\frac{1}{F(Tx_0,T^2x_0,t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{F(x_1,x_0,t)} - 1\right)$$

dir. Buradan,

$$\frac{1}{F(x_n, x_{n+1}, t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{F\left(x_n,x_{n-1},t\right)} - 1\right) \leq k^2\left(\frac{1}{F\left(x_{n-1},x_{n-2},t\right)} - 1\right)$$
$$\leq \cdots \leq$$
$$\leq k^n\left(\frac{1}{F(x_1,x_0,t)} - 1\right)$$

elde edilir. $n \to \infty$ iken limit alınırsa $\left(\frac{1}{F(x_n, x_{n+1}, t)} - 1\right) \to 0$ olur. Böylece her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} F(x_n, x_{n+1}, t) = 1$ elde edilir.

Şimdi $n,m \in \mathbb{N}$ için $n < m$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$F(x_n,x_m,t) \geq F(x_n,x_m,t) * F(x_{n+1}, x_{n+1}, t)$$
$$\geq F(x_n, x_{n+1}, t) * F(x_m, x_{n+1}, t)$$
$$\geq F(x_n, x_{n+1}, t) * F(x_m, x_{n+1}, t) * F(x_{n+2}, x_{n+2}, t)$$
$$\geq F(x_n, x_{n+1}, t) * F(x_{n+1}, x_{n+2}, t) * F(x_{n+2}, x_m, t)$$
$$\geq \cdots \geq F(x_n, x_{n+1}, t) * F(x_{n+1}, x_{n+2}, t) * \ldots * F(x_{m-1},x_m,t)$$

elde edilir. Her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} F(x_n, x_{n+1}, t) = 1$ olduğundan $\lim_{n,m\to\infty} F(x_n,x_m,t) = 1$ olur. Böylece (x_n) dizisi $(X,F,*)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. $(X,F,*)$ tam kısmi bulanık metrik uzay olduğundan (x_n) dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsar. Hatta $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x,t) = \lim_{n,m\to\infty} F(x_n,x_m,t) = F(x,x,t) = 1$ dir.

Şimdi $x \in X$ noktasının T dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterelim.

$$F(Tx,x,t) \geq F(Tx,x,t) * F(x_n,x_n,t)$$

$\geq F(Tx,x_n,t) * F(x_n,x,t)$

$\geq F(Tx,Tx_{n-1},t) * F(x,x,t)$

$\geq F(x,x_{n-1},t) * F(x,x,t)$

$\geq 1 * 1 \ \rightarrow 1$

dir. Buradan $F(Tx,x,t) = 1$ olur. Dolayısıyla $Tx = x$ dir. Yani x, T'nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi ise x noktasının T dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğunu gösterelim. Bunun için x ve y noktalarının T dönüşümünün $x,y \in X$ $(x \neq y)$ sabit noktaları olduğunu kabul edelim. Buradan,

$$F(x,y,t) = F(Tx,Ty,t) > F(x,y,t)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $x = y$ olup T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 4.3.17: $X = \mathbb{R}^+$, her $a,b \in [0,1]$ için $*$ t-normu $a * b = ab$ ve $F:X\times X\times(0,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü her $x,y \in X$ için

$$F(x,y,t) = e^{-\frac{\max\{x,y\}}{t}}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzaydır. $T:X\rightarrow X$ dönüşümü $Tx = \frac{x}{2}$ olsun. $x,y \in \mathbb{R}^+$ için $x > y$ olduğunu varsayalım.

$$\frac{1}{F(Tx,Ty,t)} - 1 = \frac{1}{e^{-\frac{x}{2t}}} - 1 = e^{\frac{x}{2t}} - 1 \leq k\left(e^{\frac{x}{t}} - 1\right)$$

$$= k\left(\frac{1}{e^{-\frac{x}{t}}} - 1\right) = k\left(\frac{1}{F(x,y,t)} - 1\right)$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ mevcut olduğundan T dönüşümü bir kısmi bulanık GS-daralma dönüşümüdür ve gerçekten de $x = 0$ noktası T dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

