KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

q-GENELLEŞTİRİLMİŞ CATALAN SAYILARI VE q-HARMONİK SAYILARINI İÇEREN DENKLİKLER

ZEHRA BETÜL GÜR

KOCAELİ 2021

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

q-GENELLEŞTİRİLMİŞ CATALAN SAYILARI VE q-HARMONİK SAYILARINI İÇEREN DENKLİKLER

ZEHRA BETÜL GÜR

Prof.Dr. Neşe ÖMÜR		
Danışman,	**Kocaeli Üniv.**	**...........................**
Doç.Dr. Yücel TÜRKER ULUTAŞ		
Jüri Üyesi,	**Kocaeli Üniv.**	**...........................**
Doç.Dr. İlker AKKUŞ		
Jüri Üyesi,	**Kırıkkale Üniv.**	**...........................**

Tezin Savunulduğu Tarih: 21.06.2021

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Matematiğin en eski alanlarından biri olan sayılar teorisinin temelleri milattan önceye dayanmaktadır. Bu alanda uzun yıllar boyunca harmonik sayılar ve Catalan sayılar gibi birçok özel sayının ve bu sayılar arasındaki ilişkilerin incelendiği çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmada, yapılan çalışmaların yardımı ile bu özel sayıları içeren eşitlik ve denklikler elde edilmiştir.

Çalışmalarımda bana yol gösteren değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Neşe Ömür ve Sayın Doç. Dr. Sibel Koparal'a ve her zaman yanımda olup bana destek olan sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Haziran-2020 Zehra Betül GÜR

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\in$	: Elemanıdır
$\equiv$	: Denktir
$\sum$	: Toplam Sembolü
$\prod$	: Çarpım Sembolü
$[k]_q$	: k'nın q-Benzeri
$\binom{n}{k}$	: Binom Katsayısı
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	: q-Binom Katsayısı
$(x;q)_n$	: q-Pochhammer Sembolü
$q_p(m)$	: Fermat Oranı
$Q_p(m,q)$	: q-Fermat Oranı
H_n	: Harmonik Sayı
$H_{n,m}$	: m Mertebeli Harmonik Sayı
I_n	: Alterne Harmonik Sayı
$H_n(q)$	: q-Harmonik Sayı
$\widetilde{H}_n(q)$	: q-Harmonik Sayı
$I_n(q)$	: Alterne q-Harmonik Sayı
$H_{n,m}(q)$	: m Mertebeli q-Harmonik sayı
$\widetilde{H}_{n,m}(q)$	: m Mertebeli q-Harmonik Sayı
$I_{n,m}(q)$	: m Mertebeli Alterne q-Harmonik Sayı
C_n	: Catalan Sayısı
$B_{n,k}$	: Genelleştirilmiş Catalan Sayısı
$C_n(q)$	: q-Catalan Sayısı
$B_{n,k}(q)$	: q-Genelleştirilmiş Catalan Sayısı

q-GENELLEŞTİRİLMİŞ CATALAN SAYILARI VE q-HARMONİK SAYILARINI İÇEREN DENKLİKLER

ÖZET

Bu çalışmada, bilinen denklikler ve kombinatoriyal özdeşlikler kullanılarak q-genelleştirilmiş Catalan sayıları, q-harmonik sayılar ve alterne q-harmonik sayılar ile ilgili bazı q-denklikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Denklik, q-Genelleştirilmiş Catalan Sayıları, q-Harmonik Sayılar.

CONGRUENCES INVOLVING q-GENERALIZED CATALAN NUMBERS AND q-HARMONIC NUMBERS

ABSTRACT

In this study, it is obtained some q-congruences related to q-generalized Catalan numbers, q-harmonic numbers and alternating q-harmonic numbers by using some well-known congruences and combinatorial identities.

Keywords: Congruence, q-Generalized Catalan Numbers, q-Harmonic Numbers.

GİRİŞ

Harmonik sayılar ve Catalan sayıları, sayılar teorisinde ilgi çekici bir konu olup bu sayılar ile ilgili yapılan çalışmalar önem teşkil etmektedir. q-Analog tanımı ile birlikte bu sayıların yeni genelleştirmeleri yapılmış olup q-harmonik sayılar, q-Catalan sayıları ve q-genelleştirilmiş Catalan sayıları tanımlanmıştır. Bu çalışmada, bu özel sayılar hakkında bilgiler verilmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez genel bilgiler, q-genelleştirilmiş Catalan sayıları ve q-harmonik sayıları içeren denklikler, sonuçlar ve öneriler olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde bazı temel tanımların yanında, harmonik sayılar ve Catalan sayıları gibi bazı özel sayılar ve bu sayıların genelleştirmeleri verildi. Örneğin, $\mathrm{H_n(q)}$ ile gösterilen q-harmonik sayı ve $\mathrm{C_n(q)}$ ile gösterilen q-Catalan sayısı sırasıyla harmonik sayıların ve Catalan sayılarının birer genelleştirmesidir. Ayrıca bu özel sayılar ile ilgili yapılmış olan çalışmalar araştırılarak bazı bölümlerine yer verildi.

İkinci bölümde, birinci bölümde tanımları verilmiş olan q-genelleştirilmiş Catalan sayıları ile çeşitli toplamlar oluşturularak bu toplamların $[\mathrm{p}]_\mathrm{q}^2$ moduna göre elde edilmiş olan denklikleri verildi. Ayrıca bu denklikler elde edilirken karşılaşılan, q-harmonik sayıları da içeren bazı toplamların $[\mathrm{p}]_\mathrm{q}$ ve $[\mathrm{p}]_\mathrm{q}^2$ moduna göre denklikleri gösterildi.

Üçüncü bölümde ise elde edilen sonuçlar ile birlikte ilerideki çalışmalar için öneriler verildi.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1. $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a \neq 0$ olsun. Bir k tam sayısı için $b = ka$ oluyor ise "a böler b" denir ve $a|b$ şeklinde yazılır. Eğer herhangi bir k tam sayısı için $b = ka$ olmuyor ise "a bölmez b dir" denir ve $a \nmid b$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.2. $n \in \mathbb{Z}^+/\{1\}$ ve $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n|(a-b)$ ise "a ile b mod n'ye göre $\mathbb{Z}$ 'de denktir" denir ve bu

$a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$

şeklinde yazılır. Eğer, $n \nmid (a-b)$ ise "a ile b mod n'ye göre $\mathbb{Z}$ 'de denk değildir" denir ve

$a \not\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$

şeklinde yazılır [19].

Tanım 1.3. $n \in \mathbb{Z}^+/\{1\}$ ve $x, y \in \mathbb{Q}$ olsun.

" $x \equiv y\ (\mathrm{mod}\ n) \Leftrightarrow \mathbb{Z}$ de $n|\mathrm{pay}(x-y)$ "

yani

" $x \equiv y\ (\mathrm{mod}\ n) \Leftrightarrow \mathrm{pay}(x-y) \in n\mathbb{Z}$ "

oluyorsa " x ile y sayıları mod n'ye göre $\mathbb{Q}$'da denktir " denir. Aksi durumda ise " x ile y sayıları modn'ye göre $\mathbb{Q}$'da denk değildir " denir ve

$x \not\equiv y\ (\mathrm{mod}\ n)$

şeklinde gösterilir [18, 20].

Kolaylıkla görülür ki $\mathbb{Q}$ üzerindeki (mod n) denklik bağıntısı, $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlanan denklik bağıntısına indirgenir. $x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$\text{pay}(x-y) = x-y$$

olduğundan $\mathbb{Q}$ üzerindeki (mod n) denklik $\mathbb{Z}'$de de tanımlanır [18].

Teorem 1.1. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$\mathbb{Z}_n = \{x \in \mathbb{Q} : (\text{payda}(x), n) = 1\}$ kümesi alınırsa

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_n \subset \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Q}$'nun alt halkasıdır.

Özel olarak $n = p$ (p asal sayı) alınırsa $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q} : p \nmid \text{payda}(x)\}$ halkasının elemanları p-sel sayılar olarak adlandırılır.

Tanım 1.5. $x \in \mathbb{R}$ olsun. $y \leq x < y+1$ olacak şekildeki y tam sayısına " x in tam değeri " denir ve $y = \lfloor x \rfloor$ şeklinde gösterilir [22]. Açıktır ki $x \in \mathbb{Z}$ ise $\lfloor x \rfloor = x$ olur.

Tanım 1.6. q bir değişken olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ tam sayısının q-benzeri

$$[n]_q = (1-q^n)/(1-q) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \tag{1.1}$$

şeklindedir. Burada $[0]_q = 1$ dır.

Ayrıca

$$\lim_{q \to 1^-} [n]_q = \lim_{q \to 1} (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = n$$

olduğu görülür. Örneğin,

$$[1]_q = 1, [2]_q = \frac{1-q^2}{1-q} = 1 + q$$

olur. Ayrıca (1.1) ile

$$[p]_q = \frac{1-q^p}{1-q}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\frac{1-q^p}{1-q} \equiv 0\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q\right)$$

olup

$$1-q^p \equiv 0\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q\right)$$

denkliği elde edilir. Buradan da

$$q^p \equiv 1\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q\right) \tag{1.2}$$

elde edilir.

Tanım 1.7. $n, k \in \mathbb{N}$ ve $n \geq k$ olmak üzere Binom katsayısı

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

şeklindedir.

Teorem 1.2. $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. n pozitif tam sayı olmak üzere $(a+b)^n$ ifadesinin Binom açılımı

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

şeklindedir.

Yukarıda verilen binom katsayısına karşılık gelen Gaussian katsayıları ve Gaussian binom katsayıları olarak adlandırılan q-binom katsayılarının tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.8. $n \geq k$ olacak şekildeki $n, k \in \mathbb{N}$ için q-binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$$

şeklindedir.

Özel olarak $k = 1$ alınırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = [n]_q$$

eşitliği görülür. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^3)(1-q^4)}{(1-q)(1-q^2)} = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$$

dır. Ayrıca $1 \leq k \leq n$ için q-binom katsayıları arasında

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

ve

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

özdeşlikleri vardır.

Tanım 1.9. $x \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 1$ tam sayısı için $(x;q)_0 = 1$ olmak üzere

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1 - xq^k) = (1-x)(1-xq)\ldots(1-xq^{n-1})$$

sonlu çarpımına q-Pochhammer sembolü denir ve $(x;q)_n$ ile gösterilir [3].

Tanım 1.10. p bir asal sayı olsun. $p \nmid m$ olacak şekildeki negatif olmayan m tam sayısı için Fermat oranı

$$q_p(m) = \frac{m^{p-1} - 1}{p}$$

şeklinde tanımlanır. Fermat oranının q-benzeri olan q-Fermat oranı ise $p \nmid m$ ve $m \geq 0$ olacak şekildeki p asal sayısı ve m tam sayısı için

$$Q_p(m,q) = \frac{(q^m;q^m)_{p-1}/(q;q)_{p-1} - 1}{[p]_q}$$

şeklinde tanımlanır [11].

1.2. Bazı Özel Sayılar ve Bu Sayıları İçeren Eşitlik ve Denklikler

Bu bölümde, bu çalışmada elde edilen eşitlik ve denkliklerde kullanılan bazı özel sayıların tanımları ve bu sayılar hakkında bilgiler verilmiştir. İlk olarak harmonik sayılar hakkında birkaç bilgi verelim. Harmonik sayılar, sayılar teorisi başlıca olmak üzere birçok alanda önemli bir yer kaplamaktadır. Bu konuda yapılan ilk çalışmalar M.Ö. 6. yüzyıla dayanmaktadır. Harmonik sayılar ilk olarak 1862 yılında Wolstenholme tarafından denkliklere uygulanmış olup Lehmer de birçok denklik elde etmiştir. Son yıllarda Z.W. Sun gibi birçok yazar bu denklikler yardımıyla farklı denklikler üzerine çalışmalar yapmıştır.

Harmonik sayıları harmonik ortalama ile açıklamak istersek, n-inci harmonik sayı, n tam sayısının ilk n pozitif tam sayının harmonik ortalamasına bölümü ile elde edilir. Aynı zamanda harmonik sayılar, Riemann-Zeta fonksiyonu gibi bazı özel fonksiyonlarda da karşımıza çıkmaktadır. Aşağıda harmonik sayılar ve bazı genelleştirilmelerinin tanımları verilmiştir.

Tanım 1.11. $n \geq 1$ bir tam sayı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

sonlu toplamına n-inci harmonik sayı denir ve H_n ile gösterilir. Burada

$H_0 = 0$ olup

$$H_n = \frac{1}{n} + H_{n-1}$$

tekrarlama bağıntısı sağlanır.

