KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PERİYODİK SINIR KOŞULLU HİPERBOLİK TERS KATSAYI PROBLEMİNİN FOURİER YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

AYSEL PEKÜZÜN

KOCAELİ 2021

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PERİYODİK SINIR KOŞULLU HİPERBOLİK TERS KATSAYI PROBLEMİNİN FOURİER YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

AYSEL PEKÜZÜN

Doç.Dr. İrem BAĞLAN		
Danışman,	**Kocaeli Üniv.**	**..........................**
Prof.Dr. Şevket GÜR		
Jüri Üyesi,	**Sakarya Üniv.**	**..........................**
Doç.Dr. Mine Aylin BAYRAK		
Jüri Üyesi,	**Kocaeli Üniv.**	**..........................**

Tezin Savunulduğu Tarih: 04.06.2021

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Ters problemler fizikte ve mühendislikte çok kullanılan problemlerdir. Özellikle sınır koşullarının periyodiklik şartı çokça aranmaktadır. Bu çalışmada, ters katsayılı bir hiperbolik denkleme, periyodik sınır koşul kullanarak çözümün varlığı ve tekliği incelenmektedir.

Periyodik sınır koşullu hiperbolik ters katsayı probleminin Fourier yöntemiyle çözümü çalışmasında desteğini esirgemeyen sayın değerli hocam Doç. Dr. İrem BAĞLAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2021 Aysel PEKÜZÜN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

$E(t)$	:Ek koşul
$f(x,t)$	:Kaynak fonksiyonu
$r(t)$	:Ters katsayı
$u(x,t)$	:Çözüm fonksiyonu
$\varphi(t)$	:Başlangıç koşulu
$\psi(t)$	:Başlangıç koşulu

PERİYODİK SINIR KOŞULLU HİPERBOLİK TERS KATSAYI PROBLEMİNİN FOURİER YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada, periyodik sınır ve integral koşulları ile ters hiperbolik problem incelenmiştir. Çözüm, Fourier yaklaşımı ile elde edilmiştir. Giriş verilerine göre, çözümün verisinin varlığı, tekliği ve sürekli bağımlılığı Fourier yöntemi ile kanıtlanır. Ters problem, ilk olarak Fourier yöntemi ile daha sonra nümerik çözümün açık sonlu fark şeması ile çözülmüştür. Ayrıca sayısal yaklaşımda gürültülü verilerine göre duyarlılığı da gösterilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Denklem, İntegral Ek Koşulu, Periyodik Sınır Koşul, Ters Katsayı Problemi.

FOURIER METHOD FOR INVERSE COEFFICIENT HYPERBOLIC EQUATION WITH PERIODIC BOUNDARY CONDITION

ABSTRACT

In the thesis, the inverse hyberbolic problem has been studied with periodic boundary and integral overdetermination condition. The solution of the problem was found with the Fourier approximation. Under the given conditions, the existence, uniqueness and continuous dependence of the solution has been proved by the Fourier method. The inverse problem is first used by the Fourier Method and then the implicit finite difference scheme is used for the numerical solution. Finally, the sensitivity of the scheme according to the noisy overdetermination data is shown.

Keywords: Hiperbolic Equation, Integral Addition Condition, Periodic Boundary Condition, İnverse Coefficient Problem.

GİRİŞ

Kısmi türevli diferansiyel denklemler fen biliminde ve mühendisliğin birçok alanında uygulamalı matematiğin önemli inceleme alanlarından biri olarak görülmektedir. Ayrıca kısmi diferansiyel denklemler bir ortamdaki ısı aktarımında, dalga yayılımında ve elektrik akımındaki devimbilimde ağırlıklı olarak kullanılmaktadır.

Dalga yayılımında kullanılan hiperbolik denklemler de kısmi türevli diferansiyel denklemlerin bir sınıfıdır ve bu uygulamadaki önemi büyüktür. Hiperbolik denklemler bir ortamdaki titreşimlerin ve özellikle dalgaların nasıl yayıldığını tanımlarlar. Dolayısıyla dalga denklemleri olarak da adlandırılırlar [1-3].

$\mathrm{u_{xx}} + \mathrm{u_{tt}} = \mathrm{H}$ Dalga Denklemi $(\mathrm{H} = \mathrm{H}(\mathrm{x}, \mathrm{t}, \mathrm{u_x}, \mathrm{u_t}))$.

Hiperbolik denklemlerinin bir boyutlu en yalın örneği bir yayın belirli bir yönde hareket etmesidir. İki boyutlu olarak bir gitaristin titreştirdiği gitar teli örnek olarak verilebilir. Üç boyutlu olarak da dağılma halinde olan taneciklerin bir yere çarpma problemi ele alınabilir. Bu üç durumdaki dalga hareketlerinin de belli bir süre sonra sürtünme kuvvetinin etkisiyle azalacağı gözlemlenebilir. Ayrıca gözenekli bir ortamdaki akışkanların ve kirleticilerin atmosferik akışlarında, aerodinamik akışlarda ve sinyal yayılımlarında hiperbolik denklemler çokça kullanılmaktadır [3].

Başlangıç veya sınır koşullu bir diferansiyel denklemdeki kaynak fonksiyonun katsayılarının, çözüm için verilen bir ek koşul kullanılarak, belirlenmesi problemine Ters Problem denir. Bu tür problemler doğa biliminde, çevre kirliliğinin belirlenmesinde bilgisayarlı tomografide, deprem biliminde, faydalı yer altı kaynaklarının yerinin ve miktarının tespitinde; uydudan edinilen bilgilere göre bir bölgenin alt yapısının araştırılması gibi birçok problemde ortaya çıkmaktadır [4]. Modern bilimlerde ve teknisyenlik uygulamalarının genelinde direkt hesaplayamadığımız birtakım parametrelerde ters problemlere başvurulur. Bu sebeple ters problemler 20. yüzyılın 2. yarısından başlayarak uygulamalı matematiğin gündemdeki zirve konuların arasında yerini almıştır. Ters problem klasik matematiğin çeşitli dallarında kullanılan uygulamaların çoğunu kapsamaktadır. Ters problemler yapılan çalışmayla birlikte; dalga boyunun yoğunluğu ve hızı, esneklik çalışmaları, iletkenlik, elektrik ve manyetik geçirgenlik katsayısı, ulaşılamayan alanlardaki homojensizliğin özellikleri ve yeri, vb. gibi ortamın önemli özelliklerinin tanımlanması sebebiyle bu uygulamaya önemli bir katkı sağlamaktadır [5-11]. Ters problemler birçok problemler üzerinde çalışılmıştır [12-35].

Bu tip problemleri çözmede, sınır koşulları etkili bir yer tutar. Özellikle lokal olmayan koşullarla çalışmak bu tür problemler için çok zordur [12,13,18,19]. Periyodik sınır koşulu lokal olmayan bir sınır koşuludur. Periyodik sınır koşullarıyla değişik problemlerle çalışılmıştır [25-33]. Bu tezde kullanılacak olan periyodik sınır koşulları, ay teorisinde özellikle ayın hareketliliğini inceleme problemlerinde kullanılır. Ayrıca moleküler dinamiklerde ve akışkanlar dinamiği simülasyonlarında da bu probleme başvurulur. Yani döngüsel olarak tekrara düşen durumlarda kullanılır [35].

1. Bölüm içerisinde; kısmi türevli diferansiyel denklemler, fonksiyon serileri, ortogonal fonksiyonlar ve Fourier yöntemi verilmiştir.

2. Bölüm içerisinde; homojen ve homojen olmayan hiperbolik denklemler için Fourier yöntemi verilmiştir.

3. Bölüm içerisinde; periyodik sınır koşullu homojen ve homojen olmayan hiperbolik denklemler için Fourier yöntemi verilmiştir.

4. Bölüm içerisinde; periyodik sınır koşullu hiperbolik ters katsayı probleminin çözümü, bu çözümün varlığı, tekliği, kararlığı ve nümerik çözümü verilmiştir.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bilinmeyen fonksiyon ile bu fonksiyonun türevlerini içeren denklemlere Diferansiyel Denklem denilmektedir. Bu denklem tek bir bağımsız değişkene bağlı bir diferansiyel denklem ise Adi Diferansiyel Denklem olarak adlandırılır [36].

En az iki bağımsız değişken, bir veya birden fazla bağımlı değişken ve bu değişkenlere göre türevlerini bulunduran denkleme Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem denir. Örneğin iki boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklem için x, t bağımsız değişkenler, u bağımlı değişken olmak üzere kısmi türevli bilinmeyen fonksiyon,

$$G\big(x, t, u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_t(x,t), u_{tt}(x,t)\big) = 0$$

şeklinde yazılabilir. A, B, C, D, E, F ve R bağımsız değişkenlere bağlı, u, x ve t'ye bağlı bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, iki boyutlu kısmi diferansiyel denklem;

$$A(x,t)u_{xx} + 2B(x,t)u_{xt} + C(x,t)u_{tt} + D(x,t)u_x + E(x,t)u_t + F(x,t)u = R(x,t) \qquad (1.1)$$

şeklinde yazılır. Burada diskriminant,

$$\Delta = B^2(x,t) - A(x,t)C(x,t)$$

olmak üzere $\Delta > 0$ olduğunda (1.1) denklemi hiperbolik denklem olarak ifade edilir. Verilen kısmi diferansiyel denklemlerle birlikte denklemin t bağımsız değişkeni için $t = t_0$ anında $u(t_0) = u_0$ koşulu verilirse buna başlangıç koşulu ve bu koşul altında denklemi çözümünün aranmasına ise, Başlangıç Değer Problemi adı verilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemle beraber çözüm bölgesinin sınırlarında çözüm fonksiyonu veya türevlerinin değeri, problemi belirleyecek şekilde verilmişse bunlara sınır koşulları ve bu koşullar altında denklemin çözümünün aranmasına da Sınır Değer Problemi denir [36].

1.2. Fonksiyon Serileri

Tanım 1.2.1. f, x değişkene bağlı fonksiyon olsun. Terimleri f fonksiyonlarından oluşan seriye fonksiyon serisi denir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x) + \cdots \qquad (1.2)$$

şeklinde ifade edilir [37].

Serinin terimlerinin, herhangi bir bölgede tanımlı ve belirli özelliklere sahip fonksiyonlar olduğunu varsayalım. (1.1) serisinin kısmi toplamını,

$$S_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)$$

şeklinde gösterelim. $\{S_k\}$ fonksiyon dizisine (1.2) serisinin kısmi toplamlar dizisi denir. (1.2) serine ait kısmi toplamlar dizisinin özelliği (1.2) fonksiyon serisinin özelliğinin tanımlanmasına olanak verir [37].

Tanım 1.2.2. Herhangi bir kümede, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ fonksiyon serisi verilmiş olsun. Bu serinin $\{S_k\}$ kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise, o zaman $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisine o kümede yakınsak seri denir [37].

Tanım 1.2.3. Kısmi toplamlar dizisi herhangi bir kümede düzgün yakınsak olan fonksiyon serisine, yine o kümede düzgün yakınsak seri denir [38].

Teorem1.2.1. (Weierstrass-M testi): $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ bir fonsiyon serisi olsun. Eğer her $n\epsilon\mathbb{N}$ ve $\forall x \in I$ için $|f_k(x)| \leq M_k$ olacak şekilde bir M_k sayıları mevcut ve $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ sayı serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ fonksiyon serisi düzgün yakınsaktır.

Herhangi kümede sınırlanan seri, sözü edilen kümede mutlak ve düzgün yakınsaktır [38].

Teorem1.2.2. Terimleri sürekli fonksiyonlardan oluşan $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi, herhangi bir kümede düzgün yakınsaksa, o zaman onun

$$g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x) + \cdots$$

toplamı da o kümede sürekli fonksiyondur [38].

Teorem 1.2.3. Terimleri, $[a, b]$ aralığında sürekli türeve sahip $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi ve onun terimlerinin türevlerinden oluşan,

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$

serisi düzgün yakınsaksa, o zaman, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi sözü edilen aralıkta terim terim türevlenebilirdir [38].

1.3. Ortogonal Fonksiyonlar

Tanım 1.3.1.

$$\int_a^b \phi m(t)\phi n(t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ için} \\ r_n & m = n \text{ için} \end{cases}$$

eşitliği sağlanıyorsa $\phi m(t)$ ve $\phi n(t)$ fonksiyonlarına (a,b) aralığında ortogonaldir denir. Özel olarak $r_n = 1$ ise ortonormal adını alır [3].

Tanım 1.3.2. (Volterra integral denklemleri)

u(x) bilinmeyen fonksiyon ve K(x,t) çekirdek fonksiyon olmak üzere sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre integral denklemler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

$g(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)u(t)dt$ (1. Tip Volterra integral denklemi)

$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)u(t)dt$ (2. Tip Volterra integral denklemi)

gibi integral sınırları değişkenden oluşan denklemlere Volterra İntegral Denklemleri denilmektedir. Burada f(x) ve g(x) bilinen fonksiyondur [39].

Teorem 1.3.2. $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu, u(x) bilinmeyen fonksiyonu olmak üzere

$$u(x) = g(x) + \int_0^x K(x, t)u(t)dt \tag{1.3}$$

2. tip Volterra integral denkleminde $K(x, t)$ ve g(x) fonksiyonu sürekli ise (1.3) denklemi, verilen aralıkta sürekli ve yakınsak bir çözümü vardır [39].

Tanım 1.3.3. f(x) ve g(x) fonksiyonları, [a,b] aralığında integrallenebilir olduğunda $f(x), g(x) \in L_2(a,b)$,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{1/2} \text{, yani}$$

$$|(f,g)| \leq |f|_{L_2}.|g|_{L_2}$$

eşitsizliğine Cauchy Eşitsizliği denir [40].

Tanım 1.3.4. [a,b] aralığında ortogonal sistem oluşturan $\propto_1 (t), \propto_2 (t), \ldots, \propto_k (t), \ldots$ fonksiyonları integrallenebilir ve

$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \propto_k (t)$ fonksiyonu verilsin. Burada c_k lar Fourier katsayıları olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} c^2{}_k |\propto_k (t)|^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt$$

eşitsizliğine Bessel Eşitsizliği denir [40].

Tanım 1.3.5. x_n, y_n reelsayıların ikili n-lisi ve $n = \overline{1,\infty}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir [40].

1.4. Fourier Yöntemi

f(x) 2π periyotlu bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.4}$$

serisine Fourier sersisi denir. Burada a_0, a_k, b_k katsayılarına da Fourier katsayıları denir. Bir fonksiyonun Fourier serisine açılabilmesi için bazı özelliklere sahip olması gerekir.

(1.4) denkleminin her tarafının mutlak değeri alınsın;

$$|f(x)| = \left|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right|$$

$|f(x)| \leq \left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$ serisi yakınsak olduğundan (1.4) Fourier Serisi düzgün yakınsaktır [41].

Tanım 1.4.1. (1.4) denkleminin $[-\pi, \pi]$ aralığında f(x) in fourier katsayılarını yani a_0, a_k, b_k katsayılarını bulalım.

Bunun için (1.4) in her tarafını – π den π ye x e göre integrali alınırsa;

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0.\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx\right)$$

şeklinde olur. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0$ olduğundan,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{1.5}$$

bulunur. Bu sefer (1.4) denkleminin her tarafını $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$ ile çarpılırsa;

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad \text{ve} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & k \neq n \text{ için} \\ \pi & k = n \text{ için} \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \tag{1.6}$$

bulunur. benzer şekilde (1.4) denkleminin her tarafını $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx$ ile çarpılırsa;

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad \text{ve} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & k \neq n \text{ için} \\ \pi & k = n \text{ için} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \tag{1.7}$$

bulunur. (1.5), (1.6) ve (1.7) ifadelerine (1.4)'ün Fourier Serisinin Katsayıları denir [41].