Sonuç 4.3.18: $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzay, her $t > 0$ için $F(x,y,t)$ azalmayan bir dönüşüm ve her $x,y \in X$ için $T:X\rightarrow X$ bir kısmi bulanık GS-daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzay olduğundan 1-tamdır. O halde

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 1, & x=y \\ F(x,y,t), & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bulanık metriği ile $(X,M,*)$ bulanık metrik uzayı tamdır. Grabiec'in teoreminden (1988) T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 4.3.19: $(X, F, *)$ bir kısmi bulanık metrik uzay, $T:X\rightarrow X$ bir kısmi bulanık Edelstein daralma dönüşümü ve her $a,b,c \in [0,1]$ için $*$ t-normu $a * b \leq a * c$ iken $b \leq c$ olsun. $x_0 \in X$ için $(T^n x_0)_{n\in N}$ iterasyon dizisinin $\lim_{n_i\rightarrow\infty} F(T^{n_i}x_0,x,t) = \lim_{n_i\rightarrow\infty} F(T^{n_i}x_0,T^{n_i}x_0,t) = F(x,x,t)$ olacak şekilde bir $(T^{n_i}x_0)_{n_i\in N}$ alt dizisi mevcut ise T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır ve bu nokta $x = \lim_{n_i\rightarrow\infty} T^{n_i}x_0$ dır.

İspat: $(X, F, *)$, her $a,b,c \in [0,1]$ için $a * b \leq a * c$ iken $b \leq c$ olacak şekilde bir kısmi bulanık metrik uzay ise her $x,y \in X$ için $F(x,y,\cdot) : (0,\infty) \rightarrow [0,1]$ azalmayan bir dönüşümdür. Bu durumda

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 1, & x=y \\ F(x,y,t), & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $M:X\times X\times(0,\infty) \rightarrow [0,1]$ dönüşümü X üzerinde bir bulanık metriktir. T dönüşümü kısmi bulanık Edelstein daralma dönüşümü olduğundan M dönüşümü de Edelstein bulanık daralma dönüşümüdür. Grabiec (1988)'den $x_0 \in X$ için $(T^n x_0)_{n\in N}$ iterasyon dizisinin

$$\lim_{n_i\rightarrow\infty} F(T^{n_i}x_0,x,t) = \lim_{n_i\rightarrow\infty} F(T^{n_i}x_0,T^{n_i}x_0,t) = F(x,x,t)$$

olacak şekilde bir $(T^{n_i}x_0)_{n_i\in N}$ alt dizisi olduğundan T'nin bir tek sabit noktası vardır.

2008 yılında Mihet, bulanık metrik uzaylarda daralma dönüşümlerinin genelleştirilmesi olarak ψ-daralma dönüşümlerini vermiştir. Biz de buna paralel olarak kısmi bulanık metrik uzaylarda ψ-daralma dönüşümlerinin tanımını aşağıdaki şekilde vererek sabit nokta teoremini verdik.

Tanım 4.3.20: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. $\psi:[0,1]\to[0,1]$ sürekli, azalmayan ve her $s\in(0,1)$ için $\psi(s)>s$ koşulunu sağlayan bir dönüşüm ve Ψ de bu özellikteki dönüşümlerin ailesi olsun. Her $x,y\in X$ ve $t>0$ için

$$F(Tx,Ty,t)\geq\psi\big(F(x,y,t)\big) \tag{4.16}$$

sağlanıyorsa T dönüşümüne kısmi bulanık ψ-daralma dönüşümü denir.

Önerme 4.3.21: Her kısmi bulanık ψ-daralma dönüşümü bir kısmi bulanık Edelstein daralma dönüşümüdür.

İspat: Her $s\in(0,1)$ için $\psi(s)>s$ olduğundan

$$F(Tx,Ty,t)\geq\psi\big(F(x,y,t)\big)>F(x,y,t)$$

dir.

Önerme 4.3.22: $(X,F,*)$ bir kısmi bulanık metrik uzay ve her $k\in(0,1)$ için

$$\psi_k(s)=\frac{s}{s+k(1-s)} \tag{4.17}$$

şeklinde tanımlanan ψ_k dönüşümü Ψ'nin elemanıdır ve her ψ_k-daralma dönüşümü bir kısmi bulanık GS-daralma dönüşümüdür.