$H_{0,m} = 0$ ve $n \geq 1$ bir tam sayı olmak üzere n-inci m mertebeli harmonik sayı

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^m}$$

sonlu toplamı ile tanımlanır ve $H_{n,m}$ ile gösterilir. Özel olarak $m = 1$ için

$$H_{n,1} = H_n$$

olduğu görülür.

Ayrıca harmonik sayılar, Riemann-Zeta fonksiyonu ile bağlantılır. $\zeta(s)$ Riemann-Zeta fonksiyonu, p asal sayı olmak üzere $s \neq 1$ karmaşık sayısı için

$$\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^m} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.12. $I_0 = 0$ olmak üzere $n \geq 1$ tam sayısı için

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i}$$

sonlu toplamına n-inci alterne harmonik sayı denir ve I_n ile gösterilir.

Ayrıca alterne harmonik sayılar ve harmonik sayılar arasında

$$I_n = H_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - H_n$$

özdeşliği vardır [17].

Alterne Riemann-Zeta fonksiyonu olarak bilinen ve $\eta(s)$ ile gösterilen Dirichlet-Eta fonksiyonu ile alterne harmonik sayılar arasındaki ilişkiyi incelersek;

$$\eta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

şeklindedir. Burada $s = 1$ için

$\eta(s) = \ln 2$ olup

alterne harmonik sayıya karşılık gelmektedir.

Şimdi harmonik sayıları içeren bazı özdeşlikler verilsin.

Teorem 1.3. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k H_k = \frac{(-1)^n - 1}{2} H_n + \frac{1}{2} H_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

$$\sum_{k=1}^{n} kH_k = \frac{n(n+1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k kH_k = (-1)^n \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) H_n - \frac{1}{4}\left(H_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - H_n\right) + \frac{(-1)^n - 1}{4}$$

eşitlikleri vardır [9, 21].

Şimdi ileride kullanılacak olan $\mathbb{Z}_p$ deki bazı denklikler verilsin.

İlk olarak, 1862 yılında Joseph Wolstenholme (1829-1891)'ın bir sonucu aşağıda verilmiştir..

Teorem 1.4. $p \geq 5$ asal sayısı için

$$H_{p-1} \equiv 0 (\text{mod } p^2)$$

denkliği vardır [15].

1850 yılında Eisenstein, 1 ve p-1 arasındaki tam sayıların alternatiflerini içeren toplam ile Fermat oranı arasındaki ilişkiyi verdi ve daha sonra 1861 yılında Sylvester aşağıdaki denkliği vermiştir.

Teorem 1.5. $p \geq 3$ asal sayısı için

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \equiv 2q_p(2) (\text{mod } p)$$

denkliği vardır.

Harmonik sayı ve alterne harmonik sayılarına karşılık gelen q-benzerlerinin tanımı verilsin.

Tanım 1.13. $n \in \mathbb{N}$ için

n-inci q-harmonik sayılar ve n-inci q-alterne harmonik sayılar sırasıyla

$$H_n(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[i]_q}, \widetilde{H}_n(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q^i}{[i]_q}, I_n(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{[i]_q}$$

toplamlarıyla tanımlanır. Burada $H_0(q) = \widetilde{H}_0(q) = I_0(q) = 0$ dır.

Benzer şekilde, m mertebeli harmonik sayılara ve m mertebeli alterne harmonik sayılara karşılık gelen m mertebeli n-inci q-harmonik sayılar ve m mertebeli n-inci alterne q-harmonik sayılar sırasıyla

$$H_{n,m}(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[i]_q^m}, \widetilde{H}_{n,m}(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q^i}{[i]_q^m}, I_{n,m}(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{[i]_q^m}$$

toplamlarıyla tanımlanır. Burada $H_{0,m}(q) = \widetilde{H}_{0,m}(q) = I_{0,m}(q) = 0$ dır.

q-Harmonik sayılar ve q-alterne harmonik sayılar ile ilgili bazı denklikler aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.6. $p \geq 3$ asal sayısı için

$$H_{p-1}(q) \equiv \frac{p-1}{2}(1-q) + \frac{p^2-1}{24}(1-q)^2[p]_q \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right) \tag{1.3}$$

ve $p \geq 5$ asal sayı olmak üzere

$$\widetilde{H}_{p-1}(q) \equiv \frac{p-1}{2}(q-1) + \frac{p^2-1}{24}(1-q)^2[p]_q \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right), \tag{1.4}$$

$$I_{p-1}(q) \equiv 2Q_p(2,q) - \frac{p-1}{2}(1-q)$$

$$+\left(Q_p(2,q)^2 + Q_p(2,q)(1-q) + \frac{p^2-1}{12}(1-q)^2\right)[p]_q \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right) \tag{1.5}$$

denklikleri vardır [2, 13, 14].

Catalan sayılarının tanımını vermeden önce birkaç bilgi verelim. Catalan sayıları, ismini Eugéne Charles Catalan'dan almış olup kombinatorik matematikte birçok problemin çözümünde karşımıza çıkmaktadır. Adını E.C. Catalan'dan alsa da Catalan sayılarını ilk olarak Euler tanımlamıştır. Ardından Goldbach ve Segner gibi ünlü matematikçiler Catalan sayıları ile çalışmışlardır.

Tanım 1.14. $n \geq 0$ tam sayı olmak üzere n-inci Catalan sayısı

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

şeklinde tanımlanıp C_n ile gösterilir ve $n > 4$ için

$$C_n > 2n - 1$$

eşitsizliğini sağlar.

Ayrıca $C_0 = 1$ olmak üzere

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

lineer olmayan tekrarlama bağıntısı sağlanır. Catalan sayılarının birçok gösterimi mevcut olup bunlardan biri de

$$C_n = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(4k-2)$$

şeklindedir.

Catalan sayılarının birçok genelleştirmesi vardır. İlk kez 1976 yılında Shapiro tarafından tanımlanan genelleştirilmiş Catalan sayılarının tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.15. $n, k \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq k \leq n$ olmak üzere genelleştirilmiş Catalan sayıları

$$\frac{k}{n}\binom{2n}{n-k}$$

ile tanımlanır ve $B_{n,k}$ ile gösterilir [5].

Burada $m \geq 1$ için $B_{n,0} = B_{n,n+m} = 0$ dır.

Ayrıca $k \geq 2$ için

$$B_{n,k} = B_{n-1,k-1} + 2B_{n-1,k} + B_{n-1,k+1}$$

tekrarlama bağıntısı sağlanır.

Burada $k = 1$ alınırsa $B_{n,1} = C_n$ olup Catalan sayısı elde edilir. Catalan üçgeninin elemanları olan $B_{n,k}$ sayıları Tablo 1.1. de verilmiştir.

Tablo 1.1. $B_{n,k}$ sayıları

k \ n	1	2	3	4	5	⋯
1	1	0	0	0	0	⋯
2	2	1	0	0	0	⋯
3	5	4	1	0	0	⋯
4	14	14	6	1	0	⋯
5	42	48	27	8	1	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Şimdi Catalan sayıları ve genelleştirilmiş Catalan sayılarını içeren bazı eşitlik ve denklikler verilsin.

Teorem 1.7. $n \geq 1$ için

$$\sum_{k=1}^{n} kB_{n,k}^2 = \frac{n(n+1)}{2} C_n C_{n-1}$$

eşitliği vardır [7].

Teorem 1.8. $1 \leq m \leq n$ olacak şekildeki m ve n tam sayıları için

$$\sum_{k=1}^{n} B_{n,k} B_{n,n+k-m} (n+2k-m)^3 = \binom{2n}{n}\binom{2(n-1)}{m-1}(n^2+4n-2mn+m^2)$$

eşitliği vardır [8].

Aşağıda Ömür ve Koparal tarafından elde edilen, genelleştirilmiş Catalan sayıları, harmomik sayılar ve genelleştirilmiş harmonik sayıları içeren denklikler verilmiştir.

Teorem 1.9. p bir asal sayı olmak üzere $0 < d < p-1$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} B_{p,k} B_{p,k-d} \equiv 4(-1)^d \left(-2d + p\left(8d(H_d - 1) + \frac{2}{d} - 3\right)\right) \pmod{p^2},$$

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^k B_{p,k} B_{p,k-d} \equiv 4(-1)^d \left(1 + \frac{p}{d}\left(1 + (-1)^d\right) - 2pH_d\right) \pmod{p^2}$$

ve

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} kB_{p,k} B_{p,k-d} \equiv 2(-1)^d \left(-2d^2 + p(1 + 8d^2(H_d - 1) - 4d)\right) \pmod{p^2}$$

dır [9].

Teorem 1.10. p bir tek asal sayı olmak üzere $0 < d < p$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} \frac{B_{p,k} B_{p,k-d}}{k} \equiv 4(-1)^d (H_d + H_{d-1} + \frac{2}{p} + p\left(4H_d^2 + 4H_{d-1}^2 - 2H_{d,2} - 2H_{d-1,2}\right.$$

$-H^2_{p+d} - H^2_{p+d-1}\Big)\Big) \pmod{p^2}$

denkliği vardır [10].

Aşağıda Catalan sayılarının ve genelleştirilmiş Catalan sayıların q-benzeri olan q-Catalan sayılarının ve q-genelleştirilmiş Catalan sayılarının tanımı verilmiştir.

Tanım 1.16. $C_0(q) = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ tam sayısı için n-inci q-Catalan sayısı

$$C_n(q) = \frac{1-q}{1-q^{n+1}} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q$$

şeklinde tanımlanır [4].

Guo ve Zeng tarafından tanımlanan ve q-Catalan sayısının bir genelleştirmesi olan q-genelleştirilmiş Catalan sayıları ise $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$B_{n,k}(q) = \frac{[k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} 2n \\ n-k \end{bmatrix}_q \tag{1.6}$$

şeklindedir [6].

Ayrıca bu sayılar q-Catalan üçgeninin elemanlarıdır.

Tanım 1.17. $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ olmak üzere bir geometrik serinin ilk n terimi toplamı

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\frac{1-r^n}{1-r} \tag{1.7}$$

şeklindedir.

Şimdi q-genelleştirilmiş Catalan sayılarını,q-harmonik sayıları ve q-genelleştirilmiş harmonik sayılarını içeren denklikler elde edilirken kullanılan bazı önemli eşitlik ve denklikler verilsin.

Teorem 1.11. $\{a_k\}_{k\geq 0}$ ve $\{b_k\}_{k\geq 0}$ iki dizi ve

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

olmak üzere $m \leq n$ olacak şekildeki m ve n doğal sayıları için

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) \tag{1.8}$$

dır [1]. Bu eşitliğe Abel toplamı denir.

Lemma 1.1. p asal sayı ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

$$q^{kp} \equiv 1 - k(1-q)[p]_q + \binom{k}{2} [p]_q{}^2 \left(\mathrm{mod}\ [p]_q{}^3\right) \tag{1.9}$$

dır [12].

Lemma 1.2. p bir asal sayı ve $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $0 \leq k \leq p-1$ olacak şekildeki k tam sayısı için

$$\begin{bmatrix} \alpha p - 1 \\ k \end{bmatrix}_q \equiv (-1)^k q^{-\binom{k+1}{2}} \left(1 - [\alpha p]_q\, H_k(q)\right) \left(\mathrm{mod}\ [p]_q{}^2\right)$$

denkliği vardır [16].

Ayrıca $H_k(q) = \widetilde{H}_k(q) + k(1-q)$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \alpha p - 1 \\ k \end{bmatrix}_q \equiv (-1)^k q^{\alpha p k - \binom{k+1}{2}} \left(1 - [\alpha p]_q\, \widetilde{H}_k(q)\right) \left(\mathrm{mod}\ [p]_q{}^2\right) \tag{1.10}$$

denkliği elde edilir.

2. q-GENELLEŞTİRİLMİŞ CATALAN SAYILARI VE q-HARMONİK SAYILARINI İÇEREN DENKLİKLER

Bu bölümde, q-genelleştirilmiş Catalan sayıları ile oluşturulan toplamların $[p]_q^2$ moduna göre denkleri elde edilmiş olup bu denkliklerin ispatında kullanılan bazı eşitlik ve denklikler ilk olarak verilmiştir.

Lemma 2.1. p bir asal sayı ve $\alpha, n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $0 \leq k \leq p-1$ olacak şekildeki k tam sayısı için

$$\begin{bmatrix} \alpha p - 1 \\ k \end{bmatrix}_q^n \equiv (-1)^{nk} q^{\alpha npk - n\binom{k+1}{2}} \left(1 - n[\alpha p]_q \widetilde{H}_k(q)\right) \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right) \tag{2.1}$$

denkliği vardır.