Tanım 1.4.2. f(x) fonksiyonu [a,b] aralığında sonlu sayıdaki noktalar hariç diğer tüm noktalarda sürekli ise f(x) e parçalı sürekli fonksiyon (piecewise continuous function) denir [41].

Teorem 1.4.1. (Dirichlet Teoremi): (1.4)'teki f(x) fonksiyonunun $[-\pi,\pi]$ aralığında kendisi ve türevleri parçalı sürekli fonksiyon ise

1) f(x) in Fourier serisi, sürekli olduğu her noktada yakınsaktır.

2) f(x) in Fourier serisi, süreksizlik noktalarında bu noktaların sağ ve sol limitlerinin ortalama değerine, yani

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

değerine eşittir.

3) f(x) in Fourier serisi, uç noktalarda bu noktaların sağ ve sol limitlerinin ortalama değerine, yani

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

değerine eşittir [41].

1.5. Sturm-Liouville Problemi

$$(k(x).y')' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \tag{1.8}$$

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0,\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \tag{1.9}$$

$k(x) \in C'[a,b]\ \ k(x), r(x) > 0\ q(x),\ r(x) \in C[a,b],\ \lambda \in \mathbb{R}^2$

$({a_1}^2 + {a_2}^2 \neq 0, {b_1}^2 + {b_2}^2 \neq 0)$

(1.8)-(1.9) probleminin daima aşikâr çözümü vardır ve (1.8)-(1.9) problemine Strum-Lioville problemi denir [42].Strum-Liouville problemine sıfırdan farklı çözüm sağlayan λ'ya özdeğer, bu özdeğere karşılık gelen fonksiyonlara da yani (1.8)-(1.9)'nin çözümüne özfonksiyonlar denir [42].

1) Regüler (Local) Strum-Lioville probleminin özdeğerleri reeldir.
2) Her bir özdeğere bir özfonksiyon karşılık gelir.
3) Özfonksiyonlar ortogonaldir.
4) Bütün özdeğerler artan olarak seyreder.

$y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b)$ sınır koşulları bu şekilde ise (1.5)-(1.6) problemine periyodik (Local olmayan) koşullu Strum-Liouville problemi denir [42]. Periyodik koşulun regülerden farkı bir özdeğere iki farklı özfonksiyon gelebilir [42].

Örneğ

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{1.10}$$

Strum-Liouville problemini, $y(0) = y(\ell)$ sınır koşuluyla çözelim. (1.10) problemi sabit katsayılı ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla karakteristik denkleminden λ özdeğerini bulabilmek için λ nın tüm durumlarına bakacağız;

i) $\lambda < 0$ için $\lambda = -m^2$olsun. (1.10) dan $r^2 + \lambda = 0$ $r^2 = m^2$

$k_1 = -m \quad k_2 = m$

$$y(x) = c_1e^{-mx} + c_2e^{mx} \tag{1.11}$$

özfonksiyondur. (1.11) özfonksiyonuna sınır koşulları uygulandığında;

$c_1 = 0,\ \ c_2 = 0$

bulunur. $y = 0$ aşikâr çözümdür.

ii) $\lambda = 0$ için,

$$y''(x) = 0 \quad y'(x) = c_1 \quad y(x) = c_1x + c_2 \tag{1.12}$$

(1.12) özfonksiyonuna sınır koşulları uygulandığında;

$c_1 = 0,\ \ c_2 = 0$

bulunur. $y = 0$ aşikâr çözümdür.

iii) $\lambda > 0$ için $\lambda = m^2$olsun. $R^2 + \lambda = 0 \quad r^2 = -m^2$

$k_1 = -mi \quad k_2 = mi$

$$y(x) = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx \tag{1.13}$$

(1.13) özfonksiyonuna sınır koşulları uygulandığında;

$c_1 = 0$ ve $c_1 = c_2 \sin m\ell$

gelir. Buradan,

$\sin m\ell = 0 \quad m\ell = \pi k \quad m = \frac{\pi k}{\ell}$ yani

$\lambda_k = (\frac{\pi k}{\ell})^2$ özdeğer,

$y_k(x) = \sin\frac{\pi k}{\ell}x$ özfonksiyonu bulunur [42].

2. DALGA DENKLEMİ İÇİN FOURİER YÖNTEMİ

2.1. Homojen Dalga Denkleminin Fourier Yöntemi ile Çözümü

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad 0 < x < \ell,\ 0 < t < T \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,o) = \psi(x) \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0 \tag{2.3}$$

(2.1)-(2.3) probleminin çözümü x ve t değişkenine bağlı bir çözüm olacağından;

$$u(x,t) = X(x).T(t) \tag{2.4}$$

şeklinde yazabiliriz. O halde (2.4)'ü (2.1)'de uygulanırsa;

$$XT'' = a^2X''T \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0$$

Strum-Liouville problemleri elde edilir. (2.3) ifadesinden;

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X(0) = X(\ell) = 0$$

probleminin çözümü

$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2$ özdeğer,

$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{\ell}x$ özfonksiyonu ve

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{an\pi}{\ell}t + B_n \sin\frac{an\pi}{\ell}t$$

olduğu bellidir. X_n ve T_n özfonksiyonlarını (2.4)'de yerine yazarsak oluşan çözüm;

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{an\pi}{\ell}t + B_n \sin\frac{an\pi}{\ell}t\right)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\ , \quad n = 1,2\ ...$$

şeklinde yazılır. Bu ifade,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{an\pi}{\ell}t + B_n \sin\frac{an\pi}{\ell}t\right)\sin\frac{\pi n}{\ell}x \tag{2.5}$$

şeklinde yazılabilir. (2.2) deki başlangıç koşulu (2.5) ifadesinde kullanılırsa;

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{\ell}x$$

şeklinde yazılır. Bu ifade bir Fourier serisidir ve,

$$A_n = \varphi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x dx$$

φ_n Fourier katsayısıdır. (2.5)'in 1. Mertebeden t'ye göre türevini alınırsa;

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{an\pi}{\ell}\sin\frac{an\pi}{\ell}t + B_n\frac{an\pi}{\ell}\cos\frac{an\pi}{\ell}t\right)\sin\frac{\pi n}{\ell}x$$

(2.2)'den;

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{an\pi}{\ell}\sin\frac{\pi n}{\ell}x$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde $B_n\frac{an\pi}{\ell}$ ifadesi de bir Fourier katsayısıdır;

$$B_n.\frac{an\pi}{\ell} = \psi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x dx$$

$$B_n = \psi_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x dx$$

ψ_n Fourier katsayısıdır. Son olarak φ_n ve ψ_n Fourier katsayıları (2.5) çözümünde yerine yazılırsa;

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x dx \cos\frac{an\pi}{\ell}t + \frac{2}{an\pi}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x dx \sin\frac{an\pi}{\ell}t\right)\sin\frac{\pi n}{\ell}x$$

(2.1)-(2.3) probleminin çözümü elde edilir.

2.2. Homojen Olmayan Dalga Denkleminin Fourier Yöntemi ile Çözümü

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \qquad 0 < x < \ell,\ 0 < t < T \tag{2.6}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,o) = \psi(x) \tag{2.7}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \tag{2.8}$$

(2.6)- (2.8) probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \tag{2.9}$$

şeklinde arayalım. (2.9)’u (2.6)’da yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t) \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x = f(x,t) \tag{2.10}$$

ede edilir. (2.10)’un her iki tarafı $\int_0^{\ell} \sin \frac{\pi m}{\ell} x \, dx$ ile çarpılırsa;

$$u_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t) = f_n(t) \tag{2.11}$$

şeklinde elde edilir. Burada $f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \sin \frac{\pi n}{\ell} x. f(x,t) dx$ dir. (2.11) ifadesi parametrelerin değişimi metoduyla çözülür. İlk olarak $f_n(t)$’nin homojen hali alınırsa;

$$u_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t) = 0$$

$$r^2 + \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 = 0 \quad r_1 = \left(\frac{an\pi}{\ell}\right) i\,, \quad r_2 = -\left(\frac{an\pi}{\ell}\right) i$$

$$u_n(t) = C_n(t) \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D_n(t) \sin \frac{an\pi}{\ell} t$$

çözümü elde edilir.

$$C_n'(t) \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D_n'(t) \sin \frac{an\pi}{\ell} t = 0$$

$$\left(\frac{an\pi}{\ell}\right) D_n'(t) \sin \frac{an\pi}{\ell} t - \left(\frac{an\pi}{\ell}\right) C_n'(t) \cos \frac{an\pi}{\ell} t = f_n(t)$$

Cramer yönteminden,

$$C_n'(t)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin\frac{an\pi}{\ell}t\\ f_n(t) & \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\cos\frac{an\pi}{\ell}t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\frac{an\pi}{\ell}t & \sin\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\\ -\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\sin\frac{an\pi}{\ell}t & \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\cos\frac{an\pi}{\ell}t\end{vmatrix}}=-\frac{\ell}{an\pi}f_n(t)\sin\frac{an\pi}{\ell}t$$

olacaktır. Son ifadede her iki yanın 0'dan t'ye göre integrali alınırsa,

$$C_n(t)=-\frac{\ell}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{\ell}\tau d\tau\ +C_n(0)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$D_n'(t)=\frac{\begin{vmatrix}\cos\frac{an\pi}{\ell}t & 0\\ -\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\sin\frac{an\pi}{\ell}t & f_n(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\frac{an\pi}{\ell}t & \sin\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\\ -\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\sin\frac{an\pi}{\ell}t & \left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\cos\frac{an\pi}{\ell}t\end{vmatrix}}=\frac{\ell}{an\pi}f_n(t)\cos\frac{an\pi}{\ell}t$$

$$D_n(t)=\frac{\ell}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{an\pi}{\ell}\tau d\tau\ +D_n(0)$$

katsayıları bulunmuş olur. $u_n(t)$'de $C_n(t)$ ve $D_n(t)$ yi yerine yazılırsa;

$$u_n(t)=\left[-\frac{\ell}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{\ell}\tau d\tau\ +C_n(0)\right]\cos\frac{an\pi}{\ell}t$$
$$+\left[\frac{\ell}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{an\pi}{\ell}\tau d\tau\ +D_n(0)\right]\sin\frac{an\pi}{\ell}t$$

$$u_n(t)=\frac{\ell}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\left[\sin\frac{an\pi}{\ell}t.\cos\frac{an\pi}{\ell}\tau-\cos\frac{an\pi}{\ell}t.\sin\frac{an\pi}{\ell}\tau\right]d\tau$$
$$+C_n(0)\cos\frac{an\pi}{\ell}t+D_n(0)\sin\frac{an\pi}{\ell}t$$

$$u_n(t)=\frac{\ell}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\left[\sin\frac{an\pi}{\ell}(t-\tau)\right]d\tau\ +C_n(0)\cos\frac{an\pi}{\ell}t+D_n(0)\sin\frac{an\pi}{\ell}t \qquad (2.12)$$

şeklinde çözümü bulunur. (2.7)'den,

$$u_n(0)=\varphi_n=C_n(0),\quad \varphi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}xdx \qquad (2.13)$$

(2.12)'nin t'ye göre türevi alınırsa;

$$u_n'(t)=C_n(0)\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\sin\frac{an\pi}{\ell}t+D_n(0)\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)\cos\frac{an\pi}{\ell}t$$

şeklinde bulunur. (2.7)'den,

$$u_n'(t) = \frac{\ell}{an\pi}\psi_n = D_n(0), \quad \psi_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x dx \tag{2.14}$$

(2.13) ve (2.14)'ü (2.12)'de yerine yazarsak,

$$u_n(t) = \frac{\ell}{an\pi}\int_0^{t} f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{\ell}(t-\tau)d\tau \ + \varphi_n\cos\frac{an\pi}{\ell}t + \frac{\ell}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{\ell}t$$

$u_n(t)$'yi (2.9)'da yerine yazarsak,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ell}{an\pi}\int_0^{t} f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{\ell}(t-\tau)d\tau \ + \varphi_n\cos\frac{an\pi}{\ell}t + \frac{\ell}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{\ell}t\right)\sin\frac{\pi n}{\ell}x$$

(2.6)-(2.8) probleminin çözümü elde edilir.

3. PERİYODİK SINIR KOŞULLU DALGA DENKLEMİ İÇİN FOURİER YÖNTEMİ

3.1. Homojen Periyodik sınır koşullu Hiperbolik denklemlerin Fourier Yöntemi ile Çözümü

$D = \{(x,t)|\ 0 < x < \ell,\ \ 0 < t < T\}$ bölgesinde homojen dalga denklemi ele alalım.

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x) \tag{3.2}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t),\ \ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) \tag{3.3}$$

sisteminde (3.3) periyodik sınır koşuludur. (3.1)-(3.3) probleminin çözümünü,

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.4}$$

şeklinde arayabiliriz. (3.4) ifadesi (3.1)-(3.3) sistemine uygulanırsa,

$$T'' + \lambda T = 0$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X(0) = X(\ell)\ \ \ X'(0) = X'(\ell)$$

Strum-Liouville problemi elde edilir. Bu problemin çözümü için özdeğer ve özvektör arayalım;

i) $\lambda < 0$ için $(m^2 = -\lambda)$;

$$X(x) = c_1 e^{-mx} + c_2 e^{mx}$$

$$X'(x) = -mc_1 e^{-mx} + mc_2 e^{mx}$$

(3.3) periyodik sınır koşulunu uygulanırsa,

$$c_1 + c_2 = c_1 e^{-m\ell} + c_2 e^{m\ell}$$

$$-c_1 + c_2 = -c_1 e^{-m\ell} + c_2 e^{m\ell}$$

denklem sistemi oluşur. $\lambda < 0$ çözüm yoktur.

ii) $\lambda = 0$ için;

$$X(x) = ax + b$$

çözümü elde edilir.

$$X'(x) = a$$

(3.3)'teki periyodik sınır koşulundan,

$$b = a\ell + b$$

$$a = 0 \;\; b \neq 0$$

$$X_0(x) = b_0 \tag{3.5}$$

$\lambda = 0$ için $T'' = 0$ olduğundan,

$$T_0(t) = c_0 t + d_0 \tag{3.6}$$

yazabiliriz.

iii) $\lambda > 0$ için $(m^2 = \lambda)$;

$$X(x) = A\cos mx + B\sin mx$$

$$X'(x) = -mA\sin mx + mB\cos mx$$

(3.3)'teki periyodik sınır koşulundan,

$$A = A\cos m\ell + B\sin m\ell$$

$$B = -A\sin m\ell + B\cos m\ell$$

gelir. Burada,

$A(1-\cos m\ell)-B\sin m\ell=0$

$A\sin m\ell+B(1-\cos m\ell)=0$

sisteminin çözümünün lineer bağımsız olması için A, B katsayılar determinantı sıfır olmalıdır;

$\begin{vmatrix} 1-\cos m\ell & -\sin m\ell \\ \sin m\ell & 1-\cos m\ell \end{vmatrix}=0$

$1-2\cos m\ell+\cos^2 m\ell+\sin^2 m\ell=0$

$\cos m\ell=1$ $m=\frac{2\pi k}{\ell}$ yani $\lambda_k=\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)^2$ özdeğeri gelir.

Bu özdeğere karşılık iki özfonksiyon $\sin\frac{2\pi k}{\ell}x$ ve $\cos\frac{2\pi k}{\ell}x$ dir. Dolayısıyla oluşan özfonsiyon,

$$X_{ck}(x)=a_k\cos\frac{2\pi k}{\ell}x+b_k\sin\frac{2\pi k}{\ell}x \qquad (3.7)$$

şeklindedir. Özdeğer T fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$T''+\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)^2 T=0$

$$T_{ck}(t)=c_k\cos\frac{2\pi k}{\ell}t+d_k\sin\frac{2\pi k}{\ell}t \qquad (3.8)$$

bulunur. Elde edilen (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.9)'u (3.5)'te kullanılırsa,

$u(x,t)=b_0(c_0t+d_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi k}{\ell}x+b_k\sin\frac{2\pi k}{\ell}x\right)\left(c_k\cos\frac{2\pi k}{\ell}t+d_k\sin\frac{2\pi k}{\ell}t\right)$

genel çözümü elde edilir ve

$b_0(c_0t+d_0)=\frac{B_0}{2}$

$$u(x,t)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{ck}\cos\frac{2\pi k}{\ell}(x-t)+B_{sk}\sin\frac{2\pi k}{\ell}(x+t)\right) \qquad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir.