İspat: $T:X\to X$ bir kısmi bulanık ψ_k-daralma dönüşümü olsun. Bu durumda,

$$F(Tx,Ty,t)\geq\psi_k\big(F(x,y,t)\big)=\frac{F(x,y,t)}{F(x,y,t)+k\big(1-F(x,y,t)\big)}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{F(Tx,Ty,t)}\leq 1+k\left(\frac{1}{F(x,y,t)}-1\right)$$

dir. Bu ise T'nin kısmi bulanık GS-daralma dönüşümü olduğu anlamına gelir.

Teorem 4.3.23: $(X,F,*)$ bir tam kısmi bulanık metrik uzay ve T kısmi bulanık ψ-daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $x_0 \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n=T^n x_0$ olacak şekilde (x_n) dizisini alalım. Her $t > 0$ için

$$F(x_{n+1},x_{n+2},t) = F(Tx_n,Tx_{n+1},t) \geq \psi\big(F(x_n,x_{n+1},t)\big)$$
$$> F(x_n,x_{n+1},t) > \cdots > F(x_0,x_1,t)$$

elde edilir. Burada $\big(F(x_n,x_{n+1},t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,1]$ üzerinde azalmayan bir dizidir. Yani her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x_{n+1},t) = a$ olacak şekilde en az bir $a \in (0,1]$ mevcuttur. T dönüşümü kısmi bulanık ψ -daralma dönüşümü olduğundan

$$F(x_n,x_{n+1},t) \geq \psi\big(F(x_{n-1},x_n,t)\big)$$

dir. $n\to\infty$ iken limit alınırsa $a \geq \psi(a)$ elde edilir. Fakat her $s \in (0,1)$ için $\psi(s)>s$ ve ψ sürekli olduğundan $a=1$ olmalıdır. (PFM4)'den kolaylıkla $\lim_{n,m\to\infty} F(x_n,x_m,t) = 1$ olduğu elde edilir. Bu ise (x_n) dizisinin $(X,F,*)$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. $(X,F,*)$ tam kısmi bulanık uzay olduğundan (x_n) dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsar. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} F(x_n,x,t) = \lim_{n,m\to\infty} F(x_n,x_m,t) = F(x,x,t) = 1$ dir. Buradan,

$$F(Tx,x,t) \geq F(Tx,x,t) * F(x_{n+1},x_{n+1},t)$$
$$\geq F(Tx,x_{n+1},t) * F(x_{n+1},x,t)$$
$$= F(Tx,Tx_n,t) * F(x_{n+1},x,t)$$
$$\geq \psi(F(x,x_n,t)) * F(x_n,x,t)$$
$$\geq F(x,x_n,t) * F(x_n,x,t)$$

elde edilir. $n\to\infty$ iken limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} F(Tx,x,t) \geq \lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) * \lim_{n\to\infty} F(x,x_n,t) \geq 1 * 1 = 1$$

elde edilir. Böylece $Tx=x$ olur.

Şimdi ise x noktasının T dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğunu gösterelim. Bunun için x ve y noktalarının T dönüşümünün iki farklı sabit noktası olduğunu kabul edelim. Buradan,

$$F(x,y,t)=F(Tx,Ty,t)\geq F(x,y,t)$$

dir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $x=y$ olup T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak kısmi metrik uzaylar, bu uzayların bazı temel özellikleri ve bu uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri tanıtılmıştır. Daha sonra benzer şekilde bulanık metrik uzaylar ve özellikleri verilmiştir. Bulanık metrik uzaylardaki temel sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Son olarak bu iki uzayın bir genelleştirilmesi olan Sedghi ve diğ. anlamındaki kısmi bulanık metrik uzaylar tanıtılmıştır. Kısmi bulanık metrik tarafından klasik topoloji üretilmiş ve bu topolojik uzayın bazı özellikleri elde edilmiştir. Bunlara ek olarak kısmi bulanık metrik uzaylarda temel sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Bunun yanı sıra kısmi bulanık metrik uzayların hangi koşullar altında tamlanabilir olduğu araştırılabilir. Ayrıca bulanık metrik uzaylarda çalışılmış olan ortak sabit nokta teoremleri de kısmi bulanık metrik uzaylara genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR

Aygünoğlu A., Aydoğdu E., Aygün H., Construction of Fuzzy Topology by Using Fuzzy Metric, *Filomat*, 2020, **2**(34), 433–441.