İspat. (1.10) kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} \alpha p - 1 \\ k \end{bmatrix}_q^n \equiv (-1)^{nk} q^{\alpha npk - n\binom{k+1}{2}} \left(1 - [\alpha p]_q \widetilde{H}_k(q)\right)^n \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

olduğu görülür. Burada Binom açılımı kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \alpha p - 1 \\ k \end{bmatrix}_q^n \equiv (-1)^{nk} q^{\alpha npk - n\binom{k+1}{2}} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} {[\alpha p]_q}^{n-i}\ \widetilde{H}_k(q)^{n-i} \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

denkliği yazılır. $m \geq 2$ için

${[p]_q}^m \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} \alpha p - 1 \\ k \end{bmatrix}_q^n \equiv (-1)^{nk} q^{\alpha npk - n\binom{k+1}{2}} \left(1 - n[\alpha p]_q \widetilde{H}_k(q)\right) \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.2. p bir asal sayı ve $m, n \in \mathbb{Z}$ olsun. $0 \leq d \leq k \leq p$ olacak şekildeki k ve d tam sayıları için

$$\frac{[k]_q^n\,[k-d]_q^m}{[p-k]_q^n\,[p-k+d]_q^m}$$

$$\equiv (-1)^{m+n} q^{k(m+n)-md}$$

$$\times\left(1+[p]_q\left(m\frac{q^{k-d}}{[k-d]_q}+n\frac{q^k}{[k]_q}+(m+n)(1-q)\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right) \tag{2.2}$$

dır.

İspat. Eşitlik (1.1)'den $[p+k]_q = [p]_q + q^p[k]_q$ ve $[p-k]_q = [p]_q - q^{p-k}[k]_q$

eşitliklerinin varlığı açıktır. O halde

$$\frac{[k]_q}{[p-k]_q} = \frac{[p+k]_q[k]_q}{[p-k]_q[p+k]_q} = \frac{[k]_q\left([p]_q + q^p[k]_q\right)}{\left([p]_q + q^p[k]_q\right)\left([p]_q - q^{p-k}[k]_q\right)}$$

$$= \frac{[k]_q\left([p]_q + q^p[k]_q\right)}{[p]_q^2 - [k]_q\left([p]_q(q^{p-k}-q^p) + q^{2p-k}[k]_q\right)}$$

yazılır. Burada elementer işlemler yapılarak

$$\frac{[k]_q}{[p-k]_q} \equiv \frac{[p]_q + q^p[k]_q}{[p]_q(q^p - q^{p-k}) - q^{2p-k}[k]_q}\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)$$

denkliği elde edilir. Bu ifade paydanın eşleniği ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa (1.2) denkliğinden

$$\frac{[k]_q}{[p-k]_q} \equiv -q^k\left(q^{-p} + [p]_q\frac{q^k}{[k]_q}\right)\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)$$

elde edilir. Ardından Binom açılımı kullanılarak

$$\frac{[k]_q^n}{[p-k]_q^n} \equiv (-1)^n q^{nk}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} q^{k(n-i)-pi}\frac{{[p]_q}^{n-i}}{{[k]_q}^{n-i}}\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)$$

olduğu görülür. Burada $m \geq 2$ için $[p]_q^m \equiv 0\left(\bmod\ [p]_q^2\right)$ olduğundan

$$\frac{[k]_q^n}{[p-k]_q^n} \equiv (-1)^n q^{nk}\left(q^{-pn} + nq^{-p(n-1)}[p]_q \frac{q^k}{[k]_q}\right)\left(\bmod\ [p]_q^2\right)$$

denkliği elde edilir. Böylece (1.2) ve (1.9) denkliklerinden

$$\frac{[k]_q^n}{[p-k]_q^n}$$

$$\equiv (-1)^n q^{nk}\left(1 + n[p]_q\left(\frac{q^k}{[k]_q} + 1 - q\right)\right)\left(\bmod\ [p]_q^2\right) \tag{2.3a}$$

olur. Bu denklikte sırasıyla k yerine $k-d$ ve n yerine m yazılırsa

$$\frac{[k-d]_q^m}{[p-k+d]_q^m}$$

$$\equiv (-1)^m q^{m(k-d)}\left(1 + m[p]_q\left(\frac{q^{k-d}}{[k-d]_q} + 1 - q\right)\right)\left(\bmod\ [p]_q^2\right) \tag{2.3b}$$

denkliği elde edilir. Son olarak (2.3a) ve (2.3b) denklikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\frac{[k]_q^n\,[k-d]_q^m}{[p-k]_q^n\,[p-k+d]_q^m} \equiv (-1)^{m+n} q^{k(m+n)-md}$$

$$\times\left(1 + [p]_q\left(m\frac{q^{k-d}}{[k-d]_q} + n\frac{q^k}{[k]_q} + (m+n)(1-q)\right)\right)\left(\bmod\ [p]_q^2\right)$$

denkliği bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.3. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q^{2k}}{[k]_q} = \widetilde{H}_n(q) - q(1-q)[n]_q, \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q^{3k}}{[k]_q} = \widetilde{H}_n(q) + (1-q)\left(2 - [n+1]_q \frac{q(1+q^n)+2}{[2]_q}\right), \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\widetilde{H}_k(q)}{q^k}=\frac{q}{q-1}\left(H_n(q)-q^{-(n+1)}\widetilde{H}_n(q)\right) \tag{2.6}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\widetilde{H}_k(q)}{q^{2k}}=\frac{q^2}{[2]_q}\left([2n+2]_q q^{-(2n+2)}\widetilde{H}_n(q)-q^{-n}[n]_q-n\right) \tag{2.7}$$

eşitlikleri vardır.

İspat. İlk toplama $a_k=\frac{q^k}{[k]_q}$ ve $b_k=q^k$ alınarak (1.8) uygulanırsa q-harmonik sayı tanımından

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{q^{2k}}{[k]_q}=q^{n+1}\widetilde{H}_n(q)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{H}_n(q)\left(q^k-q^{k+1}\right)$$

$$=q^{n+1}\widetilde{H}_n(q)+(1-q)\sum_{k=1}^{n}q^k\widetilde{H}_k(q)$$

$$=q^{n+1}\widetilde{H}_n(q)+(1-q)\sum_{k=1}^{n}q^k\sum_{i=1}^{k}\frac{q^i}{[i]_q}$$

$$=q^{n+1}\widetilde{H}_n(q)+(1-q)\sum_{i=1}^{n}\frac{q^i}{[i]_q}\sum_{k=i}^{n}q^k$$

$$=q^{n+1}\widetilde{H}_n(q)+(1-q)\sum_{i=1}^{n}\frac{q^i}{[i]_q}\left(\sum_{k=0}^{n}q^k-\sum_{k=0}^{i-1}q^k\right)$$

elde edilir. Burada Formül (1.7) kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{q^{2k}}{[k]_q}=q^{n+1}\widetilde{H}_n(q)+(1-q)\sum_{i=1}^{n}\frac{q^i}{[i]_q}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}-\frac{1-q^i}{1-q}\right)$$

$$=q^{n+1}\widetilde{H}_n(q)+(1-q^{n+1})\widetilde{H}_n(q)-(1-q)\sum_{i=1}^{n}\frac{q^i}{[i]_q}\frac{1-q^i}{1-q}$$

$$= \widetilde{H}_n(q) - (1-q)\sum_{i=1}^{n} \frac{q^i}{[i]_q}\frac{1-q^i}{1-q}$$

ve (1.1) yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q^{2k}}{[k]_q} = \widetilde{H}_n(q) - (1-q)\sum_{i=1}^{n} q^i$$

eşitliği elde edilir. Tekrar Formül (1.7) ile

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q^{2k}}{[k]_q}$$

$$= \widetilde{H}_n(q) - (1-q)\left(\frac{q-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

$$= \widetilde{H}_n(q) - q(1-q)\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= \widetilde{H}_n(q) - q(1-q)[n]_q$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

İkinci eşitlik benzer işlemler ile (1.8)'de $a_k = \frac{q^k}{[k]_q}$ ve $b_k = q^{2k}$ alınarak gösterilebilir. Üçüncü eşitliğin ispatı için q-harmonik sayı tanımından

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{H}_k(q)}{q^k} = \sum_{k=1}^{n} q^{-k}\sum_{i=1}^{k} \frac{q^i}{[i]_q}$$

yazılır. Burada toplamlar yer değiştirilerek

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{q^i}{[i]_q}\sum_{k=i}^{n} q^{-k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q^i}{[i]_q}\left(\sum_{k=0}^{n} q^{-k} - \sum_{k=0}^{i-1} q^{-k}\right)$$

elde edilir. Ardından Formül (1.7) kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\widetilde{H}_k(q)}{q^k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q^i}{[i]_q}\left(\frac{1-q^{-n-1}}{1-q^{-1}}-\frac{1-q^{-i}}{1-q^{-1}}\right)$$

$$=\frac{q}{q-1}\left(-q^{-n-1}\widetilde{H}_n(q)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{[i]_q}\right)$$

elde edilir. Burada q-harmonik sayı yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Dördüncü eşitliğin ispatı da q-harmonik sayı tanımı ile benzer şekildedir.

Lemma 2.4. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-q)^k}{[k]_q}=I_n(q)+(1-q)\frac{(-1)^{n+1}+1}{2} \tag{2.8}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{[k]_q}q^{2k}=I_n(q)-(1-q)\left(\frac{(-1)^n-3}{2}+[n+1]_{-q}\right) \tag{2.9}$$

eşitlikleri vardır.

İspat. İkinci toplam için (1.8)'de $a_k=q^{2k}$ ve $b_k=\frac{(-1)^k}{[k]_q}$ alınarak

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{[k]_q}q^{2k}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(q^{2k}-q^{2k+2}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^i}{[i]_q}+q^{2n}I_n(q)$$

$$=(1-q^2)\sum_{k=1}^{n-1}q^{2k}\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^i}{[i]_q}+q^{2n}I_n(q)$$

elde edilir. Burada toplamlar yer değiştirilirse

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{[k]_q}q^{2k}=(1-q^2)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i}{[i]_q}\sum_{k=i}^{n-1}q^{2k}+q^{2n}I_n(q)$$

$$= (1-q^2)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i}{[i]_q}\left(\sum_{k=0}^{n-1} q^{2k} - \sum_{k=0}^{i-1} q^{2k}\right) + q^{2n}I_n(q)$$

eşitliği elde edilir. Formül (1.7) ile

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{[k]_q}q^{2k}$$

$$= (1-q^2)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i}{[i]_q}\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^2} - \frac{1-q^{2i}}{1-q^2}\right) + q^{2n}I_n(q)$$

$$= (1-q^{2n})\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i}{[i]_q} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i}{[i]_q}\left(1-q^{2i}\right) + q^{2n}I_n(q)$$

olduğu görülür. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{[k]_q}q^{2k}$$

$$= (1-q^{2n})I_{n-1}(q) - (1-q)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(1-q^i)}\left(1-q^{2i}\right) + q^{2n}I_n(q)$$

$$= (1-q^{2n})I_{n-1}(q) - (1-q)\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\left(1+q^i\right) + q^{2n}I_n(q)$$

$$= (1-q^{2n})I_{n-1}(q) - (1-q)\left(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i + \sum_{i=1}^{n-1}(-q)^i\right) + q^{2n}I_n(q)$$

elde edilir. Tekrar Formül (1.7) ile

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{[k]_q}q^{2k}$$

$$= (1-q^{2n})I_{n-1}(q) - (1-q)\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{2} + \frac{1-(-q)^n}{[2]_q} - 1\right) + q^{2n}I_n(q)$$

olduğu görülür. Burada q-harmonik sayı tanımından

$$I_{n-1}(q) = I_n(q) - \frac{(-1)^n}{(1-q^n)}(1-q)$$

olup

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{[k]_q} q^{2k} = (1-q^{2n}) I_n(q) - (1-q^{2n}) \frac{(-1)^n}{(1-q^n)}(1-q)$$

$$-(1-q)\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{2} + \frac{1-(-q)^n}{[2]_q} - 1\right) + q^{2n} I_n(q)$$

$$= I_n(q) - (1-q)\left((-1)^n(1+q^n) + \frac{(-1)^{n+1}-1}{2} + \frac{1-(-q)^n}{[2]_q} - 1\right)$$

$$= I_n(q) - (1-q)\left((-1)^n + (-q)^n + \frac{(-1)^{n+1}-1}{2} + \frac{1-(-q)^n}{[2]_q} - 1\right)$$

$$= I_n(q) - (1-q)\left(\frac{(-1)^n - 3}{2} + \frac{1-(-q)^{n+1}}{[2]_q}\right)$$

elde edilir. Son olarak (1.1)'den

$$[n+1]_{-q} = \frac{1-(-q)^{n+1}}{[2]_q}$$

olduğundan istenen eşitlik elde edilmiş olur. Diğer eşitlik benzer şekilde (1.8)'de $a_k = q^k$ ve $b_k = \frac{(-1)^k}{[k]_q}$ alınarak gösterilebilir.