3.2. Homojen Olmayan Periyodik sınır koşullu Hiperbolik denklemlerin Fourier ile Çözümü

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t),\ 0 < x < \ell,\ 0 < t < T \tag{3.10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \tag{3.11}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t),\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) \tag{3.12}$$

(3.10)-(3.12) probleminin genel çözümünü,

$$u(x,t) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(u_{ck}(t)\cos\frac{2\pi k}{\ell}x + u_{sk}(t)\sin\frac{2\pi k}{\ell}x\right) \tag{3.13}$$

şeklinde arayalım. (3.13) ifadesini (3.10)'de kullanılırsa,

$$f(x,t) = \frac{u_0''(t)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(u_{ck}''(t)\cos\frac{2\pi k}{\ell}x + u_{sk}''(t)\sin\frac{2\pi k}{\ell}x\right)$$
$$+\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(u_{ck}(t)\cos\frac{2\pi k}{\ell}x + u_{sk}(t)\sin\frac{2\pi k}{\ell}x\right)$$

$$f(x,t) = \frac{u_0''(t)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(u_{ck}''(t) + \left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)^2 u_{ck}(t)\right)\cos\frac{2\pi k}{\ell}x$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{sk}''(t) + \left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)^2 u_{sk}(t)\right)\sin\frac{2\pi k}{\ell}x$$

elde edilir. Burada u_0, u_{ck} ve u_{sk} katsayılırı bulunacaktır. Fourier metoduyla elde edilen katsayılar;

$$u_0''(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t)dx \tag{3.14}$$

$$u_{ck}''(t) + \left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)^2 u_{ck}(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t)\cos\frac{2\pi k}{\ell}xdx \tag{3.15}$$

$$u_{sk}''(t) + \left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)^2 u_{sk}(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t)\sin\frac{2\pi k}{\ell}xdx \tag{3.16}$$

şeklindedir. (3.14)'ün çözümü için, $\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t)dx = f_0(t)$ olsun;

$$u_0''(t) = f_0(t)$$

denkleminin her iki tarafını 0'dan t'ye integralinin alalım;

$u_0'(t) - u_0'(0) = \int_0^t f_0(t)dt$

burada $u_0'(0)$ ifadesi (3.12)'den;

$u_0'(t) = \psi_0 + \int_0^t f_0(t)dt$

şeklinde yazılır. Tekrar integral alınırsa,

$u_0(t) - u_0(0) = \psi_0 t + \int_0^t f_0(t)dt$

şeklinde yazılır. (3.12)'den,

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t \int_0^t f_0(t)dt \qquad (3.17)$$

şeklindedir. Şimdi $\int_0^t \int_0^t f_0(t)dt$ ifadesine kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa;

$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t-\tau) f_0(\tau)d\tau$

şeklinde bulunur.

(3.15)'in çözümü için; $\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x,t)\cos\frac{2\pi k}{\ell}xdx = f_{ck}(t)$ olsun. Yani,

$u_{ck}''(t) + \left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)^2 u(t) = f_{ck}(t)$

Bu denklemin homojen halinin çözümü,

$$u_{ck}(t) = C_{ck}\cos\frac{2\pi k}{\ell}t + D_{ck}\sin\frac{2\pi k}{\ell}t \qquad (3.18)$$

şeklinde yazılır. (3.18)'e parametrelerin değişimi metodu uygulanırsa,

$C_{ck}'\cos\frac{2\pi k}{\ell}t + D_{ck}'\sin\frac{2\pi k}{\ell}t = 0$

$\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right) D_{ck}'\cos\frac{2\pi k}{\ell}x - \left(\frac{2\pi k}{\ell}\right) C_{ck}'\sin\frac{2\pi k}{\ell}x = f_{ck}$

şeklinde yazılır. Cramer yönteminden,

$$C'_{ck}(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin\frac{2\pi k}{\ell}t \\ f_{ck}(t) & \left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)\cos\frac{an\pi}{\ell}t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\frac{2\pi k}{\ell}t & \sin\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right) \\ -\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t & \left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)\cos\frac{2\pi k}{\ell}t \end{vmatrix}} = -\frac{\ell}{2\pi k} f_{ck}(t)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t$$

$$D'_{ck}(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\frac{2\pi k}{\ell}t & 0 \\ -\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t & f_{ck}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\frac{2\pi k}{\ell}t & \sin\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right) \\ -\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t & \left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)\cos\frac{2\pi k}{\ell}t \end{vmatrix}} = \frac{\ell}{2\pi k} f_{ck}(t)\cos\frac{2\pi k}{\ell}t$$

yazılır. $C'_{ck}(t)$ ve $D'_{ck}(t)$ ifadelerinin her iki yanın 0'dan t'ye integrali alınırsa;

$$C_{ck}(t) = -\frac{\ell}{2\pi k}\int_0^t f_{ck}(\tau)\sin\frac{2\pi k}{\ell}\tau d\tau \; + C_{ck}(0)$$

$$D_{ck}(t) = \frac{\ell}{2\pi k}\int_0^t f_{ck}(\tau)\cos\frac{2\pi k}{\ell}\tau d\tau \; + D_{ck}(0)$$

bulunur. (3.18)'den;

$$u_{ck}(t) = \left(-\frac{\ell}{2\pi k}\int_0^t f_{ck}(\tau)\sin\frac{2\pi k}{\ell}\tau d\tau \; + C_{ck}(0)\right)\cos\frac{2\pi k}{\ell}t$$
$$+\left(\frac{\ell}{2\pi k}\int_0^t f_{ck}(\tau)\cos\frac{2\pi k}{\ell}\tau d\tau \; + D_{ck}(0)\right)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t$$

$$u_{ck}(t) = C_{ck}(0)\cos\frac{2\pi k}{\ell}t + D_{ck}(0)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t$$
$$+\frac{\ell}{2\pi k}\int_0^t f_{ck}(\tau)\left(\sin\frac{2\pi k}{\ell}t\cos\frac{2\pi k}{\ell}\tau - \cos\frac{2\pi k}{\ell}t\sin\frac{2\pi k}{\ell}\tau\right)d\tau$$

$$u_{ck}(t) = C_{ck}(0)\cos\frac{2\pi k}{\ell}t + D_{ck}(0)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t + \frac{\ell}{2\pi k}\int_0^t f_{ck}(\tau)\sin\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)(t-\tau)d\tau$$

(3.16)'nın çözümü için benzer şekilde; $\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t)\sin\frac{2\pi k}{\ell}x dx = f_{sk}(t)$ olmak üzere,

$$u_{sk}(t) = C_{sk}(0)\cos\frac{2\pi k}{\ell}t + D_{sk}(0)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t + \frac{\ell}{2\pi k}\int_0^t f_{sk}(\tau)\sin\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)(t-\tau)d\tau d\tau$$

şeklinde bulunur. $u_0(t)$, $u_{ck}(t)$ ve $u_{sk}(t)$ katsayılarını (3.13)'te yerine yazarsak,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t-\tau)f_0(\tau)d\tau\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{ck}(0)\cos\frac{2\pi k}{\ell}t + D_{ck}(0)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t + \frac{\ell}{2\pi k}\int_0^t f_{ck}(\tau)\sin\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)(t-\tau)d\tau\right)\cos\frac{2\pi k}{\ell}x$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{sk}(0)\cos\frac{2\pi k}{\ell}t + D_{sk}(0)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t + \frac{\ell}{2\pi k}\int_0^t f_{sk}(\tau)\sin\left(\frac{2\pi k}{\ell}\right)(t-\tau)d\tau\right)\sin\frac{2\pi k}{\ell}x$$

Genel çözümü elde edilir. (3.11)'den,

$$u(x,0) = \varphi_k(x) = \frac{u_0(0)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{ck}(0)\cos\frac{2\pi k}{\ell}x + u_{sk}(0)\sin\frac{2\pi k}{\ell}x$$

olur ve buradaki $u_0(0)$, $u_{ck}(0), u_{sk}(0)$ katsayıları Fourier metodundan,

$$\varphi_0 = u_0(0) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)dx$$

$$\varphi_{ck} = u_{ck}(0) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\cos\frac{2\pi k}{\ell}xdx$$

$$\varphi_{sk} = u_{sk}(0) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{2\pi k}{\ell}xdx$$

olur. (3.13)'ün t'ye göre türevi,

$$u_t(x,t) = \psi_k(x) = \frac{u_0'(t)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{ck}'(t)\cos\frac{2\pi k}{\ell}x + u_{sk}'(t)\sin\frac{2\pi k}{\ell}x$$

$$\left(u_{ck}'(t) = -\frac{2\pi k}{\ell}C_{ck}(0)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t + \frac{2\pi k}{\ell}D_{ck}(0)\cos\frac{2\pi k}{\ell}t\right)$$

$$\left(u_{sk}'(t) = -\frac{2\pi k}{\ell}C_{sk}(0)\sin\frac{2\pi k}{\ell}t + \frac{2\pi k}{\ell}D_{sk}(0)\cos\frac{2\pi k}{\ell}t\right)$$

şeklinde bulunur. (3.11)'den,

$$u_t(x,0) = \psi_k(x) = \frac{u_0'(0)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{ck}'(0)\cos\frac{2\pi k}{\ell}x + u_{sk}'(0)\sin\frac{2\pi k}{\ell}x$$

olur. Fourier yönteminden,

$$\psi_0 = u_0'(0) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)dx$$

$$\psi_{ck} = u_{ck}'(0) = \frac{4\pi k}{\ell^2}\int_0^{\ell}\psi(x)\cos\frac{2\pi k}{\ell}xdx$$

$$\psi_{sk} = u_{sk}'(0) = \frac{4\pi k}{\ell^2}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{2\pi k}{\ell}xdx$$

katsayıları bulunur. Buradan,

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0+\psi_0 t+\int_0^t (t-\tau)f_0(\tau)d\tau\right]$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{ck}\cos\frac{2\pi k}{\ell}t+\frac{\ell}{2\pi k}\psi_{ck}\sin\frac{2\pi k}{\ell}t+\frac{1}{2k}\int_0^t f_{ck}(\tau)\sin\frac{2\pi k}{\ell}(t-\tau)\,d\tau\right]\cos\frac{2\pi k}{\ell}x$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{sk}\cos\frac{2\pi k}{\ell}t+\frac{\ell}{2\pi k}\psi_{sk}\sin\frac{2\pi k}{\ell}t+\frac{1}{2k}\int_0^t f_{sk}(\tau)\sin\frac{2\pi k}{\ell}(t-\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{2\pi k}{\ell}x \qquad (3.19)$$

(3.10)-(3.12) probleminin genel çözümü elde edilir.

4. PERİYODİK SINIR KOŞULLU HİPERBOLİK TERS KATSAYI PROBLEMİ

4.1. Periyodik Sınır Koşullu Hiperbolik Ters Katsayı Probleminin Çözümü

$D = \{(x,t)|\ 0 < x < \pi,\ \ 0 < t < T\}$ bölgesinde kaynak fonksiyonlu dalga denklemi ele alalım.

$$u_{tt} - u_{xx} = r(t)f(x,t) \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{4.2}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t),\ \ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) \tag{4.3}$$

$$E(t) = \int_0^\pi x.u(x,t)dx \tag{4.4}$$

Tanım 4.1.1. (4.1)-(4.4)'de görülen $\{r(t), u(x,t)\}$ çiftinin bulunması problemine, Ters Problem denir.

Tanım 4.1.2 (4.1)-(4.4) problemini ve $r(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,T]$ koşulunu sağlayan $\{r(t), u(x,t)\}$ çözümüne (4.1)-(4.4)'ün klasik çözümü denir. Bu çözüm,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t-\tau)r(\tau)f_0(\tau)d\tau\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{ck}\cos2kt + \frac{\psi_{ck}}{2k}\sin2kt + \frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau)f_{ck}(\tau)\sin2k(t-\tau)d\tau\right)\cos2kx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{sk}\cos2kt + \frac{\psi_{sk}}{2k}\sin2kt + \frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau)f_{sk}(\tau)\sin2k(t-\tau)d\tau\right)\sin2kx \end{aligned} \tag{4.5}$$

dir. Burada $r(t) \in C^1[0,T]$ ve $u(x,t)$ de x ve t değişkenine göre ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir. r(t)'yi bulmak için (4.1) in her iki tarafını x ile çarpılıp 0'dan π'ye integrallenirse,

$$\int_0^\pi x.u_{tt}dx - \int_0^\pi x.u_{xx}dx = r(t)\int_0^\pi x.f(x,t)dx \tag{4.6}$$

şeklinde yazılır. (4.6) ifadesinde,

$$E''(t) = \int_0^{\pi} x.u_{tt}dx \tag{4.7}$$

olduğu açıktır. $\int_0^{\pi} x.u_{xx}dx$ için kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\int_0^{\pi} x.u_{xx}dx = \left(x.u_x(x,t)\right)_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u_x(x,t)dx$$

$$= \pi.u_x(\pi,t) - \left(u(\pi,t) - u(0,t)\right)$$

elde edilir. (4.3)'den,

$$\int_0^{\pi} x.u_{xx}dx = \pi.u_x(\pi,t) \tag{4.8}$$

(4.7) ve (4.8) ifadesini (4.6)'da kullanılırsa,

$$E''(t) - \pi.u_x(\pi,t) = r(t)\int_0^{\pi} x.f(x,t)dx$$

$$r(t) = \frac{E''(t) - \pi.u_x(\pi,t)}{\int_0^{\pi} x.f(x,t)dx} \tag{4.9}$$

ters katsayısı bulunur. $u_x(\pi,t)$'yi bulabilmek için (4.5)'in x'e göre türevini alıp x yerine π yazılırsa;

$$u_x(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-2k)\left[\varphi_{ck}\cos 2kt + \frac{\psi_{ck}}{2k}\sin 2kt + \frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau)f_{ck}(\tau)\sin 2k(t-\tau)d\tau\right]\sin 2kx$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} 2k\left[\varphi_{sk}\cos 2kt + \frac{\psi_{sk}}{2k}\sin 2kt + \frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau)f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)d\tau\right](2k)\cos 2kx$$

$$u_x(\pi,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left[\varphi_{sk}\cos 2kt + \frac{\psi_{sk}}{2k}\sin 2kt + \frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau)f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)d\tau\right]$$

bulunur. Son olarak $u_x(\pi,t)$ ifadesi (4.9)'da yazılırsa;

$$r(t) = \frac{E''(t) - \pi.\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left[\varphi_{sk}\cos 2kt + \frac{\psi_{sk}}{2k}\sin 2kt + \frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau)f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)d\tau\right]}{\int_0^{\pi} x.f(x,t)dx}$$

ters katsayısı, aynı zamanda $\{r(t), u(x,t)\}$ çifti bulunmuş olur.

4.2. Periyodik Sınır Koşullu Hiperbolik Ters Katsayı Probleminin Varlığı

Lemma 4.2.1. (4.1)-(4.4) probleminin varlığını ve tekliğini bulmak için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır.

1) $\varphi(x), \psi(x)$ $[0, \pi]$'de tanımlı olsun.

a) $\varphi(x)$ ikinci mertebeye kadar türevlenebilir, sürekli ve

$\varphi(0) = \varphi(\pi),\ \varphi'(0) = \varphi'(\pi),\ \varphi''(0) = \varphi''(\pi)$

b) $\psi(x)$ birinci mertebeye kadar türevlenebilir, sürekli ve

$\psi(0) = \psi(\pi),\ \psi'(0) = \psi'(\pi)$

uyum koşulları sağlansın.