Aygünoğlu A., Aydoğdu E., Aygün H., Fuzzy Soft Metric and Fuzzifying Soft Topology Induced by Fuzzy Soft Metric, *Filomat*, 2019, **2**(33), 645–653.

Aktaş H., Çağman N., Soft Sets and Soft Groups, *Information Sciences*, 2007, **177**(13), 2726-2735.

Aldemir B., Güner E., Aydogdu E., Aygün H., Some Fixed Point Theorems in Partial Fuzzy Metric Spaces, *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 2020, **10**(4), 2889-2900.

Alghamdi MA., Shahzad N., Valero O., On Fixed Point Theory in Partial Metric Spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2012, **1** (2012),1-25.

Aydogdu E., Aldemir B., Güner E., Aygün H., Some Properties of Partial Fuzzy Metric Topology, *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*, İzmir, Türkiye, 2020.

Aygünoğlu A., Aygün H., Some Notes on Soft Topological Spaces, *Neural computing and Applications*, 2012, **21**(1), 113-119.

Aygünoğlu A., Çetkin V., Aygün H., An Introduction to Fuzzy Soft Topological Spaces, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2014, **43**(2), 197-208.

Atanassov K., Intuitionistic Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, (20), 87-96.

Pazar Varol B., Aygün H., Fuzzy Soft Topology, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2012, **3**(41), 407–419.

Çetkin V., Güner E., Aygün H., On 2S-Metric Spaces, *Soft Computing*, 2020, **24**(17), 12731-12742.

George A., Veeramani P., On Some Results in Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, **64**(3), 395-399.

Gorzalzany MB., A Method of Inference in Approximate Reasoning Based on Interval Valued Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, **21**, 1-17.

Grabiec M., Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1988, **27**(3), 385-389.

Gregori V., Sapena A., On Fixed-Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, **125**(2), 245-252.

Gregori V., Miñana J-J., Some Remarks on Fuzzy Contractive Mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, 2014, **251,** 101-103.

Gregori V., Miñana J-J., Miravet D., Fuzzy Partial Metric Spaces, *International Journal of General Systems*, 2019, **48**(3), 260-279.

Gregori V., Morillas S., Sapena A., On a Class of Completable Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 2010, **161**(16), 2193-2205.

Haghi R.H., Rezapour Sh., and Shahzad N., Be Careful on Partial Metric Fixed Point Results, *Topology and Its Applications*, 2013, **160**(3), 450-454.

Han S., Wu J., Zhang D., Properties and Principles on Partial Metric Spaces, *Topology and its Applications*, 2017, **230**, 77-98.

Hitzler P., Seda A., *Mathematical Aspects of Logic Programming Semantics*, Taylor & Francis, 2011.

Ilić D., Pavlović V., Rakočević V., Three Extensions of Ćirić Quasicontraction on Partial Metric Spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2013, **2013**(1), 1-13.

Istratescu V., *An Introduction to Theory of Probabilistic Metric Spaces with Applications*, Ed, Tehnica, Bucuresti, 1974.

Kaleva O., Seppo S., On Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1984, **12**(3), 215-229.

Klement E.P., Mesiar R., Pap E., Triangular Norms, *Kluwer Academic Publishers*, 2004, **143**(1), 5-26.

Kramosil I., Michálek J., Fuzzy Metrics and Statistical Metric Spaces, *Kybernetika*, 1975, **11**(5), 336-344.

Künzi H.P.A., Vajner V., Weighted Quasi-Metrics, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1994, **728**(1), 64-77.