Sonuç 2.1. p bir tek asal sayı olsun. $0 < d < p-1$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$I_{p-d-1}(q) \equiv -2Q_p(2,q) - I_d(q) - (1-q)\frac{p-(-1)^d}{2} \left(\bmod\, [p]_q\right), \qquad (2.10)$$

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^k \frac{q^{2k}}{[k]_q}$$

$$\equiv -2Q_p(2,q) - I_d(q) - (1-q)\left(\frac{p-(-1)^d}{2} + \frac{1+(-q)^{d+1}}{[2]_q}\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right) \quad (2.11)$$

ve

$$\sum_{k=1}^{p-d-1} (-1)^k \frac{q^{2k}}{[k]_q}$$

$$\equiv -2Q_p(2,q) - I_d(q) - (1-q)\left(\frac{p-3}{2} + \frac{1+(-q)^{-d}}{[2]_q}\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right) \qquad (2.12)$$

denklikleri vardır.

İspat. Birinci denkliğin ispatı için q-harmonik sayı tanımı kullanılarak

$$I_{p-d-1}(q) = I_{p-1}(q) - \sum_{k=1}^{d} \frac{(-1)^{p-k}}{[p-k]_q} = I_{p-1}(q) + \sum_{k=1}^{d} \frac{(-1)^k}{[p-k]_q}$$

yazılır. Eşitlik (1.1)'den $[p-k]_q = [p]_q - q^{p-k}[k]_q$ olup (1.2) denkliği kullanılarak $[p-k]_q \equiv -q^{-k}[k]_q\left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)$ elde edilir. Bu denklik yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$I_{p-d-1}(q) \equiv I_{p-1}(q) - \sum_{k=1}^{d} \frac{(-q)^k}{[k]_q}\left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)$$

denkliği elde edilir. Son olarak Denklik (1.5) ve Eşitlik (2.8) ile

$$I_{p-d-1}(q)$$

$$\equiv -2Q_p(2,q) - I_d(q) - \frac{(p-1)(1-q)}{2} - (1-q)\frac{(-1)^{d+1}+1}{2}$$

$$= -2Q_p(2,q) - I_d(q) - (1-q)\frac{p-(-1)^d}{2}\left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. İkinci denkliğin ispatı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}-\sum_{k=1}^{d}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}$$

eşitliğinden ve Eşitlik (2.9)'da sırasıyla $n=p-1$ ve $n=d$ alınırsa

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}=I_{p-1}(q)-(1-q)\left(\frac{(-1)^{p-1}-3}{2}+[p]_{-q}\right)-I_d(q)$$

$$+(1-q)\left(\frac{(-1)^d-3}{2}+[d+1]_{-q}\right)$$

$$=I_{p-1}(q)-I_d(q)-(1-q)\left([p]_{-q}-[d+1]_{-q}+\frac{1-(-1)^d}{2}\right)$$

eşitliği elde edilir. (1.1) eşitliği ve (1.2) denkliğinden

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}$$

$$=I_{p-1}(q)-I_d(q)-(1-q)\left(\frac{1-(-q)^p}{[2]_q}-\frac{1-(-q)^{d+1}}{[2]_q}+\frac{1-(-1)^d}{2}\right)$$

$$\equiv I_{p-1}(q)-I_d(q)-(1-q)\left(\frac{1+(-q)^{d+1}}{[2]_q}+\frac{1-(-1)^d}{2}\right)\left(\operatorname{mod}[p]_q\right)$$

olduğu görülür. Son olarak Denklik (1.5) ile istenen

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}$$

$$\equiv -2Q_p(2,q)-I_d(q)-(1-q)\left(\frac{1+(-q)^{d+1}}{[2]_q}+\frac{p-(-1)^d}{2}\right)\left(\operatorname{mod}[p]_q\right)$$

denkliği elde edilir. Benzer şekilde üçüncü denkliğin ispatı da Eşitlik (2.9) ile yapılır.

Lemma 2.5. p bir tek asal sayı olmak üzere $0\le d\le p-1$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\widetilde{H}_{p-d-1}(q) \equiv \widetilde{H}_{p-1}(q) + H_d(q)\left(\text{mod } [p]_q\right) \tag{2.13}$$

ve

$$H_{p-d-1}(q) \equiv H_{p-1}(q) + \widetilde{H}_d(q)\left(\text{mod } [p]_q\right) \tag{2.14}$$

denklikleri vardır.

İspat. q-Harmonik sayı tanımı ile

$$\widetilde{H}_{p-d-1}(q) = \widetilde{H}_{p-1} - \sum_{k=1}^{d} \frac{q^{p-k}}{[p-k]_q}$$

olduğu görülür. $[p-k]_q \equiv -q^{-k}[k]_q\left(\text{mod } [p]_q\right)$ denkliği yerine yazılırsa

$$\widetilde{H}_{p-d-1}(q) \equiv \widetilde{H}_{p-1} + \sum_{k=1}^{d} \frac{q^p}{[k]_q} \left(\text{mod } [p]_q\right)$$

elde edilir. Son olarak Denklik (1.2) ve q-harmonik sayı tanımı ile denklik gösterilmiş olur.

İkinci denklik benzer şekilde

$$H_{p-d-1}(q) = H_{p-1}(q) - \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{[p-k]_q}$$

eşitliği kullanılarak gösterilir.

Lemma 2.6. $p \geq 5$ bir asal sayı olsun. $0 < d \leq p-3$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \ \widetilde{H}_{p-k-1}(q) \equiv \frac{1}{[2]_q}\Big((-q)^{d+1}H_d(q) - 2Q_p(2,q) - I_d(q)$$

$$-\frac{1-q}{2}\left(p - (-1)^d + (p-1)(-q)^{d+1}\right)\Big)\left(\text{mod } [p]_q\right) \tag{2.15}$$

ve

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \ \widetilde{H}_{p-k+d-1}(q) \equiv -\frac{(-q)^d}{[2]_q}\Big(2Q_p(2,q) + I_d(q) - (-q)^{-d} \ \widetilde{H}_d(q)$$

$$+\frac{(q-1)^2(p-1)}{2}\Big)\big(\mathrm{mod}\ [p]_q\big) \tag{2.16}$$

denklikleri vardır.

İspat. İlk denkliğin ispatı için toplam ötelenerek

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \ \widetilde{H}_{p-k-1}(q) = q^{p-1} \sum_{k=1}^{p-d-2} (-q)^{-k} \ \widetilde{H}_k(q)$$

eşitliği elde edilir. q-Harmonik sayı tanımından

$$q^{p-1} \sum_{k=1}^{p-d-2} (-q)^{-k} \ \widetilde{H}_k(q) = q^{p-1} \sum_{k=1}^{p-d-2} (-q)^{-k} \sum_{i=1}^{k} \frac{q^i}{[i]_q}$$

olup toplamlar yer değiştirilerek

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \ \widetilde{H}_{p-k-1}(q) = q^{p-1} \sum_{i=1}^{p-d-2} \frac{q^i}{[i]_q} \sum_{k=i}^{p-d-2} (-q)^{-k}$$

$$= q^{p-1} \sum_{i=1}^{p-d-2} \frac{q^i}{[i]_q} \left(\sum_{k=0}^{p-d-2} (-q)^{-k} - \sum_{k=0}^{i-1} (-q)^{-k} \right)$$

elde edilir. Burada Formül (1.7) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \ \widetilde{H}_{p-k-1}(q) = \frac{q^p}{[2]_q} \sum_{i=1}^{p-d-2} \frac{q^i}{[i]_q} \big((-q)^{-i} - (-q)^{-p+d+1}\big)$$

$$= \frac{q^p}{[2]_q} \left(\sum_{i=1}^{p-d-2} \frac{(-1)^i}{[i]_q} - (-q)^{-p+d+1} \sum_{i=1}^{p-d-2} \frac{q^i}{[i]_q} \right)$$

elde edilir. Alterne q-Harmonik sayı ve q-harmonik sayı tanımından

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \ \widetilde{H}_{p-k-1}(q) = \frac{q^p}{[2]_q}\Big(I_{p-d-2}(q) - (-q)^{-p+d+1} \ \widetilde{H}_{p-d-2}(q)\Big),$$

$$I_{p-d-2}(q) = I_{p-d-1}(q) - \frac{(-1)^{p-d-1}}{[p-d-1]_q}$$

ve

$$\widetilde{H}_{p-d-2}(q) = \widetilde{H}_{p-d-1}(q) - \frac{q^{p-d-1}}{[p-d-1]_q}$$

olduğu görülür. O halde

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \ \widetilde{H}_{p-k-1}(q) = \frac{q^p}{[2]_q}\Big(I_{p-d-1}(q) - (-q)^{-p+d+1} \ \widetilde{H}_{p-d-1}(q)$$

$$- \frac{(-1)^{p-d-1}}{[p-d-1]_q} + (-q)^{-p+d+1} \frac{q^{p-d-1}}{[p-d-1]_q}\Big)$$

olup Denklik (1.7)'den

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \ \widetilde{H}_{p-k-1}(q) \equiv \frac{1}{[2]_q}\Big(I_{p-d-1}(q) + (-q)^{d+1} \ \widetilde{H}_{p-d-1}(q)\Big) \big(\mathrm{mod}\ [p]_q\big)$$

elde edilir. Şimdi Denklik (2.10) ve (2.13) kullanılırsa

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \ \widetilde{H}_{p-k-1}(q) \equiv \frac{1}{1+q}\Big(-2Q_p(2,q) - I_d(q) + (-q)^{d+1} H_d(q)$$

$$-(1-q)\frac{p-(-1)^d}{2} + (-q)^{d+1} \ \widetilde{H}_{p-1}(q)\Big) \big(\mathrm{mod}\ [p]_q\big)$$

denkliği elde edilir. Son olarak Denklik (1.4)'den

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \ \widetilde{H}_{p-k-1}(q) \equiv \frac{1}{[2]_q}\Big(-2Q_p(2,q) - I_d(q) + (-q)^{d+1} H_d(q)$$

$$-(1-q)\frac{p-(-1)^d}{2}+(-q)^{d+1}\frac{(p-1)}{2}(q-1)\Big)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)$$

denkliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Benzer şekilde

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\ \widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)=q^{p+d-1}(-1)^d\sum_{k=d}^{p-2}(-q)^{-k}\ \widetilde{H}_k(q)$$

eşitliği kullanılarak ve benzer işlemler yapılarak ikinci denklik elde edilir.

Lemma 2.7. $p\geq 5$ bir asal sayı olsun. $0<d\leq p-3$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}q^k[k]_q\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)$$

$$\equiv\frac{q^d}{1-q}\left(\frac{1}{q-1}\left(\frac{q^{1-d}+q^d}{[2]_q}\widetilde{H}_d(q)-H_d-q^d\frac{2q-1-q^{-d}}{[2]_q}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{p-1}{2}\left(q\left(1-q^d\right)+1+q^d\right)-\frac{q^d}{[2]_q}(d-p)\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)\tag{2.17}$$

ve

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}q^k[k]_q\widetilde{H}_{p-k-1}(q)\equiv\frac{1}{1-q}\left(\frac{1}{q-1}\left(\ \widetilde{H}_d(q)-\frac{1+q^{d+1}\left(1-q^{d+1}+q\right)}{[2]_q}H_d\right)\right.$$

$$-\frac{1}{[2]_q}\left(\frac{p-1}{2}\left(1+q^{d+1}\right)\left(q(1-q)[d]_q+2\right)\right.$$

$$\left.\left.+q[d]_q-p+d+2\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)\tag{2.18}$$

denklikleri vardır.