2) $E(t) \in C^2[0, T],\ r(t) \in C^1[0, T]$

3) $f(x, t)$ ve f'in birinci mertebeden türevi D bölgesinde sürekli olsun.

$|f(x, t)| \leq M$, $M > 0$ ve $\int_0^\pi x. f(x, t)dx \neq 0$ olsun.

Teorem 4.2.1. Eğer Lemma 4.2.1 in koşulları sağlanıyorsa, (4.1)-(4.4) probleminin çözümü var ve tektir.

İspat: Lemma 4.2.1 in koşulları sağlansın. İlk olarak (4.5)'in her tarafının mutlak değeri alınırsa;

$$|u(x,t)| \leq \left|\frac{1}{2}\left(\varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t-\tau) r(\tau) f_0(\tau) d\tau\right)\right|$$
$$+ \left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{ck}\cos 2kt + \frac{\psi_{ck}}{2k}\sin 2kt + \frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau) f_{ck}(\tau)\sin 2k(t-\tau)\, d\tau\right)\cos 2kx\right|$$
$$+ \left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{sk}\cos 2kt + \frac{\psi_{sk}}{2k}\sin 2kt + \frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau) f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)\, d\tau\right)\sin 2kx\right|$$

$$|u(x,t)| \leq \left|\frac{1}{2}\left(\varphi_0 + \psi_0 t + \frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi (t-\tau) f(x,\tau) r(\tau) dx d\tau\right)\right|$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(|\varphi_{ck}| + \left|\frac{\psi_{ck}}{2k}\right| + \left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi f(x,\tau) r(\tau)\cos 2kx \sin 2k(t-\tau)\, dx d\tau\right|\right)$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(|\varphi_{sk}| + \left|\frac{\psi_{sk}}{2k}\right| + \left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi f(x,\tau) r(\tau)\sin 2kx \sin 2k(t-\tau)\, dx d\tau\right|\right)$$

elde edilen eşitsizliğe Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$|u(x,t)| \leq \frac{|\varphi_0|}{2} + \frac{|\psi_0 t|}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(x,\tau) r^2(\tau) dx d\tau\right)^{1/2}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{ck}| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\psi_{ck}}{2k}\right|$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}\left(\int_0^t d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(x,\tau) r^2(\tau) \cos^2 2kx \sin^2 2k(t-\tau)\, dx d\tau\right)^{1/2}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{sk}| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\psi_{sk}}{2k}\right|$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}\left(\int_0^t d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(x,\tau) r^2(\tau) \sin^2 2kx \sin^2 2k(t-\tau)\, dx d\tau\right)^{1/2}$$

$$|u(x,t)| \leq \frac{|\varphi_0|}{2} + \frac{|\psi_0 t|}{2} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(x,\tau) r^2(\tau) dx d\tau\right)^{1/2}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{ck}| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\psi_{ck}}{2k}\right|$$
$$+ \frac{\sqrt{t}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(x,\tau) r^2(\tau) \cos^2 2kx \sin^2 2k(t-\tau)\, dx d\tau\right)^{1/2}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{sk}| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\psi_{sk}}{2k}\right|$$
$$+ \frac{\sqrt{t}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(x,\tau) r^2(\tau) \sin^2 2kx \sin^2 2k(t-\tau)\, dx d\tau\right)^{1/2}$$

bulunur. Son eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$|u(x,t)| \leq \frac{|\varphi_0|}{2} + \frac{|\psi_0 t|}{2} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(x,\tau) r^2(\tau) dx d\tau\right)^{1/2}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{ck}| + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_{ck}|^2\right)^{1/2} + \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{sk}|$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_{sk}|^2\right)^{1/2}$$
$$+ \frac{\sqrt{t}}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^\pi f^2(x,\tau) r^2(\tau) \cos^2 2kx \sin^2 2k(t-\tau)\, dx d\tau\right)^{1/2}$$
$$+ \frac{\sqrt{t}}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^\pi f^2(x,\tau) r^2(\tau) \sin^2 2kx \sin^2 2k(t-\tau)\, dx d\tau\right)^{1/2}$$

$$|u(x,t)| \le \frac{|\varphi_0|}{2} + \frac{|\psi_0 t|}{2} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\sum_{k=1}^\infty|\varphi_{ck}| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{n=1}^\infty|\psi_{ck}|$$
$$+\sqrt{\frac{t}{6}}\left(\sum_{k=1}^\infty\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)\cos^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\sum_{k=1}^\infty|\varphi_{sk}| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{n=1}^\infty|\psi_{sk}|$$
$$+\sqrt{\frac{t}{6}}\left(\sum_{k=1}^\infty\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)\sin^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

elde edilir. Son eşitsizliğe Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$|u(x,t)| \le \frac{|\varphi_0|}{2} + \frac{|\psi_0 t|}{2} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\sum_{k=1}^\infty|\varphi_{ck}| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{n=1}^\infty|\psi_{ck}| + \sqrt{\frac{t}{6}}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\sum_{k=1}^\infty|\varphi_{sk}| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{n=1}^\infty|\psi_{sk}| + \sqrt{\frac{t}{6}}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)dxd\tau\right)^{1/2}$$

elde edilir. Şimdi son eşitsizliğin her tarafın t ye göre maximumu alınırsa,

$$\|u(x,t)\| \le \frac{\|\varphi_0\|_{C^2[0,T]}}{2} + \frac{\|\psi_0\|_{C^1[0,T]}|T|}{2} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\pi|T|\|f(x,t)\|_{C^1[0,T]}\|r(\tau)\|_{C^1[0,T]}$$
$$+\sum_{k=1}^\infty\|\varphi_{ck}\|_{C^2[0,T]} + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{n=1}^\infty\|\psi_{ck}\|_{C^1[0,T]} + \pi\sqrt{\frac{T}{6}}|T|\|f(x,t)\|_{C^1[0,T]}\|r(\tau)\|_{C^1[0,T]}$$
$$+\sum_{k=1}^\infty\|\varphi_{sk}\|_{C^2[0,T]} + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{n=1}^\infty\|\psi_{sk}\|_{C^1[0,T]} + \pi\sqrt{\frac{T}{6}}|T|\|f(x,t)\|_{C^1[0,T]}\|r(\tau)\|_{C^1[0,T]}$$

$$\|u(x,t)\| \le \frac{\|\varphi_0\|_{C^2[0,T]}}{2} + \frac{\|\psi_0\|_{C^1[0,T]}|T|}{2} + \sum_{k=1}^\infty\|\varphi_{ck}\|_{C^2[0,T]} + \sum_{k=1}^\infty\|\varphi_{sk}\|_{C^2[0,T]}$$
$$+\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\left(\sum_{n=1}^\infty\|\psi_{ck}\|_{C^1[0,T]} + \sum_{n=1}^\infty\|\psi_{sk}\|_{C^1[0,T]}\right) + \left(\sqrt{\frac{T^3}{3}} + 2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}\right)|T|M\|r(\tau)\|_{C^1[0,T]}$$

bulunur. Lemma 4.2.1 koşulları gereği $u(x,t)$'nin sağ tarafı sınırlı olacağından, Weierstrass-M testine göre verilen D bölgesinde $u(x,t)$ düzgün yakınsak olacaktır, $u(x,t) \in C(\overline{D})$ bulunur.

$$u_x(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2k)\left(\varphi_{ck}\cos 2kt+\frac{\psi_{ck}}{2k}\sin 2kt+\frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau)f_{ck}(\tau)\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right)\sin 2kx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}2k\left(\varphi_{sk}\cos 2kt+\frac{\psi_{sk}}{2k}\psi_{sk}\sin 2kt+\frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau)f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right)\cos 2kx$$

eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa,

$$|u_x(x,t)|\le\sum_{k=1}^{\infty}(2k|\varphi_{ck}|+|\psi_{ck}|)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi f(x,\tau)r(\tau)\cos 2kx\sin 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(2k|\varphi_{sk}|+|\psi_{sk}|)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi f(x,\tau)r(\tau)\sin 2kx\sin 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right|$$

elde edilir. Son eşitsizliğe Cauchy eşitsizliğini uygulanırsa,

$$|u_x(x,t)|\le\sum_{k=1}^{\infty}2k|\varphi_{ck}|+\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{ck}|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^t d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)\cos^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}2k|\varphi_{sk}|+\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{sk}|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^t d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)\sin^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

$$|u_x(x,t)|\le\sum_{k=1}^{\infty}2k|\varphi_{ck}|+\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{ck}|$$
$$+\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)\cos^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}2k|\varphi_{sk}|+\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{sk}|$$
$$+\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)\sin^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

elde edilir. Son eşitsizliğe Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$|u_x(x,t)|\le\sum_{k=1}^{\infty}2k|\varphi_{ck}|+\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{ck}|+\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}2k|\varphi_{sk}|+\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{sk}|+\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)r^2(\tau)dxd\tau\right)^{1/2} \tag{4.10}$$

$$\varphi_{ck}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x)\cos 2kx\,dx$$

$$\varphi_{ck}=\frac{2}{\pi}\left(\left(\varphi(x)\frac{1}{2k}\sin 2kx\right)\Big|_0^\pi-\frac{1}{2k}\int_0^\pi\varphi'(x)\sin 2kx\,dx\right)$$

$\varphi(\pi)=\varphi(0)$ olduğundan,

$$\varphi_{ck}=-\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\varphi'(x)\sin 2kx dx \tag{4.11}$$

Benzer şekilde,

$$\varphi_{sk}=\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\varphi'(x)\cos 2kx dx \tag{4.12}$$

(4.12) ve (4.11)'i, (4.10)'da yerine yazılırsa,

$$|u_x(x,t)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi'(x)\sin 2kx dx\right|+\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{ck}|$$
$$+\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\left(\int_0^t\int_0^{\pi}f^2(x,\tau)r^2(\tau)\cos^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi'(x)\cos 2kx dx\right|+\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{sk}|$$
$$+\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\left(\int_0^t\int_0^{\pi}f^2(x,\tau)r^2(\tau)\sin^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafının maksimumu alınırsa,

$$\|u_x(x,t)\|\le 2\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi'_{sk}\|_{C^2[0,T]}+\sum_{k=1}^{\infty}\|\psi_{ck}\|_{C^1[0,T]}$$
$$+\frac{2\sqrt{T}}{\pi}\pi|T|\|f(x,t)\|_{C^1[0,T]}\|r(t)\|_{C^1[0,T]}$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi'_{ck}\|_{C^1[0,T]}+\sum_{n=1}^{\infty}\|\psi_{sk}\|_{C^1[0,T]}+\frac{2\sqrt{T}}{\pi}\pi|T|\|f(x,t)\|_{C^1[0,T]}\|r(t)\|_{C^1[0,T]}$$

$$\|u_x(x,t)\|\le 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi'_{ck}\|_{C^2[0,T]}+\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi'_{sk}\|_{C^2[0,T]}\right)$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\psi_{ck}\|_{C^1[0,T]}+\sum_{n=1}^{\infty}\|\psi_{sk}\|_{C^1[0,T]}\right)+4\sqrt{T}|T|M\|r(t)\|_{C^1[0,T]}$$

elde edilir. Weierstrass-M Testi ve Lemma 4.2.1 koşulları gereği $u_x(x,t)$ verilen D bölgesinde düzgün yakınsak olacaktır, $u_X(x,t)\in C(\overline{D})$ bulunur.

$$|u_{xx}(x,t)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-4k^2)\left(\varphi_{ck}\cos 2kt+\frac{\psi_{ck}}{2k}\sin 2kt\right)\cos 2kx\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}(-4k^2)\left(\frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau)f_{ck}(\tau)\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right)\cos 2kx\right.$$
$$+\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-4k^2)\left(\varphi_{sk}\cos 2kt+\frac{\psi_{sk}}{2k}\sin 2kt\right)\sin 2kx\right|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-4k^2)\left(\frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau)f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right)\sin 2kx$$

$$|u_{xx}(x,t)| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(4k^2|\varphi_{ck}| + 2k|\psi_{ck}| + 2k\left|\int_0^t r(\tau)f_{ck}(\tau)\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right|\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(4k^2|\varphi_{sk}| + 2k|\psi_{sk}| + 2k\left|\int_0^t r(\tau)f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right|\right)$$

φ_{ck}, φ_{sk}, ψ_{ck} ve ψ_{sk} fonksiyonlarına kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\varphi_{ck} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos 2kx dx$$

$$\varphi_{ck} = \frac{2}{\pi}\left(\left(\varphi(x)\frac{1}{2k}\sin 2kx\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2k}\int_0^{\pi}\varphi'(x)\sin 2kx dx\right)$$

$\varphi(\pi) = \varphi(0)$ olduğundan,

$$\varphi_{ck} = -\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\varphi'(x)\sin 2kx dx$$

elde edilir. φ_{ck} ifadesine tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\varphi_{ck} = -\frac{1}{k\pi}\left(\left(-\frac{1}{2k}\varphi'(x)\cos 2kx\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2k}\int_0^{\pi}\varphi''(x)\cos 2kx dx\right)$$

elde edilir. $\varphi'(\pi) = \varphi'(0)$ olduğundan,

$$\varphi_{ck} = -\frac{1}{2k^2\pi}\int_0^{\pi}\varphi''(x)\cos 2kx dx,\ \ \varphi_{sk} = -\frac{1}{2k^2\pi}\int_0^{\pi}\varphi''(x)\sin 2kx dx$$

$$\psi_{ck} = -\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\psi'(x)\sin 2kx dx,\quad \psi_{sk} = \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\psi'(x)\cos 2kx dx$$

$$f_{ck}(t) = -\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}f'(x,t)\sin 2kx dx,\quad f_{sk}(t) = \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}f'(x,t)\cos 2kx dx$$

dır. Bütün bu fonksiyonlar yerlerine yazılırsa,

$$|u_{xx}(x,t)| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\varphi''(x)\cos 2kx dx\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\psi'(x)\sin 2kx dx\right|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^t\int_0^{\pi}f'(x,t)r(\tau)\sin 2kx\sin 2k(t-\tau)\,d\tau dx\right|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\varphi''(x)\sin 2kx dx\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\psi'(x)\cos 2kx dx\right|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^t\int_0^{\pi}f'(x,t)r(\tau)\cos 2kx\sin 2k(t-\tau)\,d\tau dx\right|$$

elde edilir. Son eşitsizliğe sırasıyla Cauchy ve Bessel eşitsizlikleri uygulanırsa,

$|u_{xx}(x,t)| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\varphi''(x)\cos 2kx dx\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\psi'(x)\sin 2kx dx\right|$

$+\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\left(\int_0^t\int_0^{\pi} f'^2(x,\tau)r^2(\tau)dxd\tau\right)^{1/2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\varphi''(x)\sin 2kx dx\right|$

$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\psi'(x)\cos 2kx dx\right| + \frac{2\sqrt{t}}{\pi}\left(\int_0^t\int_0^{\pi} f'^2(x,\tau)r^2(\tau)dxd\tau\right)^{1/2}$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafının maksimumu alınırsa,

$\|u_{xx}(x,t)\| \le 2\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi''_{ck}\|_{C^2[0,T]} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\|\psi'_{sk}\|_{C^1[0,T]}$

$+2\sqrt{T}|T|\|f'(x,t)\|_{C^1[0,T]}\|r(t)\|_{C^1[0,T]} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi''_{sk}\|_{C^2[0,T]}$

$+2\sum_{n=1}^{\infty}\|\psi'_{ck}\|_{C^1[0,T]} + 2\sqrt{T}|T|\|f'(x,t)\|_{C^1[0,T]}\|r(t)\|_{C^1[0,T]}$

$\|u_{xx}(x,t)\| \le 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi''_{ck}\|_{C^2[0,T]} + \sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi''_{sk}\|_{C^2[0,T]}\right)$

$+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\psi'_{ck}\|_{C^1[0,T]} + \sum_{n=1}^{\infty}\|\psi'_{sk}\|_{C^1[0,T]}\right) + 4\sqrt{T}|T|M\|r(t)\|_{C^1[0,T]}$

bulunur. Weierstrass-M Testi ve teoremin koşulları gereği $u_{xx}(x,t)$ verilen D bölgesinde düzgün yakınsak olacaktır, $u_{XX}(x,t) \in C(\overline{D})$ bulunur.