Maji P.K., Biswas R., Roy A.R., Fuzzy Soft Sets, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 2001, **9**(3), 589-602.

Maji P.K., Biswas R., Roy A.R., Soft Set Theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 2003, **45**, 555-562.

Matthews S.G., Partial metric spaces, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1992, 183-197.

Matthews S.G. Partial Metric Topology, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1994, **728,** 183-197.

Mihet D., A Fixed Point Theorem in Probabilistic Metric Spaces, 2001, 79-81.

Mihet D., A Banach Contraction Theorem in Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy sets and systems*, 2004, **144**(3), 431-439.

Mihet D. On Fuzzy Contractive Mappings in Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, **158**(8), 915-921.

Mihet D., Fuzzy ψ-Contractive Mappings in Non-Archimedean Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, **159**(6), 739-744.

Molodtsov D., Soft Sets Theory-First Results, *Computers and Mathematics with Applications*, 1999, **37**, 19-31.

Pawlak, Z., Rough Sets: Basic Notion, *Int. J. of Computer and Information Science*, 1982, **11**, 344-56.

Radu V., Probabilistic Contractions on Fuzzy Menger Spaces, *Analele Univ. Bucuresti, LI*, 2002, 63-72.

Romaguera S., A Kirk Type Characterization of Completeness for Partial Metric Spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2009, **2010**(1), 493-498.

Rus I.A., Petruşel A., Petruşel G., Fixed Point Theory, *House of the Book of Science*, 2002, 1950-2000.

Schweizer B., Sklar A., Statistical Metric Spaces, *Pacific J. Math*, 1960, **10**(1), 313-334.

Sedghi S., Shobkolaei N., Altun I., Partial Fuzzy Metric Space and Some Fixed Point Results, *Communications in Mathematics*, 2015, **23**(2), 131-142.

Sehgal V.M., Bharucha-Reid A.T., Fixed Points of Contraction Mappings on Probabilistic Metric Spaces, *Theory of Computing Systems*, 1972, **6**(1), 97-102.

Shabir M., Naz M., On Soft Topological Spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **61**, 1786-1799.

Sion, M., Zelmer G., On Quasi-metrizability, *Canadian Journal of Mathematics*, 1967, **19,** 1243-1249.

Valero O., On Banach Fixed Point Theorems for Partial Metric Spaces, *Applied General Topology*, 2005, **6**(2), 229-240.

Vitolo P., The Representation of Weighted Quasimetric Spaces, 1999, **31,** 95-100.

Wardovski D., On a Soft Mapping and Its Fixed Points, *Fixed Point Theory and Applications*, 2013, **2013**(1), 1-11.

Wardowski D., Fuzzy Contractive Mappings and Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 2013, **222**, 108-114.

Wilson W.A., On Quasi-Metric spaces, *American Journal of Mathematics*, 1931, **53**(3), 675-684.

Yue Y., Gu M., Fuzzy Partial (pseudo-) Metric Spaces, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2014, **27**(3), 1153-1159.

Zadeh L.A., Fuzzy Sets, *Information and Control*, 1965, **8**(3), 338-353.

Zorlutuna I., Akdağ M., Min W.K., Atmaca S., Remarks on Soft Topological Spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2012, **3**(2), 171-185.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Aldemir B., Güner E., Aydogdu E., Aygün H., Some Fixed Point Theorems in Partial Fuzzy Metric Spaces, *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 2020, **10**(4), 2889-2900.

Aldemir B., Güner E., Aydogdu E., Aygün H., Fixed Point Results in Partial Fuzzy Metric Spaces, *International Marmara Sciences Congress*, Kocaeli, Türkiye, 19-20 Haziran 2020.

Aydogdu E., **Aldemir B.**, Güner E., Aygün H., Some Properties of Partial Fuzzy Metric Topology, *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*, Springer, Cham, 2020, **1197**, 1267-1275.

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul’da tamamladı. 2009 yılında başladığı İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümünden merkezi yatay geçişle 2014 yılında Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümüne geçiş yaptı ve 2018 yılında derece ile mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans programına başladı. 2021 yılı Ocak ayından itibaren Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.