İspat. İlk denkliğin ispatı için (1.1) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k[k]_q\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)$$

$$=\frac{1}{1-q}\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k(1-q^k)\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)$$

$$=\frac{1}{1-q}\left(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)-\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k}\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)\right)$$

elde edilir. Burada toplamlar ötelenirse

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k[k]_q\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)$$

$$=\frac{q^{p+d-1}}{1-q}\left(\sum_{k=d}^{p-2} q^{-k}\widetilde{H}_k(q)-q^{p+d-1}\sum_{k=d}^{p-2} q^{-2k}\widetilde{H}_k(q)\right)$$

$$=\frac{q^{p+d-1}}{1-q}\left(\sum_{k=1}^{p-2} q^{-k}\widetilde{H}_k(q)-\sum_{k=1}^{d-1} q^{-k}\widetilde{H}_k(q)\right.$$

$$\left.-q^{p+d-1}\left(\sum_{k=1}^{p-2} q^{-2k}\widetilde{H}_k(q)-\sum_{k=1}^{d-1} q^{-2k}\widetilde{H}_k(q)\right)\right)$$

olup (2.4), (2.6) ve (2.7) eşitliklerinden

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k[k]_q\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)$$

$$\equiv\frac{q^{p+d-1}}{1-q}\left(\frac{q}{q-1}\left(H_{p-2}(q)-q^{1-p}\widetilde{H}_{p-2}(q)-H_{d-1}(q)+q^{-d}\widetilde{H}_{d-1}(q)\right)\right.$$

$$-\frac{q^{p+d+1}}{q+1}\left([2p-2]_q q^{2-2p}\widetilde{H}_{p-2}(q)-q^{2-p}[p-2]_q-[2d]_q q^{-2d}\widetilde{H}_{d-1}(q)\right.$$

$$+q^{1-d}[d-1]_q - p + d + 1\Big)\Big) \left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)$$

elde edilir. q-harmonik sayı tanımı gereği $\widetilde{H}_{p-2}(q) = \widetilde{H}_{p-1}(q) - \frac{q^{p-1}}{[p-1]_q}$ ve $H_{p-2}(q) = H_{p-1}(q) - \frac{1}{[p-1]_q}$ olduğundan

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k [k]_q \widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)$$

$$\equiv \frac{q^{p+d-1}}{1-q}\left(\frac{q}{q-1}\left(H_{p-1}(q) - q^{1-p}\widetilde{H}_{p-1}(q) - H_{d-1}(q) + q^{-d}\widetilde{H}_{d-1}(q)\right)\right.$$

$$-\frac{q^{p+d+1}}{[2]_q}\Big([2p-2]_q q^{2-2p}\widetilde{H}_{p-1}(q) - q^{2-p}[p-2]_q - [2d]_q q^{-2d}\widetilde{H}_{d-1}(q)$$

$$+q^{1-d}[d-1]_q + q^{1-p} - p + d\Big)\Big) \left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)$$

denkliği elde edilir. Benzer şekilde $\widetilde{H}_{d-1}(q) = \widetilde{H}_d(q) - \frac{q^d}{[d]_q}$ ve $H_{d-1}(q) = H_d(q) - \frac{1}{[d]_q}$

eşitlikleri kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k [k]_q \widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)$$

$$\equiv \frac{q^{p+d-1}}{1-q}\left(\frac{q}{q-1}\left(H_{p-1}(q) - q^{1-p}\widetilde{H}_{p-1}(q) - H_d(q) + q^{-d}\widetilde{H}_d(q)\right)\right.$$

$$-\frac{q^{p+d+1}}{[2]_q}\Big([2p-2]_q q^{2-2p}\widetilde{H}_{p-1}(q) - q^{2-p}[p-2]_q - [2d]_q q^{-2d}\widetilde{H}_d(q)$$

$$+\frac{[2d]_q q^{-d}}{[d]_q} + q^{1-d}[d-1]_q + q^{1-p} - p + d\Big)\Big) \left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)$$

yazılır. Böylece Eşitlik (1.1) ve Denklik (1.2)'den

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k[k]_q\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q) \equiv \frac{q^d}{1-q}$$

$$\times\left(\frac{1}{q-1}\left(\frac{q^d+q^{1-d}}{[2]_q}\widetilde{H}_d(q) - H_d(q) + H_{p-1}(q) + \left(-q+q^{d+1}-q^d\right)\widetilde{H}_{p-1}(q)\right)\right.$$

$$\left.-\frac{q^d}{[2]_q}\left(2+d-p+q^{-d}+\frac{q^{1-d}-1}{1-q}\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)$$

olduğu görülür. Son olarak (1.3) ve (1.4) denklikleri kullanılarak istenilen denklik elde edilir. Diğer denkliğin ispatı da (1.1) kullanılarak ve toplamlar ötelenerek benzer şekildedir.

Lemma 2.8. p bir tek asal sayı olsun. $0 < d \leq p-2$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k}\frac{[k]_q}{[k-d]_q} \equiv q^{2d}[d]_q\left(H_d(q) - \frac{p-1+q\left(2-q(p-5)\right)}{2[2]_q}\right)$$

$$+q^d\left([d]_q - \frac{[d+2]_q}{[2]_q}\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right) \tag{2.19}$$

ve

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k\,[k]_q \equiv -\frac{1}{[2]_q}\left([p]_q + q[d]_q[d+1]_q\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right) \tag{2.20}$$

denklikleri vardır.

İspat. Birinci denkliğin ispatı için toplam ötelenerek

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k}\frac{[k]_q}{[k-d]_q} = q^{2d}\sum_{k=1}^{p-d-1} q^{2k}\frac{[k+d]_q}{[k]_q}$$

yazılır. (1.1)'den $[k+d]_q = [k]_q + q^k[d]_q$ olup

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k}\frac{[k]_q}{[k-d]_q}$$

$$= q^{2d}\sum_{k=1}^{p-d-1} q^{2k}\frac{[k]_q + q^k[d]_q}{[k]_q}$$

$$= q^{2d}\left(\sum_{k=1}^{p-d-1} q^{2k} + [d]_q \sum_{k=1}^{p-d-1}\frac{q^{3k}}{[k]_q}\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte Formül (1.7) ve Eşitlik (2.5) kullanılırsa

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k}\frac{[k]_q}{[k-d]_q} = q^{2d}\left(\frac{q^2-q^{2p-2d}}{1-q^2}\right.$$

$$\left.+[d]_q\left(\widetilde{H}_{p-d-1}(q) + (1-q)\left(2-[p-d]_q\frac{q\left(1+q^{p-d-1}\right)+2}{[2]_q}\right)\right)\right)$$

eşitliği elde edilir. Burada (2.13) ve

$[p-k]_q \equiv -q^{-k}[k]_q \left(\bmod\, [p]_q\right)$ denklikleri kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k}\frac{[k]_q}{[k-d]_q} \equiv q^{2d}\left(\frac{q^2-q^{2p-2d}}{1-q^2} + [d]_q\left(\widetilde{H}_{p-1}(q) + H_d(q)\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-q)\left(2+q^{-d}[d]_q\frac{q\left(1+q^{p-d-1}\right)+2}{[2]_q}\right)\right)\right)\left(\bmod\, [p]_q\right)$$

denkliği elde edilir. Ardından (1.1) ve Denklik (1.2)'den

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k}\frac{[k]_q}{[k-d]_q} \equiv q^{2d}\left(-q^{-2d}\frac{[2d+2]_q}{1+q} + [d]_q\left(\widetilde{H}_{p-1}(q) + H_d(q)\right.\right.$$

$$+(1-q)\left(2+q^{-d}[d]_q\frac{q\left(1+q^{-d-1}\right)+2}{q+1}\right)\Bigg)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)$$

olduğu görülür. Son olarak Denklik (1.4) kullanılarak istenen denklik elde edilir.

İkinci denkliğin ispatı için (1.1) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k\,[k]_q=\frac{1}{1-q}\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k\left(1-q^k\right)=\frac{1}{1-q}\left(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k-\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k}\right)$$

olduğu görülür. Burada Formül (1.7)'den

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k\,[k]_q=\frac{1}{1-q}\left(\frac{q^{d+1}-q^p}{1-q}+\frac{q^{2p}-q^{2d+2}}{1-q^2}\right)$$

eşitliği yazılır. Son olarak (1.1) eşitliği ve (1.2) denkliğinden istenen denklik elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.9. p bir tek asal sayı olmak üzere α pozitif tam sayısı için

$$[\alpha p]_q\equiv\alpha[p]_q\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)\tag{2.21}$$

denkliği vardır.

İspat. Eşitlik (1.1)'den

$$[\alpha p]_q=[p]_q\sum_{k=0}^{\alpha-1} q^{kp}$$

yazılabilir. Burada Denklik (1.9) ile

$$[\alpha p]_q\equiv[p]_q\sum_{k=0}^{\alpha-1} 1\ \left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.1. q-Genelleştirilmiş Catalan Sayılarını İçeren Denklikler

Şimdi q-genelleştirilmiş Catalan sayılarını içeren denklikleri veren ana teoremleri verelim.

Teorem 2.1. $p \geq 5$ bir asal sayı olsun. $0 \leq d \leq p-3$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(2p-d+k)} B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv 4(-1)^d q^{-\binom{d+1}{2}} \left(-[d+1]_q + [p]_q \left(q^d H_d(q) \frac{3q+1}{q-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\widetilde{H}_d \frac{q+3}{q-1} + (p-1)\frac{(q+1)(1+q^d)}{2} - (p+d)q^{d+1} + d + 3p - 1\right)\right) \left(\bmod\ [p]_q^2\right)$$

denkliği vardır.

İspat. Eşitlik (1.6)'dan

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(2p-d+k)} B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q)$$

$$= \sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(2p-d+k)} \frac{[k]_q [k-d]_q}{[p]_q^2} \begin{bmatrix} 2p \\ p-k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2p \\ p+d-k \end{bmatrix}_q$$

olup

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(2p-d+k)} B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q)$$

$$= \frac{[2p]_q^2}{[p]_q^2} \sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(2p-d+k)} \frac{[k]_q [k-d]_q}{[p-k]_q [p-k+d]_q} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p+d-k-1 \end{bmatrix}_q$$

olur. Burada (1.1) gereği $[2p]_q = (1+q^p)[p]_q$ olduğundan

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(2p-d+k)} B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q)$$

$$= (1+q^p)^2 \sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(2p-d+k)} \frac{[k]_q [k-d]_q}{[p-k]_q [p-k+d]_q} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p+d-k-1 \end{bmatrix}_q$$

elde edilir. Denklik (1.10) ve (2.2) ile $0 \leq d \leq p-3$ için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(2p-d+k)} B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q) \equiv (-1)^d (1+q^p)^2 q^{p(3p+d-5)-\binom{d+1}{2}} \Bigg(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k$$

$$+[p]_q \left(\sum_{k=d+1}^{p-1} \frac{q^{2k}}{[k]_q} + q^{-d} \sum_{k=d+1}^{p-1} \frac{q^{2k}}{[k-d]_q} \right) - [2p]_q \Bigg(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k \widetilde{H}_{p-k-1}(q)$$

$$+ \sum_{k=d+1}^{p-1} q^k \widetilde{H}_{p-k+d-1}(q) \Bigg) \Bigg) \pmod{[p]_q^2}$$

olduğu görülür. Burada bazı toplamları ötelenerek

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(2p-d+k)} B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q) \equiv (-1)^d (1+q^p)^2 q^{p(3p+d-5)-\binom{d+1}{2}} \Bigg(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k$$

$$+[p]_q \left(\sum_{k=d+1}^{p-1} \frac{q^{2k}}{[k]_q} + q^d \sum_{k=1}^{p-d-1} \frac{q^{2k}}{[k]_q} \right)$$

$$-[2p]_q q^{p-1} \left(q^d \sum_{k=d}^{p-2} q^{-k} \widetilde{H}_k(q) + \sum_{k=1}^{p-d-2} q^{-k} \widetilde{H}_k(q) \right) \Bigg) \pmod{[p]_q^2}$$

olup Denklik (2.21)'den

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(2p-d+k)} B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q) \equiv (-1)^d (1+q^p)^2 q^{p(3p+d-5)-\binom{d+1}{2}} \Bigg(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k$$

$$+[p]_q\left(\sum_{k=d+1}^{p-1}\frac{q^{2k}}{[k]_q}+q^d\sum_{k=1}^{p-d-1}\frac{q^{2k}}{[k]_q}\right.$$

$$\left.\left.\left.-2q^{p-1}\left(q^d\sum_{k=d}^{p-2}q^{-k}\,\widetilde{H}_k(q)+\sum_{k=1}^{p-d-2}q^{-k}\,\widetilde{H}_k(q)\right)\right)\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)$$

elde edilir. Böylece Eşitlik (2.4), (2.6), Formül (1.7) ve Denklik (1.2) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}q^{k(2p-d+k)}B_{p,k}(q)B_{p,k-d}(q)\equiv(-1)^d(1+q^p)^2q^{p(3p+d-5)-\binom{d+1}{2}}\Big(-[d+1]_q$$

$$+[p]_q\left(\frac{q\left(1+2q^d\right)-1}{q-1}\widetilde{H}_{p-1}(q)+q^d\frac{3q-1}{q-1}\widetilde{H}_{p-d-1}(q)-\frac{q+1}{q-1}\widetilde{H}_d(q)-2q^{d+1}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2}{q-1}\left(q^d\left(H_{p-1}(q)-H_d(q)\right)+H_{p-d-1}(q)\right)+3\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)$$

denkliği elde edilir. Burada Denklik (2.14) kullanılıp bazı elementer işlemler yapılırsa

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}q^{k(2p-d+k)}B_{p,k}(q)B_{p,k-d}(q)\equiv(-1)^d(1+q^p)^2q^{p(3p+d-5)-\binom{d+1}{2}}\Big(-[d+1]_q$$

$$+[p]_q\left(\left(1+\frac{q^d(5q-1)}{q-1}\right)\widetilde{H}_{p-1}(q)-\frac{q+3}{q-1}\widetilde{H}_d(q)-\frac{2\left(q^d+1\right)}{q-1}H_{p-1}(q)\right.$$

$$\left.\left.+q^d\frac{3q+1}{q-1}H_d(q)+3-2q^{d+1}\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)$$

olduğu görülür. Ardından Denklik (1.3) ve (1.4) ile

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}q^{k(2p-d+k)}B_{p,k}(q)B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv(-1)^d(1+q^p)^2q^{p(3p+d-5)-\binom{d+1}{2}}\Big(-[d+1]_q$$

$$+[p]_q\left(q^d\frac{3q+1}{q-1}H_d(q)-\frac{q+3}{q-1}\widetilde{H}_d(q)\right.$$

$$\left.+\frac{p-1}{2}\left(q+1+q^d(5q+1)\right)+3-2q^{d+1}\right)\Big)\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)$$

denkliği elde edilir. Son olarak Denklik (1.1) kullanılarak istenen denklik elde edilir.