$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\left(\psi_0 + r(t)f_0(t)\right)$

$+\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2kx\left((-2k)\varphi_{ck}\sin 2kt + (2k)\frac{\psi_{ck}}{2k}\cos 2kt + \frac{1}{2k}r(\tau)f_{ck}(\tau)\right)$

$+\sum_{k=1}^{\infty}\sin 2kx\left((-2k)\varphi_{sk}\sin 2kt + (2k)\frac{\psi_{sk}}{2k}\cos 2kt + \frac{1}{2k}r(\tau)f_{sk}(\tau)\right)$

$|u_t(x,t)| \le \frac{|\psi_0|}{2} + \frac{|r(t)f_0(t)|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(2k|\varphi_{ck}| + |\psi_{ck}| + \frac{1}{2k}|r(\tau)f_{ck}(\tau)|\right)$

$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(2k|\varphi_{sk}| + |\psi_{sk}| + \frac{1}{2k}|r(\tau)f_{sk}(\tau)|\right)$

$|u_t(x,t)| \le \frac{|\psi_0|}{2} + \frac{1}{\pi}\left|r(t)\int_0^{\pi} f(x,t)dx\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\varphi'(x)\sin 2kx dx\right| + |\psi_{ck}|\right)$

$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\frac{1}{\pi}r(\tau)\int_0^{\pi} f(x,t)\cos 2kx dx\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\varphi'(x)\cos 2kx dx\right| + |\psi_{sk}|\right)$

$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\frac{1}{\pi}r(\tau)\int_0^{\pi} f(x,t)\sin 2kx dx\right|$

Son eşitsizliğe sırasıyla Hölder ve Bessel eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$|u_t(x,t)| \le \frac{|\psi_0|}{2} + \frac{1}{\pi}\left|r(t)\int_0^\pi f(x,t)dx\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi \varphi'(x)\sin 2kxdx\right| + |\psi_{ck}|\right)$$
$$+\frac{1}{\pi\sqrt{6}}\left(r^2(\tau)\int_0^\pi f^2(x,t)dx\right)^{1/2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi \varphi'(x)\cos 2kxdx\right| + |\psi_{sk}|\right)$$
$$+\frac{1}{\pi\sqrt{6}}\left(r^2(\tau)\int_0^\pi f^2(x,t)dx\right)^{1/2}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafının maksimumu alınırsa,

$$\|u_t(x,t)\| \le \frac{\|\psi_0\|_{C^2[0,T]}}{2} + M\|r(\tau)\|_{C^1[0,T]} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\|\varphi'_{sk}\|_{C^2[0,T]} + \|\psi_{ck}\|_{C^1[0,T]}\right)$$
$$+\frac{M}{\sqrt{6}}\|r(\tau)\|_{C^1[0,T]} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\|\varphi'_{ck}\|_{C^2[0,T]} + \|\psi_{sk}\|_{C^1[0,T]}\right) + +\frac{M}{\sqrt{6}}\|r(\tau)\|_{C^1[0,T]}$$

elde edilir. Weierstrass-M Testi ve teoremin koşulları gereği $u_t(x,t)$ verilen D bölgesinde düzgün yakınsak olacaktır, $u_t(x,t) \in C(\overline{D})$ bulunur.

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}\left(r'(t)f_0(t) + r(t)f'_0(t)\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2kx\left((-2k)^2\varphi_{ck}\sin 2kt + (-2k)^2\frac{\psi_{ck}}{2k}\cos 2kt\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2kx\left(\frac{1}{2k}r'(t)f_{ck}(t) + \frac{1}{2k}r(t)f'_{ck}(t)\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx\left((-2k)^2\varphi_{sk}\sin 2kt + (-2k)^2\frac{\psi_{sk}}{2k}\cos 2kt\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sin 2kx\left(\frac{1}{2k}r'(t)f_{sk}(t) + \frac{1}{2k}r(t)f'_{sk}(t)\right)$$

$$|u_{tt}(x,t)| \le \frac{|r'(t)f_0(t)|}{2} + \frac{|r(t)f'_0(t)|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(4k^2|\varphi_{ck}| + 2k|\psi_{ck}|)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}|r'(t)f_{ck}(t)| + \frac{1}{2k}|r(t)f'_{ck}(t)|\right) + \sum_{k=1}^{\infty}(4k^2|\varphi_{sk}| + 2k|\psi_{sk}|)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}|r'(t)f_{sk}(t)| + \frac{1}{2k}|r(t)f'_{sk}(t)|\right)$$

$$|u_{tt}(x,t)| \le \frac{1}{\pi}\left|r'(t)\int_0^\pi f(x,t)dx\right| + \frac{1}{\pi}\left|r(t)\int_0^\pi f'(x,t)dx\right|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi \varphi''(x)\cos 2kxdx\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi \psi'(x)\sin 2kxdx\right|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\left|\frac{1}{\pi}r'(t)\int_0^\pi f(x,t)\cos 2kxdx\right| + \frac{1}{k}\left|\frac{1}{\pi}r(t)\int_0^\pi f'(x,t)\cos 2kxdx\right|\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi \varphi''(x)\sin 2kxdx\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi \psi'(x)\cos 2kxdx\right|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\left|\frac{1}{\pi}r'(t)\int_0^\pi f(x,t)\sin 2kxdx\right| + \frac{1}{k}\left|\frac{1}{\pi}r(t)\int_0^\pi f'(x,t)\sin 2kxdx\right|\right)$$

Son eşitsizliğe sırasıyla Hölder ve Bessel eşitsizlikleri uygulanıp, her iki tarafın maksimumu alınırsa,

$$\|u_{tt}(x,t)\| \leq \left(1+\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\left(M\|r'(t)\|_{C^1[0,T]} + M\|r(t)\|_{C^1[0,T]}\right)$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|\varphi''_{ck}\|_{C^2[0,T]} + \|\varphi''_{sk}\|_{C^2[0,T]}\right)$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|\psi'_{ck}\|_{C^1[0,T]} + \|\psi'_{sk}\|_{C^1[0,T]}\right)$$

elde edilir. Weierstrass-M Testi ve teoremin koşulları gereği $u_{tt}(x,t)$ verilen D bölgesinde düzgün yakınsak olacaktır, $u_{tt}(x,t) \in C(\overline{D})$ bulunur.

$$r(t) = \frac{E''(t) - \pi.\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left[\varphi_{sk}\cos 2kt + \frac{\psi_{sk}}{2k}\sin 2kt + \frac{1}{2k}\int_0^t r(\tau) f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)d\tau\right]}{\int_0^{\pi} x.f(x,t)dx}$$

$$F(t) = \frac{E''(t) - \pi.\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\varphi_{sk}\cos 2kt - \pi.\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{sk}\sin 2kt}{\int_0^{\pi} x.f(x,t)dx} \tag{4.13}$$

$$K(t,\tau) = \frac{-\pi.\sum_{k=1}^{\infty} f_{sk}(\tau)\sin 2k(t-\tau)}{\int_0^{\pi} x.f(x,t)dx} \tag{4.14}$$

$$r(t) = F(t) + \int_0^t r(\tau)K(t,\tau)d\tau\ , \quad t \in [0,T] \tag{4.15}$$

olmak üzere (4.15) integral denklemi, 2. tip volterra integral denklemidir. 2. tip volterra integral denklemine göre r(t)'nin çözümünün var ve tek olması için $F(t)$ ve $K(t,\tau)$ nin yakınsak olması yeterlidir. Bunun için (4.13) ve (4.14)'teki $F(t)$ ve $K(t,\tau)$'nin her iki tarafının mutlak değerini alınırsa;

$$|F(t)| \leq \frac{|E''(t)| + |-\pi.\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\varphi_{sk}| + |-\pi.\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{sk}|}{|\int_0^{\pi} x.f(x,t)dx|}$$

$$|K(t,\tau)| = \frac{\pi\frac{2}{\pi}|\sum_{k=1}^{\infty}\sin 2k(t-\tau)\int_0^{\pi} f(x,t)\sin 2kx dx|}{|\int_0^{\pi} x.f(x,t)dx|}$$

elde edilir. Sırasıyla $F(t)$ ve $K(t,\tau)$ ifadelerinin her iki tarafının maksimumu alınırsa,

$$\|F(t)\| \leq \frac{\|E''(t)\|_{C^2[0,T]}}{\frac{\pi^2}{2}M} + \frac{\pi.\sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi'_{ck}\|_{C^2[0,T]}}{\frac{\pi^2}{2}M} + \frac{\pi.\sum_{k=1}^{\infty}\|\psi_{sk}\|_{C^1[0,T]}}{\frac{\pi^2}{2}M}$$

$$\|F(t)\| \leq \frac{2}{\pi^2 M}\|E''(t)\|_{C^2[0,T]} + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi'_{ck}\|_{C^2[0,T]} + \|\psi_{sk}\|_{C^1[0,T]}$$

bulunur. Aynı işlemler $K(t,\tau)$ için yapılırsa,

$$\|K(t,\tau)\| \leq \frac{2\pi.\|f(x,t)\|}{\frac{\pi^2}{2}\|f(x,t)\|} \leq \frac{4}{\pi}$$

bulunur. Buradan $F(t)$, $K(t,\tau) \in C[0,T]$ elde edilir. Teorem 1.3.2. gereği $F(t)$ ve $K(t,\tau)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $r(t)$'nin verilen aralıkta sürekli ve yakınsak bir çözümü vardır.

4.3. Periyodik Sınır Koşullu Hiperbolik Ters Katsayı Probleminin Tekliği

Lemma 4.3.1. Teorem 4.2.1. koşulları sağlandığında, (4.1)-(4.4) probleminin çözümü tektir.

İspat. (1)-(4) probleminin tekliğini göstermek için iki çözümü olduğunu varsayalım. Bunlar (u,r) ve (v,q) olsun.

$$u - v = \frac{1}{2}\int_0^t f_0(\tau)(t-\tau)(r-q)d\tau$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\int_0^t f_{ck}(\tau)(r-q)\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right)\cos 2kx$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\int_0^t f_{sk}(\tau)(r-q)\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right)\sin 2kx$$

Son eşitsizliğin mutlak değeri alınırsa,

$$|u-v| \leq \frac{1}{\pi}\left|\int_0^t\int_0^{\pi}(t-\tau)f(x,\tau)(r-q)dxd\tau\right|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k\pi}\int_0^t\int_0^{\pi} f(x,\tau)(r-q)\cos 2kx \sin 2k(t-\tau)dxd\tau\right|$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k\pi}\int_0^t\int_0^{\pi} f(x,\tau)(r-q)\sin 2kx \sin 2k(t-\tau)dxd\tau\right|$$

elde edilir. Son eşitsizliğe Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$|u-v| \leq \frac{1}{\pi}\left(\int_0^t(t-\tau)^2 d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_0^{\pi} f^2(x,\tau)(r-q)^2dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\int_0^t d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_0^{\pi} f^2(x,\tau)(r-q)^2\cos^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\int_0^t d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_0^{\pi} f^2(x,\tau)(r-q)^2\sin^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

$$|u-v| \leq \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\frac{\sqrt{T}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2\cos^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\frac{\sqrt{T}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2\sin^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

bulunur. Son eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$|u-v| \leq \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\frac{\sqrt{T}}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2\cos^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\frac{\sqrt{T}}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2\sin^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

$$|u-v| \leq \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\sqrt{\frac{T}{6}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2\cos^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\sqrt{\frac{T}{6}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2\sin^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

bulunur. Son eşitsizliğe Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$|u-v| \leq \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T^3}{3}}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2dxd\tau\right)^{1/2}$$
$$+\sqrt{\frac{T}{6}}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2dxd\tau\right)^{1/2}+\sqrt{\frac{T}{6}}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-q)^2dxd\tau\right)^{1/2}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte her iki tarafın maksimumu alınırsa,

$$\|u-v\| \leq \sqrt{\frac{T^3}{3}}|T|\|f(x,t)\|_{C^1(D)}\|r-q\|_{C^1(D)}+2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}|T|\|f(x,t)\|_{C^1(D)}\|r-q\|_{C^1(D)}$$

$$\|u-v\| \leq \left(\sqrt{\frac{T^3}{3}}+2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}\right)|T|\|f(x,t)\|_{C^1(D)}\|r-q\|_{C^1(D)}$$

$$\|u-v\| \leq \left(\sqrt{\frac{T^3}{3}}+2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}\right)M|T|\|r-q\|_{C^1(D)} \tag{4.16}$$

elde edilir.

$$r-q=\frac{-\pi\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{\pi}f(x,\tau)(r-q)\sin 2kx\sin 2k(t-\tau)dxd\tau}{\int_0^{\pi}x.f(x,t)dx}$$

eşitliğinde her iki tarafın mutlak değerini alıp Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$|r-q|\le\frac{\left|2\left(\int_0^t\int_0^{\pi}f^2(x,\tau)(r-q)^2\sin^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)dxd\tau\right)^{1/2}\right|}{\left|\int_0^{\pi}x.f(x,t)dx\right|}$$

bulunur. Her iki tarafın maksimumu alınırsa,

$$\|r-q\|_{C^1(D)}\le\frac{2\pi|T|\|f(x,t)\|_{C^1(D)}\|r-q\|_{C^1(D)}}{\frac{\pi^2}{2}\|f(x,t)\|_{C^1(D)}}$$

$$\|r-q\|_{C^1(D)}\le\frac{4|T|}{\pi}\|r-q\|_{C^1(D)}$$

$$\|r-q\|_{C^1(D)}\le\varepsilon,\qquad \varepsilon=\frac{1}{(1-|T|)},\ T<1 \tag{4.17}$$

bulunur. Son eşitsizlikten $r\to q$ elde edilir. (4.17), (4.16)'da yerine yazılırsa, $u\to v$ elde edilir. Dolayısıyla (4.1)-(4.4) probleminin çözümü tektir.

4.4. Periyodik Sınır Koşullu Hiperbolik Ters Katsayı Probleminin Kararlılığı

Bilindiği gibi bir problemin iyi tanımlı problem olması için çözümün, varlığı ve tekliğinin yanında giriş verilerine göre sürekli bağımlı yani kararlı olması gerekir. Şimdi bunu gösterelim:

Teorem 4.4.1. Lemma 4.2.1. in koşulları geçerli olsun. Buna göre (4.1)-(4.4) probleminin $\{u(x,t),r(t)\}$ çözüm çifti giriş verilerine sürekli bağımlıdır.

İspat. $\Phi=\{\varphi,\psi,f,E\}$ ve $\overline{\Phi}=\{\overline{\varphi},\overline{\psi},\overline{f},\overline{E}\}$ olsun.

$\|\varphi\|\le M_1, \|\psi\|\le M_2, \|E\|\le M_3,\ \|f\|\le M$ eşitsizlikleri sağlansın.

$\|\Phi\|=\|\varphi\|+\|\psi\|+\|E\|+\|f\|,\ \|\overline{\Phi}\|=\|\overline{\varphi}\|+\|\overline{\psi}\|+\|\overline{E}\|+\|\overline{f}\|$ ile gösterilsin;

$$u-\bar{u}\le \frac{1}{2}\left(\varphi_0-\bar{\varphi}_0+(\psi_0-\bar{\psi}_0)t+\int_0^t (t-\tau)(r-\bar{r})f_0 d\tau\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left((\varphi_{ck}-\bar{\varphi}_{ck})\cos 2kt+\frac{\psi_{ck}-\bar{\psi}_{ck}}{2k}\sin 2kt+\frac{1}{2k}\int_0^t (r-\bar{r})f_{ck}\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right)\cos 2kx$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left((\varphi_{sk}-\bar{\varphi}_{sk})\cos 2kt+\frac{\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}}{2k}\sin 2kt+\frac{1}{2k}\int_0^t (r-\bar{r})f_{sk}\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right)\sin 2kx$$

Yukarıdaki eşitsizliğin mutlak değeri alınırsa,

$$|u-\bar{u}|\le \left|\frac{1}{2}\left(\varphi_0-\bar{\varphi}_0+(\psi_0-\bar{\psi}_0)t+\int_0^t (t-\tau)(r-\bar{r})f_0 d\tau\right)\right|$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left((\varphi_{ck}-\bar{\varphi}_{ck})\cos 2kt+\frac{\psi_{ck}-\bar{\psi}_{ck}}{2k}\sin 2kt+\frac{1}{2k}\int_0^t (r-\bar{r})f_{ck}\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right)\cos 2kx\right|$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left((\varphi_{sk}-\bar{\varphi}_{sk})\cos 2kt+\frac{\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}}{2k}\sin 2kt+\frac{1}{2k}\int_0^t (r-\bar{r})f_{sk}\sin 2k(t-\tau)\,d\tau\right)\sin 2kx\right|$$

$$|u-\bar{u}|\le \frac{1}{2}|\varphi_0-\bar{\varphi}_0|+\frac{1}{2}|\psi_0-\bar{\psi}_0|t+\frac{1}{\pi}\left|\int_0^t\int_0^\pi (t-\tau)f(x,\tau)(r-\bar{r})dxd\tau\right|$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{ck}-\bar{\varphi}_{ck}|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\right||\psi_{ck}-\bar{\psi}_{ck}|$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k}\int_0^t\int_0^\pi f(x,t)(r-\bar{r})\cos 2kx\sin 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right|$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{sk}-\bar{\varphi}_{sk}|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\right||\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}|$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k}\int_0^t\int_0^\pi f(x,t)(r-\bar{r})\sin 2kx\sin 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right|$$

elde edilir. Son eşitsizliğe Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$|u-\bar{u}|\le \frac{1}{2}|\varphi_0-\bar{\varphi}_0|+\frac{1}{2}|\psi_0-\bar{\psi}_0|t$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-\bar{r})^2 dxd\tau\right)^{1/2}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{ck}-\bar{\varphi}_{ck}|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\right||\psi_{ck}-\bar{\psi}_{ck}|$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\int_0^t d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-\bar{r})^2\cos^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{sk}-\bar{\varphi}_{sk}|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\right||\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}|$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\int_0^t d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-\bar{r})^2\sin^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

bulunur. Son eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$|u-\bar{u}| \le \frac{1}{2}|\varphi_0-\bar{\varphi}_0| + \frac{1}{2}|\psi_0-\bar{\psi}_0|t + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\left(\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-\bar{r})^2 dxd\tau\right)^{1/2}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{ck}-\bar{\varphi}_{ck}| + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{ck}-\bar{\psi}_{ck}|^2\right)^{1/2}$$

$$+\frac{\sqrt{t}}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-\bar{r})^2\cos^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{sk}-\bar{\varphi}_{sk}| + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}|^2\right)^{1/2}$$

$$+\frac{\sqrt{t}}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^\pi f^2(x,\tau)(r-\bar{r})^2\sin^2 2kx\sin^2 2k(t-\tau)\,dxd\tau\right)^{1/2}$$

elde edilir. Son eşitsizliğe Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$|u-\bar{u}| \le \frac{1}{2}|\varphi_0-\bar{\varphi}_0| + \frac{1}{2}|\psi_0-\bar{\psi}_0|t + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t^3}{3}}\int_0^t\int_0^\pi f(x,t)(r-\bar{r})\,d\tau$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{ck}-\bar{\varphi}_{ck}| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{ck}-\bar{\psi}_{ck}| + \frac{\sqrt{t}}{\pi}\frac{\pi}{\sqrt{6}}\int_0^t\int_0^\pi f(x,t)(r-\bar{r})\,d\tau$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{sk}-\bar{\varphi}_{sk}| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}| + \frac{\sqrt{t}}{\pi}\frac{\pi}{\sqrt{6}}\int_0^t\int_0^\pi f(x,t)(r-\bar{r})\,d\tau$$

bulunur. Son eşitsizliğin her iki yanının maksimumu alınırsa,

$$\|u-\bar{u}\| \le \left(\frac{1}{2}\|\varphi_0-\bar{\varphi}_0\| + \sum_{k=1}^{\infty}(\|\varphi_{ck}-\bar{\varphi}_{ck}\| + \|\varphi_{sk}-\bar{\varphi}_{sk}\|)\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}\|\psi_0-\bar{\psi}_0\||T| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}(\|\psi_{ck}-\bar{\psi}_{ck}\| + \|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\|)\right)$$

$$+\left(\sqrt{\frac{T^3}{3}} + 2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}\right)M|T|\|r-\bar{r}\|$$

bulunur.

$$r(t) = F(t) + \int_0^t r(\tau)K(t,\tau)d\tau$$

$$F(t) = \frac{E'' - \pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\varphi_{sk}\cos 2kt - \pi\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{sk}\sin 2kt}{\int_0^\pi xf(x,t)dx}$$

$$K(t,\tau) = \frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}f_{sk}\sin 2k(t-\tau)}{\int_0^\pi xf(x,t)dx}$$

$$F-\bar{F}=\frac{1}{\int_0^\pi xf(x,t)dx}\left(E''-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k}\right)\varphi'_{ck}\cos2kt-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{sk}\sin2kt\right)$$
$$-\frac{1}{\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx}\left(\bar{E}''-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k}\right)\bar{\varphi}'_{ck}\cos2kt-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\psi}_{sk}\sin2kt\right)$$

$$F-\bar{F}=\frac{\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx}{\int_0^\pi xf(x,t)dx\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx}(E''-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\varphi'_{ck}\cos2kt-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{sk}\sin2kt)$$
$$-\frac{\int_0^\pi xf(x,t)dx}{\int_0^\pi xf(x,t)dx\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx}(\bar{E}''-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\varphi}'_{ck}\cos2kt-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\psi}_{sk}\sin2kt)$$

$$F-\bar{F}=\frac{1}{\int_0^\pi xf(x,t)dx\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx}\begin{pmatrix}E''\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\varphi'_{ck}\cos2kt\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx\\-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{sk}\sin2kt\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx\end{pmatrix}$$
$$-\frac{1}{\int_0^\pi xf(x,t)dx\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx}\begin{pmatrix}\bar{E}''\int_0^\pi xf(x,t)dx-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\varphi}'_{ck}\cos2kt\int_0^\pi xf(x,t)dx\\-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\psi}_{sk}\sin2kt\int_0^\pi xf(x,t)dx\end{pmatrix}$$

$$F-\bar{F}=\frac{1}{\int_0^\pi xf(x,t)dx\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx}\begin{pmatrix}E''\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx-E''\int_0^\pi xf(x,t)dx\\+E''\int_0^\pi xf(x,t)dx-\bar{E}''\int_0^\pi xf(x,t)dx\\-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\varphi'_{ck}\cos2kt\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx\\+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\varphi'_{ck}\cos2kt\int_0^\pi xf(x,t)dx\\-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\varphi'_{ck}\cos2kt\int_0^\pi xf(x,t)dx\\+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\varphi}'_{ck}\cos2kt\int_0^\pi xf(x,t)dx\\-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{sk}\sin2kt\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx\\+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{sk}\cos2kt\int_0^\pi xf(x,t)dx\\-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{sk}\sin2kt\int_0^\pi xf(x,t)dx\\+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\psi}_{sk}\sin2kt\int_0^\pi xf(x,t)dx\end{pmatrix}$$

$$F-\bar{F}=\frac{1}{\int_0^\pi xf(x,t)dx\int_0^\pi x\bar{f}(x,t)dx}\begin{pmatrix}E''\int_0^\pi x\left(\bar{f}(x,t)-f(x,t)\right)dx\\+(\bar{E}''-E'')\int_0^\pi xf(x,t)dx\\+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\varphi'_{ck}\sin2kt\int_0^\pi x\left(f(x,t)-\bar{f}(x,t)\right)dx\\+\pi\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi'_{ck}-\bar{\varphi}'_{ck})\sin2kt\int_0^\pi xf(x,t)dx\\+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{sk}\sin2kt\int_0^\pi x\left(f(x,t)-\bar{f}(x,t)\right)dx\\+\pi\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk})\sin2kt\int_0^\pi xf(x,t)dx\end{pmatrix}$$

Son eşitliğin her iki tarafının maksimumu alınırsa,

$$\|F-\bar{F}\| \le \frac{4}{\pi^4 M^2}\begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{2}\|E''\|\left\|f-\bar{f}\right\| + \frac{\pi^2 M}{2}\|E''-\bar{E}''\| \\ +\frac{\pi^3}{2}\left\|f-\bar{f}\right\|\sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi'_{ck}\| + \frac{\pi^3 M}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi'_{ck}-\bar{\varphi}'_{ck}\| \\ +\frac{\pi^3}{2}\left\|f-\bar{f}\right\|\sum_{k=1}^{\infty}\|\psi_{sk}\| + \frac{\pi^3 M}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\| \end{pmatrix}$$

$$\|F-\bar{F}\| \le \frac{2}{\pi^2 M^2}\|E''\|\left\|f-\bar{f}\right\| + \frac{2}{\pi^2 M}\|E''-\bar{E}''\|$$
$$+\frac{2}{\pi M^2}\left\|f-\bar{f}\right\|\sum_{k=1}^{\infty}(\|\varphi'_{ck}\|+\|\psi_{sk}\|) + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}(\|\varphi'_{ck}-\bar{\varphi}'_{ck}\|+\|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\|)$$

$$\|F-\bar{F}\| \le \frac{2}{\pi^2 M^2}M_3\left\|f-\bar{f}\right\| + \frac{2}{\pi^2 M}\|E''-\bar{E}''\| + \frac{2}{\pi M^2}\left\|f-\bar{f}\right\|(M_1+M_2)$$
$$+\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}(\|\varphi'_{ck}-\bar{\varphi}'_{ck}\|+\|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\|)$$

$$\|F-\bar{F}\| \le \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}(\|\varphi'_{ck}-\bar{\varphi}'_{ck}\|+\|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\|) + \frac{2}{\pi^2 M}\|E''-\bar{E}''\|$$
$$+\left(\frac{2}{\pi^2 M^2}M_3 + \frac{2}{\pi M^2}(M_1+M_2)\right)\left\|f-\bar{f}\right\|$$

elde edilir.

$$K(t,\tau) = \frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2kx f_{sk}\sin 2k(t-\tau)}{\int_0^{\pi} x.f(x,t)dx}$$

$$K-\bar{K} =$$

$$\frac{1}{\int_0^{\pi} xf(x,t)dx\int_0^{\pi} x\bar{f}(x,t)dx}\begin{pmatrix} -\pi\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2kx\sin 2k(t-\tau)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,\tau)\sin 2kxdx\int_0^{\pi} x\bar{f}(x,t)dx \\ +\pi\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2kx\sin 2k(t-\tau)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,\tau)\sin 2kxdx\int_0^{\pi} xf(x,t)dx \\ -\pi\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2kx\sin 2k(t-\tau)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,\tau)\sin 2kxdx\int_0^{\pi} xf(x,t)dx \\ +\pi\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2kx\sin 2k(t-\tau)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \bar{f}(x,\tau)\sin 2kxdx\int_0^{\pi} xf(x,t)dx \end{pmatrix}$$

$$K-\bar{K} =$$

$$\frac{1}{\int_0^{\pi} xf(x,t)dx\int_0^{\pi} x\bar{f}(x,t)dx}\begin{pmatrix} 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2kx\sin 2k(t-\tau)\int_0^{\pi} f(x,\tau)\sin 2kxdx\int_0^{\pi} x\left(f(x,t)-\bar{f}(x,t)\right)dx \\ +2\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2kx\sin 2k(t-\tau)\int_0^{\pi}\left(f(x,\tau)-\bar{f}(x,\tau)\right)\sin 2kxdx\int_0^{\pi} xf(x,t)dx \end{pmatrix}$$

Son eşitsizliğin mutlak değeri alınıp, Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$|K-\bar{K}| \leq$

$$\frac{4}{\pi^4 M^2}\left(\begin{array}{c} 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{\pi} f^2(x,\tau)\sin^2 2kx dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{\pi} x^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{\pi}\left(f(x,t)-\bar{f}(x,t)\right)^2 dx\right)^{1/2} \\ +2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{\pi}\left(f(x,\tau)-\bar{f}(x,\tau)\right)^2 \sin^2 2kx dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{\pi} x^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{\pi} f^2(x,t)dx\right)^{1/2} \end{array}\right)$$

ede edilir. Son eşitsizliğe sırasıyla Bessel eşitsizliği uygulanıp, her iki tarafın maksimumu alınırsa,

$$\|K-\bar{K}\| \leq \frac{4}{\pi^4 M^2}\left(2\sqrt{\pi}M\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\|f-\bar{f}\| + 2\sqrt{\pi}M\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\|f-\bar{f}\|\right) = \frac{16}{\sqrt{3}\pi^2 M}\|f-\bar{f}\|$$

bulunur.

$$r(t) = F(t) + \int_0^t r(\tau)K(t,\tau)d\tau$$

$$\bar{r}(t) = \bar{F}(t) + \int_0^t \bar{r}(\tau)\bar{K}(t,\tau)d\tau$$

$$r-\bar{r} = F-\bar{F} + \int_0^t rKd\tau - \int_0^t \bar{r}\bar{K}d\tau + \int_0^t \bar{r}Kd\tau - \int_0^t \bar{r}Kd\tau$$

$$r-\bar{r} = F-\bar{F} + \int_0^t (K-\bar{K})\bar{r}d\tau + \int_0^t K(r-\bar{r})d\tau$$

son eşitliğin her iki tarafının maksimumu alınırsa,

$$\|r-\bar{r}\| \leq \|F-\bar{F}\| + |T|\|K-\bar{K}\||r| + |T|\|K\|\|r-\bar{r}\|$$

$$\|r-\bar{r}\|(1-|T|\|K\|) \leq |F-\bar{F}| + |T|\|K-\bar{K}\|\|r\|$$

elde edilir. Burada yeterince küçük T ler için $T\|K\| < 1$ sağlanmalıdır;

$$\|r-\bar{r}\| \leq \frac{1}{(1-|T|\|K\|)}\|F-\bar{F}\| + \frac{1}{(1-|T|\|K\|)}|T|\|K-\bar{K}\|\|r\|$$

$$\|r-\bar{r}\| \leq \frac{1}{(1-|T|\|K\|)}\left(\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}(\|\varphi'_{ck}-\bar{\varphi}'_{ck}\| + \|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\|) + \frac{2}{\pi^2 M}\|E''-\bar{E}''\|\right)$$
$$+\frac{1}{(1-|T|\|K\|)}\left(\frac{2}{\pi^2 M^2}M_3 + \frac{2}{\pi M^2}(M_1+M_2) + \frac{16|T|}{\sqrt{3}\pi^2 M}\|r\|\right)\|f-\bar{f}\|$$