Teorem 2.2. $p \geq 5$ bir asal sayı olsun. $0 \leq d \leq p-3$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)}B_{p,k}(q)B_{p,k-d}(q) \equiv 4(-1)^d\frac{1-q}{[2]_q}q^{-\binom{d+1}{2}}\left(\frac{1-(-1)^d q^{d+1}}{1-q}\right.$$

$$+[p]_q\left(\left((-q)^d+1\right)\left(2Q_p(2,q)+I_d(q)\right)+\frac{2}{q-1}\left((-1)^d q^{d+1}H_d(q)-\widetilde{H}_d(q)\right)\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(2(d-1)+p(5+q)-(-q)^d(p(q+1)+q(2d+1)-1)\right.$$

$$\left.\left.\left.-(-1)^d(q-1)\right)\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)$$

denkliği vardır.

İspat. Eşitlik (1.6)’dan

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)}B_{p,k}(q)B_{p,k-d}(q)$$

$$=\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)}\frac{[k]_q[k-d]_q}{[p]_q^2}\begin{bmatrix}2p\\p-k\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}2p\\p+d-k\end{bmatrix}_q$$

olup

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)} B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q)$$

$$= \frac{[2p]_q^2}{[p]_q^2} \sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)} \frac{[k]_q [k-d]_q}{[p-k]_q [p-k+d]_q} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p+d-k-1 \end{bmatrix}_q$$

olur. Burada $[2p]_q = (1+q^p)[p]_q$ eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)} B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q) = (1+q^p)^2$$

$$\times \sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)} \frac{[k]_q [k-d]_q}{[p-k]_q [p-k+d]_q} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p+d-k-1 \end{bmatrix}_q$$

elde edilir. Ardından Denklik (1.10) ve (2.2) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)} B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv (-1)^d (1+q^p)^2 q^{p(3p+d-5)-\binom{d+1}{2}} \left(\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k + [p]_q \left(\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^k \frac{q^{2k}}{[k]_q} \right.\right.$$

$$\left. + q^{-d} \sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^k \frac{q^{2k}}{[k-d]_q} \right) - [2p]_q \left(\sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \widetilde{H}_{p-k-1}(q) \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=d+1}^{p-1} (-q)^k \widetilde{H}_{p-k+d-1}(q) \right) \right) \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2 \right)$$

olduğu görülür. Burada bazı toplamları ötelenerek

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)} B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv (-1)^d(1+q^p)^2 q^{p(3p+d-5)-\binom{d+1}{2}}\left(\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\right.$$

$$+[p]_q\left(\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}+(-q)^d\sum_{k=1}^{p-d-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}\right)$$

$$\left.-[2p]_q\left(\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k-1}(q)+\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

olup Denklik (2.21) ile

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)}B_{p,k}(q)B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv (-1)^d(1+q^p)^2 q^{p(3p+d-5)-\binom{d+1}{2}}\left(\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\right.$$

$$+[p]_q\left(\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}+(-q)^d\sum_{k=1}^{p-d-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}-2\left(\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k-1}(q)\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)\right)\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

elde edilir. Denklik (2.11) ve (2.12) ile

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)}B_{p,k}(q)B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv (-1)^d(1+q^p)^2 q^{p(3p+d-5)-\binom{d+1}{2}}\left(\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\right.$$

$$+[p]_q\left(-\left(1+(-q)^d\right)\left(2Q_p(2,q)+I_d(q)\right)-(1-q)\left(\frac{p-(-1)^d}{2}+(-q)^d\frac{p-3}{2}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2+(-q)^d(1-q)}{[2]_q}\right)-2\left(\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\,\widetilde{H}_{p-k-1}(q)\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\,\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)\right)\right)\right)\left(\text{mod } [p]_q^2\right)$$

olduğu görülür. Burada Formül (1.7), Denklik (2.15) ve Denklik (2.16) yardımıyla

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{k(2p-d+k)}B_{p,k}(q)B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv 4(-1)^d\frac{q-1}{[2]_q}q^{p(3p+d-5)-\binom{d+1}{2}}\left(\frac{1+(-q)^{d+1}}{1-q}\right.$$

$$+[p]_q\left(-\left((-q)^d+1\right)\left(2Q_p(2,q)+I_d(q)\right)-\frac{2}{q-1}\left((-q)^{d+1}H_d(q)+\widetilde{H}_d(q)\right)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left((-q)^d(1-p-9q+5pq)+(1-q)\left((-1)^d-p\right)+6\right)\right)\right)\left(\text{mod } [p]_q^2\right)$$

denkliği elde edilir. Son olarak Denklik (1.9) kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 2.3. $p\geq 5$ bir asal sayı olsun. $0\leq d\leq p-3$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)}B_{p,k}(q)^2B_{p,k-d}(q)\equiv 8(-1)^{d+1}q^{9\binom{p}{2}-\binom{d}{2}+d(p-1)}\left(\frac{1+(-q)^{d+1}}{[2]_q}\right.$$

$$+[p]_q(1-q)\left(\frac{1}{1+q}\left(\frac{(-q)^d}{2}\left((p-1)(1-7q)-q-4\right)-\frac{3}{2}-3(-1)^d+\frac{1+qp}{q}\right.\right.$$

$$\left.+\left(2+(-q)^d\right)\left(I_d(q)+2Q_p(2,q)\right)\right)-\frac{1}{q}\left(1-2q(-1)^d\left(1+q^d\right)\right)$$

$$-\frac{2}{1-q^2}\left(\widetilde{H}_d(q)+2(-q)^{d+1}H_d(q)\right)\Bigg)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)$$

denkliği vardır.

İspat. Eşitlik (1.6)'dan

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} B_{p,k}(q)^2 B_{p,k-d}(q)$$

$$=\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} \frac{{[k]_q}^2[k-d]_q}{[p]_q^3}{\begin{bmatrix}2p\\p-k\end{bmatrix}_q}^2\begin{bmatrix}2p\\p+d-k\end{bmatrix}_q$$

$$=\frac{[2p]_q^3}{[p]_q^3}\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} \frac{[k]_q^2[k-d]_q}{[p-k]_q^2[p-k+d]_q}{\begin{bmatrix}2p-1\\p-k-1\end{bmatrix}_q}^2\begin{bmatrix}2p-1\\p+d-k-1\end{bmatrix}_q$$

olup, $[2p]_q=(1+q^p)[p]_q$ eşitliğinden

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} B_{p,k}(q)^2 B_{p,k-d}(q)=(1-q)^3\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)}$$

$$\times\frac{[k]_q^2[k-d]_q}{[p-k]_q^2[p-k+d]_q}{\begin{bmatrix}2p-1\\p-k-1\end{bmatrix}_q}^2\begin{bmatrix}2p-1\\p+d-k-1\end{bmatrix}_q$$

olduğu görülür. Burada Denklik (2.1) ve (2.2) kullanılırsa

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} B_{p,k}(q)^2 B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv(-1)^{d+1}(1+q^p)^3 q^{9\binom{p}{2}-\binom{d}{2}+d(p-1)}\Bigg(q^{-3p}\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k$$

$$+[p]_q\left(q^{-d}\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k-d]_q}+2\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}\right)$$

$$-[2p]_q\left(\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)+2\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k-1}(q)\right)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ \ [p]_q^2\right)$$

denkliği elde edilir. Burada bazı toplamlar ötelenerek ve Denklik (2.21) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)}B_{p,k}(q)^2B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv(-1)^{d+1}(1+q^p)^3q^{9\binom{p}{2}-\binom{d}{2}+d(p-1)}\Bigg(q^{-3p}\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k$$

$$+[p]_q\left((-q)^d\sum_{k=1}^{p-d-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}+2\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}-2\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)\right.$$

$$\left.-4\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k-1}(q)\right)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

elde edilir. Formül (1.7), Denklik (2.12), (2.13), (2.15) ve (2.16) ile

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)}B_{p,k}(q)^2B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv(-1)^{d+1}(1+q^p)^3q^{9\binom{p}{2}-\binom{d}{2}+d(p-1)}\Bigg(q^{-3p}\frac{q^p+(-q)^{d+1}}{q+1}$$

$$+[p]_q\left((1-q)\left(\frac{q}{q+1}\left((-q)^d\left(1-\frac{2}{q}\right)+\frac{1}{q^2}-2\right)+q^d-\frac{(-1)^d(q+3)-q+1}{q+1}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2+(-q)^d}{q+1}\big(I_d(q)+2Q_p(2,q)\big)+\frac{p-1}{2(q+1)}\big((-q)^d(1-7q)-2(q-1)\big)\right)$$

$$+\frac{q^{2d+1}-q^{-1}}{[d+1]_q}-2\left(q^{2d}-1\right)\frac{(-1)^d}{[d+1]_q}$$

$$-\frac{2}{q+1}\left(\widetilde{H}_d(q)-2q(-q)^d H_d(q)\right)\Bigg)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

denkliği elde edilir. Son olarak Denklik (1.9) kullanılarak istenen denklik gösterilmiş olur.

Teorem 2.4. $p \geq 5$ bir asal sayı olsun. $0 \leq d \leq p-3$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} B_{p,k}(q)^2 B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv 8(-1)^d q^{-\binom{d+1}{2}}\Bigg([d+1]_q-[p]_q\Bigg(-2\frac{q+2}{q-1}\widetilde{H}_d(q)+\frac{11}{2}p+q(p-1)+d-3$$

$$+q^d\left(\frac{5q+1}{q-1}H_d(q)+\frac{1}{2}(p-q-1)-q(d+p)\right)\Bigg)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

denkliği vardır.

İspat. Eşitlik (1.6)‘dan

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} B_{p,k}(q)^2 B_{p,k-d}(q)$$

$$=\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)}\frac{[k]_q^2[k-d]_q}{[p]_q^3}\begin{bmatrix}2p\\p-k\end{bmatrix}_q^2\begin{bmatrix}2p\\p+d-k\end{bmatrix}_q$$

$$=\frac{[2p]_q^3}{[p]_q^3}\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)}\frac{[k]_q^2[k-d]_q}{[p-k]_q^2[p-k+d]_q}$$

$$\times \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q^2 \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p+d-k-1 \end{bmatrix}_q$$

olup, $[2p]_q = (1+q^p)[p]_q$ eşitliğinden

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^k q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} B_{p,k}(q)^2 B_{p,k-d}(q) = (1+q^p)^3$$

$$\times \sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^k q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} \frac{[k]_q^2[k-d]_q}{[p-k]_q^2[p-k+d]_q} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q^2 \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p+d-k-1 \end{bmatrix}_q$$

olduğu görülür. Denklik (2.1) ve (2.2) kullanılarak $0 \leq d \leq p-3$ için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^k q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} B_{p,k}(q)^2 B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv (-1)^{d+1}(1+q^p)^3 q^{9\binom{p}{2}-\binom{d}{2}+d(p-1)} \left(q^{-3p} \sum_{k=d+1}^{p-1} q^k \right.$$

$$+[p]_q \left(q^{-d} \sum_{k=d+1}^{p-1} \frac{q^{2k}}{[k-d]_q} + 2 \sum_{k=d+1}^{p-1} \frac{q^{2k}}{[k]_q} \right)$$

$$\left. -[2p]_q \left(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k \widetilde{H}_{p-k+d-1}(q) + 2 \sum_{k=d+1}^{p-1} q^k \widetilde{H}_{p-k-1}(q) \right) \right) \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2 \right)$$

denkliği elde edilir. Burada bazı toplamlar ötelenerek ve Denklik (2.21) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^k q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} B_{p,k}(q)^2 B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv (-1)^{d+1}(1+q^p)^3 q^{9\binom{p}{2}-\binom{d}{2}+d(p-1)} \left(q^{-3p} \sum_{k=d+1}^{p-1} q^k + [p]_q \left(q^d \sum_{k=1}^{p-d-1} \frac{q^{2k}}{[k]_q} \right.\right.$$