$\|r-\bar{r}\|$'yi $\|u-\bar{u}\|$'de yerine yazarsak,

$$\|u-\bar{u}\| \leq \frac{1}{2}\|\varphi_0-\overline{\varphi_0}\| + \sum_{k=1}^{\infty}(\|\varphi_{ck}-\bar{\varphi}_{ck}\| + \|\varphi_{sk}-\bar{\varphi}_{sk}\|)$$

$$+\frac{1}{2}\|\psi_0-\bar{\psi}_0\||T| \ + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}(\|\psi_{ck}-\bar{\psi}_{ck}\| + \|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\|)$$

$$+\left(\sqrt{\frac{T^3}{3}} + 2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}\right) M|T| \frac{1}{(1-|T|\|K\|)}\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}(\|\varphi'_{ck}-\bar{\varphi}'_{ck}\| + \|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\|)$$

$$+\left(\sqrt{\frac{T^3}{3}} + 2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}\right) M|T| \frac{1}{(1-|T|\|K\|)}\frac{2}{\pi^2 M}\|E''-\bar{E}''\|$$

$$+\left(\sqrt{\frac{T^3}{3}} + 2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}\right) \frac{1}{(1-|T|\|K\|)}\left(\frac{2}{\pi^2 M^2}M_3 + \frac{2}{\pi M^2}(M_1+M_2) + \frac{16|T|}{\sqrt{3}\pi^2 M}\|r\|\right)\left\|f-\bar{f}\right\|$$

elde edilir. Burada,

$$\|\varphi-\bar{\varphi}\| = \|\varphi_0-\overline{\varphi_0}\| + \sum_{k=1}^{\infty}(\|\varphi_{ck}-\bar{\varphi}_{ck}\| + \|\varphi_{sk}-\bar{\varphi}_{sk}\|)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi'_{ck}-\bar{\varphi}'_{ck}\|\,|T|$$

$$\|\psi-\bar{\psi}\| = \|\psi_0-\bar{\psi}_0\| + \sum_{k=1}^{\infty}(\|\psi_{ck}-\bar{\psi}_{ck}\| + \|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\|)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\|\,|T|$$

$$\|\Phi-\bar{\Phi}\| = \|\varphi-\bar{\varphi}\| + \|\psi-\bar{\psi}\| + \|E''-\bar{E}''\| + \left\|f-\bar{f}\right\|$$

$$M_4 = \max\left\{\frac{1}{2}, 1, \left(\sqrt{\frac{T^3}{3}} + 2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}\right) M|T| \frac{1}{(1-|T|\|K\|)}\frac{2}{\pi M}\right\}$$

$$M_5 = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2\sqrt{6}}, \left(\sqrt{\frac{T^3}{3}} + 2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}\right) M|T| \frac{1}{(1-|T|\|K\|)}\frac{2}{\pi M}\right\}$$

$$M_6 = \left\{\left(\sqrt{\frac{T^3}{3}} + 2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}\right) M|T| \frac{1}{(1-|T|\|K\|)}\frac{2}{\pi^2 M}\right\}$$

$$M_7 = \left\{\left(\sqrt{\frac{T^3}{3}} + 2\pi\sqrt{\frac{T}{6}}\right) \frac{1}{(1-|T|\|K\|)}\left(\frac{2}{\pi^2 M^2}M_3 + \frac{2}{\pi M^2}(M_1+M_2) + \frac{16|T|}{\sqrt{3}\pi^2 M}\|r\|\right)\right\}$$

olarak alınırsa,

$$\|u-\bar{u}\| \leq M_4\|\varphi-\bar{\varphi}\| + M_5\|\psi-\bar{\psi}\| + M_6\|E''-\bar{E}''\| + M_7\left\|f-\bar{f}\right\|$$

şeklinde yazılabilir ve $M_8 = \max\{M_4, M_5, M_6, M_7\}$ şeklinde kabul edilirse,

$$\|u-\bar{u}\| \le M_8\|\Phi-\bar{\Phi}\|$$

Şeklinde yazılabilili. Buna göre $\Phi \to \bar{\Phi}$ için $u \to \bar{u}$ kararlıdır.

4.5. Periyodik Sınır Koşullu Hiperbolik Ters Katsayı Probleminin Nümerik Çözümü

$$u_{tt} = u_{xx} + r(t)f(x,t) \tag{4.18}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{4.19}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) \quad u_x(0,t) = u_x(\pi,t) \tag{4.20}$$

$$E(t) = \int_0^\pi x.\,u(x,t)dx \tag{4.21}$$

(4.17)-(4.20) problemini nümerik olarak çözmek için sonlu farklar metodundan açık şema yöntemi kullanılacaktır. Öncelikle r(t)'yi bulmak için (4.17)'nin her iki tarafını x ile çarpıp 0'dan π'ye integralleyelim;

$$r(t) = \frac{-E''(t) - \pi u_x(\pi,t)}{\int_0^\pi x.f(x,t)dx} \tag{4.22}$$

İlk olarak $[0,\pi]$ aralığını M tane $h = \frac{\pi}{M}$ eşit uzunluklu, $[0,T]$ aralığı N tane $\tau = \frac{T}{N}$ eşit uzunluklu alt aralığa bölünür. Problemin nümerik yaklaşımı için kararlı olan h ve τ ya göre ikinci mertebeden kesinliğe sahip açık şema kullanılabilir [43].

(4.17)-(4.20) probleminin açık şema karşılığı aşağıdaki gibidir;

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + r^j f_i^j \tag{4.23}$$

$$u_i^1 = \varphi_i \quad \frac{u_i^2 - u_i^1}{\tau} = \psi_i \tag{4.24}$$

$$u_0^j = u_N^j \quad \frac{u_i^j + u_{N-1}^j}{2} = u_N^j \tag{4.25}$$

(4.23)'de, u_i^{j+1}'yi çekersek,

$$u_i^{j+1} = \frac{\tau^2}{h^2}u_{i+1}^j - 2\frac{\tau^2}{h^2}u_i^j + \frac{\tau^2}{h^2}u_{i-1}^j + \tau^2 r^j f_i^j + 2u_i^j - u_i^{j-1}$$

elde edilir. Burada $\frac{\tau^2}{h^2} = k^2$ olmak üzere,

$$u_i^{j+1} = k^2 u_{i-1}^j + (1 - 2k^2) u_i^j + k^2 u_{i+1}^j - u_i^{j-1} + \tau^2 r^j f_i^j \,, i = 1, \dots, n \tag{4.26}$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki sistem bulunur.

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1^{j+1} = k^2 u_0^j + (1 - 2k^2) u_1^j + k^2 u_2^j + B_1 \\ u_2^{j+1} = k^2 u_1^j + (1 - 2k^2) u_2^j + k^2 u_3^j + B_2 \\ u_3^{j+1} = k^2 u_2^j + (1 - 2k^2) u_3^j + k^2 u_4^j + B_3 \\ \dots \\ u_n^{j+1} = k^2 u_{n-1}^j + (1 - 2k^2) u_n^j + k^2 u_{n+1}^j + B_n \\ B_n = -u_n^{j-1} + \tau^2 r^j f_n^j \end{array} \right. \tag{4.27}$$

(4.22)'in açık şema karşılığı;

$$r^j = \frac{-\left(\frac{E_i^{j+1} - 2E_i^j + E_i^{j-1}}{\tau^2}\right) - \pi\left(\frac{u_N^j - u_{N-1}^j}{h}\right)}{(f_{in})^j} \tag{4.28}$$

şeklindedir. Burada,

$$(f_{in})^j = \int_0^\pi x.\, f(x,t) dx\,,\ E^j = E\big(t_j\big), \quad j = 1, \dots, N$$

dir. (4.27) lineer denklem sistemi çözülür. (4.23)-(4.28) problemi av-avcı modeli ile çözülür. Burada u_i^{j+1} leri bulmak için r^j değerine ihtiyaç vardır. $r^{j(s)}$ ile s. iterasyon adımı, $u_i^{j+1(s)}$ ile u_i^{j+1} değerlerinin s. iterasyon adımı gösterilir.

$j = 0$,

$$r^0 = \frac{-\left(\frac{E_i^1 - 2E_i^0 + E_i^{-1}}{\tau^2}\right) - \pi\left(\frac{u_N^0 - u_{N-1}^0}{h}\right)}{(f_{in})^0}$$

elde edilir. Nümerik hesaplamalarda zaman adımı çok küçük olduğu için $r^{j(0)} = r^j$, $u_i^{j+1(0)} = u_i^{j+1}$ alınabilir.

$$r^{j(s+1)} = \frac{-\left(\frac{E_i^{j+1} - 2E_i^j + E_i^{j-1}}{\tau^2}\right) - \pi\left(\frac{u_N^{j(s)} - u_{N-1}^{j(s)}}{h}\right)}{(f_{in})^j}, s = 0,1,2, \dots \tag{4.29}$$

$$u_i^{j+1(s+1)} = k^2 u_{i-1}^{j(s)} + (1-2k^2)u_i^{j(s)} + k^2 u_{i+1}^{j(s)} - u_i^{j-1(s)} + \tau^2 r^{j(s)} f_i^j \qquad (4.30)$$

$$u_0^j = u_N^j \ \frac{u_i^j + u_{N-1}^j}{2} = u_N^j \qquad (4.31)$$

olur. (4.29)-(4.31) sistemi Gauss-Seidel ile çözülür. Bu hesaplamalar yakınsama sağlayana kadar devam edilir. Tanımlanan toleransı sağlayan s değerinde $u_i^{j+1(s+1)}$ve $r^{j(s+1)}$ değerleri sırasıyla u_i^{j+1} ve r^j kabul edilir. Bu j. adımdan $(j+1)$. adıma hareketin tamamlanmasını sağlar.

Örnek 4.5.1. $u_{tt} = u_{xx} + r(t)\exp(t^2)\sin 2x$

$u(x,0) = \sin 2x$

$u(0,t) = u(\pi,t) \quad u_x(0,t) = u_x(\pi,t)$

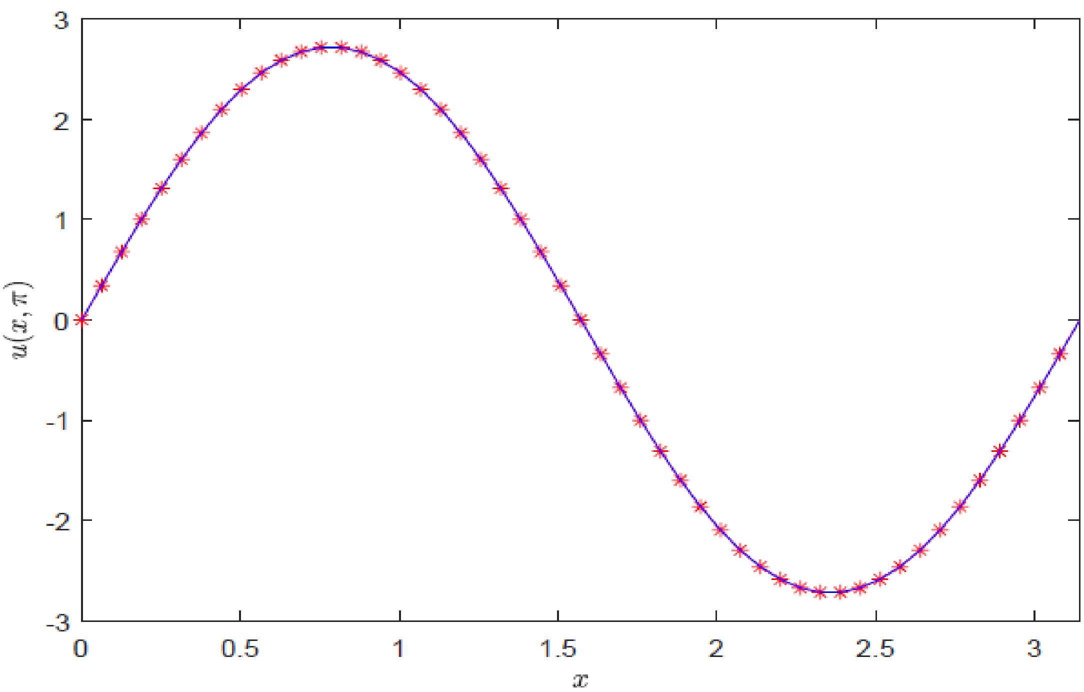
$E(t) = -\frac{\pi}{2}\exp(t^2)$, $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,T]$ çözümleri olsun. Burada;

$f(x,t) = \exp(t^2)\sin 2x, \ \varphi(x) = \sin 2x$

$-\frac{\pi}{2}\exp(t^2) = \int_0^{\pi} x.u(x,t)dx \ , 0 \le t \le T^2$

$\{r(t), u(x,t)\} = \{6 + 4t^2, \exp(t^2)\sin 2x\} \ \ h = 0{,}02 \ \tau = 0{,}02$

için uygulamayı başlatalım:

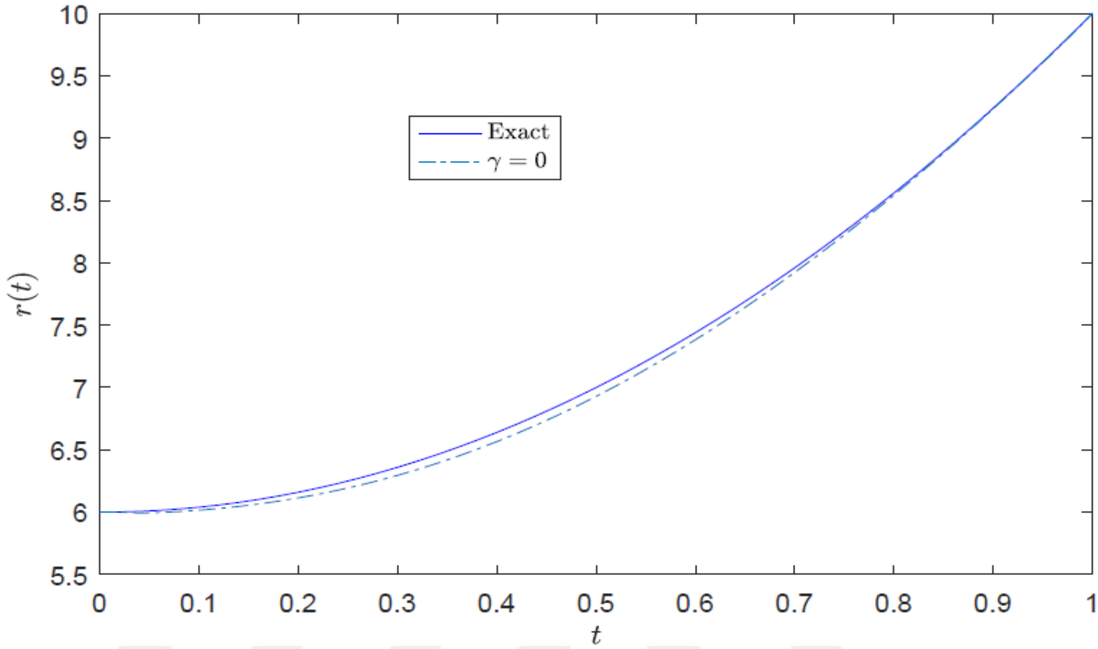


Şekil 4.1. Nümerik ve kesin çözümün arasındaki çözümün yaklaşık gösterimi

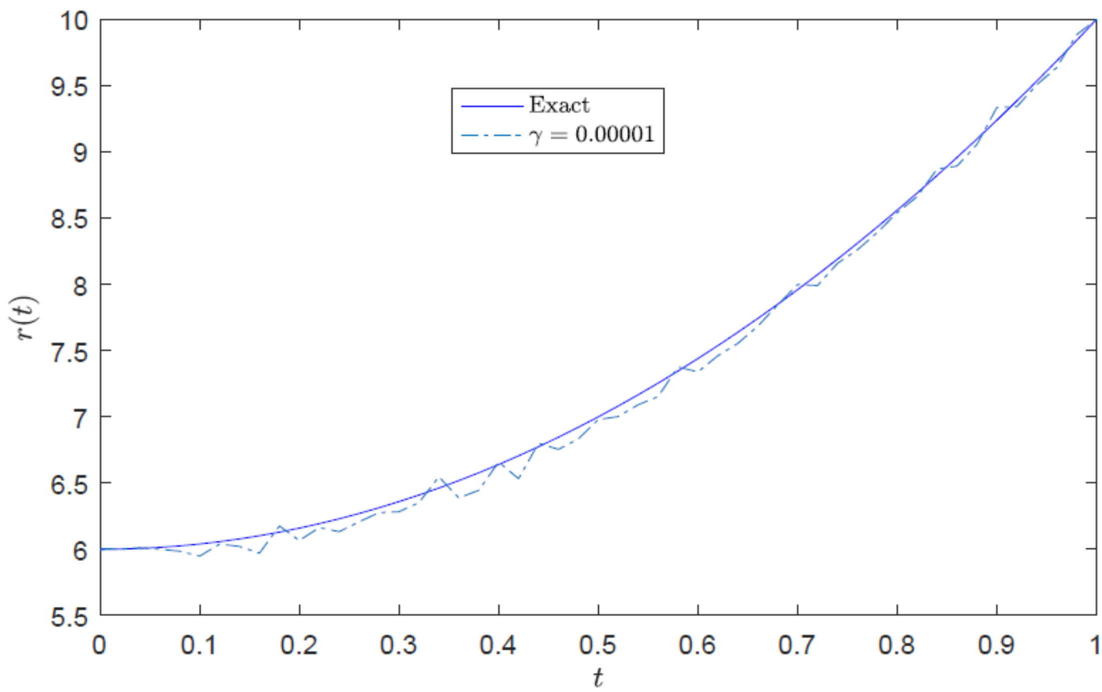
$E(t)$'yi $E(t)_\gamma = E(t)(1+\gamma\theta),\ \theta \in [-1,1]$ olarak tanımlayalım:

γ : Gürültü yüzdesi

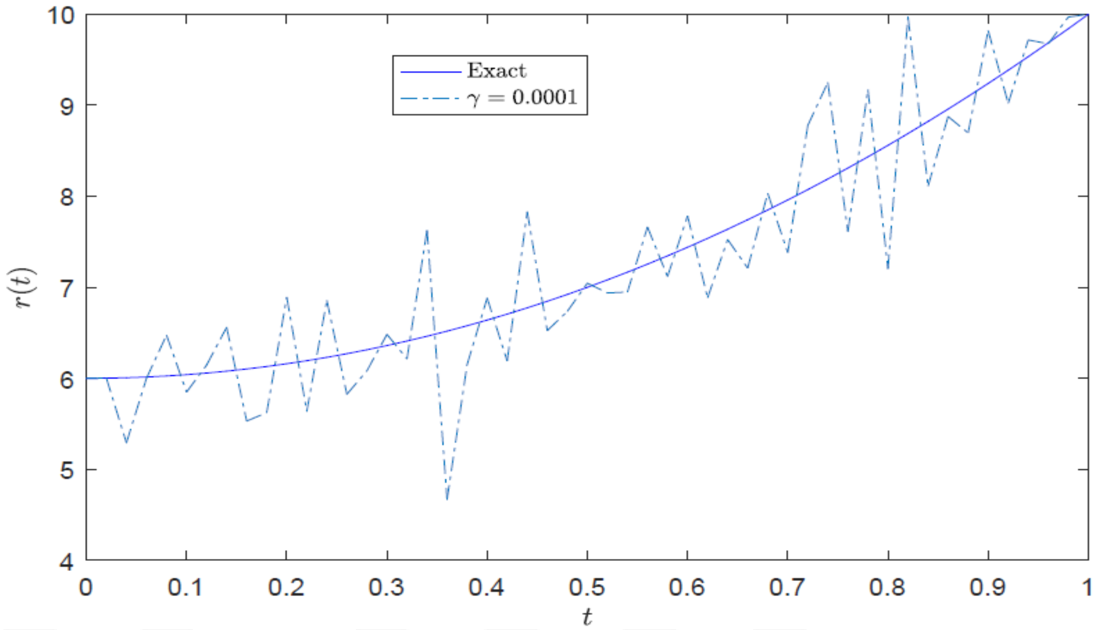
θ : Değişken



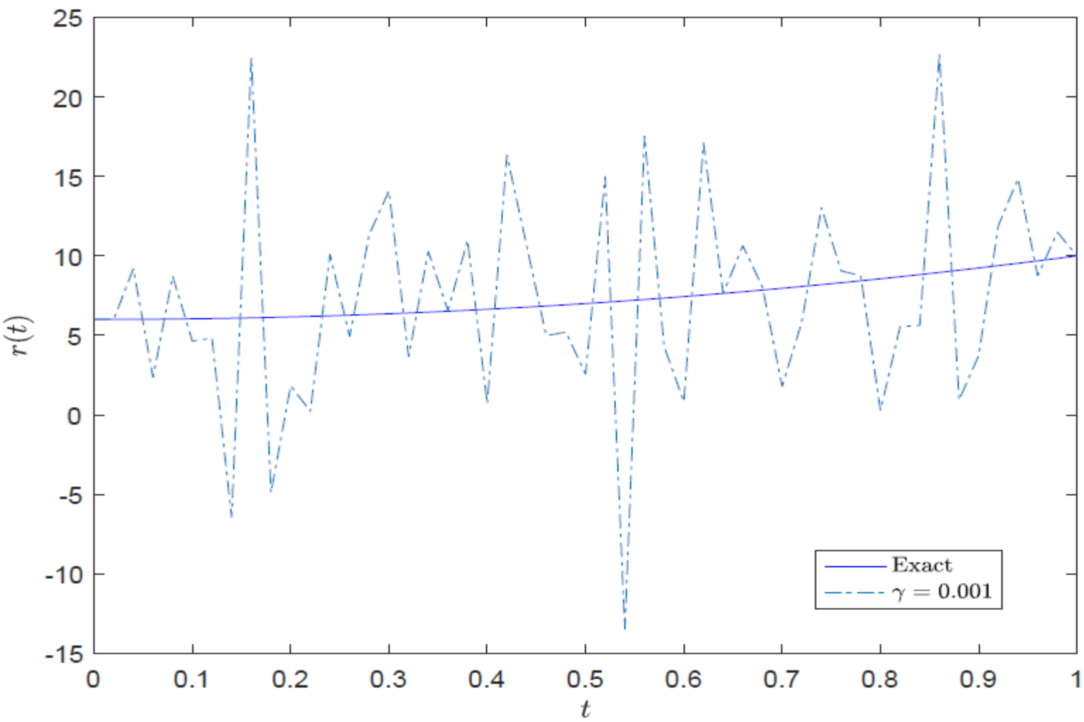
Şekil 4.2. Nümerik ve kesin çözümün arasındaki farkın %0 gürültü yüzdesiyle verilen gösterimi



Şekil 4.3. Nümerik ve kesin çözümün arasındaki farkın %0,00001 gürültü yüzdesiyle verilen gösterimi



Şekil 4.4. Nümerik ve kesin çözümün arasındaki farkın %0,0001 gürültü yüzdesiyle verilen gösterimi



Şekil 4.5. Nümerik ve kesin çözümün arasındaki farkın %0,001 gürültü yüzdesiyle verilen gösterimi

Şekil 4.2, 4.3, 4.4, 4.5’te $r(t)$’nin kesin ve nümerik çözümleri arasındaki farkı gürültü verileriyle gösterilmiştir. Burada sırasıyla gürültü yüzdeleri;

$\gamma = \%0 \;\; \%0{,}00001 \;\; \%0{,}0001 \;\; \%0{,}001$ dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada periyodik sınır koşullu ters lineer hiperbolik denklem için problemin Fourier yöntemi ile incelenmesi ele alınmıştır. Bu periyodik sınır koşullu hiperbolik problem sınır ve başlangıç problemine çevrilip Fourier metodu kullanılarak problemin çözümünün ve ters katsayının varlığı, tekliği ve kararlılığı gösterilmiştir. Ayrıca probleme sonlu farklar yöntemi uygulanarak gerçek çözüme olan yakınsaklığı nümerik örnekle gösterilmiştir.

Bu problem farklı sınır koşullarıyla çözülebilir ayrıca problemin nümerik çözümü için kapalı ve Crank Nicolson şemaları da kullanılabilir, tabi bu ayrı bir inceleme konusu olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Epstein B., *Partial Differential Equations.*, 1th ed., McGraw - Hill Book Company, Inc., Newyork, 1962.

[2] Strauss W.A, *Partial Differential Equations*, 2th ed., Wiley, United States of America, 2008.

[3] Aliyev G., *Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler*, 1. Cilt, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 1995.

[4] Lavrent'ev M. M., Some Improperly Ill-Posed Problems of Mathematical Physics, *Springer*, Berlin, 1967.

[5] Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev S. V., *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Problems*, Begell House Inc., Newyork, 1995.

[6] Engl H. W., Hanke M., Neubauer A., *Regularization of Inverse Problems, Kluwer Academic Publishers*, Netherlands, 1996.

[7] Romanov V. G., *Inverse Problems of Mathematical Physics*, 1st ed., VSP, Utrecht, 1987.

[8] Romanov V. G., *Investigation Methods for Inverse Problems*, 1st ed., VSP, Utrecht, 2002.

[9] Isakov U. M., *Inverse Problems in Partial Differential Equations*, Springer, Berline-New York, 1998.

[10] Kabanikhin S. I., Lorenzi A., *Identification Problems of Wave Phenomena*, 1st ed., VSP, Utrecht, 1999.

[11] Lavrent'ev, M. M., Romanov, V. G., *Ill- Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, American Mathematichal Society, Moscow, 1986.

[12] Denisov A. M., Inverse Problem for a Quasilinear Hyperbolic Equation with a Nonlocal Boundary Condition Containing a Delay Argument, *Differential Equations*, 2013, **49**(9), 1053–1061.

[13] Denisov A. M., Integral-Functional Equation Arising in The Study of An Inverse Problem for a Quasilinear Hyperbolic Equation, *Differential Equations*, 2018, **54**(9), 1180–1190.

[14] Denisov A. M., Existence of a Solution of the Inverse Coefficient Problem for a Quasilinear Hyperbolic Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, **59**(4), 550-558.

[15] Tekin I., Determination of a Time-Dependent Coefficient in a Wave Equation with Unusual Boundary Condition, *Filomat*, 2019, **33**(9), 2653–2665.

[16] Tekin I., Existence and Uniqueness of An Inverse Problem for a Second Order Hyperbolic Equation, *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 2018, **1**(3), 178-185.

[17] Mansur I. and Tekin I, Inverse Coefficient Problems for a First Order Hyperbolic System, *Applied Numerical Meathematics*, 2016, **106**, 98-115.

[18] Pulkina L.S., A Nonlocal Problem for a Hyperbolic Equation with Integral Conditions of the 1st Kind with Time Dependent Kernels, *Russian Mathematics*, 2012, **56**(10), 26–37.

[19] Assanova A.T., Solvability of a Nonlocal Problem for a Hyperbolic Equation with Integral Conditions, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2017, **2017**(170), 1072-6691.

[20] Yıldız M., A Coefficient Inverse Problem for a Hyperbolic Type Equation, *Karaelmas Science and Engineering*, 2014, **4**(2), 59-63.

[21] Cannon J. R., Lin Y., Determination of Parameter p(t) in Hölder classes for Some Semilinear Parabolic Equations, *Inverse Problems*, 1988, **45**(11), 595-606.

[22] Kanca F., Baglan I., An İnverse Problem for a Quasilinear Parabolic Equation With Nonlocal Boundary and Overdetermination Conditions, *Journal of İnequalities and Applications*, 2014, **2014**(76), 12-23.

[23] Bağlan I., Kanca F., Mishra V. N., Determination of an Unknown Heat Source from Integral Overdetermination Condition, *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A-Science*, 2018, **42**, 1373-1382.

[24] Bağlan I., Analysis of Two-Dimensional Non-Linear Burgers Equations, *Twms Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 2019, **9**(1), 38-48.

[25] Kanca F., Bağlan I., Inverse Problem for Euler-Bernoulli Equation with Periodic Boundary Condition, *Filomat*, 2018, **32**(16) ,5691–5705.

[26] Bağlan I., Determination of a Coefficient in a Quasilinear Parabolic Equation with Periodic Boundary Condition, *Inverse Problems in Science and Engineering*, DOİ: 10.1080/17415977.2014.947479.

[27] Baglan I., Kanca F., An Inverse Coefficient Problem for a quasilinear Parabolic Equation with Periodic Boundary and Integral Overdetermination Condition, *Mathematical Methods ın the Applıed Scıences*, 2013, DOİ: 10.1002/mma.3112

[28] Bağlan I., Kanca F., Solution of the Boundary-Value Problem of Heat Conduction with Periodic Boundary Conditions, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2020, **72**, 232-245.

[29] Bağlan I., Determination of a coefficient in a Quasilinear Parabolic Equation with Periodic Boundary Condition, *Inverse problems in science and engineering*, 2015, **23**(5), 884-900.

[30] Bağlan I., Kanca F., Two-Dimensional Inverse Quasilinear Parabolic Problem with Periodic Boundary Condition, *Applicable analysis*, 2019, **98**(8), 1549-1565.

[31] Bağlan I., An Inverse Coefficient Problem for a Quasilinear Parabolic Equation with Periodic Boundary and Integral Over Determination Condition, *Mathematical methods in the applied sciences*, 2015, **38(**5), 851-867.

[32] Kanca F., Bağlan I., Inverse Problem for Euler-Bernoulli Equation with Periodic Boundary Condition, *Filomat*, 2018, **32**(16), 5691-5705.

[33] Bağlan I., Kanca F., Fourier Method for Higher Dimensional Inverse Quasi-Linear Parabolic Problem, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2021, **37**(3), 2222–2234.

[34] Kanca K., Bağlan I., Analysis for Two-Dimensional Inverse Quasilinear Parabolic Problem By Fourier Method, *Inverse problemlems in science and engineering*, 2021, DOİ: 10.1080/17415977.2021.1890068.

[35] Hill G.W., *On The Part of the Motion of The Lunar Perigee Which is a Function of The Mean Motions of The Sun and Moon*, 8. Cilt, Acta Mathematica, Cambridge U. S. A., 1-36, 1886.

[36] Çağlıyan M., Çelebi O., *Kısmi Diferansiyel Denklemler*, 2. Baskı, Dora Yayınları, Bursa, 31-32, 2010.

[37] Halilov H. Ve Hasanoğlu A., Can M., *Çok Değişkenli Fonksiyonların Analizi*, 2. Cilt, Literatür Yayınları, İstanbul, 2009.

[38] Halilov, H. ve Hacısalihoğlu, H., *Yüksek Matematik Klavuzu*, 1. Cilt, Elfi Yayınevi, Ankara, 2009.

[39] Aksoy Y., *İntegral Denklemler*, 1. Cilt, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 1983.

[40] Mitrinović D. S., Pečarić J. E., *Fink A. M., Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1993, DOI: 10.1007/978-94-017-1043-5.

[41] Brown J.W. and Churcill R.V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 5th ed., McGraw-Hill Education, 1993.

[42] Altın A., *Uygulamalı Matematik*, Gazi Kitabevi, Ankara, 2011.

[43] Smith G. D., *Numerical Solution of Partial Diffrential Equations: Finite Difference Methods*, 3th ed., 0-19-859650-2, 1985.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

[1] Bağlan İ., **Peküzün A.,** Fourier Method for Inverse Coefficient Hyperbolic Equation with periodic boundary condition, *International Conference on Life and Engineering Sciences (ICOLES)*, İstanbul, Turkey, December 11-13, 2020.

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğretimini İstanbul'da tamamladı. 2013 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2018 yılında mezun oldu. 2018 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2020 yılından beri Esentepe Ortaokulu'nda matematik öğretmeni olarak görevini sürdürmektedir.