$$+2\sum_{k=d+1}^{p-1}\frac{q^{2k}}{[k]_q}-2q^{p-1}\left(\sum_{k=d}^{p-2}q^{-k}\widetilde{H}_k(q)+2\sum_{k=1}^{p-d-2}q^{-k}\widetilde{H}_k(q)\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

elde edilir. Bazı elementer işlemler ve Eşitlik (2.4) ve (2.6) ile

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)}B_{p,k}(q)^2 B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv(-1)^{d+1}(1+q^p)^3 q^{9\binom{p}{2}-\binom{d}{2}+d(p-1)}\Bigg(q^{-3p}\sum_{k=d+1}^{p-1}q^k+[p]_q\Bigg(q^d\frac{5q-1}{q-1}\widetilde{H}_{p-d-1}(q)$$

$$+2\left(\left(1+\frac{q^{d+1}}{q-1}\right)\widetilde{H}_{p-1}(q)-\left(1+\frac{q^p}{q-1}\right)\widetilde{H}_d(q)\right)$$

$$-q(1-q)\left(q^d[p-d-1]_q+2\left([p-1]_q-[d]_q\right)\right)$$

$$-2\frac{q^{p+d}}{q-1}\left(2q^{-d}H_{p-d-1}(q)+H_{p-1}(q)-H_d(q)\right)\Bigg)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

denkliği elde edilir. Burada Denklik (1.2), (2.13), (2.14) ve yardımıyla

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)}B_{p,k}(q)^2 B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv(-1)^{d+1}(1+q^p)^3 q^{9\binom{p}{2}-\binom{d}{2}+d(p-1)}\Bigg(q^{-3p}\sum_{k=d+1}^{p-1}q^k+[p]_q\Bigg(-2\frac{q^d+2}{q-1}H_{p-1}(q)$$

$$+\left(\frac{q^d(7q-1)}{q-1}+2\right)\widetilde{H}_{p-1}(q)+\frac{q^d(5q+1)}{q-1}H_d(q)-\frac{q+2}{q-1}\widetilde{H}_d(q)$$

$$-q(1-q)\left(q^d[p-d-1]_q+2\left([p-1]_q-[d]_q\right)\right)\Bigg)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

olduğu görülür. Formül (1.7) ve $[p-k]_q \equiv -q^{-k}[k]_q \left(\mathrm{mod}\ [p]_q\right)$ denkliğinden

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^k q^{3\binom{k}{2}-k(d-3p-1)} B_{p,k}(q)^2 B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv (-1)^{d+1}(1+q^p)^3 q^{9\binom{p}{2}-\binom{d}{2}+d(p-1)}\Big(q^{-3p}[d+1]_q$$

$$+[p]_q\left(-2\frac{q^d+2}{q-1}H_{p-1}(q)+\left(\frac{q^d(7q-1)}{q-1}+2\right)\widetilde{H}_{p-1}(q)+\frac{q^d(5q+1)}{q-1}H_d(q)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{q+2}{q-1}\widetilde{H}_d(q)-3q^{d+1}\ +4\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

olup Denklik (1.3), (1.4) ve (1.9) kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 2.5. $p \geq 5$ bir asal sayı olsun. $0 \leq d \leq p-3$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(k+2p-d)}[k]_q B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q) \equiv 4q^{-\binom{d+1}{2}}\frac{(-1)^d}{[2]_q}\Big(-q[d+1]_q[d]_q$$

$$+[p]_q\left(\frac{q^d}{1-q}\left(\frac{p+1-q^3(p-1)+q(1-q)(2p-4)}{1-q}+q^2\left(p+q^d\right)\right)\right.$$

$$+2\frac{q^{2d}}{1-q}\left(\frac{(1-q)^2}{2}(p-1)+\frac{2q-1}{q-1}+d-p\right)+\frac{2d-p(1-q)}{1-q}$$

$$+[d+1]_q\left(\left(1+q^{d+1}\right)(p-1)+2\frac{q}{1-q}\right)$$

$$+[d]_q\left(-q^d\frac{p-1+q(2+q(5p-3+2d))}{2}\right.$$

$$\left.+q(3p-3+d)+1\right)-\frac{q^d\left(q^d(1-3q^2)+1+4q+3q^2\right)+2}{(1-q)^2}H_d(q)$$

$$-2\left(\frac{1+q^d}{1-q}[d]_q - 2\frac{1+q}{(1-q)^2}\right)\widetilde{H}_d(q)\Bigg)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

denkliği vardır.

İspat. Eşitlik (1.6) ile

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(k+2p-d)}[k]_q B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q)$$

$$= \sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(k+2p-d)} \frac{[k]_q^2[k-d]_q}{[p]_q^2} \begin{bmatrix} 2p \\ p-k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2p \\ p+d-k \end{bmatrix}_q$$

$$= \frac{[2p]_q^2}{[p]_q^2} \sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(k+2p-d)} \frac{[k]_q^2[k-d]_q}{[p-k]_q[p-k+d]_q} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p+d-k-1 \end{bmatrix}_q$$

olup $[2p]_q = (1+q^p)[p]_q$ eşitliğinden

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(k+2p-d)}[k]_q B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q)$$

$$= (1+q^p)^2 \sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(k+2p-d)} \frac{[k]_q^2[k-d]_q}{[p-k]_q[p-k+d]_q} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p+d-k-1 \end{bmatrix}_q$$

yazılır. Ardından Denklik (1.10) ve (2.2) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(k+2p-d)}[k]_q B_{p,k}(q) B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv (-1)^d (1+q^p)^2 q^{p(3p-3+d)-\binom{d+1}{2}} \Bigg(q^{-2p} \sum_{k=d+1}^{p-1} q^k [k]_q$$

$$+[p]_q \left(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k} + q^{-d} \sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k} \frac{[k]_q}{[k-d]_q} \right)$$

$$-[2p]_q\left(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k[k]_q\,\breve{H}_{p-k-1}(q)+\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k[k]_q\,\breve{H}_{p-k+d-1}(q)\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

denkliği elde edilir. Burada Denklik (2.21) kullanılarak denklik

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(k+2p-d)}[k]_q B_{p,k}(q)B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv(-1)^d(1+q^p)^2 q^{p(3p-3+d)-\binom{d+1}{2}}\Bigg(q^{-2p}\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k[k]_q$$

$$+[p]_q\Bigg(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k}+q^{-d}\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{2k}\frac{[k]_q}{[k-d]_q}$$

$$-2\left(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k[k]_q\,\breve{H}_{p-k-1}(q)+\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k[k]_q\,\breve{H}_{p-k+d-1}(q)\right)\Bigg)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

şeklinde yazılabilir. Daha sonra Formül (1.7), Denklik (1.9), (2.19) ve (2.20) kullanılırsa

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} q^{k(k+2p-d)}[k]_q B_{p,k}(q)B_{p,k-d}(q)$$

$$\equiv(-1)^d(1+q^p)^2 q^{p(3p-3+d)-\binom{d+1}{2}}\Bigg(-\frac{q}{[2]_q}[d]_q\,[d+1]_q$$

$$+[p]_q\Bigg(\frac{q^{-d}-q^{d+1}\left(2+3q-q^{d+1}\right)+q+2}{q^2-1}+q^d[d]_q\Bigg(\frac{q-1}{2}(p-1)+H_d(q)$$

$$+\frac{1+q^{d+1}\left(1-q^d-2q^{d+1}\right)+q^d}{q^{2d}[2]_q}\Bigg)$$

$$-2\left(\sum_{k=d+1}^{p-1} q^k[k]_q \breve{H}_{p-k-1}(q) + \sum_{k=d+1}^{p-1} q^k[k]_q \breve{H}_{p-k+d-1}(q)\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg) \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

elde edilir. Son adımda ise Denklik (2.17) ve (2.18) kullanılarak istenen denklik bulunur.

Teorem 2.1 ve Teorem 2.3'un bir genellemesi aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.6. $p \geq 5$ bir asal sayı ve $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. $0 \leq d \leq p-3$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}} B_{p,k}(q)^n B_{p,k-d}(q)^m$$

$$\equiv (-1)^{m(d+1)+n} 2^{m+n} q^{-m\binom{d+1}{2}} \Big([d+1]_q$$

$$+[p]_q\left(m\left(d-1+\frac{3}{2}p\right)+n\left(\frac{1}{2}(q(p-1)-3)+2p\right)+1-\frac{2m+n(q+1)}{q-1}\widetilde{H}_d(q)\right.$$

$$\left.+q^d\left(\frac{1}{2}(m(p-q-1)-pnq)-qmd+\frac{m(q+1)+2nq}{q-1}H_d(q)\right)\right)\Big) \left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

denkliği vardır.

İspat. İlk olarak (1.6) kullanılırsa

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}} B_{p,k}(q)^n B_{p,k-d}(q)^m$$

$$= \sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}} \frac{[k]_q^n [k-d]_q^m}{[p]_q^{m+n}}$$

$$\times \begin{bmatrix} 2p \\ p-k \end{bmatrix}_q^n \begin{bmatrix} 2p \\ p-k+d \end{bmatrix}_q^m$$

$$= \frac{[2p]_q^{m+n}}{[p]_q^{m+n}} \sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}}$$

$$\times \frac{[k]_q^n [k-d]_q^m}{[p-k+d]_q^m [p-k]_q^n} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q^n \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k+d-1 \end{bmatrix}_q^m$$

olup, $[2p]_q = (1+q^p)[p]_q$ eşitliğinden

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}} B_{p,k}(q)^n B_{p,k-d}(q)^m$$

$$= (1+q^p)^{m+n} \sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}}$$

$$\times \frac{[k]_q^n [k-d]_q^m}{[p-k+d]_q^m [p-k]_q^n} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q^n \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k+d-1 \end{bmatrix}_q^m$$

olduğu görülür. Ardından Denklik (2.1) ve (2.2) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}} B_{p,k}(q)^n B_{p,k-d}(q)^m$$

$$\equiv (1+q^p)^{m+n} (-1)^{m(d+1)+n} q^{3(m+n)\binom{p}{2}-m\left(\binom{d+1}{2}-dp\right)} \left(q^{-p(m+n)} \sum_{k=d+1}^{p-1} q^k \right.$$

$$-[2p]_q \left(n \sum_{k=d+1}^{p-1} q^k \widetilde{H}_{p-k-1}(q) + m \sum_{k=d+1}^{p-1} q^k \widetilde{H}_{p-k+d-1}(q) \right)$$

$$\left. +[p]_q \left(mq^{-d} \sum_{k=d+1}^{p-1} \frac{q^{2k}}{[k-d]_q} + n \sum_{k=d+1}^{p-1} \frac{q^{2k}}{[k]_q} \right) \right) \pmod{[p]_q^2}$$

denkliği elde edilir. Burada Denklik (2.21) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^{k(m+n)}q^{-k\left(dm-1-(p-1)(m+n)\right)+(m+n)\binom{k+1}{2}}B_{p,k}(q)^{n}B_{p,k-d}(q)^{m}$$

$$\equiv (1+q^{p})^{m+n}(-1)^{m(d+1)+n}q^{3(m+n)\binom{p}{2}-m\left(\binom{d+1}{2}-dp\right)}\left(q^{-p(m+n)}\sum_{k=d+1}^{p-1}q^{k}\right.$$

$$+[p]_q\left(mq^{-d}\sum_{k=d+1}^{p-1}\frac{q^{2k}}{[k-d]_q}+n\sum_{k=d+1}^{p-1}\frac{q^{2k}}{[k]_q}\right.$$

$$\left.\left.-2\left(n\sum_{k=d+1}^{p-1}q^{k}\,\widetilde{H}_{p-k-1}(q)+m\sum_{k=d+1}^{p-1}q^{k}\,\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)\right)\right)\right)\left(\bmod\ [p]_q^{2}\right)$$

yazılır. Daha sonra toplamlar ötelenerek Formül (1.7), Eşitlik (2.4), (2,6) ve Denklik (1.2) kullanılırsa

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^{k(m+n)}q^{-k\left(dm-1-(p-1)(m+n)\right)+(m+n)\binom{k+1}{2}}B_{p,k}(q)^{n}B_{p,k-d}(q)^{m}$$

$$\equiv (1+q^{p})^{m+n}(-1)^{m(d+1)+n}q^{3(m+n)\binom{p}{2}-m\left(\binom{d+1}{2}-dp\right)}\left(-q^{-p(m+n)}[d+1]_q\right.$$

$$+[p]_q\left(q^{d}\left(m+\frac{2nq}{q-1}\right)\widetilde{H}_{p-d-1}(q)+\left(n+\frac{2mq^{d+1}}{q-1}\right)\widetilde{H}_{p-1}(q)\right.$$

$$-\left(n+\frac{2m}{q-1}\right)\widetilde{H}_{d}(q)$$

$$+1-2\left(\frac{mq^{d}}{q-1}\left(H_{p-1}(q)-H_{d}(q)\right)+\frac{n}{q-1}H_{p-d-1}(q)\right)$$

$$\left.\left.+(m+n)\left(1-q^{d+1}\right)\right)\right)\left(\bmod\ [p]_q^{2}\right)$$

elde edilir. Burada Denklik (2.13) ve (2.14) yardımıyla

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^{k(m+n)}q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}}B_{p,k}(q)^n B_{p,k-d}(q)^m$$

$$\equiv (1+q^p)^{m+n}(-1)^{m(d+1)+n}q^{3(m+n)\binom{p}{2}-m\left(\binom{d+1}{2}-dp\right)}\Big(-q^{-p(m+n)}[d+1]_q$$

$$+[p]_q\Bigg(\left(n+\frac{q^d}{q-1}(q(3m+2n)-m)\right)\widetilde{H}_{p-1}(q)-\frac{2}{q-1}\left(n+mq^d\right)H_{p-1}(q)$$

$$+\frac{q^d}{q-1}(m(q+1)+2nq)H_d(q)-\left(n+\frac{2}{q-1}(m+n)\right)\widetilde{H}_d(q)$$

$$+(m+n)\left(1-q^{d+1}\right)+1\Bigg)\Big)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

yazılır. Son olarak Denklik (1.3), (1.4) ve (1.9) ile istenen denklik görülür.

Burada $m=n=1$ ve $m=1\,,n=2$ alınarak sırasıyla Teorem 2.1 ve Teorem 2.3 açıkça görülür. Şimdi Teorem 2.2 ve Teorem 2.4'un bir genellemesi verilsin.

Teorem 2.7. $p \geq 5$ bir asal sayı ve $m,n \in \mathbb{N}$ olsun. $0 \leq d \leq p-3$ olacak şekildeki d tam sayısı için

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^{k(m+n+1)}q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}}B_{p,k}(q)^n B_{p,k-d}(q)^m$$

$$\equiv (-1)^{m(d+1)+n}2^{m+n}q^{-m\binom{d+1}{2}}\frac{q-1}{[2]_q}\Bigg(\frac{1+(-q)^{d+1}}{q-1}$$

$$+[p]_q\Big(1-\left(2Q_p(2,q)+I_d(q)\right)\left(n+m(-q)^d\right)$$

$$+n\left(p\left(1+\frac{q}{2}\right)-1-\frac{1}{2}(-1)^d\left(q-1+pq^{d+1}\right)-2\frac{(-q)^{d+1}}{q-1}H_d(q)\right)$$

$$+m\left((-q)^d\left(\frac{1}{2}(1-q-p)-qd\right)-\frac{2}{q-1}\breve{H}_d(q)+q-\frac{1}{2}(2-3p)\right)\Big)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

denkliği vardır.

İspat. İlk adımda (1.6) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n+1)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}} B_{p,k}(q)^n B_{p,k-d}(q)^m$$

$$= \sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n+1)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}}$$

$$\times \frac{[k]_q^n [k-d]_q^m}{[p]_q^{m+n}} \begin{bmatrix} 2p \\ p-k \end{bmatrix}_q^n \begin{bmatrix} 2p \\ p-k+d \end{bmatrix}_q^m$$

$$= \frac{[2p]_q^{m+n}}{[p]_q^{m+n}} \sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n+1)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}}$$

$$\times \frac{[k]_q^n [k-d]_q^m}{[p-k+d]_q^m [p-k]_q^n} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q^n \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k+d-1 \end{bmatrix}_q^m$$

olup, $[2p]_q = (1+q^p)[p]_q$ eşitliğinden

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n+1)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}} B_{p,k}(q)^n B_{p,k-d}(q)^m$$

$$= (1+q^p)^{m+n} \sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n+1)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}}$$

$$\times \frac{[k]_q^n [k-d]_q^m}{[p-k+d]_q^m [p-k]_q^n} \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k-1 \end{bmatrix}_q^n \begin{bmatrix} 2p-1 \\ p-k+d-1 \end{bmatrix}_q^m$$

olduğu görülür. Ardından Denklik (2.1) ve (2.2) kullanılarak

$$\sum_{k=d+1}^{p-1} (-1)^{k(m+n+1)} q^{-k(dm-1-(p-1)(m+n))+(m+n)\binom{k+1}{2}} B_{p,k}(q)^n B_{p,k-d}(q)^m$$

$$\equiv (1+q^p)^{m+n}(-1)^{m(d+1)+n} q^{3(m+n)\binom{p}{2}-m\left(\binom{d+1}{2}-dp\right)}\Bigg(q^{-p(m+n)}\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k$$

$$-[2p]_q\left(n\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k-1}(q)+m\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)\right)$$

$$+[p]_q\left(mq^{-d}\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k-d]_q}+n\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}\right)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

denkliği elde edilir. Burada Denklik (2.21) ile

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^{k(m+n+1)}q^{-k\left(dm-1-(p-1)(m+n)\right)+(m+n)\binom{k+1}{2}}B_{p,k}(q)^nB_{p,k-d}(q)^m$$

$$\equiv (1+q^p)^{m+n}(-1)^{m(d+1)+n} q^{3(m+n)\binom{p}{2}-m\left(\binom{d+1}{2}-dp\right)}\Bigg(q^{-p(m+n)}\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k$$

$$+[p]_q\Bigg(mq^{-d}\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k-d]_q}+n\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}$$

$$-2\left(n\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k-1}(q)+m\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)\right)\Bigg)\Bigg)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

yazılır. Burada ikinci toplam ötelenirse

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^{k(m+n+1)}q^{-k\left(dm-1-(p-1)(m+n)\right)+(m+n)\binom{k+1}{2}}B_{p,k}(q)^nB_{p,k-d}(q)^m$$

$$\equiv (1+q^p)^{m+n}(-1)^{m(d+1)+n} q^{3(m+n)\binom{p}{2}-m\left(\binom{d+1}{2}-dp\right)}\Bigg(q^{-p(m+n)}\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k$$

$$+[p]_q\left(m(-q)^d\sum_{k=1}^{p-d-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}+n\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^k\frac{q^{2k}}{[k]_q}\right.$$

$$\left.\left.\left.-2\left(n\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k-1}(q)+m\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)\right)\right)\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

olduğu görülür. Ardından Denklik (2.11), (2.12) ve Formül (1.7) kullanılırsa

$$\sum_{k=d+1}^{p-1}(-1)^{k(m+n+1)}q^{-k\left(dm-1-(p-1)(m+n)\right)+(m+n)\binom{k+1}{2}}B_{p,k}(q)^nB_{p,k-d}(q)^m$$

$$\equiv(1+q^p)^{m+n}(-1)^{m(d+1)+n}q^{3(m+n)\binom{p}{2}-m\left(\binom{d+1}{2}-dp\right)}\left(q^{-p(m+n)}\frac{1+(-q)^{d+1}}{[2]_q}\right.$$

$$+[p]_q\left(-(1-q)\left(m(-q)^d\left(\frac{p-3}{2}+\frac{1+(-q)^{-d}}{q+1}\right)\right.\right.$$

$$+n\left(\frac{p-(-1)^d}{2}+\frac{1+(-q)^{d+1}}{[2]_q}\right)$$

$$\left.+\frac{1}{[2]_q}\right)-\left(2Q_p(2,q)+I_d(q)\right)\left(m(-q)^d+n\right)$$

$$\left.\left.\left.-2\left(n\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k-1}(q)+m\sum_{k=d+1}^{p-1}(-q)^k\widetilde{H}_{p-k+d-1}(q)\right)\right)\right)\right)\left(\mathrm{mod}\ [p]_q^2\right)$$

denkliği elde edilir. Son olarak Denklik (1.9), (2.15) ve (2.16) kullanılarak ispat tamamlanır.

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde q-harmonik sayılar ve q-genelleştirilmiş Catalan sayıları ile ilgili yapılan çalışmalar araştırılmış, bu sayıların oluşturduğu yeni toplamlar düşünülmüş ve bazı matematiksel yöntemler kullanılarak bu toplamlar ile ilgili çeşitli eşitlik ve denklikler elde edilmiştir. Örneğin, q-genelleştirilmiş Catalan sayılarının toplamı incelendikten sonra bu sayıların kuvvetleri alınarak elde edilen sonuç genelleştirilmiştir. Elde edilen bu sonuçların, yeni problemler düşünülerek yapılacak olan çalışmalara yardımcı olması amaçlanmıştır.

Bu çalışmada elde edilen denklikler $[p]_q^3$ modunda incelenebilir. Aynı zamanda bu tezde incelenen toplamlardan farklı olarak, q-genelleştirilmiş Catalan sayıları ile birlikte q-harmonik sayılar da kullanılarak yeni toplamlar ve denklikler incelenebilir ve onların genelleştirmeleri düşünülebilir.

KAYNAKLAR

[1] Abel N. H., Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots$ *J. Reine Angew.Math*., 1826, **1**, 311–339.

[2] Andrews G. E., q-analogs of the binomial coefficient congruences of Babbage, Wolstenholme and Glaisher, *Discrete Mathematics*, 1999, **204**, 15-25.

[3] Andrews G. E., q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra, *Amer. Math. Soc*., 1986.

[4] Furlinger J., Hofbauer J., q-Catalan numbers, *J. Combin. Theory Ser*., 1985, **A40**(2), 248–264.

[5] Shapiro L.W., A Catalan triangle, *Discrete Math*., 1976, **14**, 83-90.

[6] Guo V. J. W., Zeng J., Factors of binomial sums from the Catalan triangle, *J. Number Theory*, 2010, **130**, 172-186.

[7] Gutiérrez J. M., Hernández M. A., Miana P. J., Romero N., New identities in the Catalan triangle, *J. Math. Anal. Appl*., 2008, **341**(1), 52-61.

[8] Miana P. J., Romero N., Computer proofs of new identities in the Catalan triangle, *Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana. Proceedings of the "Segundas jornadas de Teoriá de Números"*, 2007, 1-7.

[9] Ömür N., Koparal S., Some congruences involving numbers $B_{p,k-d}$. *Utilitas Math.*, 2014, **95**, 307-317.

[10] Koparal S., Ömür N., On congruences involving the generalized Catalan numbers and harmonic numbers, *Bull. Korean. Soc*., 2019, **56**(3), 649-658.

[11] Pan H., Cao H. Q., A congruence involving products of q—binomial coefficients, *J. Number Theory*, 2006, **121**, 224–233.

[12] Pan H., A q-analogue of Lehmer’s congruence, *Acta Arith.*, 2007, 128, 303-318.

[13] Shi L. L., Pan H., A q-analogue of Wolstenholme’s harmonic series congruence, *The Amer. Math. Monthly*, 2007, **114**(6), 529-531.

[14] He B., On q-congruences involving harmonic numbers, *Ukr. Math. J*., 2018, **69**(9), 1463-1472.

[15] Wolstenholme J., On certain properties of prime numbers, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1862, **5**, 35–39.

[16] Tauraso R., Some q-analogs of congruences for central binomial sums, *Colloq. Math.*, 2013, **133**, 133–143.

[17] Sofo A, New families of alternating harmonic number sums, *Tbilis Math. J.*, 2015, **8**(2), 195-209.

[18] Gervacio S. V., Congruence in the field of rational numbers, *Trans. Nat. Acad. Science & Tech.*, 1988, **10**, 45-49.

[19] Koparal S., Bazı özel sayı dizilerini ve Binomial katsayıları içeren denklikler, Doktora Tezi, Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2018, 521128.

[20] Elkhiri L., Etute de certaines propriétés des nombres harmoniques généralisés, Doktora Tezi, Ecole Normale Supérieure, Kouba, 2021.

[21] Spieß J., Some identities involving harmonic numbers, *Math. Comp.*, 1990, **55**(192), 839-863.

[22] Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O., *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1991.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

[1] Ömür N., **Gür Z. B.**, On generalized Fibonacci quadratics, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 2020, **26**(2), 198-204.

[2] **Gür Z. B.**, Ömür N., Koparal S., On q-congruences involving q-generalized Catalan numbers, *International GAP Mathematics-Engineering Science and Helath Sciences Congress*, Şanlıurfa, 4-6 Aralık, 2020.

ÖZGEÇMİŞ

Zehra Betül GÜR, ilk ve orta öğrenimini İstanbul'da, lise öğrenimini ise İzmir'de tamamladı. Lisans eğitimini Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünde tamamladıktan sonra yüksek lisans eğitimini Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik (Cebir ve Sayılar Teorisi) Anabilim Dalı'nda almaktadır.